Lösungen der Aufgaben

Lösungen zu Kap. 1

1.1 Wir betrachten eine Multimenge der Form $X = \{a_1, \ldots, a_n, |, \ldots, |\}$, wobei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge der Objekte ist und $|$ eine Trennwand symbolisiert, die den Übergang von der i-ten zur $(i+1)$-ten Box kennzeichnet. Es gibt genau $k-1$ solcher Trennsymbole in X. Jede Verteilung mit den geforderten Eigenschaften kann nun bijektiv einer Permutation von X zugeordnet werden. Folglich gibt es

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = n!\binom{n+k-1}{k-1}$$

mögliche Verteilungen.

1.2 Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{X \subseteq A} |X| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!k}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1} \,.\end{aligned}$$

1.3 **Erste Lösungsmöglichkeit:** Wir nehmen zunächst an, dass die k Personen nicht unterscheidbar sind. Bezeichnen wir eine Person mit dem Buchstaben P und einen leeren Platz mit dem Buchstaben L, so suchen wir jetzt die Anzahl aller zirkulären (auf dem Kreis angeordneten) Wörter mit n Buchstaben, die k-mal den Buchstaben P enthalten, sodass nie zwei P nebeneinander auftreten. Im Unterschied zu üblichen, linear angeordneten Wörtern kann jetzt ein doppeltes P auch auftreten, wenn am Anfang und Ende der Buchstabenfolge ein P steht. Die Anzahl der linearen Wörter, die die obige Bedingung

P. Tittmann, *Einführung in die Kombinatorik*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-58921-2

erfüllen, ist

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

Wenn in einem solchen Wort der erste und letzte Buchstabe ein P ist, so muss der zweite und vorletzte ein L sein. Streichen wir diese vier Buchstaben, so verbleibt ein zulässiges lineares Wort der Länge $n-4$, das $(k-2)$-mal den Buchstaben P enthält. Folglich ist die Gesamtzahl der zirkulären Wörter der Länge n mit k-mal dem Buchstaben P gleich

$$\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2}.$$

Da die k Personen jedoch unterscheidbar sind, erhalten wir insgesamt

$$\left[\binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2}\right] k! = n\frac{(n-k-1)!}{(n-2k)!} = \frac{n}{n-k}(n-k)^{\underline{k}}$$

Anordnungen. Für $n = 12$ und $k = 5$ erhalten wir 4320.
Zweite Lösungsmöglichkeit: Wir zeichnen zunächst einen festen Punkt am Tisch aus. An diese markierte Stelle können wir einen leeren Stuhl stellen oder einer Person platzieren. Stellen wir zunächst einen leeren Stuhl an diese Stelle. Die verbleibenden $n-k-1$ Stühle stellen wir irgendwo am Tisch auf. Damit entstehen insgesamt $n-k$ Lücken zwischen je zwei Stühlen, auf die wir die k Personen verteilen können. Dafür gibt es $(n-k)^{\underline{k}}$ Möglichkeiten. Setzen wir jedoch eine der k Personen an die markierte Stelle des Tisches, und stellen die $n-k$ leeren Stühle dazu, so können sich die verbleibenden $k-1$ Personen auf $n-k-1$ Lücken verteilen. Dafür gibt es $k(n-k-1)^{\underline{k-1}}$ Möglichkeiten. Wir erhalten

$$(n-k)^{\underline{k}} + k(n-k-1)^{\underline{k-1}} = \frac{n}{n-k}(n-k)^{\underline{k}}$$

Anordnungen.

1.4 Hier genügt es, alle Fälle zu betrachten, für die eine gerade Anzahl von Nullen auftreten. Es gibt

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{10}{2k}\binom{2k}{k} = 8953$$

verschiedene Signale.

1.5 Der gesuchte Koeffizient ist (laut Binomialsatz) $45 \cdot 2^8 \cdot 1 - 2^{10} \cdot 6 = 5376$.

1.6 Es gibt genau zwei Typen von Partitionen:

$$\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

1.7 Der gesuchte Koeffizient ist

$$\frac{10!}{2!^2 3!^2} \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^2 = 87.091.200\,.$$

1.8 Wir verwenden vollständige Induktion nach n.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ sind beide Seiten der Gleichung gleich 1.
Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass die gegebene Gleichung für ein festes $m \in \mathbb{N}$ und für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt,

$$(x + y)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k}}. \tag{A.1}$$

Induktionsschritt: Wir zeigen nun, dass aus der Induktionsannahme die Gültigkeit der Gleichung für $m + 1$ folgt. Zunächst folgt aus (A.1)

$$(x + y - 1)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x-1)^{\underline{k}} y^{\underline{m-k}}. \tag{A.2}$$

und

$$(x + y - 1)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} (y-1)^{\underline{m-k}}. \tag{A.3}$$

Die Multiplikation der Gleichung (A.2) mit x und der Gleichung (A.3) mit y sowie anschließende Addition liefert

$$\begin{aligned}
(x + y)^{\underline{m+1}} &= (x + y)(x + y - 1)^{\underline{m}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k+1}} y^{\underline{m-k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k+1}},
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Rekursionsbeziehung für Binomialkoeffizienten nutzten.

1.9 Mit der Rekurrenzgleichung für die Stiriling-Zahlen zweiter Art folgt

$$\sum \left\{ {n \atop k} \right\} k = \sum \left[\left\{ {n+1 \atop k} \right\} - \left\{ {n \atop k-1} \right\} \right] = B(n+1) - B(n) \,.$$

1.10 Wir zeigen, dass $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ für alle $k < \frac{n-1}{2}$ gilt. Dazu multiplizieren wir

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \binom{n}{k+1}$$

mit

$$\frac{(k+1)!(n-k)!}{n!}$$

und erhalten $k+1 < n-k$, was äquivalent zu $k < \frac{n-1}{2}$ ist. Die zweite Richtung folgt auf analoge Weise.

1.11 Da eine solche Zahl keine Null enthält und eindeutig durch die Auswahl der Ziffern bestimmt ist, erhalten wir $\binom{9}{6} = 84$ Zahlen dieser Art.

1.12 Die Auswahl der intakten und defekten Glühbirnen der Stichprobe kann unabhängig voneinander erfolgen. Damit gibt es $\binom{92}{18}\binom{8}{2}$ Stichproben.

1.13 Zuerst überlegen wir uns, dass die Antwort gleich der Anzahl der vierstelligen, durch drei teilbaren Dezimalzahlen ist. Da die erste Stelle ungleich null sein muss, folgt

$$\left\lfloor \frac{10^4}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10^3}{3} \right\rfloor = 3000$$

als Lösung des Problems.

1.14 a) n^n, b) $n!$, c) $\binom{n^2}{n}$ Wenn die n Figuren unterscheidbar sind, so erhalten wir: a) $n!n^n$, b) $(n!)^2$, c) $(n^2)^{\underline{n}}$

1.15 Wir können jede Partition von $\{1,\ldots,n\}$ mit genau k Blöcken aus einer Partition der Menge $\{1,\ldots,n-1\}$ gewinnen, indem wir das Element n in einen vorhandenen Block einfügen. Dafür gibt es $kS_l(n,k)$ Möglichkeiten. Da für die Berechnung von $S_l(n,k)$ jedoch nur Partitionen zählen, die in jedem Block mindestens l Elemente haben, ist nun das Element n in einem Block mit der Mächtigkeit mindestens $l+1$. Um auch die zulässigen Partitionen zu zählen, in denen n in einem Block der Mächtigkeit l liegt, wählen wir zunächst $l-1$ Elemente aus $\{1,\ldots,n-1\}$, die zusammen mit n einen Block bilden und partitionieren dann die Restmenge in $k-1$ Blöcke.

1.16 Ein Wort mit der geforderten Eigenschaft ist eindeutig durch die Auswahl der Buchstaben des Wortes bestimmt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann das Verhältnis dieser Anzahl zur Gesamtzahl der Wörter mit k Buchstaben:

$$\frac{\binom{25+k}{k}}{26^k}$$

1.17 Die erste Beziehung folgt aus

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{m}{k} = m(m-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{m-2}{k-2} = m(m-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{m-2}{k}$$
$$= m(m-1)\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-2}{k} = m(m-1)2^{m-2}\,.$$

Für die zweite Gleichung liefert die Rekursion (1.23) den Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} p((m+1)k,k) &= p((m+1)k-1,k-1) + p(m,k) \\ &= p((m+1)k-1,k-1) + \sum_{i=1}^{m} p(ik-1,k-1) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} p(ik-1,k-1) \end{aligned}$$

1.18 Wir wählen zunächst die leeren Boxen aus und belegen dann alle verbleibenden Boxen. Nach Tab. 1.8 erhalten wir

$$\binom{k}{l}\left\{ {n \atop k-l} \right\}(k-l)!$$

Auswahlen.

1.19 Es gibt zunächst n^p mögliche Zuordnungen der n Farben zu den Seiten des p-Ecks. Da p eine Primzahl ist, erhalten wir jeweils durch Rotation um $\frac{2\pi}{p}$ eine neue Zuordnung. Eine Ausnahme ergibt sich nur, wenn alle Seiten gleichfarbig sind. Damit erhalten wir $\frac{n^p-n}{p}+n$ unterscheidbare Färbungen.

1.20 Die kombinatorische Begründung dieses Satzes erfolgt in Analogie zum Binomialsatz. Das Produkt

$$x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

in der ausmultiplizierten Darstellung entsteht, in dem aus genau k_1 Klammern der Faktor x_1, aus genau k_2 Klammern der Faktor x_2 usw. ausgewählt wird. Die Anzahl dieser Auswahlmöglichkeiten ist aber die kombinatorische Bedeutung des Multinomialkoeffizienten.

1.21 Wenn beide gezogenen Kugeln gelb sind, so sinkt die Anzahl der gelben Kugeln um 2. Sind beide gezogenen Kugeln blau oder verschiedenfarbig, so bleibt die Anzahl der gelben Kugeln erhalten. Die Anzahl der gelben Kugeln kann sich also bei jeder Ziehung nur um 2 oder 0 ändern. Wenn am Anfang n eine gerade Zahl ist, so ist die Anzahl der gelben Kugeln auch dann noch gerade, wenn nur noch zwei Kugeln in der Kiste verbleiben. Andernfalls verbleibt auch stets eine ungerade Anzahl von gelben Kugeln. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich 1, wenn n gerade ist, und sonst 0.

1.22 Es seien a, b, c mit $a < b < c$ die drei gewählten Zahlen. Da $b = \frac{a+c}{2}$ gilt, ist b eindeutig durch die Wahl von a und c bestimmt. Außerdem kann b nur eine ganze Zahl sein, wenn a und c entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Da es genau n gerade und ebenso n ungerade Zahlen in dem Intervall $\{1, \ldots, n\}$ gibt, erhalten wir

$$2\binom{n}{2}$$

Auswahlen.

1.23 Es sei $A = \{1, \ldots, n\}$. Wir definieren für $i = 1, \ldots, n$

$$k_i = \begin{cases} 0 \text{ wenn } i \notin X,\ i \notin Y \\ 1 \text{ wenn } i \notin X,\ i \in Y \\ 2 \text{ wenn } i \in X,\ i \in Y. \end{cases}$$

Dann entspricht jedes Wort $k = k_1 \ldots k_n$ einer gültigen Auswahl. Da diese Zuordnung bijektiv ist, erhalten wir 3^n Auswahlen.

Lösungen zu Kap. 2

2.1 Die erzeugende Funktion für die Augensumme beim n-maligen Würfeln ist

$$(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)^n \ .$$

Wenn eine beliebige Zahl von Würfen erlaubt ist, ergibt sich die gewöhnliche erzeugende Funktion als Summe

$$F(z) = \sum_{n \geq 0}(z + z^2 + \cdots + z^6)^n = \frac{1}{1 - (z + z^2 + \cdots + z^6)} \ .$$

2.2 Die gesuchte Funktion ergibt sich direkt aus der geometrischen Reihe durch Ableitung beziehungsweise durch Substitution von $3z$. Wir erhalten

$$F(z) = \frac{4z(1+z)}{(1-z)^3} - \frac{1}{1-3z} = \frac{7z - 11z^2 - 11z^3 - 1}{(1-z)^3(1-3z)} \ .$$

2.3 Das Multiplizieren mit z^n, Bilden der Summe über alle n und Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$F(z) = \frac{1}{1 - 2z - z^2} \ .$$

2.4 Der Binomialsatz liefert zusammen mit der Konstruktionsvorschrift für die erzeugende Funktion der Folge $\{f_{3n}\}$ die erzeugende Funktion $F(z)$ für die

Folge $\binom{3n}{3k}$. Das Einsetzen von $z = 1$ liefert dann

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k} = \sum_{k=0}^{3n}[3 \mid k]\binom{3n}{k} = \frac{2^{3n} + \left(e^{i\frac{2}{3}\pi}\right)^{3n} + \left(e^{-i\frac{2}{3}\pi}\right)^{3n}}{3}$$
$$= \frac{1}{3}(8^n + 2(-1)^n)\ .$$

2.5 Mit der exponentiellen erzeugenden Funktion

$$F(z) = \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)^n$$

folgt

$$\begin{aligned} F(z) &= \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^n \\ &= \frac{e^{-nz}}{2^n}\left(e^{2z}+1\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{(2k-n)z} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j\geq 0}(2k-n)^j\frac{z^j}{j!}\ . \end{aligned}$$

Die gesuchte Anzahl der Wörter, die alle Buchstaben in gerader Anzahl enthalten, ist damit

$$\begin{aligned} f_j &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2k-n)^j \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{k}(2k-n)^j, \text{ falls } j \text{ gerade ist,} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.6 Das Einsetzen der exponentiellen erzeugenden Funktion $F(z)$ führt zunächst auf die Differentialgleichung

$$F''(z) = 2F'(z) - F(z)\ .$$

Aus den gegebenen Werten erfahren wir weiterhin $F(0) = 0$ und $F'(0) = 1$. Damit erhalten wir die Lösung $F(z) = ze^z$.

2.7 Durch Einführung der Folge

$$F_n(z) = \sum_k f_{n,k} z^k, \; n \geq 0 \, ,$$

von erzeugenden Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} F_0(z) &= 1 \\ F_n(z) &= (1 + 2z) F_{n-1}(z), \; n > 0 \, . \end{aligned}$$

Die Lösung

$$F_n(z) = (1 + 2z)^n$$

liefert schließlich

$$f_{n,k} = \binom{n}{k} 2^k \, .$$

2.8 Mit der Binomialreihe

$$(1 + z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k$$

erhalten wir

$$\sum_{k \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{f_0} F(z) - 1 \right)^k = \sqrt{\frac{1}{f_0} F(z)},$$

was sofort zum Beweis der Aussage führt.

2.9 Der Algorithmus zur Bestimmung der Inversen liefert

$$\frac{(1 + 2x)(1 - 3x)}{3 + x} \, .$$

2.10 Wir bestimmen zunächst die erzeugende Funktion für die Anzahl aller Partitionen von n mit *höchstens* k Teilen. Diese Anzahl ist gleich der Anzahl der Partitionen von n, deren größter Teil gleich k ist (siehe Kap. 1). Die gewöhnliche erzeugende Funktion ist

$$(1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z^2 + z^4 + \cdots) \cdots (1 + z^k + z^{2k} + \cdots) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - z^j} \, .$$

Genau k Teile erhalten wir, wenn höchstens k Teile, jedoch nicht $k - 1$ oder weniger Teile auftreten. Damit folgt

$$F(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - z^j} - \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1 - z^j} = z^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - z^j} \, .$$

2.11 Einen Schritt des Wanderers können wir durch das Polynom $z + z + z^2$ charakterisieren. Das entspricht den Wahlmöglichkeiten für die Richtung (rechts, links, geradeaus). Der Exponent gibt die Anzahl der zurückgelegten Meter an. Wir erhalten die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + (2z + z^2) + (2z + z^2)^2 + (2z + z^2)^3 \cdots \\ &= \frac{1}{1 - 2z - z^2} . \end{aligned}$$

Durch Partialbruchentwicklung folgt für die gesuchte Anzahl

$$f_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\left(\sqrt{2} + 1 \right)^{n+1} + \left(\sqrt{2} - 1 \right)^{n+1} (-1)^n \right] .$$

2.12 Über das Produkt von erzeugenden Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} (1+z)^{r+s} &= \sum_n \binom{r+s}{n} z^n \\ &= (1+z)^r (1+z)^s \\ &= \left(\sum_k \binom{r}{k} z^k \right) \left(\sum_l \binom{s}{l} z^l \right) \\ &= \sum_n \sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} z^n . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert unmittelbar die Vandermonde-Konvolution.

2.13 Mit der exponentiellen erzeugenden Funktion der Folge der Bell-Zahlen erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B(n) \frac{z^n}{n!} &= e^{e^z -} = e^{-1} e^{e^z} \\ &= e^{-1} \sum k \geq 0 \frac{e^{kz}}{k!} \\ &= e^{-1} \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(kz)^n}{k!n!} \\ &= e^{-1} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!} . \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten vor $z^n/n!$ in den Summen liefert die Formel.

2.13 Für $n = 0$ ist die Gleichung offensichtlich wahr. Angenommen, sie gilt auch für eine natürliche Zahl n; dann folgt durch Induktion unter Verwendung der

Rekurrenzgleichung für die Stirling-Zahlen zweiter Art

$$\begin{aligned}
(zD)^{n+1} &= zD \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} z^k D^k \\
&= z \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} [k z^{k-1} D^k + z^k D^{k+1}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[k \left\{ {n \atop k} \right\} z^k D^k + \left\{ {n \atop k} \right\} z^{k+1} D^{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\} z^k D^k + \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n \atop k-1} \right\} z^k D^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\} \right] z^k D^k + z^{n+1} D^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} z^k D^k \,.
\end{aligned}$$

Lösungen zu Kap. 3

3.1 Elementare Umformungen ergeben $f_n - n f_{n-1} = -(f_{n-1} - (n-1) f_{n-2})$. Mit der Substitution $g_n = f_n - n f_{n-1}$ folgt

$$g_n = -g_{n-1}, \quad g_1 = -1 = f_1 - f_0 \,.$$

Die Lösung dieser Gleichung, $g_n = (-1)^n$, liefert $f_n - n f_{n-1} = (-1)^n$, woraus schließlich

$$f_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

für $n \geq 0$ folgt.

3.2 Die Lösung der linearen Rekurrenzgleichung ist $(-3)^n + n + 2^n$.

3.3 Durch Einführung von gewöhnlichen erzeugenden Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_n &= 3^n (2 + (-1)^n) \\
g_n &= 3^n (1 - 2(-1)^n) \\
h_n &= 3^n ((-1)^n - 1) \,.
\end{aligned}$$

3.4 Für ein Brett der Länge 1 oder 2 gibt es jeweils nur eine Möglichkeit. Ein Brett der Länge 3 kann auf genau zwei Arten ausgelegt werden (drei senkrechte oder drei waagerechte Steine nebeneinander). Legen wir bei einem Brett der

Länge $n > 3$ den ersten Stein senkrecht, so verbleiben für das Restfeld T_{n-1} Möglichkeiten. Legen wir jedoch am Anfang drei waagerechte Steine, so verbleiben T_{n-3} Möglichkeiten. Es folgt

$$\begin{aligned}
&T_1 = T_2 = 1\\
&T_3 = 2\\
&T_n = T_{n-3} + T_{n-1},\ n > 3\ .
\end{aligned}$$

3.5 Durch direkte Berechnung der ersten Werte erhält man die Folge

$$1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ldots$$

Da F_n eindeutig durch seine beiden Vorgängerwerte bestimmt ist, muss diese Folge periodisch sein. Wir erhalten

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n \bmod 5 \in \{0,4\},\\ 2 & \text{falls} \quad n \bmod 5 \in \{1,3\},\\ 3 & \text{falls} \quad n \bmod 5 = 2. \end{cases}$$

3.6 1. Wir zeigen die Gleichung durch vollständige Induktion. Man rechnet leicht nach, dass für $n = 1$ korrekt ist. Wir addieren nun auf beiden Seiten der Gleichung

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$$

den Term $F_n F_{n+1}$ und erhalten

$$F_{n+2}^2 = F_n F_{n+1} + (-1)^n$$

und somit

$$F_n F_{n+1} = F_{n+2}^2 + (-1)^{n+1}.$$

2. Diese Beweis folgt für $m = n$ direkt aus dem Beweis der dritten Beziehung.
3. Diese Beziehung ist ebenfalls durch vollständige Induktion zu beweisen. Für $n = 1$ und $n = 2$ folgt sie durch Nachrechnen. Für den Induktionsschritt genügt es, die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
F_{n+m} &= F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1} \text{ und}\\
F_{n+m+1} &= F_{n-1}F_{m+1} + F_n F_{m+2}
\end{aligned}$$

zu addieren.

3.7 Die allgemeinen Lösungen lauten:
(a) $f_n = C_1 + C_2 2^n + C_3 3^n + n$,
(b) $f_n = C_1(-1)^n + C_2(-3)^n + \frac{5}{8}$

3.8 Mit der Lösung der homogenen Gleichung, $f_n = A2^n + B4^n$, erhalten wir die spezielle Lösung

$$4^n + 3 \cdot 2^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9}\,.$$

3.9 Die erzeugende Funktion der Catalan-Zahlen lautet

$$F(z) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - z}\,.$$

3.10 Es sei P_n für jede natürliche Zahl n die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$, die ausschließlich Zyklen der Längen 1 oder 2 besitzen. Jede Permutation aus P_n kann entweder aus einer Permutation aus P_{n-1} durch Ergänzen des Einerzyklus (n) oder durch Bilden eines Zyklus der Länge 2, den n zusammen mit einem weiteren Element (das auf $n-1$ Arten gewählt werden kann) gebildet werden. Mit $f_n = |P_n|$ erhalten wir damit die gegebene Rekurrenzgleichung.
Die Rekurrenzgleichung zusammen mit ihren Anfangswerten ist äquivalent zur Differentialgleichung

$$D^2 f - (1+z)Df + f$$

mit den Anfangswerten $f(0) = 1$ und $Df(0) = 1$ mit der eindeutigen Lösung

$$f(z) = e^{z + \frac{1}{2}z^2}.$$

Es gibt einen einfacheren Weg zur Lösung aus der oben gegebenen kombinatorischen Interpretation der Zahlenfolge f_n. Es gibt

$$\binom{n}{2k}\frac{(2k)!}{2^k k!}$$

Möglichkeiten, um k Paare für Zweizyklen auszuwählen. Damit folgt, dass die exponentielle erzeugende Funktion für die Anzahl der Permutationen aus S_n mit genau k Zweizyklen durch

$$F_k = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n \geq 0} \binom{n}{2k} \frac{z^n}{n!} = \frac{(2k)!}{2^k k!} z^{2k} e^z$$

ist. Damit erhalten wir die gesuchte exponentielle erzeugende Funktion als

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(2k)!}{2^k k!} e^z \frac{z^{2k}}{(2k)!} = e^z \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left(\frac{z^2}{2}\right)^k = e^{z + \frac{1}{2}z^2}.$$

3.11 Multiplikation mit z^n und Bilden der Summe über alle n liefert

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} f_{n+1}z^n &= \sum_{n\geq 0}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1} f_k\right) z^n\\ \frac{1}{z}[F(z)-1] &= \sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k - f_n\right) z^n,\end{aligned}$$

wobei

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$$

die gewöhnliche erzeugende Funktion für die Folge $\{f_n\}$ ist. Es folgt

$$F(z)-1 = \frac{z}{1-z} + \frac{z}{1-z}F(z) - z\,F(z)$$

und schließlich

$$F(z) = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

Das ist die erzeugende Funktion der Folge der Fibonacci-Zahlen.

3.12 Die gesuchte Rekurrenzgleichung ist

$$\begin{aligned}f_{n,k} &= 2f_{n-1,k-1} + kf_{n-1,k}\\ f_{n,k} &= 0,\ k > n\\ f_{n,1} &= 2,\ n > 0\,.\end{aligned}$$

Lösungen zu Kap. 4

4.1 Die Summen sind leicht mit den vorgestellten Methoden bestimmbar. Für die letzte Summe sollte zunächst $\Delta \arctan n$ unter Anwendung eines Additionstheorems für die arctan-Funktion berechnet werden.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+2)(k-1)^2 &= 2+\frac{1}{2}n-\frac{5}{4}n^2+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^4\\ \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+3)} &= \frac{1}{4}\\ \sum_{k=1}^{n} k(n-k) &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k (n-k)^{\underline{2}} = \frac{1}{4}(3^{n+1} - 3 - 6n^2)$$

$$\sum_{n\geq 1} \arctan \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{\pi}{4}$$

4.2 Aus dem Ansatz

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-kz} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{1-kz} \tag{*}$$

folgt durch Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq m\\ j\neq k}} \left(1-\frac{j}{k}\right)} = \frac{k^{m-1}}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq m\\ j\neq k}} (k-j)} \\ &= \frac{k^{m-1}(-1)^{m-k}}{(k-1)!(m-k)!} = \frac{1}{(m-1)!} k^{m-1}(-1)^{m-k} \binom{m-1}{k-1} . \end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Koeffizienten und $z = 0$ in (*), die Multiplikation mit $(m-1)!$ und das Verschieben des Summationsindex liefern die angegebene Summenformel.

4.3 Aus der Bestimmung des Differenzenoperators für die Fakultät erhalten wir die Lösung $(n+1)! - 1$.

4.4 Das Einsetzen der Definition der Zetafunktion und das Vertauschen der Summationsreihenfolge liefern das Ergebnis

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 2}(\zeta(n)-1) &= \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i^n} - 1\right) = \sum_{n\geq 2}\sum_{i\geq 2}\frac{1}{i^n} = \sum_{i\geq 2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{i^n} \\ &= \sum_{i\geq 2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{i}} - 1 - \frac{1}{i}\right) = \sum_{i\geq 2}\frac{1}{i(i-1)} \\ &= \sum_{i\geq 0}\frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i\geq 0} i^{\underline{-2}} = -i^{\underline{-1}}\Big|_0^\infty = 1 . \end{aligned}$$

4.5 Aus

$$f_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

folgt

$$\Delta f_n = \frac{-4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

und somit

$$\sum_{n\geq 0} \frac{-4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = -\frac{1}{4}\; \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{12} .$$

4.6 Die Entwicklung der Summe liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!k^2}{(n-k)!k!}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!k}{(n-k)!(k-1)!}\\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}k\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(k+1)\\
&= n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!k}{k!(n-1-k)!} + n\sum_{k0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\\
&= n(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1} + n\,2^{n-1}\\
&= n(n-1)2^{n-2} + n\,2^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

4.7 Wir faktorisieren das Polynom $k^2 - 3k + 2$ und erhalten

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n}(k-1)(k-2)3^k = \sum_{k=-1}^{n-1}k(k-1)3^{k+1}\\
&= 3\sum_{k=-1}^{n-1}3^k k^{\underline{2}} = 3\sum_{k=-1}^{n-1}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\,\frac{2^{\underline{j}}k^{\underline{2-j}}3^{k+j}}{2^{j+1}}\\
&= 3\left(\frac{1}{2}k^{\underline{2}}3^k - \frac{1}{2}k3^{k+1} + \frac{1}{4}3^{k+2}\bigg|_{-1}^{n}\right) = \left(\frac{n^2}{2} - 2n + \frac{9}{4}\right)3^{n+1} - \frac{19}{4}\,.
\end{aligned}$$

4.8 Durch Aufspalten in zwei getrennte Brüche kann dieses Problem schnell gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1+k}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}k^{\underline{-3}} + \sum_{k=1}^{n}k^{\underline{-2}}\\
&= \frac{n(5+3n)}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Lösungen zu Kap. 5

5.1 $n - c$

5.2 Es gibt genau

$$\sum_{k=0}^{n-2}(n-2)^{\underline{k}} = \int_1^\infty x^n e^{1-x}\,dx$$

Wege zwischen zwei Knoten des K_n.

5.3 Abb. A.1 zeigt die Lösung.

5.4 23

5.5 Dieser Beweis verwendet ein Symmetrieargument. Im vollständigen Graphen K_n kommt jede Kante in gleich vielen Spannbäumen vor. Ein Spannbaum enthält $n-1$ Kanten; der K_n besitzt $\binom{n}{2}$ Kanten. Nach dem Satz von Cayley

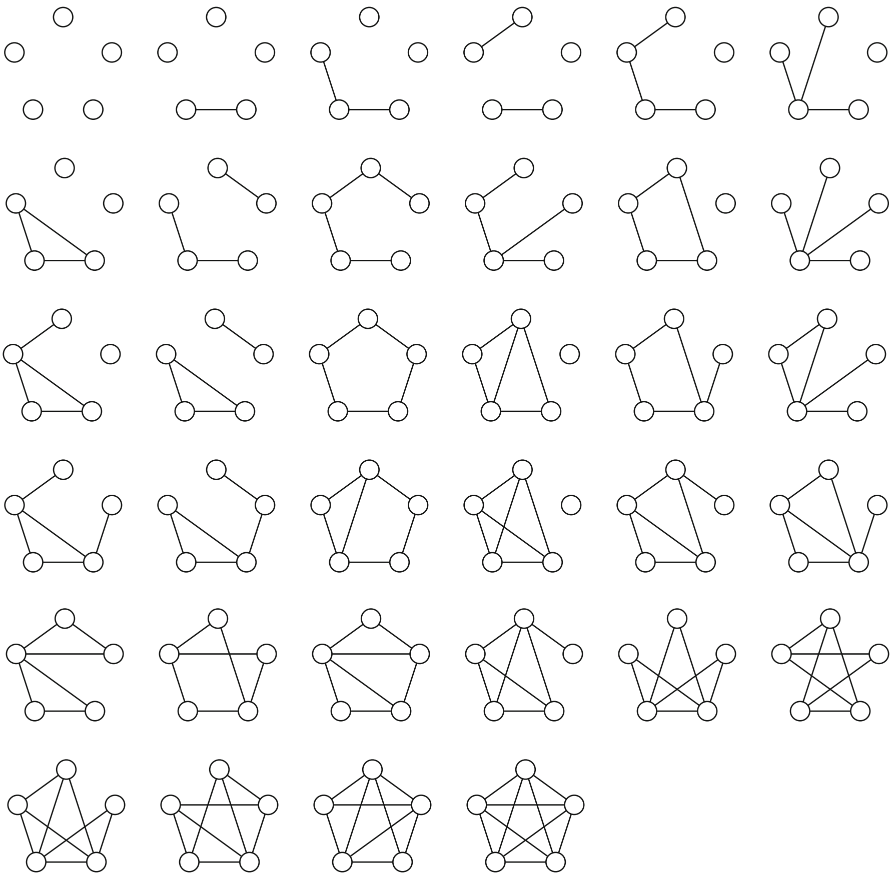

Abb. A.1 Nichtisomorphe Graphen mit fünf Knoten besitzt der K_n genau n^{n-2} Spannbäume. Folglich gibt es

$$n^{n-2}\frac{n-1}{\binom{n}{2}} = 2n^{n-3}$$

Spannbäume im K_n, die eine bestimmte Kante e enthalten. Somit verbleiben

$$n^{n-2} - 2n^{n-3}$$

Spannbäume in $K_n - e$.

5.6 Hier gibt es zwei mögliche Überlegungen – ein kombinatorisches Argument oder der Matrix-Gerüst-Satz von Kirchhoff. Beide liefern das Ergebnis $t(H) = 2^{n-1}t$.

5.7 Es sei $e = \{u, v\}$ die Kante, die im Durchschnitt $K_i \cap K_j$ der beiden vollständigen Graphen liegt. Es gilt

$$t(K_i \cup K_j) = t(K_i)t(K_j/e) + t(K_j - e)t(K_i/e) \ ,$$

was aus der Dekompositionsformel (5.1) für die Anzahl der Spannbäume folgt. Aus Aufgabe 5.5 erhalten wir $t(K_n/e) = 2n^{n-3}$, womit schließlich

$$t(K_i \cup K_j) = 2i^{i-2}j^{j-3} + 2j^{j-2}i^{i-3} - 4i^{i-3}j^{j-3}$$

folgt.

5.8 (Beweisidee) Sei X eine maximale unabhängige Menge von G. Gilt $v \notin X$, so ist $\alpha(G) = \alpha(G - v)$. Falls $v \in X$ gilt, liegt kein Knoten aus $N(v)$ in X. Folglich gilt dann $|X| - 1 = \alpha(G - N[v])$.

5.9 Eine unabhängige Menge eines Weges P_n lässt sich als ein Wort der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$ kodieren, wobei die 1 jeweils für einen Knoten steht, der zur unabhängigen Menge gehört. Damit ergibt sich die Lösung direkt aus Beispiel 1.7:

$$\binom{n-k+1}{k}$$

5.10 Das Polynom $I(G - e, x)$ zählt auch solche Knotenmengen, die aus einer unabhängigen Knotenmenge von G durch Hinzufügen der beiden Endknoten der Kante e entstehen. Diese Mengen kommen auch in der erzeugenden Funktion $I(G/e, x)$ vor, wobei hier die beiden Knoten nur den Beitrag x, statt x^2 liefern, was aber durch Multiplikation mit x korrigiert werden kann. Jedoch zählt $xI(G/e, x)$ auch Knotenmengen, die keinen Endknoten von e enthalten. Das sind aber genau die Knotenmengen, die mit dem Polynom $xI(G \dagger e, x)$ gezählt werden.

5.11 In der Summe

$$\sum_{v \in V} I(G - v, x)$$

wird eine unabhängige Knotenmenge der Mächtigkeit k von G $n-k$-mal gezählt. Folglich gilt

$$t^{n-1}\sum_{v\in V} I\left(G-v,\frac{1}{t}\right)=\sum_{k=0}^{n} i_k(G)(n-k)t^{n-1-k}\ .$$

Durch Integration folgt die gegebene Gleichung.

5.12 Das Polynom $x\frac{d}{dx}I(G,x)$ ist die gewöhnliche erzeugende Funktion für die Anzahl der Möglichkeiten, eine unabhängige Knotenmenge X von G zu wählen und anschließend einen der $|X|$ Knoten zu markieren. Kehren wir diesen Prozess um und markieren erst einen Knoten und wählen dann weitere Knoten von G, um eine unabhängige Knotenmenge zu konstruieren, so erhalten wir die mit x multiplizierte rechte Seite der Gleichung.

5.13 Die Lösung ist

$$M(K_{n,n},x)=\sum\binom{n}{k}^2 x^k\ .$$

Diese Summe lässt sich auch durch ein Legendre-Polynom explizit darstellen.

5.14 Die Gleichung lautet

$$M(C_n,x)=M(C_{n-1},x)+xM(C_{n-2},x),\ \ n\geq 2\ .$$

Zusammen mit den Anfangswerten $M(C_0,x)=1$ und $M(C_1,x)=1$ bestimmt sie das Matchingpolynom eines Kreises C_n eindeutig.

5.15 Es seien $e=\{u,v\}$, $f=\{x,u\}$ und $g=\{v,y\}$ Kanten von G. Dann zählt ein Polynom, das der Rekurrenzgleichung

$$\hat{M}(G,x)=\hat{M}(G-e,x)+x\hat{M}(G-N[e],x)\ ,$$

genügt, auch Matchings, die f und g enthalten, welche jedoch keine induzierten Matchings von G sind. Vielleicht findet der Leser einen Weg, diesen Mangel der Rekurrenzgleichung zu beheben?

5.16 Für jeden vom Nullgraph verschiedenen Graphen G ist das Absolutglied von $P(G,x)$ ungleich null. (Andernfalls wäre G mit null Farben zulässig färbbar.) Wenn G zusammenhängend ist, so folgt aus der Dekompositionsgleichung, $P(G,x)=P(G-e,x)-P(G/e,x)$, dass der Koeffizient vor x ungleich null ist. Um dies einzusehen, wenden wir diese Beziehung so lange an, bis alle verbleibenden Graphen leer sind. Ein solcher Graph mit k Knoten besitzt das chromatische Polynom x^k. Insbesondere haben alle Graphen mit genau einem Knoten das chromatische Polynom $(-1)^{n-1}x$, da sie durch genau $n-1$ Kantenkontraktionen entstehen. Die Aussage folgt nun daraus, dass das chromatische Polynom eines Graphen das Produkt der chromatischen Polynome seiner Komponenten ist.

5.17 Die natürlichen Zahlen $0,1,\ldots,\chi(G)-1$ sind Nullstellen des chromatischen Polynoms $P(G,x)$. Die Aussage folgt nun einfach durch Darstellung des chromatischen Polynoms als Produkt von Linearfaktoren der Form $x - x_i$, wobei die x_i die Nullstellen bezeichnen.

5.18 Wir färben zunächst den Graphen G zulässig mit x Farben. Dafür gibt es $P(G, x)$ Möglichkeiten. Jede solche Färbung färbt alle Knoten des K_r unterschiedlich. Das trifft auch für jede zulässige Färbung von H mit x Farben zu. Aus Symmetriegründen tritt unter den $P(H, x)$ zulässigen Färbungen jede Verteilung der Farben innerhalb der Knoten des K_r gleich häufig auf. Es gibt $P(K_r, x) = x^{\underline{r}}$ Verteilungen der Farben innerhalb des K_r, wovon jedoch nur genau eine zu der bereits vorher gewählten Färbung von G passt.

Lösungen zu Kap. 6

6.1 Die gesuchte Ordnung ist ein Verband mit dem Hasse-Diagramm, das in Abb. A.2 dargestellt ist. Die Whitney-Zahlen zweiter Art sind die Anzahlen der Permutationen von $\mathbb{N}_n$ mit genau k Inversionen.

6.2 Durch explizite Auflistung der Hasse-Diagramme erhält man 16 nichtisomorphe Ordnungen, von denen genau zwei Verbände sind. Geeignete Permutationen der Elemente führen auf insgesamt 225 Ordnungen und 36 Verbände.

6.3 Für eine Zahl n mit der Primfaktordarstellung

$$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{k_i}$$

gibt es

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{s} k_i\right)!}{\prod_{i=1}^{s} k_i!}$$

nichtunterteilbare Ketten.

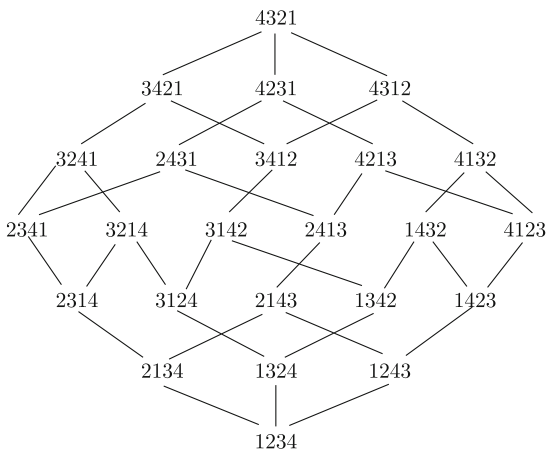

Abb. A.2 Verband der Permutationen aus S_4

6.4 Wir wählen die Indizierung der Elemente von P so, dass aus $x_i \leq x_j$ stets auch $i \leq j$ folgt. In P existiert mindestens ein Element z mit $x \not\leq z$ für alle $x \in P \setminus \{z\}$. Andernfalls wäre P nicht endlich. Wir setzen $x_1 = z$. Die verbleibende Menge $P \setminus \{z\}$ enthält jedoch wieder ein Element x_2 mit dieser Eigenschaft, sodass sich dieser Prozess fortsetzen lässt. Dann muss aber aus $x_i \leq x_j$ tatsächlich auch $i \leq j$ folgen. Damit hat auch $i > j$ stets $x_i \not\leq x_j$ zur Folge. In diesem Falle gilt aber $z_{ij} = 0$. Die Matrix Z ist damit eine untere Dreiecksmatrix.

6.5 Wir erhalten

$$\begin{aligned} h(1/2/3) &= 1 \\ h(12/3) = h(13/2) = h(23/1) &= 1 - x \\ h(123) &= 1 - 3x^2 + 2x^3 \; . \end{aligned}$$

6.6 Es sei M eine höchstens abzählbare Menge. Die Funktionen f und g mögen jeder Teilmenge von M auf folgende Weise eine (komplexe) Zahl zuordnen: Für jede endliche Teilmenge $A \subseteq M$ mit $|A| = k$ gelte

$$g(A) = g\left(|A|\right) = g_k \; .$$

Weiterhin gelte für jede Menge $B \subseteq M$ mit $|B| = n$ stets

$$f(B) = f(|B|) = f_n = \sum_{A \subseteq B} g(A) = \sum_k \binom{n}{k} g_k \; .$$

Die Beziehung

$$g_n = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$

folgt durch Möbius-Inversion von unten im Booleschen Verband.

6.7 Mit der Möbius-Inversion im Teilerverband folgt:

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) m^k \; .$$

6.8 Der Produktsatz liefert

$$\mu((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{cases} (-1)^{(y_1+y_2+y_3)-(x_1+x_2+x_3)}, & \\ \qquad\qquad \text{falls } x_i \leq y_i = x_i + 1 & \\ 0, \text{ sonst.} & \end{cases}$$

6.9 Die Gesamtzahl aller Wörter ist 26^k. Es gibt genau 25^k Wörter, denen wenigstens ein Buchstabe der Buchstaben a, b, c fehlt. Wenn gleichzeitig zwei Buchstaben nicht verwendet werden dürfen, so verbleiben 24^k Wörter. Schließlich gibt es 23^k Wörter mit k Buchstaben, denen alle drei Buchstaben a, b, c fehlen. Das Inklusions-Exklusions-Prinzip liefert die Anzahl der Wörter, die alle drei Buchstaben a, b, c enthalten:

$$26^k - 3 \cdot 25^k + 3 \cdot 24^k - 23^k$$

6.10 Mindestens 4 und höchstens 18 Personen sprechen alle drei Sprachen.

6.11 Das Inklusions-Exklusions-Prinzip liefert

$$100.000 - 316 - 46 - 31 + 6 + 31 + 2 - 2 = 99.644\ .$$

6.12 Die Inklusion-Exklusion liefert 47.760 Permutationen mit der geforderten Eigenschaft:

$$\frac{10!}{24} - \frac{9!}{(2!)^2} - \frac{9!}{3!} + 8! + \frac{8!}{4} + \frac{8!}{6} - 2 \cdot 7! + 6!$$

6.13 Es gibt 95.449.640 Permutationen mit genau vier Fixpunkten.

Lösungen zu Kap. 8

8.1 Die Untersuchung der Zyklenstruktur der $n-2$ Zyklen liefert

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}\ .$$

8.2 Beide Summen lassen sich direkt aus (8.4) gewinnen:

$$\sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{\overline{n}} = \delta_{n0} - \delta_{n1}$$

$$\sum_k 2^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 2^{\overline{n}} = (n+1)!$$

8.3 Aus (8.4) erhalten wir

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\ .$$

Das Entwickeln der linken Seite nach Potenzen von x liefert

$$x^n + \sum_{i=1}^{n-1} i\, x^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} i\ j\ x^{n-2} + \cdots + \prod_{i=1}^{n-1} i\ x = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\ .$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\substack{A \subseteq \mathbb{N}_{n-1} \\ |A| = n-k}} \prod_{i \in A} i \ .$$

8.4 Wenn $aH \cap bH = \emptyset$ gilt, ist nichts zu beweisen. Also sei $aH \cap bH \neq \emptyset$ und $x \in aH \cap bH$. Dann gibt es $s, t \in H$ mit $x = as = bt$, woraus $a = bts^{-1}$ folgt. Sei nun $y \in H$ mit $y \neq x$. Dann existiert ein $z \in H$ mit $y = az = bts^{-1}z$. Da $ts^{-1}z \in H$ gilt, ergibt sich auch $y \in bH$ und folglich $aH \subseteq bH$. Durch Vertauschen der Rollen von aH und bH finden wir analog $bH \subseteq aH$ und damit $aH = bH$. Dass $|aH| = |H|$ für alle $a \in H$ gilt, ist eine unmittelbare Folgerung aus der eindeutigen Lösbarkeit von linearen Gleichungen in einer Gruppe.

8.5 Der gesuchte Zyklenzeiger lautet

$$Z(G) = \frac{1}{8}\left(x_1^8 + 4x_1^2x_2^3 + x_2^4 + 2x_4^2\right) \ .$$

Die Anzahl der Färbungen von n Knoten mit j Farben, sodass jede Farbe verwendet wird, ist $\left\{ {n \atop j} \right\} j\,!$. Das Ersetzen von t^n in dem Polynom

$$Z(G;\, t, \ldots, t) = \frac{1}{8}t^8 + \frac{1}{2}t^5 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{4}t^2 \tag{z}$$

durch die erzeugende Funktion

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} j\,! z^j$$

liefert

$$z + 49z^2 + 804z^3 + 5226z^4 + 15.810z^5 + 23.940z^6 + 17.640z^7 + 5040z^8 \ .$$

Der Koeffizient vor z^k ist die gesuchte Anzahl. Das Ergebnis lässt sich über das Inklusions-Exklusions-Prinzip auch direkt aus (z) erhalten.

Die zweite Frage löst man einfacher ohne Verwendung des Zyklenzeigers. Die Symmetriegruppe von G enthält genau 8 Permutationen. Folglich hat eine Färbung mit 8 verschiedenen Farben einen Orbit der Länge 8. Beachtet man die Anzahl der Auswahlen von 8 aus k Farben, so ist

$$\binom{k}{8} \frac{8!}{8} = \frac{1}{8} k^{\underline{8}}$$

das gesuchte Resultat.

8.6 Der Zyklenzeiger der symmetrischen Gruppe S_n enthält in der angegebenen Form die erzeugende Funktion $\frac{x^j}{1-x^j}$ für die Folge $(j, 2j, 3j, \ldots)$. Jeder Zyklus einer Permutation wird damit mit einem Vielfachen seiner Zyklenlänge bewertet. Wir erhalten damit eine Abbildung $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}^+$, das heißt eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m,\ x_i > 0,\ m \geq n$$

oder

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m - n,\ x_i \geq 0,\ m \geq n\ .$$

Infolge der Symmetrie unterscheiden sich Lösungen nur, wenn sie eine unterschiedliche Partition von m bilden. Das Produkt auf der rechten Seite der gegebenen Beziehung ist aber gerade die erzeugende Funktion für die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl.

8.7 Die Beziehung folgt durch direktes Nachrechnen aus der Gleichung (8.23) durch Einsetzen der Eulerschen φ-Funktion für eine Primzahlpotenz.

8.8 Der Zyklenzeiger lautet

$$Z(C_p \wr C_p) = \frac{1}{p^{p+1}}\left(x_1^p + (p-1)x_p\right)^p + \frac{p-1}{p^2}\left(x_p^p + (p-1)x_{p^2}\right)\ .$$

8.9 Aus dem Zyklenzeiger

$$\frac{1}{8}\left(x_1^{16} + 2x_4^4 + 3x_2^8 + 2x_1^4x_2^6\right)$$

erhalten wir

$$\frac{1}{8}(2^{16} + 2\cdot 2^4 + 3\cdot 2^8 + 2\cdot 2^{10}) = 8548$$

verschiedene Färbungen.

8.10 Wir können die Symmetriegruppe eines Würfelsets als Kranzprodukt $G = S_3 \wr D_w^*$ beschreiben, wobei D_W^* die Drehgruppe eines Würfels als Permutationsgruppe der Seitenflächen ist. Der Zyklenzeiger dieser Gruppe ist

$$\begin{aligned} Z(G; t, \ldots, t) = {} & \frac{1}{82.944}t^{18} + \frac{1}{9216}t^{16} + \frac{1}{2304}t^{15} + \frac{17}{27.648}t^{14} + \frac{1}{384}t^{13} \\ & + \frac{25}{3072}t^{12} + \frac{89}{3456}t^{10} + \frac{1}{16}t^9 + \frac{9}{128}t^8 + \frac{13}{144}t^7 + \frac{121}{648}t^6 \\ & + \frac{1}{6}t^5 + \frac{7}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{9}t^2\ . \end{aligned}$$

Setzen wir $t = 6$, so erhalten wir das Ergebnis 1.840.811.476. Das ist auch $\binom{2228}{3}$, wobei $Z(D_w^*, 6, \ldots, 6) = 2226$ gilt. Wie ist das zu erklären?

8.11 Der Zyklenzeiger der Drehgruppe des Tetraeders ist

$$Z(G) = \frac{1}{12}\left(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\right)\ .$$

8.12 Der Zyklenzeiger lautet

$$Z(G_W) = \frac{1}{48}\left(x_1^{12} + 3x_1^4x_2^4 + 12x_1^2x_2^5 + 4x_2^6 + 8x_3^4 + 12x_4^3 + 8x_6^2\right) .$$

8.13 Nein, denn der schlichte Graph muss regulär sein, da jeder Knoten mit jedem anderen permutiert werden kann. Der leere Graph und der vollständige Graph haben S_4 als Automorphismengruppe. Der Kreis C_4 und sein Komplement, ein perfektes Matching, haben jeweils die Symmetriegruppe des Quadrates als Automorphismengruppe. Das ist aber eine Gruppe der Ordnung 8. Damit sind dann bereits alle regulären Graphen mit vier Knoten erschöpft. (Es gibt jedoch einen schlichten Graphen, der eine zur Kleinschen Vierergruppe isomorphe Automorphismengruppe besitzt.)

8.14 Die gesuchte Symmetriegruppe G ist das Kranzprodukt aus der Diedergruppe D_6 und der zyklischen Gruppe C_5. Für den Zyklenzeiger folgt $Z(G) = Z(D_6 \wr C_5)$. Die *Diedergruppe* D_6 ist die Symmetriegruppe eines regulären Sechsecks. Diese enthält als Untergruppe C_6. Dazu kommen 6 Spiegelungen, die einen Beitrag von $3x_1^2x_2^2 + 3x_2^3$ zum Zyklenzeiger liefern.

Lösungen zu Kap. 9

9.1 Hier können wir ungeordnete Auswahlen mit Wiederholung nutzen, da ein Knotenpaar mehrmals für das Einfügen einer Kante gewählt werden kann. Wir erhalten

$$\binom{\binom{n}{2} + m - 1}{m}$$

Graphen.

9.2 Es gibt $n!/|\mathrm{Aut}(G)|$ zu G isomorphe Graphen.

9.3 Es sei $\hat{P}(z)$ die gewöhnliche erzeugende Funktion für die Anzahl der symmetrischen planaren Bäume und $P(z)$ die gewöhnliche erzeugende Funktion für die Anzahl aller planaren Bäume. Jeder symmetrische planare Baum ist entweder eine Wurzel oder eine Wurzel mit einem symmetrischen planaren Baum. Zusätzlich können an der Wurzel beliebig viele Paare gleichartiger planarer Bäume hängen. Die Funktion $P(z)$ kennen wir schon:

$$P(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}$$

Folglich ist

$$P(z^2) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2}$$

die gewöhnliche erzeugende Funktion für Paare identischer planarer Bäume. Es folgt

$$\hat{P}(z) = z(1 + \hat{P}(z))\frac{1}{1 - P(z^2)}$$

mit der Lösung

$$\hat{P}(z) = \frac{2z}{1 - 2z + \sqrt{1 - 4z^2}} .$$

Die gesuchten Anzahlen sind die Koeffizienten der Reihenentwicklung dieser Funktion :

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

9.4 Es gilt

$$Z\left(S_4^{(3)}\right) = Z(S_4) \text{ und } Z\left(S_5^{(3)}\right) = Z\left(S_5^{(2)}\right) .$$

9.5 Die erzeugende Funktion ist

$$(1 + x + \cdots + x^k)^{\binom{n-k}{2}} .$$

9.6 Durch Inklusion-Exklusion ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}} .$$

9.7 Die exponentielle erzeugende Funktion für die Mengen gerader Mächtigkeit ist

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z .$$

Da die Mengen gerader Mächtigkeit die „Bausteine“ der gesuchten Partitionen sind, folgt mit der Exponentialformel

$$F(z) = e^{\cosh z - 1}$$

als gesuchte erzeugende Funktion.

9.8 Es gibt je einen Baum mit einem oder zwei Knoten und genau 3 Bäume mit 3 Knoten. Damit ist die exponentielle erzeugende Funktion für die Komponenten des Waldes

$$C(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2} .$$

Mit der Exponentialformel erhalten wir

$$W(z) = e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2}}$$

als erzeugende Funktion für die Wälder.

Lösungen zu Kap. 10

10.1 Abb. A.3 zeigt den Automaten. Die erzeugende Funktion ist

$$F(z) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - z^2}\ .$$

Das ist die gewöhnliche erzeugende Funktion für die Folge der Catalan-Zahlen.

10.2 Die gesuchte erzeugende Funktion ist

$$F(z) = \frac{1 + z + z^2}{1 - 2z - 2z^2}\ .$$

10.3 Für dieses Problem ist es sinnvoll, das Alphabet $A = \{o, s, u\}$ für Schritte nach oben (o), zur Seite (s) oder nach unten (u) zu verwenden. Ein Seitwärtsschritt ist hierbei eindeutig bestimmt. Weiterhin ist es vorteilhaft, die möglichen Wege in Folgen von „Elementarformen" wie Winkel, bestehend aus einer Folge von Schritten nach oben und einem Seitwärtsschritt, zu zerlegen. Ein Gitterweg lässt sich dann in der Form

$$(\epsilon + s)(o^+ s)^* o^* (\epsilon + o\sqcap) + \sqcap$$

beschreiben. Hierbei ist $\sqcap$ ein u-förmiger Weg, bestehend aus i Aufwärtsschritten, einem Seitwärtsschritt und i Abwärtsschritten mit $i \geq 1$. Die erzeugende Funktion für die u-förmigen Wege ist folglich

$$F_\sqcap(z) = \frac{z^3}{1 - z^2}\ .$$

Wir erhalten die gesuchte erzeugende Funktion

$$F(z) = \frac{1 - z - z^2}{(1 - z^2)(1 - z - z^2)}\ .$$

10.4 Abb. A.4 zeigt den Automaten. Dieser liefert die erzeugende Funktion

$$F(z) = \frac{1 - 3z + z^2}{(1 - z)(1 - 3z)}\ .$$

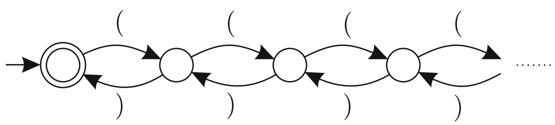

Abb. A.3 Automat für Klammersequenzen

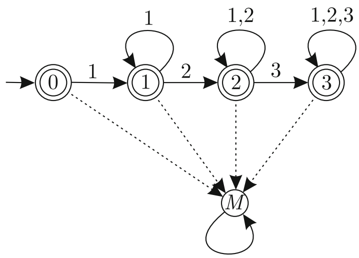

Abb. A.4 Ein Automat für Mengenpartitionen mit drei Blöcken

10.5 Um zu sichern, dass die Beschreibung eindeutig wird, wählen wir zunächst einen Buchstaben $a_i \in A$. Dann konstruieren wir ein Anfangswort aus $(A \setminus \{a_i\})^*$, verketten dieses mit a_i^2 $(= a_i a_i)$ und schließlich mit einem beliebigen Wort aus A^*. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{n} (A \setminus \{a_i\})^* a_i^2 A^*$$

die gesuchte Beschreibung. Die gewöhnliche erzeugende Funktion ist nun die Differenz aus der erzeugenden Funktion für A^* und der erzeugenden Funktion für die oben beschriebene Sprache:

$$F(z) = \frac{1}{1-nz} - \frac{1}{1-(n-1)z} z^2 \frac{1}{1-nz} ,$$

was sich zu

$$F(z) = \frac{1+z}{1-(n-1)z}$$

zusammenfassen lässt.

10.6 Aus dem entsprechenden Automaten (mit sechs Zuständen) erhält man die gewöhnliche erzeugende Funktion

$$F(z) = \frac{1+z}{1-3z} .$$

Die Entwicklung in einer Potenzreihe liefert die Antwort

$$f_n = 4 \cdot 3^{n-1}, \qquad n \geq 1 .$$

Symbolverzeichnis

$B(n)$	Bell-Zahlen
B_n	Bernoulli-Zahlen
$\mathbb{B}_n$	Boolescher Verband
C_n	Kreis, zyklische Gruppe, Catalan-Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
D	Differentialoperator
H_n	harmonische Zahlen
K_n	vollständiger Graph mit n Knoten
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0
$\mathbb{N}^+$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0
$\mathbb{N}_n$	$\{1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbb{R}$	Menge (Körper) der reellen Zahlen
S_n	symmetrische Gruppe der Ordnung n
$Z(G; \ldots)$	Zyklenzeiger der Gruppe G
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\deg v$	Grad des Knotens v
$\Gamma(z)$	Gammafunktion
δ_{kn}	Kronecker-Delta
Δ	Differenzenoperator
Δ^{-1}	Summenoperator
ζ	Riemannsche Zetafunktion
μ	Möbiusfunktion
$\varphi(d)$	Eulersche Phi-Funktion
$\Pi(V)$	Partitionsverband der Menge V
$\left[{n \atop k}\right]$	Stirling-Zahlen erster Art
$\left\{{n \atop k}\right\}$	Stirling-Zahlen zweiter Art
$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$	Multinomialkoeffizient
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl $\leq x$
$x^{\underline{k}}$	fallende Faktorielle
$x^{\overline{k}}$	steigende Faktorielle
$[z^n]F(z)$	Koeffizient vor z^n in $F(z)$
$k \mid n$	k ist ein Teiler von n
$\lambda \vdash n$	λ ist eine Partition von n

Literatur

Aigner, M.: Kombinatorik I. Grundlagen der Zähltheorie. Springer, Berlin (1975)
Aigner, M.: A Course in Enumeration. Springer, Berlin (2007)
Aigner, M., Ziegler, G.M.: Das Buch der Beweise, 3. Aufl. Springer, Berlin (2010)
Andrews, G.E.: The Theory of Partitions. Cambridge University Press, Cambridge (1976)
Bergeron, F., Labelle, G., Leroux, P.: Combinatorial Species and Tree-like Structures. Cambridge University Press, Cambridge (1998)
Berge, C.: Graphs. North-Holland, Amsterdam (1985)
Berstel, J., Reutenauer, C.: Rational Series and Their Languages. Springer, Berlin (1988)
Biggs, N.: Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, Cambridge (1974)
Birkhoff, G.D.: A Determinant Formula for the Number of Ways of Coloring a Map. Ann. Math. **14**, 42–46 (1912)
Bollobás, B.: Modern Graph Theory. Springer, New York (1998)
Bondy, J.A., Murty, U.S.R.: Graph Theory. Springer (2008)
Brandstädt, A.: Graphen und Algorithmen. B. G. Teubner, Stuttgart (1994)
Cayley, A.: A theorem on trees. Quart. J. Math. **23**, 376–378 (1889)
Chartrand, G., Zhang, P.: Chromatic Graph Theory. CRC Press, Boca Raton (2009)
Colbourn, J.C., Dinitz, J.H.: Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. CRC Press, Boca Raton (2006)
Cvetković, D., Rowlingson, P., Simić, S.: An Introduction to the Theory of Graph Spectra. Cambridge University Press, Cambridge (2010)
Flajolet, P., Sedgewick, R.: Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, Cambridge (2009)
Gilbert, C.: Random graphs. Ann. Math. Stat. **30**(4), 1141–1144 (1959)
Godsil, C., Royle, G.: Algebraic Graph Theory. Springer, New York (2001)
Gondran, M., Minoux, M.: Graphs, Dioids and Semirings. Springer (2008)
Goulden, I.P., Jackson, M.J.: Combinatorial Enumeration. John Wiley & Sons, Inc, New York (1983)
Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O.: Concrete mathematics. Addison-Wesley, Reading (1991)
Gross, J., Yellen, J.: Graph Theory and its Applications. CRC Press, Boca Raton (1999)
Gutman, I., Harary, F.: Generalizations of the matching polynomial. Util. Math. **24**, 97–106 (1983)
Harary, F., Palmer, E.M.: Graphical Enumeration. Academic Press, New York (1973)
Harary, F., Read, R.C.: Is the null-graph a pointless concept? In: Graphs and Combinatorics Lecture Notes in Mathematics, Bd. 406, S. 37–44. (1974)
Heilmann, O.J., Lieb, E.H.: Theory of Monomer-Dimer Systems. Commun. Math. Phys. **25**, 190–232 (1972)

Hopcroft, J.E., Ullman, J.D.: Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie, 4. Aufl. Oldenbourg Verlag, München (2000)
Jordan, C.: Calculus of Finite Differences. Chelsea, New York (1965)
Kasteleyn, P.W.: The statistics of dimers on a lattice. Physica **27**, 1209–1225 (1961)
Kerber, A.: Algebraic Combinatorics via Finite Group Actions. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (1991)
Kirchhoff, G.: Über die Auflösung von Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. Ann. Phys. Chem. **72**, 497–508 (1847)
Krumpe, S.O., Noltemeier, H.: Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen. B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden (2005)
Lothaire, M.: Combinatorics on Words. Cambridge University Press, Cambridge (1983)
Lovász, L., Plummer, M.D.: Matching Theory. Elsevier Science Ltd, Amsterdam (1986)
Perrin, D.: Enumerative Combinatorics on Words. In: Crapo, H., Senato, D. (Hrsg.) Algebraic Combinatorics and Computer Science, S. 391–427. Springer, Mailand (2001)
Petkovšek, M., Wilf, H., Zeilberger, D.: $A = B$. A. K. Peters, Wellesley, MA (1996)
Pólya, G.: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta Math **68**, 145–254 (1937)
Pólya, G.: On picture writing. Am. Math. Mon. **63**, 689–697 (1956)
Riordan, J.: An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley & Sons, New York (1958)
Rota, G.-C.: On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions. Z. Wahrseheinlichkeitstheorie **2**, 340–368 (1964)
Spiegel, M.R.: Endliche Differenzen und Differenzengleichungen. McGraw-Hill, Hamburg (1982)
Stanley, R.P.: Enumerative Combinatorics Bd. 1. Cambridge University Press, Cambridge (1997)
Stanley, R.P.: Enumerative Combinatorics Bd. 2. Cambridge University Press, Cambridge (1999)
Stanton, D., White, D.: Constructive Combinatorics. Springer, New-York (1986)
Tittmann, P.: Graphentheorie – Eine anwendungsorientierte Einführung. Carl Hanser, München (2011)
Tutte, W.T.: Graph Theory. Cambridge University Press, Cambridge (2001)
Welsh, D.J.A.: Complexity: Knots Colourings and Counting. Cambridge University Press, Cambridge (1993)
West, D.: Introduction to Graph Theory, 2. Aufl. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (2000)
Wilf, H.S.: Generating Functionology. Academic Press, Inc, San Diego (1994)

Stichwortverzeichnis

A
Abelsche Transformation, 123
abgeschlossene Nachbarschaft, 149
Ableitung einer Summe, 112
Abspalten von Summanden, 111
Abstand, 133
adjazent, 133
Adjazenzmatrix, 141
adjungiertes Polynom, 154
Admittanzmatrix, 143
akzeptiertes Wort, 265
Alphabet, 192, 257
antisymmetrische Relation, 166
Anzahlfolge, 189
äquivalente kombinatorische Klassen, 189
Artikulation, 138
assoziativ, 212
Atom, 190
atomare Klasse, 190
aufspannender Untergraph, 133
Auswahl, 7, 8
    geordnete, 7
    mit Wiederholung, 7
    ohne Berücksichtigung der Anordnung, 8
    ohne Wiederholung, 7
Automat, 265
    Knotenreduktion, 271
    mit Parametern, 278
    Parallelreduktion, 271
    Reduktion, 271
    unendlicher, 274
    Zustand, 265
Automatengraph, 265
Automatenmatrix, 265
Automatentabelle, 265
Automorphismengruppe, 215
Automorphismus, 216

B
Backtrack-Algorithmus, 253
Baum, 134
    binärer, 253
    planarer, 251
Baustein, 196
Bellsche Exponentialzahlen, 20
Bell-Zahlen, 20, 277
benachbart, 133
Bernoulli, Jakob, 70
Bernoulli-Zahlen, 70
beschränkt wachsendes Wort, 276
Bijektion, 3, 5
    ordnungserhaltende, 167
binärer Baum, 253
Binomialkoeffizient, 9
    Darstellung durch Fakultäten, 10
    oberer Index, 9
    rekursive Beziehung, 10
    Symmetriebeziehung, 9
    unterer Index, 9
Binomialsatz, 11
binomischer Lehrsatz, 11
binäre Relation, 166
bipartiter Graph, 136
Blatt, 30, 246
Block einer Partition, 16
Bogen, 166
Boolescher Verband, 169
Brücke, 137
Bruder, 251
Buchstabe, 257
Burnside, Lemma von, 217

C
Catalan-Zahlen, 106, 252
Cauchy, Lemma von, 217
charakteristische Gleichung, 93
chromatische Zahl, 157
chromatisches Polynom, 155
Clique, 151
Cliquenpartitionspolynom, 154

D
Dekompositionsprinzip, 30
Derangement, 65
Diamantgraph, 142
Differentialoperator, 52
Differenzen
  höherer Ordnung, 116
  Operator, 114
Differenzenoperator, 114
  Produktregel, 116
  Quotientenregel, 116
Digammafunktion, 121
disjunkte Kopie, 264
disjunkte Vereinigung, 190
Dobiński-Formel, 74
Domino-Parkettierungen, 195
Doppelsumme, 113
Drehgruppe, 213
Dreiecksungleichung, 133
duale Ordnung, 168
Durchmesser, 134

E
Eindeutigkeit, 260
Einheit, 47
Einselement, 167
  einer Gruppe, 212
Endknoten, 132
endlicher Automat, 265
endlicher Graph, 133
Endzustand, 265
Entfernen einer Kante, 137
Entscheidungsbaum, 30
Erkennen
  einer Sprache, 265
erzeugende Funktion, 39
  einer Sprache, 262
  exponentielle, 59
  gewöhnliche, 52
Euler-Maclaurinsche Summenformel, 126
Eulersche Phi-Funktion, 180, 223
Exponentialformel, 236
exponentielle erzeugende Funktion, 59, 190
Extraktion, 152

F
Fächer, 139
Färbung, 155
  zulässige, 155
Faktor, 258
  verbotener, 264
Faktorielle
  fallende, 7
  Potenzgesetz für die fallende, 7
  steigende, 209
Fakultät, 3
  rekursive Definition, 3
fallende Faktorielle, 7
Faltung, 46
Farbmenge, 155
Ferrers-Graph, 22
Fibonacci-Folge, 48
Fibonacci-Zahlen, 78, 86
Filter, 167
Fixpunkt, 65, 207
Folge, 193
Folgen-Konstruktion, 193
formale Ableitung, 52
formale Potenzreihe, 46
  invertierbare, 47
  Komposition, 49
  Multiplikation, 46
  Verkettung, 49
formale Sprache, 258
Formel von Dobiński, 74
Frobenius, Lemma von, 217
funktional invers, 50

G
Gammafunktion, 121
gefärbte Domino-Parkettierungen, 198
geordnete Menge, 166
geordneter Wurzelbaum, 251
gerichteter Graph, 133
Gerüst, 134
Gewicht, 277
gewöhnliche erzeugende Funktion, 52
gewöhnliche erzeugende Funktion, 189
gewurzelte Objekte, 196
Grad eines Knotens, 135
Gradmatrix, 143
Graph
  bipartiter, 136

Durchschnitt, 139
endlicher, 133
gerichteter, 133
Invariante, 141
isomorpher, 141
Isomorphismus, 141
Komplement, 136
Kreis, 136
leerer, 136
planarer, 155
regulärer, 135
schlichter, 133
ungerichteter, 132
Verbindung, 150
Vereinigung, 139
vollständiger, 135
vollständiger bipartiter, 136
Weg, 136
zusammenhängender, 134
Grapheninvariante, 141
Graphenpolynom, 147
invariantes, 147
Größe, 187
Gruppe, 212
Multiplikation, 212
Ordnung, 214
symmetrische, 212
zyklische, 222
Gruppentafel, 213

H
Hamilton, Sir William Rowan, 133
Hamilton-Kreis, 133
hängender Knoten, 246
harmonische Reihe, 120
harmonische Zahlen, 119
Hasse-Diagramm, 166
Hauptfilter, 167
homogene lineare Rekurrenzgleichung, 92

I
Identitätsoperator, 115
Index, 214
induzierte Ordnungsrelation, 167
induzierter Untergraph, 133
Infimum, 168
inhomogene lineare Rekurrenzgleichung, 97
Injektion, 8
Inklusion-Exklusion, 178
Intervall, 167
Invariante, 132
invariantes Graphenpolynom, 147
Inverse von Inzidenzfunktionen, 174
inverses Element in einer Gruppe, 212
Inversion, 80
inzident, 133
Inzidenzalgebra, 174
Inzidenzfunktion, 132, 173
Faltung, 173
Faltungsprodukt, 173
Inverse, 174
Konvolution, 173
Produkt, 173
Irrfahrt, 263
Gedächtnislänge, 267
isolierter Knoten, 135
isomorph, 167
isomorphe Graphen, 141
isomorphe Ordnungen, 167
Isomorphieklasse von Graphen, 233
Isomorphismus, 141

K
Kante, 131
Entfernen, 137
Extraktion, 152
Kontraktion, 137
Kantendekomposition, 158
Kantenfolge, 133
geschlossene, 133
Länge einer, 133
Kantengraph, 153
Kantenmenge, 132
Kantenoperation, 137
Kantenzug, 133
Kantenzusammenhangszahl, 143
kartesisches Produkt, 191
Kette, 167
Kettenbruch, 275
Klasse
kombinatorische, 187, 188
markierte, 204
Kleenscher Sternoperator, 259
Kleinsche Vierergruppe, 231
Knoten, 131
Abstand, 133
adjazente, 133
Entfernen, 138
Gewicht, 146
hängender, 246
isolierter, 135
Knotenfärbung, 155
zulässige, 155

Knotengrad, 135
Knotenmenge, 132
  unabhängige, 147
Knotenoperation, 137
Knotenreduktion, 271
Koeffizientenvergleich, 82
Kombination, 8
kombinatorische Klasse, 187, 188
  Äquivalenz, 189
  kartesisches Produkt, 191
  markierte, 204
kombinatorische Konstruktion, 190
kombinatorisches Objekt, 187
Komplement, 136
Komponente, 134
Komposition, 236
konjugierte Partition, 22
Konstruktion
  Folge, 193
  Markierung, 196
Kontraktion, 137
Konvolution, 46
Kreis, 133, 136
Kreisgraph, 136
Kronecker-Funktion, 173

L
Label, 196
Label-Konstruktion, 196
Länge eines Wortes, 257
Lagrange, Satz von, 214
Länge eines Wortes, 192
Laplace-Matrix, 143
leere Klasse, 190
leere Summe, 110
leerer Graph, 136
leeres Wort, 192, 257
Lemma
  von Cauchy-Frobenius, 217
Lemma von Burnside, 217
lineare Rekurrenzgleichung, 92
  Lösung, 93
linearer Operator, 116
Link, 159
Linksnebenklasse, 214
logarithmisches Differenzieren, 237
Lottospiel, 8

M
markierte Klasse, 204
markierte Partition, 107
Matching, 151
  perfektes, 152
Matchingpolynom, 151
Menge
  geordnete, 166
  total geordnete, 167
Mengenkonstruktion, 200
Mengenpartition, 201
Möbius-Funktion, 174, 201
  im Booleschen Verband, 176
  im Partitionsverband, 183
  im Teilerverband, 176
  Produktsatz, 175
Möbius-Inversion, 177
  von oben, 177
  von unten, 177
monoton nichtfallendes Wort, 13
Müllzustand, 276
Multigröße, 188
Multimenge, 4
Multinomialkoeffizient, 4
Multinomialsatz, 35
multiplikative Inverse, 46

N
Nachbarschaft
  abgeschlossene, 149
  offene, 149
Nachfolger, 251
Nebenklasse, 214
neutrale Klasse, 190
neutrales Element, 212
nicht unterscheidbare Objekte, 25
nicht unterteilbar, 167
nichtlineare Rekurrenzgleichung, 102
Nullelement, 167
Nullgraph, 136

O
obere Schranke, 167
offene Nachbarschaft, 149
Operator, 114
  linearer, 116
Orbit, 214
Ordnung, 166
  duale, 168
  einer Gruppe, 214
  Einselement, 167
  induzierte, 167
  isomorphe, 167
  Nullelement, 167

Produkt, 167
totale, 167
ordnungserhaltend, 167
ordnungserhaltende Bijektion, 167
Ordnungsrelation, 166

P

parallele Kanten, 133
Parallelreduktion, 271
Parameter, 278
Partialbruchentwicklung, 113
partielle Summation, 122
Partition, 16, 21
einer Menge, 16, 201
einer Zahl, 21
konjugierte, 22
markierte, 107
unabhängige, 155
Verfeinerung, 170
zusammenhängende, 184
Partitionsverband, 170, 201
Pascalsches Dreieck, 10
perfektes Matching, 152
Permutation, 2
erzeugende, 223
Graph einer, 206
Tabellenform, 79, 206
Typ, 211
Zyklendarstellung, 206
Permutationsmatrix, 142
planarer Baum, 251
planarer Graph, 155
Polynom
chromatisches, 155
Potenz einer Sprache, 259
Potenzgesetz, 7
Präfix, 258
Primfaktorzerlegung, 179
Prinzip der Inklusion-Exklusion, 178
Produktordnung, 167
Produktsatz
der Möbius-Funktion, 175
Prüfer-Korrespondenz, 245
Psi-Funktion, 121

Q

Quotientenregel, 116

R

Radgraph, 153
Rang, 168
Rangfunktion, 168
Rechtsnebenklasse, 214
Reduktion
einer Sprache, 265
von Automaten, 271
reduzierte Menge, 265
reflexive Relation, 166
reguläre Sprache, 259
regulärer Graph, 135
Rekurrenzgleichung, 75
charakteristische Gleichung, 93
erzeugende Funktion, 85
homogene lineare, 92
inhomogene lineare, 97
lineare, 92
nichtlineare, 102
Rekursion, 2
Lösung, 3
rekursives Einsetzen, 81
Relation
antisymmetrische, 166
binäre, 166
reflexive, 166
transitive, 166
relativ prim, 179
Riemannsche Zetafunktion, 172
Rundreiseproblem, 132

S

Satz von Lagrange, 214
schlichter Graph, 133
Schlinge, 133
Schlingengraph, 160
Schranke
größte untere, 168
kleinste obere, 167
obere, 167
untere, 168
selbstdual, 170
selbstvermeidende Irrfahrt, 263
Siebmethode, 177
Sohn, 251
Spannbaum, 134
Anzahl, 138
Sprache
erkannte, 265
erzeugende Funktion, 262
Reduktion, 265
reguläre, 259
Stabilisator, 215
Startzustand, 265

steigende Faktorielle, 209
Stirling-Zahlen erster Art, 207
  Rekurrenzbeziehung, 208
Stirling-Zahlen zweiter Art, 16
  Rekursionsbeziehung, 18
Substitution, 198
Suffix, 258
Sujektion, 19
Summe, 109
  Ableitung, 112
  Abspalten von Summanden, 111
  Einführen von Zwischensummen, 113
  leere, 110
  mit Binomialkoeffizienten, 112
  Zusammenfassen von Termen, 113
Summenoperator, 117
Supremum, 167
Symmetrie, 30, 205, 215
symmetrische Gruppe, 212

T
Taylor-Maclaurin-Entwicklung, 52
Taylor-Reihe, 42
Teil, 22
Teilautomat, 279
teilerfremd, 179
Teilerverband, 172
Teilmengenverband, 169
Teilordnung, 167
total geordnete Menge, 167
totale Ordnung, 167
transitive Relation, 166
Translationsoperator, 115
Treppe, 194
Typ, 201
  einer Permutation, 211
  eines Wortes, 261

U
Übergangsfunktion, 265
Übersetzung, 261
Umkehrreihe, 50
unabhängige Knotenmenge, 147
unabhängige Partition, 155
Unabhängigkeitszahl, 150
Unabhängigkeitspolynom, 147
unendlicher Automat, 274
ungerichteter Graph, 132
unimodal, 34
untere Schranke, 168
Unterfolge eines Wortes, 258
Untergraph, 133
  aufspannender, 133
  induzierter, 133
  zufälliger, 161
Untergruppe, 213
unterscheidbare Objekte, 25
Unterwort, 258
unvergleichbare Elemente, 166

V
Vandermonde-Konvolution, 12
Variation, 7
Vater, 251
Verband, 168
  Boolescher, 169
  Partitionsverband, 170
  selbstdualer, 170
  Teilerverband, 172
Verbindung, 150
verbotener Faktor, 264
Vereinigung von Sprachen, 258
Verfeinerung, 170
vergleichbare Elemente, 166
Verkettung, 258
  eindeutige, 259
  von Sprachen, 258
Verschiebungsoperator, 115
Verteilungen, 25
Vierfarbensatz, 155
vollständiger Graph, 135
Vorgänger, 166, 251

W
Wald, 162
Weg, 133, 136
Whitney-Zahl zweiter Art, 168
Wirkung, 214
Wort, 192, 257
  akzeptiertes, 265
  beschränkt wachsendes, 276
  Faktor, 258
  Länge, 192
  leeres, 192, 257
  monton nichtfallendes, 13
  Typ, 261
  Verkettung, 258
Würfelspiel, 38
Wurzel, 30, 196, 234
Wurzelbaum, 249
  geordneter, 251
Wurzelgraph, 234

Wurzelwald, 249

Z
Zetafunktion, 172
zufälliger Untergraph, 161
zulässige Färbung, 155
zusammenhängende Menge, 184
zusammenhängende Partition, 184
zusammenhängender Graph, 134
Zusammenhangskomponente, 134
Zusammenhangspolynom, 158
Zusammenhangswahrscheinlichkeit, 162
Zustand, 265
Zuverlässigkeitspolynom, 162
Zweig, 251
Zwischensumme, 113
Zyklendarstellung, 206
  verkürzte, 207
Zyklenzeiger, 218
  der symmetrischen Gruppe, 218
  der zyklischen Gruppe, 224
  des Würfels, 225
zyklische Gruppe, 222