Anhang A
Mathematik – kompakt

A.1 Notationen

A.1.1 Griechische Buchstaben (Auswahl)

α: Alpha, β: Beta, γ, Γ: Gamma, δ, Δ: Delta, ϵ: Epsilon, θ, Θ: Theta, λ, Λ: Lambda, μ: Mu, ν: Ny, ξ, Ξ: Xi, π, Π: Pi, ρ : Rho, σ, Σ: Sigma, τ: Tau, χ: Chi, ψ, Ψ: Psi, ω, Ω: Omega.

A.1.2 Mengen und Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, 1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ganze Zahlen, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen, $\mathbb{R}$: reelle Zahlen.
$\pi = 3.1415926536$ (Kreiszahl π), $e = 2.7182818285$

A.2 Platzhalter, Variablen und Termumformungen

Unter einer Variablen versteht man einen Platzhalter für eine konkrete Zahl. Variablen werden in der Regel mit lateinischen oder griechischen Buchstaben (z. B. x, y, A, K oder λ) bezeichnet, oder auch mit gängigen Kürzeln wie K_f (Fixkosten) oder $x_{\max}$. Das Rechnen mit Variablen hat den Vorteil, dass man oftmals ein Ergebnis erhält, das man durch Einsetzen konkreter Zahlen für die Variablen immer wieder anwenden kann. Für jede Variable muss angegeben werden, aus welcher Menge Einsetzungen erlaubt sind. Beispiel: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^2 \geq 0$. Mitunter muss man dies jedoch erschließen. So ist etwa $x - 3 \geq 0$ für alle $x \geq 3$ erfüllt; das Intervall $[3, \infty)$ ist die maximale Menge, für die Einsetzungen zu

A. Steland, *Basiswissen Statistik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-49948-1

einer richtigen (wahren) Aussage führen. Bei Rechnungen (Termumformungen) dürfen Rechenregeln, die gelten, wenn für die Variablen konkrete Zahlen eingesetzt werden, benutzt werden. So ist $\frac{x^5}{x^2} = x^3$, wenn x eine reelle Zahl ist – allerdings muss hier $x \neq 0$ vorausgesetzt werden, da sonst der Bruch $\frac{x^5}{x^2}$ nicht definiert ist (man darf nicht durch 0 dividieren!).

In der Regel fällt aber das Rechnen mit konkreten Zahlen/Daten leichter als mit formalen Variablen. Hier anhand eines Beispiels ein *Trick*, wie man von Rechnungen mit konkreten Zahlen recht leicht zu allgemeinen Ergebnissen kommen kann. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge x betragen bei Fixkosten von 100 Euro und variablen Stückkosten von 2 Euro gerade

$$K(x) = 100 + 2 \cdot x.$$

Frage: Welcher Produktionsmenge entsprechen Gesamtkosten in Höhe von $K = 110$ Euro? Wir stellen die Gleichung

$$100 + 2 \cdot x \stackrel{!}{=} 110$$

auf, die wir nach x auflösen (umstellen) müssen. Nun rechnen wir explizit und vereinfachen hierbei nicht:

$$\begin{aligned} 100 + 2 \cdot x &= 110 \\ 2 \cdot x &= 110 - 100 \\ x &= \frac{110 - 100}{2}. \end{aligned}$$

Also $x = 5$. Um die allgemeine Lösung für beliebige Fixkosten $K_f > 0$ und variable Stückkosten k_v zu erhalten (K_f und k_v sind jetzt Platzhalter/Variablen), ersetzen wir überall in obiger Rechnung die Zahl 100 durch K_f, die 110 durch K und die Zahl 2 durch k_v:

$$100 \to K_f, \quad 110 \to K, \quad 2 \to k_v.$$

Dann prüft man Schritt für Schritt, ob alle Umformungen gültig bleiben. Bei Teilen durch 2 bzw. k_v muss nun $k_v \neq 0$ vorausgesetzt werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} K_f + k_v \cdot x &= K \\ k_v \cdot x &= K - K_f \\ x &= \frac{K - K_f}{k_v} \end{aligned}$$

und somit die allgemeine Lösungsformel, in die man nun nach Belieben Einsetzen darf. Dieses Vorgehen funktioniert sehr häufig; wichtig ist, dass man für alle auftretenden Größen *verschiedene* Zahlen nimmt, die man an allen Stellen auseinander halten kann, und nirgendwo kürzt oder rundet (sondern erst ganz am Schluss...).

A.3 Punktfolgen und Konvergenz

Betrachte die *Folge* der Zahlen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Die Punkte deuten an, dass hier ein Bildungsgesetz zugrunde liegt, so dass man auch die nicht angegeben Zahlen erschließen kann: Die $n$te Zahl ist gerade durch die *Formel* $a_n = \frac{1}{n}$ gegeben, wobei n die Werte $1, 2, 3, \ldots$ annimmt. Es ist offensichtlich, dass diese Zahlen immer kleiner werden, auch wenn sie nie 0 werden. Aber man kann der 0 beliebig nahe kommen, wenn n groß genug gewählt wird: Die Folge *konvergiert* gegen 0.

►**Definition A.3.1.** Sei $I \subset \mathbb{N}_0$ eine Indexmenge (meist: $I = \mathbb{N}_0$ oder $I = \mathbb{N}$). Eine Zuordnung, die jedem $i \in I$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **Folge**. Für $I = \mathbb{N}_0$:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

a_i heißt ***i*-tes Folgenglied**. Für $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{N}_0$ notiert man die Folgenglieder meist mit a_n. Notation einer Folge: $(a_i)_{i \in I}$, $(a_i : i \in I)$ oder auch $(a_i)_i$, wenn die Indexmenge aus dem Kontext heraus klar ist. Ist $|I| = n < \infty$, dann heißt $(a_i)_i$ **endliche Folge**. Ansonsten spricht man von einer **unendlichen Folge**.

In den folgenden Vereinbarungen notieren wir die Folge $(a_n)_{n \in I}$ kurz mit (a_n) und schreiben stets „für alle n" statt ausführlicher „für alle $n \in I$".

1) (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n gilt und **streng monoton wachsend**, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle n gilt.
2) (a_n) heißt **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle n gilt und **streng monoton fallend**, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle n gilt.
3) (a_n) heißt **alternierend**, wenn für alle n mit $a_n \neq a_{n+1}$ gilt: $a_n < a_{n+1}$ zieht $a_{n+1} > a_{n+2}$ nach sich und umgekehrt.
4) (a_n) heißt **beschränkt**, falls es eine Zahl (Konstante) K gibt, so dass $|a_n| \leq K$ für alle n gilt. Gilt $a_n \geq K$ für alle n und ein $K \in \mathbb{R}$, dann heißt (a_n) **nach unten beschränkt**. Gilt $a_n \leq K$ für alle n und ein $K \in \mathbb{R}$, dann heißt (a_n) **nach oben beschränkt**.

Beispiele:

(i) $a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, ist streng monoton fallend, da

$$n + 1 > n \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{n+1} < n \ \Leftrightarrow\ a_{n+1} < a_n,\ n \geq 1.$$

(ii) $a_n = 3^n,\ n \in \mathbb{N}$, und $K_n = K_0(1+i)^n,\ n \in \mathbb{N},\ i > 0, K_0 > 0$, sind streng monoton wachsend.

(iii) $a_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$, ist alternierend und beschränkt.

A.3.1 Konvergenz von Folgen

►**Definition A.3.2.** Eine Folge $(a_n)_{n\in I}$ heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder Toleranz $\epsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Eine Folge heißt **Nullfolge**, wenn $(a_n)_{n\in I}$ gegen $a = 0$ konvergiert. (a_n) heißt **konvergent gegen** ∞ (bestimmt divergent gegen ∞), wenn zu jeder Schranke $K > 0$ ein n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n > K$. (a_n) heißt **konvergent gegen** $-\infty$ (bestimmt divergent gegen $-\infty$), wenn zu jeder Schranke $K < 0$ ein n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n < K$. Man schreibt:

$$a_n \to a, \quad n \to \infty, \qquad \text{oder} \qquad a = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Konvergiert $(a_n)_{n\in I}$ nicht gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ oder gegen ∞ oder $-\infty$, dann heißt die Folge **divergent**.

Beispiele: Die Folge $a_n = 1/n$ ist eine Nullfolge (zu $\varepsilon > 0$ runde $1/\varepsilon$ nach oben auf, um n_0 zu erhalten), $a_n = 1 + 1/n$ konvergiert gegen $a = 1$, $a_n = n$ gegen ∞ und $a_n = -n$ gegen $-\infty$.

Kriterium
Jede monoton wachsende (oder fallende) und beschränkte Folge ist konvergent gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$.

Ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ und die Folge $(b_n)_n$ konvergent gegen $b \in \mathbb{R}$ und sind c,d reelle Zahlen, dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1) Die Differenzen-, Summen- bzw. Produktfolge $c_n = a_n \overset{\cdot}{\pm} b_n$ konvergiert und hat den Grenzwert $c = a \overset{\cdot}{\pm} b$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \overset{\cdot}{\pm} b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \overset{\cdot}{\pm} \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Gilt $b_n \neq 0$ für alle n und ist $b \neq 0$, dann konvergiert auch die Quotientenfolge $c_n = a_n/b_n$ mit Grenzwert $c = a/b$.

2) Die Folge $c \cdot a_n \overset{\cdot}{\pm} d \cdot b_n$ konvergiert und hat den Grenzwert $ca \overset{\cdot}{\pm} db$.

Beispiele:

(i) $a_n = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty,$ so wie $b_n = \frac{1}{n^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ k \in \mathbb{N}.$

(ii) $a_n = \frac{2n^5+n^3-3}{-4n^5+n} = \frac{n^5\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^5}\right)}{n^5\left(-4+\frac{1}{n^4}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$

A.3.2 Summen und Reihen

Sind $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n$$

(endliche) Summe der x_i oder auch **endliche Reihe**. i heißt **Laufindex**.

$$\text{Es gilt}: \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

► **Definition A.3.3.** Für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ gilt:

$$1 + x + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

► **Definition A.3.4.** Ist a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Folge reeller Zahlen, dann heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

n-te Partialsumme. Die Folge s_n, $n \in \mathbb{N}_0$, der n-ten Partialsummen heißt **Reihe**. Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

►**Definition A.3.5.** Die Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt **konvergent** gegen $s \in \mathbb{R}$, wenn sie als reelle Folge gegen eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann schreibt man:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

s heißt **Grenzwert**, **Limes** oder **Wert** der Reihe. Die Reihe s_n heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $n \geq 0$, konvergiert.

Konvergiert eine Reihe gegen eine Zahl, ohne dass man diesen Limes kennt, so schreibt man mitunter $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$.

Die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $n \geq 0$, ist monton wachsend, da die Summanden nichtnegativ sind, und beschränkt, wenn Konvergenz vorliegt. Somit konvergiert eine Reihe genau dann absolut, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ endlich ist, d. h. genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$.

Konvergiert eine Reihe absolut, dann dürfen die Summanden in beliebiger Reihenfolge summiert werden (Umordnungssatz).

Ergänzung: Die Reihe heißt *uneigentlich konvergent* gegen ∞ $(-\infty)$, wenn die Folge (s_n) gegen ∞ $(-\infty)$ *uneigentlich konvergiert*. Ansonsten heißt die Reihe *divergent*.

Exponentialreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$.

Logarithmusreihe: Für $-1 < x \leq 1$ gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots$$

Sinusreihe:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

Kosinusreihe:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$$

Konvergenzkriterien

Notwendiges Kriterium
Konvergiert die Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ gegen $s \in \mathbb{R}$, dann gilt: $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Leibniz-Kriterium

Die Reihe $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ konvergiert, wenn (a_k) eine monton fallende Nullfolge ist.

Quotientenkriterium

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ sei eine Reihe, deren Summanden a_k ab einem Index n_0 ungleich 0 sind. Gibt es ein $q \in (0,1)$, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q, \qquad k \geq n_0,$$

bzw. $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$, dann konvergiert s_n gegen eine Zahl $s \in \mathbb{R}$. Gilt $|a_{k+1}/a_k| \geq 1$, $k \geq n_0$, dann konvergiert s_n nicht gegen eine Zahl $s \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

(i) $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.

(ii) Sei $x > 0$ fest und $s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{5^i}$, $n \in \mathbb{N}_0$, also $a_i = \frac{x^i}{5^i}$. Da

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \left|\frac{x^{i+1}}{5^{i+1}} \cdot \frac{5^i}{x^i}\right| = \left|\frac{x}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 5$$

ist die Reihe konvergent für $-5 < x < 5$.

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{3^n} + \frac{3}{2^n}\right) = 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 2 = 15.$

A.4 Ungleichungen

Die folgenden Ungleichungen sind oftmals nützlich:

Ungleichungen

1) Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Für reelle Zahlen a, b gilt: $|a| - |b| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$.
3) Für komplexe Zahlen x, y gilt: $||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$.

(*Fortsetzung*)

4) Bernoullische Ungleichung: Für reelle Zahlen $a \geq -1$ und ganze Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

5) Binomische Ungleichung: Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|ab| \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right).$$

6) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Summen: Für alle $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

7) Cauchy-Schwarz-Ungleichung für konvergente Reihen:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}.$$

8) Cauchy-Schwarzsche Integrale für bestimmte Integrale:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

A.5 Funktionen

Viele Zusammenhänge zwischen zwei Variablen x und y können so beschrieben werden: Für gewisse (zulässige, sinnvolle) Werte für x kann man durch eine Vorschrift ein zu diesem x gehörendes y bestimmen. Beispiel: Zu jeder Verkaufsmenge $x \in [0,M]$ eines Produktes mit Verkaufspreis a, von dem man M Stück zur Verfügung hat, kann man den Erlös zu $y = a \cdot x$ bestimmen. Wenn man in dieser Form y aus x bestimmen kann, spricht man von einer *Funktion*. Formal gesehen, wird jedem x aus einer bestimmten Menge, dem *Definitionsbereich*, ein Wert $y = f(x)$ zugeordnet.

►**Definition A.5.1.** Eine Zuordnung, die jedem Element x einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ eine Zahl $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **Funktion** und wird mit $f : D \to \mathbb{R}$ notiert. D heißt **Definitionsbereich**, die Menge $W = \{f(x) | x \in D\}$ heißt **Wertebereich**.

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Wertebereich W und ist $g : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass W Teilmenge von E ist, dann ist die Funktion $y = g(f(x))$ für alle $x \in D$ definiert und heißt **Komposition (Verkettung) von** f **und** g.

Beispiele:

1) $y = \ln(x^2)$. Setzt man $f(x) = x^2$ und $g(z) = \ln(z)$, so ist $y = g(f(x))$.
2) $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Hier ist $y = f(g(x))$, wenn $g(x) = x^2 + 1$ und $f(z) = \sqrt{z}$.

Die Gleichung $y = f(x)$, y vorgegeben, ist lösbar, wenn $y \in W$. Wann ist sie jedoch eindeutig lösbar?

► **Definition A.5.2.** Eine Funktion $f(x)$, $x \in D$, mit Wertebereich W heißt **umkehrbar**, wenn es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ gibt mit $y = f(x)$. Durch $f^{-1}(y) = x$ wird die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : W \to D$ definiert. Es gelten dann die Gleichungen:

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Achtung: Unterscheide $f^{-1}(x)$ (Umkehrfunktion) und $f(x)^{-1} = 1/f(x)$.

Jede streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar.

Beispiel: $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2 + 4$, ist streng monoton wachsend mit $f([0,\infty)) = [4,\infty)$. Für $x \geq 0$ gilt $y = x^2 + 4 \geq 4$ und somit

$$y = x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y - 4 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y-4}.$$

Also ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ mit Definitionsbereich $[4,\infty)$. Hingegen ist $f(x)^{-1} = \frac{1}{x^2+4}$.

A.5.1 Spezielle Funktionen

Sind $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

Polynom vom Grad n oder **ganz-rationale Funktion** und $a_0, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten**. Zwei Polynome sind gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Ist x_1 eine Nullstelle von $f(x)$, dann gilt: $f(x) = (x - x_1)g(x)$ mit einem Polynom $g(x)$ vom Grad $n - 1$.

Sind $p(x)$ und $q(x)$ zwei Polynome und hat $q(x)$ keine Nullstellen in der Menge D, dann ist

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad x \in D,$$

definiert und heißt **gebrochen-rationale Funktion**. Die Nullstellen von $q(x)$ sind *Polstellen* (senkrechte Asymptoten) von $f(x)$.

Ist $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Funktion $f(x) = x^n$, $x \in [0,\infty)$, streng monoton wachsend mit Wertebereich $[0,\infty)$ und somit umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt ***n*-te Wurzelfunktion**: $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Dies ist die eindeutige nicht-negative Lösung der Gleichung $y = x^n$.

Für $a \neq 0$ heißt $f(x) = x^a$ **Potenzfunktion**. Der maximale Definitionsbereich ist $[0,\infty)$, falls $a > 0$, und $(0,\infty)$, falls $a < 0$.

Ist $b > 0$, dann heißt die Funktion

$$f(x) = b^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

allgemeine Exponentialfunktion zur Basis b. Für $b = e^0 \approx 2.718282$ erhält man die **Exponentialfunktion** e^x, deren Wertebereich $\mathbb{R}_+$ ist. e^x ist streng monoton wachsend mit Umkehrfunktion $y = \ln(x)$, dem **natürlichen Logarithmus**, dessen Definitionsbereich $(0,\infty)$ ist. Es ist $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$. Es gilt für $b > 0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$b^x = e^{x \cdot \ln(b)}.$$

Daher hat $y = b^x$ die Umkehrfunktion $x = \log_b(y) = \ln(y)/\ln(b)$, $y > 0$, sofern $b \neq 1$. Die Rechenregeln der Potenzfunktion leiten sich daher aus den folgenden Rechenregeln für die Exponentialfunktion ab: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $e^0 = 1$ sowie: $e^x > 1$, wenn $x > 0$, und $0 < e^x < 1$ wenn $x < 0$,
2) $e^{-x} = 1/e^x$,
3) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $e^{x-y} = e^x/e^y$,
4) [1)]$(e^x)^y = e^{x \cdot y}$.

Für den Logarithmus gelten die folgenden Rechenregeln:

1) $\ln(1) = 0$,
2) Sind $x, y > 0$, dann ist $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$,
3) Für $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ ist $\ln(x^y) = y \ln(x)$.

Zu jeder Zahl $t \in [0,2\pi]$ gibt es auf dem Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ einen Punkt (x,y), so dass der *Kreisbogen* vom Punkt $(1,0)$ bis zum Punkt (x,y), gegen den Uhrzeigersinn aufgetragen, die Länge t hat. Die Koordinaten werden mit $x = \cos(t)$ und $y = \sin(t)$ bezeichnet. Da der Kreisumfang 2π ist, sind diese Funktionen somit zunächst für

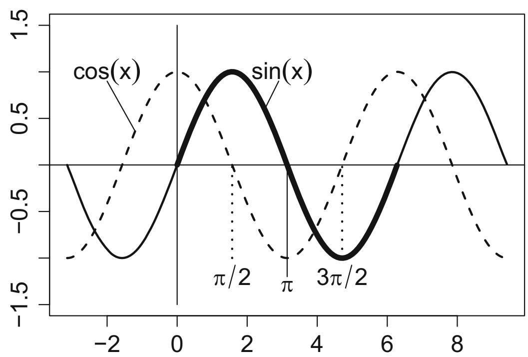

Abb. A.1 Sinus und Kosinus

$t \in [0, 2\pi]$ definiert. Läuft man zusätzlich mehrfach um den Kreis, sagen wir k-mal, hat also auf dem Kreis eine Strecke der Länge $2\pi k + t$ zurückgelegt, so ist offensichtlich nur Rest t nach ganzzahliger Division durch 2π relevant. Somit sind $\cos(t)$ und $\sin(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert und besitzen die Periode 2π.

Die Funktion $\sin(x)$ heißt **Sinus**, die Funktion $\cos(x)$ **Kosinus** (Abb. A.1).

Wichtige Eigenschaften und Rechenregeln:

1) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ (Periode 2π),
2) $\cos(-x) = \cos(x)$ (gerade), $\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade),
3) Nullstellen vom Sinus: $\sin(x) = 0$ für $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4) Nullstellen vom Kosinus: $\cos(x) = 0$ für $x = (k + 1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (die Nullstellen sind im Vergleich zum Sinus um $\pi/2$ verschoben).
5) Maximalstellen vom Sinus: $x_{\max,k} = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, Maximalwert: 1.
6) Minimalstellen vom Sinus: $x_{\min,k} = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, Minimalwert: -1.
7) Maximalstellen vom Kosinus: $x_{\max,k} = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, Maximalwert: 1.
8) Minimalstellen vom Kosinus: $x_{\min,k} = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, Minimalwert: -1.
9) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,
10) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ (Satz des Pythagoras),
11) $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$,
12) $(\cos(x))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, $(\sin(x))^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ (Halber Winkel),
13) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
14) $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$,
15) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,
16) $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$,

Die letzten vier Regeln sind die Additionstheoreme.

Eulerformel: Mit $i^2 = -1$ gilt: $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$.

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}).$$

A.5.2 Grenzwert von Funktionen

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und (x_n) eine Folge von Zahlen mit $x_n \in D$ für alle n, dann kann man die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ bilden. Was passiert mit dieser Folge der Funktionswerte, wenn die Folge x_n gegen einen Wert x konvergiert?

►**Definition A.5.3.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. $f(x)$ hat im Punkt a den **Grenzwert** c, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Notation:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

c heißt **linksseitiger Grenzwert im Punkt** a und wird mit $f(a-)$ bezeichnet, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$, $x_n \leq a$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $f(x_n) \to c$, $n \to \infty$.

c heißt **rechtsseitiger Grenzwert im Punkt** a und wird mit $f(a+)$ bezeichnet, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$, $x_n \geq a$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $f(x_n) \to c$, $n \to \infty$. Notationen:

$$f(a-) = \lim_{x\uparrow a} f(x) \qquad \text{und} \qquad f(a+) = \lim_{x\downarrow a} f(x).$$

In den Definitionen von $f(a-)$ und $f(a+)$ sind $-\infty$ und ∞ als Grenzwerte zugelassen. Gilt $f(a+) \neq f(a-)$ und sind $f(a+)$ und $f(a-)$ endlich, dann hat $f(x)$ an der Stelle a einen Sprung der Höhe $f(a+) - f(a-)$.
Beispiele: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Indikatorfunktion: Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}(A)$ eines Ausdrucks A, der wahr oder falsch sein kann, ist 1, wenn A wahr ist und 0, wenn A falsch ist. Die Indikatorfunktion, $\mathbf{1}_I(x)$, auf einer Menge I ist

$$\mathbf{1}_I(x) = \mathbf{1}(x \in I) = \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & x \notin I. \end{cases}$$

Sie nimmt den Wert 1 an, wenn x in der Menge I ist, sonst den Wert 0. Ist $I = [a,\infty)$, dann hat $f(x) = \mathbf{1}_I(x)$ einen Sprung der Höhe 1 an der Stelle a. Es gilt $f(a-) = 0$ und $f(a+) = 1$.

A.5.3 Stetigkeit

►**Definition A.5.4.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig im Punkt** $x \in D$, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ mit $x_n \to x$, für $n \to \infty$, gilt: $f(x_n) \to f(x)$, $n \to \infty$. Die ist gleichbedeutend mit $f(x-) = f(x+)$. $f(x)$ heißt *stetig*, wenn $f(x)$ in allen Punkten $x \in D$ stetig ist.

Für die Funktion $f(x) = x^2$ gilt nach den Regeln für das Rechnen mit konvergenten Folgen: Aus $x_n \to x$, für $n \to \infty$, folgt $f(x_n) = x_n \cdot x_n \to x \cdot x = x^2 = f(x)$, für $n \to \infty$. Also ist $f(x)$ stetig in x. Dies gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ ist genau dann stetig in x, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert endlich sind und übereinstimmen: $f(x+) = f(x-) = f(x)$.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen mit Definitionsbereich D, dann auch $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ und $f(x)/g(x)$ (sofern $g(x) \neq 0$). Ist $f(g(x))$ definiert, dann ist mit $f(x)$ und $g(x)$ auch $f(g(x))$ stetig.

Insbesondere sind alle Polynome, gebrochen-rationale Funktionen, $|x|$, e^x und $\ln(x)$ stetig. Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{(a,b]}(x)$ ist nicht stetig. Unstetigkeitsstellen sind bei $x = a$ und $x = b$.

A.5.4 Potenzreihen*

►**Definition A.5.5.** Für $x \in \mathbb{R}$ und Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, heißt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

formale Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0. $f(x)$ konvergiert entweder nur für $x = x_0$, auf einem ganzen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, oder auf ganz $\mathbb{R}$.

Wenn es eine Zahl $R > 0$, so dass $f(x)$ für alle $|x - x_0| < R$ absolut konvergiert und für $|x - x_0| > R$ divergiert, dann heißt R **Konvergenzradius**. Es gilt dann:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

A.6 Differenzialrechnung

A.6.1 Ableitung

Ist $f(x)$ eine Funktion, dann ist $f(x + h) - f(x)$ die Änderung des Funktionswertes, wenn das Argument um h Einheiten geändert wird. Umgerechnet auf eine Einheit ergibt dies den **Differenzenquotienten** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (relative Änderung, Änderungsrate).

►**Definition A.6.1.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x \in D$ **differenzierbar**, wenn der Differenzenquotient für $h \to 0$ konvergiert und

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eine reelle Zahl ist. Dann heißt der Grenzwert $f'(x)$ **Ableitung von** f **an der Stelle** x. $f(x)$ heißt **differenzierbar**, wenn $f(x)$ an jeder Stelle $x \in D$ differenzierbar ist.

Die **linksseitige Ableitung** ist definiert durch $f'(x-) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, die **rechtsseitige Ableitung** durch $f'(x+) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Beispiel: Für $f(x) = |x|$ ist $f'(0+) = 1$ und $f'(0-) = -1$.
Geometrisch ist der Differenzenquotient die Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$. Für $h \to 0$ erhält man die Steigung der Tangenten, sofern f in x differenzierbar ist. Die Geradengleichung der Tangente lautet: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Eine lineare Approximation an $f(x)$ im Punkt x_0 ist somit gegeben durch:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Regel von L'Hospital
Konvergieren $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to x_0$ beide gegen 0, ∞ oder $-\infty$ und gilt $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \in \mathbb{R}$ für $x \to x_0$, dann folgt $\frac{f(x)}{g(x)} \to c$, für $x \to x_0$.

Ableitungsregeln
Sind $f(x)$ und $g(x)$ im Punkt x differenzierbar, dann auch $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, sowie $f(x)/g(x)$ (sofern $g(x) \neq 0$) und es gilt:

1) $(cf(x))' = cf'(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$,
2) Summenregel: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
3) Produktregel: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4) Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,
5) Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$,
6) Umkehrfunktion: $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ $(y = f(x), x = f^{-1}(y))$.

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Stammfunktion $\int f(x)\,dx$
$ax+b$	a	$ax^2/2+bx$
x^n $(n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^r $(r \in \mathbb{R})$	rx^{r-1}	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
b^x $(b>0, x \in \mathbb{R})$	$\ln(b)b^x$	$\frac{b^x}{\ln(b)}$
$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$	$a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$	$a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\cdots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x	e^x
$\ln(x)$ $(x>0)$	$1/x$	$x\ln(x)-x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$

Beispiele:

(i) $h(x) = x^a e^x$ mit $a \neq 0$. $h'(x) = ax^{a-1}e^x + x^a e^x = (a+x)x^{a-1}e^x$.
(ii) $h(x) = \ln(x^2)$. $h'(x) = \frac{2}{x}$, da $h'(y) = \frac{1}{y}$ und $(x^2)' = 2x$.
(iii) $y = f(x) = x^2, x > 0$. $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

A.6.2 Elastizität

$f : I \to \mathbb{R}, I = (a,b)$, sei eine differenzierbare Funktion mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Die Funktion

$$\hat{f}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

heißt **Wachstumsfunktion** und gibt die prozentuale Änderung von $f(x)$ (bezogen auf $f(x_0)$) pro x-Einheit an.

$$e_f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

heißt **Elastizität** von $f(x)$ an der Stelle x bzw. **Elastizitätsfunktion**. Sie gibt an, um welchen Prozentsatz sich f (ausgehend vom Punkt x mit Funktionswert $f(x)$) ändert, wenn sich x um 1% erhöht. Die Elastizität beantwortet eine sehr oft praktisch relevante Fragestellung: Änderung der Funktionswerte bei Änderung des Arguments, jeweils ausgedrückt in Prozent.

Rechenregeln:
$f(x)$ und $g(x)$ seinen Funktionen mit Elastizitätsfunktionen $e_f(x)$ bzw. $e_g(x)$ und Definitionsbereichen D_f bzw. D_g.

1) $e_{f+g}(x) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)} e_f(x) + \frac{g(x)}{f(x)+g(x)} e_g(x)$, für alle $x \in D_f \cap D_g$.
2) $e_{fg}(x) = e_f(x) + e_g(x)$, $\quad e_{f/g}(x) = e_f(x) + e_g(x)$, für alle $x \in D_f \cap D_g$.
3) $e_{g \circ f}(x) = e_g(f(x))e_f(x)$, wenn $g(f(x))$ für $x \in A \subset D_f$ definiert ist.

A.6.3 Höhere Ableitungen

Ist $f(x)$ in x differenzierbar, dann kann man untersuchen, ob die Ableitung $f'(x)$ wieder differenzierbar ist.

Höhere Ableitungen
Ist $f'(x)$ in x differenzierbar, dann heißt

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (f'(x))'$$

zweite Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x.
Ist für $n \geq 3$ die Funktion $f^{(n-1)}(x)$ an der Stelle x differenzierbar, dann heißt $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ **n-te Ableitung von $f(x)$ an der Stelle** x.

$f(x)$ sei in x_0 zweimal stetig differenzierbar. Eine quadratische Approximation von $f(x)$ für x-Werte nahe x_0 ist gegeben durch:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

A.7 Taylorpolynom und Taylorentwicklung

Wir wollen eine n-mal differenzierbare Funktion $f(x)$ durch ein Polynom $p(x)$ approximieren, so dass der Funktionswert und die ersten n Ableitungen von $p(x)$ an einer vorgegeben Stelle x_0 mit Funktionswert und Ableitungen von $f(x)$ übereinstimmt.

►**Definition A.7.1.** Ist $f(x)$ n-mal differenzierbar in x_0, dann heißt

$$P_n(f,x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorpolynom von $f(x)$ **an der Stelle** x_0. Der Approximationsfehler $R_n(f,x) = f(x) - P_n(f,x)$ heißt **Restglied**.

Ist $f(x)$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, dann gilt für x-Werte mit $|x-x_0| \leq c$, $c > 0$, die Abschätzung:

$$R_n(f,x) = |f(x) - P_n(f,x)| \leq \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in[x_0-c,x_0+c]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

►**Definition A.7.2.** Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gegeben. Falls $f(x)$ darstellbar ist in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

für alle x mit $|x-x_0| < R$ $(R > 0)$, dann heißt die rechts stehende Potenzreihe **Taylorreihe** von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0. Es gilt dann: $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Wichtige Taylorreihen: Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$. Binomialreihe: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ für $|x| < 1$.

A.8 Optimierung von Funktionen

Wir stellen uns den Graphen von $f(x)$ als Gebirge vor: $f(x)$ ist dann die Höhe am Ort x. Wir suchen Täler und Bergspitzen. Für die höchste Bergspitze am Ort x^* gilt: $f(x) \leq f(x^*)$ für alle x. Betrachtet man $f(x)$ nur auf einem (kleinen) Teilintervall (x_0-c, x_0+c) um x_0, dann gilt für eine (kleine) Bergspitze an der Stelle x_0: $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0-c, x_0+c)$, wenn $c > 0$ klein genug gewählt ist.

►**Definition A.8.1.** Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem offenen Intervall (a,b). $f(x)$ besitzt an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ ein **lokales Minimum**, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle x mit $|x-x_0| < c$. $x_0 \in (a,b)$ ist ein **lokales Maximum**, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x mit $|x-x_0| < c$. x_0 ist ein **globales Minimum**, wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in (a,b)$. x_0 ist ein **globales Maximum**, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (a,b)$.

In einem lokalen Extremum verläuft die Tangente an $f(x)$ parallel zur x-Achse.

Notwendiges Kriterium
Ist $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum, dann gilt: $f'(x_0) = 0$

Punkte x mit $f'(x) = 0$ sind also Kandidaten für die lokalen Extrema.

►**Definition A.8.2.** Ein Punkt x mit $f'(x) = 0$ heißt **stationärer Punkt**.

Hinreichendes Kriterium 1. Ordnung
$x_0 \in (a,b)$ sei ein stationärer Punkt von $f(x)$. Bei einem Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ bei $x_0 \ldots$

1) von $+$ nach $-$ liegt ein lokales Maximum bei x_0, vor.
2) von $-$ nach $+$ liegt ein lokales Minimum bei x_0 vor.

Hinweis: Eine genaue Analyse des Vorzeichens von $f'(x)$ über den gesamten Definitionsbereich ermöglicht oft eine leichte Klärung der Frage, ob ein lokales Minimum auch ein globales ist (analog für Maxima).

Eine Funktion $f(x)$ heißt **konvex** auf (a,b), wenn alle Verbindungsstrecken von zwei Punkten auf dem Graphen mit x-Koordinaten in (a,b) oberhalb der Kurve verlaufen. Verlaufen diese stets unterhalb, dann heißt $f(x)$ **konkav**.

Kriterium für konvex/konkav
Sei $f(x)$ zweimal differenzierbar. Gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist $f(x)$ in (a,b) konkav. Gilt $f''(x) > 0$ für alle (a,b), dann ist $f(x)$ konvex in (a,b).

Hinreichendes Kriterium 2. Ordnung
$x_0 \in (a,b)$ sei ein stationärer Punkt von $f(x)$.

1) Gilt zusätzlich $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 lokales Maximum.
2) Gilt zusätzlich $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 lokales Minimum.

Beispiel:

(i) Für $f(x) = x^3$, $x \in [-2,2]$, hat $f'(x) = 3x^2 = 0$ die Lösung $x = 0$. Da $f''(x) = 6x$ ist $x = 0$ Wendepunkt (s. u.). An den Rändern: $f(-2) = -8, f(2) = 8$, d. h. -2 ist globales Minimum, 2 globales Maximum.

(ii) $f(x) = 100 + 12x - 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$. Es ist $f'(x) = 12 - 6x,\ f''(x) = -6$.
Stationäre Punkte: $f'(x^*) = 12 - 6x^* = 0 \Leftrightarrow x^* = 2$. Da $f''(x^*) < 0$ ist $x^* = 2$ lokales Maximum. Aus $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ beziehungsweise $x \to -\infty$ folgt, dass $x^* = 2$ globales Maximum ist.

►**Definition A.8.3.** $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Wendepunkt (oder Wendestelle) von f, wenn es ein Intervall (a,b) gibt, so dass f auf (a, x_0) konvex und auf (x_0, b) konkav ist oder konkav auf (a, x_0) und konvex auf (x_0, b) ist.

Unter Wendepunkt wird mitunter auch $(x_0, f(x_0))$ verstanden.

Wendepunkte sind also Punkte, an denen sich das *Krümmungsverhalten* ändert. Ist x_0 ein Wendepunkt, dann gilt $f''(x_0) = 0$.

Hinreichende Kriterien (Wendepunkt)

1) Kriterium basierend auf der zweiten Ableitung: Gilt $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, dann ist x_0 ein Wendepunkt.
2) Kriterium basierend auf der dritten Ableitung: Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 eine Wendestelle.
3) Allgemeines Kriterium $n$ter Ordnung: Gilt für ein $n \geq 3$

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

dann liegt an der Stelle x_0 ein Wendepunkt vor.

A.9 Integration

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine **Partition** von $[a,b]$. $d_n = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|$ heißt **Feinheit** der Partition. Wähle in jedem Teilintervall $(x_{i-1}, x_i]$ einen Stützpunkt x_i^*. Dann heißt

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Riemann-Summe von $f(x)$ zu den Stützstellen $x_1^*, \dots, x_n^*$. Wählt man alle x_i^* als Minima von $f(x)$ auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$, dann erhält man die **Untersumme** $U_n(f)$, wählt man die x_i^* als Maxima von $f(x)$ auf $[x_{i-1},x_i]$, so erhält man die **Obersumme**.

►**Definition A.9.1.** Konvergiert $R_n(f)$ für jede beliebige Wahl der Stützstellen bzw. (gleichbedeutend hiermit) konvergieren Unter- und Obersumme gegen dieselbe Zahl I, sofern die Feinheit d_n für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, dann heißt $f(x)$ **(Riemann-) integrierbar auf** $[a,b]$. Man setzt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Anschaulich ist das Integral die Fläche unter dem Graphen von f in den Grenzen von a bis b, d. h. begrenzt durch die vertikalen Geraden gegeben durch $x = a$ bzw. $x = b$.

Jede (stückweise) stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

A.9.1 Stammfunktion

Grundlegend für die Berechnung von Integralen ist der Begriff der Stammfunktion und der Zusammenhang zwischen *Integrieren* und *Ableiten*.

►**Definition A.9.2.** Ist $F(x)$ eine Funktion auf $[a,b]$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann heißt $F(x)$ **Stammfunktion von** $f(x)$. Insbesondere ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion.

Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt: Gilt $F'(x) = f(x)$ und ist $G(x) = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$, dann ist auch $G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die Menge aller Stammfunktionen wird mit $\int f(x)\,dx$ bezeichnet und heißt **unbestimmtes Integral**:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

c heißt **Integrationskonstante**.
Beispiel: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Also $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\big|_0^1 = 1/2$. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

In Abschn. A.6.1 sind Stammfunktionen zu einigen elementaren Funktionen angegeben, jeweils zur Integrationskonstante $c = 0$. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Jede Ableitungsregel liefert eine Integrationsregel, indem man das Ergebnis des Ableitens als Integranden nimmt – die linke Seite ist dann eine Stammfunktion:

$$g(x) \text{ gegeben,} \quad g'(x) = f(x)$$

$\Rightarrow g(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$
Beispiele:

1) Es gilt: $\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n$ und $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n$. Also ist $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$. Daher gilt:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$$

Somit ist etwa $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.
2) $\ln'(x) = 1/x$. Also ist $F(x) = \ln(x)$ eine Stammfunktion von $1/x$. Alle Stammfunktionen sind dann

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

3) $\sin'(x) = \cos(x)$, somit ist $\sin(x)$ eine Stammfunktion von $\cos(x)$:

$$\int_a^b \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_a^b = \sin(b) - \sin(a).$$

4) Eine Stammfunktion von $f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x$ ist

$$F(x) = \frac{6}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^2}{2}.$$

(Verifikation durch Ableiten von $F(x)$). Die Menge aller Stammfunktionen, also das unbestimmte Integral ist durch

$$\int f(x)\,dx = \frac{6}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^2}{2} + c,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

A.9.2 Integrationsregeln

Integrationsregeln

1) Partielle Integration: $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$.
2) Substitutionsregel: $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$, $(y = g(x))$.
3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4) $\int_a^b [c \cdot f(x) + d \cdot g(x)]dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx + d \cdot \int_a^b g(x)dx$.
5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
6) $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dx = f(t)$, $\frac{d}{dt} \int_t^a f(x)dx = -f(t)$.
7) Sind $a(t), b(t)$ differenzierbar mit Werten in $Def(f)$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx = f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t).$$

8) Gilt zusätzlich zu den Annahmen von 7), dass $f(x,t)$ und $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ stetige Funktionen in (x,t) sind, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx.$$

A.9.3 Uneigentliches Integral

Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ oder $b = +\infty$, auf jedem Teilintervall $[a,c] \subset [a,b)$ integrierbar. $f(x)$ heißt **(uneigentlich) integrierbar auf** $[a,b)$, wenn der Grenzwert

$$I = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)\,dx$$

existiert (oder $\pm\infty$ ist). I heißt **uneigentliches Integral von** f. Notation: $I = \int_a^b f(x)\,dx$. bzw. $I = \int_a^\infty f(x)\,dx$, wenn $b = \infty$.

Genauso geht man am linken Rand vor: Sei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$ und $b \in \mathbb{R}$. $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf jedem Teilintervall $[c,d] \subset (a,b]$ integrierbar. Dann definiert man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x)\,dx.$$

A.10 Vektoren

Wir bezeichnen die Punkte der zweidimensionalen Ebene (xy-Ebene) mit Großbuchstaben A,B, ... Ein **Vektor** $\overrightarrow{AB}$ ist ein Pfeil mit Anfangspunkt A und Endpunkt B. Zwei Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ heißen **gleich**, wenn man durch eine Parallelverschiebung (parallel zu den Koordinatenachsen) eines der Vektoren erreichen kann, dass die Pfeile deckungsgleich sind, also Anfangs- und Endpunkt aufeinanderfallen. Somit ist jeder Vektor $\overrightarrow{AB}$ gleich zu einem sogenannten **Ortsvektor**, dessen Anfangspunkt der Ursprung **0** ist. Auf diese Weise kann jeder Vektor mit einem Punkt, nämlich dem Endpunkt des zugehörigen Ortsvektors, identifiziert werden.

►**Definition A.10.1.** Die Menge aller **(Spalten-) Vektoren**

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

heißt **n-dimensionaler Vektorraum** $\mathbb{R}^n$. $(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **Zeilenvektor**. **Transposition**: Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Spaltenvektor mit den Einträgen $x_1, \ldots, x_n$, dann bezeichnet $\mathbf{x}'$ den zugehörigen Zeilenvektor $(x_1, \ldots, x_n)$. Ist $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Zeilenvektor, dann ist $(x_1, \ldots, x_n)'$ der zugehörige Spaltenvektor. $\mathbf{x}'$ heißt **transponierter Vektor**.

Zwei Vektoren $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{y} = \overrightarrow{CD}$ werden addiert, indem man $\vec{y}$ so verschiebt, dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{x}$ übereinstimmt. Der Endpunkt des so verschobenen Vektors sei E. Der Vektor $\vec{x} + \vec{y}$ ist dann derjenige Vektor mit Anfangspunkt A und Endpunkt E: $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{AE}$. Identifiziert man die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{x} + \vec{y}$ mit den Endpunkten (x_1, x_2), (y_1, y_2) und (z_1, z_2) ihrer zugehörigen Ortsvektoren, dann sieht man, dass gilt: $z_1 = x_1 + y_1$ und $z_2 = x_2 + y_2$.

Spezielle Vektoren:

- $\mathbf{0} = \mathbf{0}_n = (0, \ldots, 0)' \in \mathbb{R}^n$ heißt **Nullvektor**.
- Die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heißen **Einheitsvektoren**. $\mathbf{e}_i$ heißt **i-ter Einheitsvektor**.

►**Definition A.10.2.** Sind $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ n-dimensionale Vektoren, dann definiert man:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Vektoren werden also koordinatenweise addiert.

Um Verwechselungen zu vermeiden, nennt man in der Vektorrechnung reelle Zahlen oftmals **Skalare**. Wir notieren Skalare mit normalen Buchstaben $a,b,x,y,\ldots$ und verwenden für Vektoren Fettschrift.

►**Definition A.10.3.** Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar, dann ist das skalare Vielfache $c \cdot \mathbf{x}$ der Vektor $(cx_1, \ldots, cx_n)'$ (koordinatenweise Multiplikation).

Für Skalare $c, d \in \mathbb{R}$ und Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ gelten die Rechenregeln:

1) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$,
2) $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$,
3) $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$.

A.10.1 Lineare Unabhängigkeit

►**Definition A.10.4.** Sind $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ Skalare, dann heißt

$$c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$$

Linearkombination von $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ mit Koeffizienten $c_1, \ldots, c_k$. Ein Vektor $\mathbf{y}$ heißt **linear kombinierbar aus** $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, wenn es Zahlen $c_1, \ldots, c_k$ gibt, so dass

$$c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{y}.$$

Es gilt: $(1{,}0)' - (1{,}1)' + (0{,}1)' = (0{,}0)$. Somit ist der Nullvektor aus den Vektoren $(1{,}0), (1{,}1), (0{,}1)$ linear kombinierbar (mit Koeffizienten $+1, -1, +1$).

►**Definition A.10.5.** k Vektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ heißen **linear abhängig**, wenn es Zahlen $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle 0 sind, so dass

$$c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Ansonsten heißen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ **linear unabhängig**.

Sind $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ linear unabhängig, dann folgt aus

$$c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

schon, dass alle Koeffizienten 0 sind: $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$.

A.10.2 Skalarprodukt und Norm

►**Definition A.10.6.** Sind $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ zwei n-dimensionale Vektoren, dann heißt die Zahl

$$\mathbf{x}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Insbesondere ist $\mathbf{x}'\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Für das Skalarprodukt gelten die folgenden Rechenregeln: Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren und ist $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar, dann gilt:

1) $\mathbf{x}'\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{x}$,
2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y})'\mathbf{z} = \mathbf{x}'\mathbf{z} + \mathbf{y}'\mathbf{z}$,
3) $(c \cdot \mathbf{x})'\mathbf{y} = c \cdot \mathbf{x}'\mathbf{y} = \mathbf{x}'(c \cdot \mathbf{y})$.

►**Definition A.10.7.** Zwei Vekoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal** (senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt 0 ist, d. h. $\mathbf{x}'\mathbf{y} = 0$.

Ist $\mathbf{x} = (x_1, x_2)'$ ein (Orts-) Vektor, dann ist seine Länge nach dem *Satz des Pythagoras* gegeben durch:

$$l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Wir können l über das Skalarprodukt darstellen: $l = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$. Man nennt die Länge eines Vektors auch Norm.

►**Definition A.10.8.** Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vekor, dann heißt

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$$

(euklidische) Norm von x. Ein Vektor $\mathbf{x}$ heißt **normiert**, wenn seine Norm 1 ist: $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Die Norm erfüllt folgende Rechenregeln: Für Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $\|\mathbf{x}\| = 0$ gilt genau dann, wenn $\mathbf{x}$ der Nullvektor ist, d. h. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (Dreiecksungleichung),
3) $\|c \cdot \mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Jede Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche diese Regeln erfüllt, heißt **Norm**. Eine weitere Norm ist etwa: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Jeder Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ kann **normiert** werden: Der Vektor $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ hat Norm 1.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung
Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ n-dimensionale Vektoren, dann gilt:

$$|\mathbf{x}'\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt, dass das Skalarprodukt der normierten Vektoren $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ und $\mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$ betragsmäßig kleiner oder gleich 1 ist:

$$|(\mathbf{x}^*)'(\mathbf{y}^*)| = \left| \frac{\mathbf{x}'\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \right| \leq 1.$$

Also ist $(\mathbf{x}^*)'(\mathbf{y}^*)$ eine Zahl zwischen -1 und $+1$, so dass wir die Funktion arccos anwenden können, um einen Winkel zuzuordnen.

►**Definition A.10.9.** Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren, dann heißt

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right)$$

Winkel zwischen den Vektoren x und y.

Satz des Pythagoras
Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ orthogonale Vektoren, dann gilt:
$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

A.11 Matrizen

►**Definition A.11.1.** Eine Anordnung von $m \cdot n$ Zahlen

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,$$

der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $(m \times n)$-**Matrix**. (m,n) heißt **Dimension**. Ist die Dimension aus dem Kontext klar, dann schreibt man oft abkürzend: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$.

Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j}$ gleicher Dimension (d. h.: mit gleicher Zeilen- und Spaltenanzahl) heißen **gleich**, wenn alle Elemente übereinstimmen: $a_{ij} = b_{ij}$ für alle Zeilen i und alle Spalten j.

Einige spezielle Matrizen:

- Nullmatrix: $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m\times n}$ ist die Matrix, deren Einträge alle 0 sind.
- **A** heißt **Diagonalmatrix**, wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  Nur die Diagonale ist belegt. Kurznotation: $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.
- **Einheitsmatrix:** $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{n\times n} = \mathrm{diag}(1,\dots,1)$ ist die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen 1.

Sind $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j}$ zwei Matrizen gleicher Dimension, dann ist $\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ die Matrix mit den Einträgen $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (elementweise Addition). Für ein $c \in \mathbb{R}$ ist $c\mathbf{A}$ die Matrix mit den Einträgen $c \cdot a_{ij}$ (elementweise Multiplikation mit einen Skalar). Für Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ gleicher Dimension und Skalare $c,d \in \mathbb{R}$ gelten dann die Rechenregeln:

1) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,
2) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$,
3) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$.

Sei $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)' \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor, dessen Koordinaten sich aus $\mathbf{x}$ durch m Skalarprodukte

$$y_i = \mathbf{a}_i'\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

mit Koeffizientenvektoren $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})'$ berechnen.

►**Definition A.11.2.** Ist $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$ eine $(m \times n)$-Matrix und $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, dann ist die **Multiplikation von A mit x** definiert als derjenige m-dimensionale Vektor $\mathbf{y}$, dessen i-ter Eintrag das Skalarprodukt der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{x}$ ist:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1'\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n'\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Bei gegebener Matrix $\mathbf{A}$ wird durch diese Operation jedem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Bildvektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet. Die m Vektoren, welche die Zeilen einer Matrix $\mathbf{A}$ bilden, bezeichnen wir mit $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Die n Spaltenvektoren notieren wir mit $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}$. Dann gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m' \end{pmatrix} = (\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}).$$

In den Spalten von $\mathbf{A}$ stehen die Bildvektoren der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$: $\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ $(m \times n)$-Matrizen, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und ist $c \in \mathbb{R}$, dann gelten die folgenden Regeln:

1) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$,
2) $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}$,
3) $\mathbf{A}(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Die letzten beiden Regeln besagen, dass die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ *linear* ist.

Ist $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ eine Linearkombination der n Spalten $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}$ von $\mathbf{A}$. Aus

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

und der Linearität folgt nämlich:

$$\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{Ae}_1 + \cdots + x_n\mathbf{Ae}_n = x_1\mathbf{a}^{(1)} + \cdots + x_n\mathbf{a}^{(n)}.$$

►**Definition A.11.3.** Ist $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$-Matrix und $\mathbf{B}$ eine $(n \times r)$-Matrix, dann wird die Produktmatrix $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ definiert als $(m \times r)$-Matrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times r},$$

deren Einträge c_{ij} das Skalarprodukt der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ mit der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$ sind:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Zwei Matrizen heißen **multiplikations-kompatibel**, wenn die Spaltenzahl von $\mathbf{A}$ mit der Zeilenzahl von $\mathbf{B}$ übereinstimmt, so dass die Produktmatrix gebildet werden kann.

Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ Matrizen, so dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ sowie $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ multiplikations-kompatibel sind, ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$, dann gelten die folgenden Regeln:

1) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
2) $\mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = (\mathbf{AB})\mathbf{x}$,
3) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$,
4) Meist gilt: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Die Produktmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ beschreibt die Hintereinanderausführung der Abbildungen, die durch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beschrieben werden: $\mathbf{B}$ ordnet jedem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ einen Bildvektor $\mathbf{y} = \mathbf{Bx} \in \mathbb{R}^n$ zu, dem wir durch Anwenden der Matrix $\mathbf{A}$ einen Vektor $\mathbf{z} = \mathbf{Ay} \in \mathbb{R}^m$ zuordnen können:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{Bx} \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{Ay} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}).$$

Die Produktmatrix ist nun genau diejenige Matrix, die $\mathbf{x}$ direkt auf $\mathbf{z}$ abbildet: $\mathbf{z} = \mathbf{Cx}$. In den Spalten von $\mathbf{C}$ stehen die Bildvektoren der Einheitsvektoren: $\mathbf{c}^{(i)} = \mathbf{Ce}_i$. Es gilt:

$$\mathbf{c}^{(i)} = (\mathbf{AB})\mathbf{e}_i = \mathbf{A}(\mathbf{Be}^{(i)}) = \mathbf{Ab}^{(i)}.$$

In den Spalten von $\mathbf{C}$ stehen also die Bildvektoren der Spalten von $\mathbf{B}$ nach Anwendung der Matrix $\mathbf{A}$.

►**Definition A.11.4.** Der **Spaltenrang** bzw. **Zeilenrang** einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten- bzw. Zeilenvektoren. Spalten- und Zeilenrang einer Matrix stimmen überein, so dass man vom **Rang** einer Matrix spricht. Notation: $\mathrm{rg}(\mathbf{A})$.

A.12 Lösung linearer Gleichungssysteme

Seien $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$-Matrix mit Zeilen $\mathbf{a}_i'$, $i = 1, \ldots, m$, und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Gesucht sind Lösungsvektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der n Gleichungen:

$$\mathbf{a}_i'\mathbf{x} = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Dies ist ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ darstellbar ist. Gilt nämlich:

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}^{(1)} + \cdots + x_n\mathbf{a}^{(n)},$$

dann ist $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ ein Lösungsvektor.

Ist $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ darstellbar, dann besitzt die **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ den selben Rang wie $\mathbf{A}$. Ansonsten sind die Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{b}$ linear unabhängig, so dass $\mathrm{rg}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) > \mathrm{rg}(\mathbf{A})$.

Das LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Ist $\mathbf{A} = (a_{ij})_{ij}$ eine (2×2)-Matrix, dann zeigt eine explizite Rechnung (s. Steland (2004), Abschnitt 7.6.5), dass das LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann eine Lösung besitzt, wenn die **Determinante**

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ungleich 0 ist.

►**Definition A.12.1.** Gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, dann heißt

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

inverse Matrix von A. Das LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ besitzt dann die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Ist allgemein $\mathbf{A}^{-1}$ eine Matrix mit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, dann können wir $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ auf beiden Seiten von links mit der Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren, also nach $\mathbf{x}$ *auflösen*: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

►**Definition A.12.2.** Sei $\mathbf{A}$ eine $(n \times n)$-Matrix. Existiert eine Matrix $\mathbf{B}$ mit

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{AB} = \mathbf{I},$$

dann heißt $\mathbf{B}$ **inverse Matrix von A** und wird mit $\mathbf{A}^{-1}$ bezeichnet.

Sei $\mathbf{A}$ eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix. Dann gilt:

1) Ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$ oder $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, dann folgt $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
2) $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.
3) Ist $c \in \mathbb{R}$, dann gilt: $(c\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$.
4) Ist $\mathbf{A}$ symmetrisch, d. h. $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, dann ist auch $\mathbf{A}^{-1}$ symmetrisch.
5) Sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbar, dann auch die Produkte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \qquad (\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}.$$

A.12.1 Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren ist ein bekanntes Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Hierzu wird ein beliebiges LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ durch sogenannte elementare Zeilenumformungen so umgeformt, dass die Koeffizientenmatrix Dreiecksgestalt hat. Ist $\mathbf{A}$ eine obere Dreiecksmatrix, dann kann das Gleichungssystem durch *schrittweises Rückwärtseinsetzen* gelöst werden. Für $m = n$ gilt dann:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Die letzte Zeile liefert $x_n = b_n/a_{nn}$. Dies wird in die vorletzte Zeile eingesetzt, die dann nach x_{n-1} aufgelöst werden kann, usw.

Die folgenden **elementaren Zeilenumformungen** ändern die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nicht:

1) Vertauschen zweier Zeilen.
2) Addition eines Vielfachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile.
3) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $c \neq 0$.

Durch Anwenden dieser Operationen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ erzeugt man nun Nullen unterhalb der Diagonalen von $\mathbf{A}$ und bringt $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ somit auf die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{d} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{e} \end{array}\right).$$

Hierbei ist $\mathbf{T}$ eine $(k \times n)$-Matrix mit Stufengestalt. Ist $\mathbf{e}$ kein Nullvektor, dann ist das LGS widersprüchlich und besitzt keine Lösung. Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist k. $\mathbf{T}$ habe an den Spalten mit Indizes $s_1, \ldots, s_k$ Stufen. Das heißt, in der j-ten Zeile ist der Eintrag t_{j,s_j} in der s_j-ten Spalte ungleich 0 und links davon stehen nur Nullen: $(0, \ldots, 0, t_{j,s_j}, *, \ldots, *)$ mit $t_{j,s_j} \neq 0$. Hierbei steht $*$ für eine beliebige Zahl. Durch weitere elementare Zeilenumformungen kann man noch Nullen oberhalb von t_{j,s_j} erzeugen. Davon gehen wir jetzt aus. Die Gleichungen können dann nach den Variablen $x_{s_1}, \ldots, x_{s_k}$ aufgelöst werden. Die übrigen Variablen x_j mit $j \notin \{s_1, \ldots, s_k\}$ bilden $n-k$ **freie Parameter**: Man beginnt mit der k-ten Zeile des obigen Schemas,

$$t_{k,s_k} x_{s_k} + t_{k,s_k+1} \cdot x_{s_k+1} + \cdots + t_{k,n} \cdot x_n = d_k.$$

Diese Gleichung wird nach x_{s_k} aufgelöst:

$$x_{s_k} = \frac{d_k}{t_{k,s_k}} - \frac{t_{k,s_k+1}}{t_{k,s_k}} x_{s_k+1} - \cdots - \frac{t_{k,n}}{t_{k,s_k}} x_n.$$

x_{s_k} ist nun eine Funktion der freien Variablen $x_{s_k+1}, \ldots, x_n$, die beliebig gewählt werden können. Da oberhalb von t_{k,s_k} Nullen erzeugt wurden, muss x_{s_k} nicht in die oberen Gleichungen eingesetzt werden. Man löst nun schrittweise die Gleichungen (von unten nach oben) nach den Variablen $x_{s_k}, x_{s_{k-1}}, \ldots, x_{s_1}$ auf. Hierbei erscheinen die übrigen Variablen als zusätzliche freie Parameter in den Formeln für die x_{s_j}.
Beispiel: Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Hier ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Wir arbeiten mit der erweiterten Koeffizientenmatrix und wenden elementare Zeilenumformungen an, bis unterhalb der Diagonalen Nullen stehen:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 6 \end{array}\right)$$

1. Schritt: Vertausche 1. und 2. Zeile. 2. Schritt: Addiere das $-\frac{1}{2}$-fache der 2. Zeile zur 3. Zeile. Rückwärtseinsetzen liefert die Lösung $x_3 = 4,\ x_2 = 3$ und $x_1 = -5$.

Das Gauß-Verfahren für mehrere rechte Seiten

Sind k Gleichungssysteme mit rechten Seiten $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ zu lösen,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_k,$$

dann kann das Gauß-Verfahren auf die erweiterte Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k)$ angewendet werden: Erzeugt man durch elementare Zeilenumformungen die Gestalt $(\mathbf{I}|\mathbf{B})$, so stehen in der Matrix $\mathbf{B}$ spaltenweise die Lösungsvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Berechnung der inversen Matrix

Sei $\mathbf{A}$ eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix. Betrachte die n linearen Gleichungssysteme

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

bei denen die rechten Seiten die n Einheitsvektoren sind. Da $\mathbf{A}$ invertierbar ist, hat $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i$ die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i$. Dies ist die i-te Spalte der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$. Löst man die n linearen Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i$, so erhält man also spaltenweise die inverse Matrix. Dies kann effizient durch das Gauß-Verfahren geschehen, indem man die erweiterte Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ durch elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt $(\mathbf{I}|\mathbf{C})$ bringt. Dann ist $\mathbf{C}$ die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

A.12.2 Determinanten

Für (2×2)-Matrizen wurde die Determinante bereits definiert.

►**Definition A.12.3.** Ist $\mathbf{A}$ eine (3×3)-Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, dann heißt die Zahl

$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Determinante von A und wird mit $\det(\mathbf{A})$ notiert.

Die Definition der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix ist etwas komplizierter: Eine *Transposition* von $\{1, \ldots, n\}$ ist eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht und die anderen unverändert läßt. Jede Permutation p kann als endliche Anzahl von hintereinander ausgeführten Transpositionen geschrieben werden. Ist diese Anzahl gerade, so vergibt man das *Vorzeichen* $\operatorname{sgn}(p) = +1$, sonst $\operatorname{sgn}(p) = -1$. Beispiel: Die Permutation (2,1,3) der Zahlen 1,2,3 hat das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(2,1,3) = -1$, (2,3,1) hat das Vorzeichen $+1$. Ist $\mathbf{A}$ eine Matrix, dann kann man zu jeder Permutation $p = (p_1, \ldots, p_n)$ diejenige Matrix $\mathbf{A}_p$ betrachten, bei der die Zeilen entsprechend permutiert sind: In der i-ten Zeile von $\mathbf{A}_p$ steht die p_i-te Zeile von $\mathbf{A}$. Die **Determinante von A** ist jetzt definiert als

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_p \operatorname{sgn}(p) a_{p_1,1} \cdot \ldots \cdot a_{p_n,n} .$$

Jeder Summand ist das Produkt der Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{A}_p$; es wird über alle $n!$ Permutationen summiert. Für eine (2×2)-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j}$ gibt es nur Permutationen $\{1, 2\}$, nämlich $p = (1,2)$ und $q = (2,1)$. Daher ist $\det(\mathbf{A}) = a_{p(1),1} a_{p(2),2} - a_{q(1),1} a_{q(2),2} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$; wie gehabt. Man berechnet Determinanten jedoch wie folgt:

►**Definition A.12.4.** $\mathbf{A}$ sei eine $(n \times n)$-Matrix. $\mathbf{A}_{ij}$ entstehe aus $\mathbf{A}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Dann berechnet sich die Determinante von $\mathbf{A}$ durch

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij})$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile). Insbesondere gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\det(\mathbf{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbf{A}_{12}) \pm \cdots + (-1)^{n+1}\det(\mathbf{A}_{1n}).$$

Es gilt auch: $\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(\mathbf{A}_{ij})$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte), da $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}')$. Man entwickelt nach derjenigen Spalte oder Zeile, in der die meisten Nullen stehen.

Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ multiplikationskompatible Matrizen und ist $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1) Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) ändert das Vorzeichen der Determinante.
2) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.
3) $\det(c\mathbf{A}) = c^n\det(\mathbf{A})$.
4) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}')$
5) $\det(\mathbf{A}) = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) < n$.
6) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ genau dann, wenn die Zeilen (Spalten) von $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind.
7) $\mathbf{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
8) Die Determinante ist linear in jeder Zeile bzw. Spalte.
9) Sind alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen 0, dann erhält man: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$.

Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)})$ die $(n \times n)$-Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{a}^{(j)}$. Die Determinate kann als Funktion der Spalten von $\mathbf{A}$ aufgefasst werden:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}).$$

Cramer'sche Regel

Ist $\mathbf{A}$ invertierbar, dann berechnet sich die i-te Koordinate x_i des eindeutig bestimmten Lösungsvektors des LGLs $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ durch

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \mathbf{a}^{(i+1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)})}{\det(\mathbf{A})}.$$

A.13 Funktionen mehrerer Veränderlicher

►**Definition A.13.1.** Eine Zuordnung $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, die jedem Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ genau eine Zahl $y = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt **Funktion von** $x_1, \ldots, x_n$. D heißt **Definitionsbereich von** f, $x_1, \ldots, x_n$ **Argumentvariablen** oder auch **(unabhängige, exogene) Variablen**. $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt mitunter auch **endogene Variable**. Die Menge $W = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D\}$ heißt **Wertebereich**.

Betrachtet man Funktionen von $n = 2$ Variablen, so ist es üblich, die Variablen mit x, y zu bezeichnen und den Funktionswert mit $z = f(x, y)$. Solche Funktionen kann man grafisch darstellen, indem man den Funktionswert $z = f(x, y)$ über dem Punkt $(x, y) \in D$ aufträgt. Anschaulich ist der **Funktionsgraph** $\{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ ein Gebirge.

►**Definition A.13.2.** Eine Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten des $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x}_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}),$$

heißt **konvergent gegen x**, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, wenn alle n Koordinatenfolgen gegen die zugehörigen Koordinaten von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ konvergieren:

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{x}_k = & (x_{k1}, & \ldots & , x_{kn}) & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{x} = & (x_1, & \ldots & , x_n). & \end{array}$$

►**Definition A.13.3.** Eine Funktion $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in D$, heißt **stetig im Punkt a**, wenn für alle Folgen $(\mathbf{x}_k)_k$, die gegen $\mathbf{a}$ konvergieren, auch die zugehörigen Funktionswerte $f(\mathbf{x}_k)$ gegen $f(\mathbf{a})$ konvergieren, d. h.

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}, \quad k \to \infty, \qquad \Rightarrow \qquad f(\mathbf{x}_k) \to f(\mathbf{a}), \quad k \to \infty.$$

$f(\mathbf{x})$ heißt **stetig**, wenn $f(\mathbf{x})$ in allen Punkten $\mathbf{a}$ stetig ist.

Insbesondere sind alle Polynome in n Variablen sowie alle Funktionen, die durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division aus stetigen Funktionen hervorgehen, stetig. Desgleichen ist eine Verkettung $f(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_n(\mathbf{x}))$ stetig, wenn $f(\mathbf{x})$ und die reellwertigen Funktionen $g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_n(\mathbf{x})$ stetig sind.

A.13.1 Partielle Differenzierbarkeit und Kettenregel

►**Definition A.13.4.** 1) Ist $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion von n Variablen, dann ist die **(i-te) partielle Ableitung nach x_i im Punkt x**, definiert durch

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} := \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h},$$

sofern dieser Grenzwert (in $\mathbb{R}$) existiert.

2) f heißt **partiell differenzierbar** (im Punkt $\mathbf{x}$), wenn alle n partiellen Ableitungen (im Punkt $\mathbf{x}$) existieren.
3) f heißt **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle n partiellen Ableitungen stetig sind.

Die partielle Ableitung nach x_i ist die „gewöhnliche" Ableitung, wobei alle anderen Variablen als Konstanten betrachtet werden.

►**Definition A.13.5.** Der Vektor der n partiellen Ableitungen,

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt **Gradient von** $f(\mathbf{x})$.

Die Funktion $f(x,y) = |x| + y^2$ ist in jedem Punkt (x,y) partiell nach y differenzierbar mit $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$. $f(x,y)$ ist jedoch in allen Punkten $(0,y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ nicht nach x partiell differenzierbar.

Ist die Funktion $\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}$ partiell differenzierbar nach x_j, so notiert man die resultierende partielle Ableitung mit $\frac{\partial^2 f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j \partial x_i}$.

In analoger Weise sind alle partielle Ableitungen k-ter Ordnung nach den Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ definiert und werden mit $\frac{\partial^k f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}$ notiert, wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial^{k-1} f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}}$ nach x_{i_k} partiell differenzierbar ist.

Beispiel:

(i) $f(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy - 2x^3y^2$. Ableiten nach x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 3y^2(x^2)' + 2y(x)' - 2y^2(x^3)' \\ &= 6y^2x + 2y - 6y^2x^2 \end{aligned}$$

Ableiten nach y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3x^2(y^2)' + 2x(y)' - 2x^3(y^2)' \\ &= 6x^2y + 2x - 4x^3y = (6x^2 - 4x^3)y + 2x. \end{aligned}$$

(ii) $f(x,y) = x \cdot \sin(x) - \cos(y)$. Da $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin(y)$$

Vertauschbarkeitsregel

Existieren alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung, $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, und sind dies stetige Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, dann kann die Reihenfolge vertauscht werden:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und sind $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, n Funktionen mit Definitionsbereich I, so dass

$$(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in D, \qquad \text{für alle } t \in I,$$

dann erhält man durch Einsetzen der Funktionen $x_i(t)$ in die entsprechenden Argumente von $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion von I nach $\mathbb{R}$:

$$z(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Die folgende Kettenregel liefert eine Formel für die Ableitung von $z(t)$:

Kettenregel

Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ differenzierbar und sind die Funktionen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ alle differenzierbar, dann gilt

$$\frac{dz(t)}{dt} = (\operatorname{grad} f(x_1(t), \ldots, x_n(t)))' \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Sei $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sowie $x(t) = t^2$, $y(t) = 3t$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = (t^2)^2 + (3t)^2 = t^4 + 9t^2$$
$$z'(t) = 4t^3 + 18t.$$

Ferner ist $\mathrm{grad} f(x,y) = \binom{2x}{2y}$ und $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \binom{2t}{3}$. Die Kettenregel liefert

$$z'(t) = (2t^2, 6t)\begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} = 4t^3 + 18t$$

A.13.2 Lineare und quadratische Approximation, Hessematrix

Ist eine Funktion $f(\mathbf{x})$ in einem Punkt $\mathbf{x}_0$ stetig partiell differenzierbar, dann kann $f(\mathbf{x})$ für Argumente $\mathbf{x}$ in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ durch eine lineare bzw. quadratische Funktion angenähert werden.

Lineare Approximation
Die lineare Approximation von $f(x,y)$ im Punkte (x_0,y_0) ist

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Allgemein ist für eine Funktion von n Variablen die lineare Approximation von $f(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ gegeben durch:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + (\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0))'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

►**Definition A.13.6.** Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar im Punkt $\mathbf{x}$, dann heißt die symmetrische $(n \times n)$-Matrix

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$$

Hesse-Matrix von $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$.

Quadratische Approximation
Eine quadratische Approximation an $f(\mathbf{x})$ in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ ist gegeben durch:

$$Q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)'\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Die Funktion $Q(\mathbf{x})$ bestimmt das Verhalten von $f(\mathbf{x})$ in der Nähe von $\mathbf{x}_0$.

Aus der quadratischen Approximation folgt, dass das Verhalten von $f(\mathbf{x})$ in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ durch den Gradienten $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ und die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ bestimmt wird.

A.13.3 Optimierung von Funktionen

►**Definition A.13.7.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion. Ein Punkt $\mathbf{x}_0$ heißt **lokales Minimum**, wenn $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}$ mit $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leq c$ für ein $c > 0$ gilt. $\mathbf{x}_0$ heißt **lokales Maximum**, wenn $\mathbf{x}_0$ lokales Minimum von $-f(\mathbf{x})$ ist. $\mathbf{x}_0$ heißt **lokales Extremum**, wenn $f(\mathbf{x})$ lokales Minimum oder lokales Maximum ist.

Anschaulich kann man sich eine Funktion $f(x,y)$ als Gebirge vorstellen. Befindet man sich am Ort (x_0,y_0), dann zeigt der Gradient $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$ in Richtung des steilsten Anstiegs. $-\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$ zeigt in die Richtung des steilsten Abstiegs. Gibt es keine Aufstiegsrichtung, dann befindet man sich u. U. in einem lokalen Minimum oder lokalen Maximum.

►**Definition A.13.8.** Ein Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt **stationärer Punkt**, wenn der Gradient in diesem Punkt der Nullvektor ist: $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Zur Bestimmung aller stationären Punkte ist also die Gleichung $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ zu lösen.

►**Definition A.13.9.** Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$ des Definitionsbereichs D einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **innerer Punkt**, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass alle Punkte $\mathbf{x}$, deren Abstand $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ kleiner als c ist, auch in D liegen.

Notwendiges Kriterium 1. Ordnung
Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ innerer Punkt von D und ein lokales Extremum von $f(\mathbf{x})$, dann gilt: $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Ist $f(\mathbf{x})$ zweimal stetig partiell differenzierbar und ist $\mathbf{x}_0$ ein stationärer Punkt, dann lautet die quadratische Approximation von $f(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)'\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Somit entscheidet das Verhalten von $q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)'\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, ob $\mathbf{x}_0$ ein lokales Extremum ist. Nimmt $q(\mathbf{x})$ nur positive (negative) Werte an, dann ist $\mathbf{x}_0$ ein lokales Minimum (Maximum). Man definiert daher:

Positiv/negativ definit
Sei $\mathbf{A}$ eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix. $\mathbf{A}$ heißt **positiv definit**, wenn $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ ist für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. $\mathbf{A}$ heißt **negativ definit**, wenn $-\mathbf{A}$ positiv definit ist. Sonst heißt $\mathbf{A}$ indefinit.

Kriterium für positive Definitheit

1) Ist $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine (2×2)-Matrix, dann ist $\mathbf{A}$ genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $ad - bc > 0$ gilt.
2) Ist $\mathbf{A}$ eine $(n \times n)$-Matrix, dann ist $\mathbf{A}$ positiv definit, wenn alle Determinanten $\det(\mathbf{A}_i)$ der Teilmatrizen $\mathbf{A}_i$, die aus den ersten i Zeilen und Spalten von $\mathbf{A}$ bestehen, positiv sind.

Hinreichendes Kriterium 2. Ordnung, Sattelpunkt
Ist $f(\mathbf{x})$ zweimal stetig differenzierbar und ist $\mathbf{x}_0$ ein stationärer Punkt, der innerer Punkt von D ist, dann gilt:

1) Ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ positiv definit, dann ist $\mathbf{x}_0$ *lokales Minimum*.
2) Ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ negativ definit, dann ist $\mathbf{x}_0$ *lokales Maximum*.
3) Ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ indefinit, dann heißt $\mathbf{x}_0$ *Sattelpunkt*.

Das Kriterium macht *keine* Aussage, wenn die Hesse-Matrix nur **positiv semidefinit** ist, d. h. $\mathbf{x}'\mathbf{H}_f\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt, oder **negativ semidefinit** ist, d. h. $\mathbf{x}'\mathbf{H}_f\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt!

A.13.4 Optimierung unter Nebenbedingungen

Problem: Bestimme die Extremalstellen einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, unter den m Nebenbedingungen

$$g_1(\mathbf{x}) = 0,\ g_2(\mathbf{x}) = 0,\ \ldots,\ g_m(\mathbf{x}) = 0.$$

Man spricht von einem **restringierten Optimierungsproblem**. Kann man diese m Gleichungen nach m Variablen, etwa nach $x_{n-m+1}, \dots, x_n$, auflösen,

$$x_{n-m+1} = h_1(x_1, \dots, x_{n-m}), \dots x_n = h_m(x_1, \dots, x_{n-m}),$$

dann erhält man durch Einsetzen in $f(x_1, \dots, x_n)$ ein unrestringiertes Optimierungsproblem: Minimiere

$$f(x_1, \dots, x_{n-m}, h_1(x_1, \dots, x_{n-m}), \dots, h_m(x_1, \dots, x_{n-m}))$$

in den $n - m$ Variablen $x_1, \dots, x_{n-m}$.

Beispiel: Minimiere $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x + y = 10$. Die Nebenbedingung ist äquivalent zu $y = 10 - x$. Einsetzen liefert: Minimiere $f(x,10-x) = x^2 + (10-x)^2$ in $x \in \mathbb{R}$.

Häufig ist dieses Vorgehen jedoch nicht möglich. Dann verwendet man die Lagrange-Methode:

Lagrange-Ansatz, Lagrange-Funktion

Seien die Zielfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ und die Funktionen $g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\mathbf{x}_0$ eine lokale Extremalstelle von $f(\mathbf{x})$ unter den Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Die $(m \times n)$- Jakobi-Matrix

$$g'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

der partiellen Ableitungen der g_i nach $x_1, \dots, x_n$ habe vollen Rang m. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, die **Lagrange-Multiplikatoren**, so dass gilt:

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\,.$$

Die Funktion $F : D \to \mathbb{R}^n$,

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}),$$

heißt **Lagrange-Funktion**. Die obige Bedingung besagt, dass ein lokales Extremum $\mathbf{x}_0$ von $f(\mathbf{x})$ unter den Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, m$, ein *stationärer* Punkt der Lagrange-Funktion ist.

A.14 Mehrdimensionale Integration

Ist $f(x,y)$ eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann ist auch die Funktion $g(y) = f(x,y)$, $y \in \mathbb{R}$, die man durch Fixieren von x erhält, stetig. Somit kann man das Integral

$$I(x) = \int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

berechnen (Integration über y). $I(x)$ ist wieder stetig, so dass man $I(x)$ über ein Intervall $(a,b]$ integrieren kann:

$$I = \int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dy\,.$$

Man berechnet also zunächst das sogenannte **innere Integral** $I(x)$ und dann das **äußere Integral** I. Die Intervalle $(a,b]$ und $(c,d]$ definieren ein **Intervall im** $\mathbb{R}^2$: $R = (a,b] \times (c,d]$. Man schreibt: $\int_R f(x,y)\,dx\,dy$.

Mehrdimensionales Integral
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine (stückweise) stetige Funktion und $D = (\mathbf{a},\mathbf{b}] = (a_1,b_1] \times \cdots \times (a_b,b_n]$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, ein Intervall, dann existiert das Integral

$$I = \int_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

und wird durch schrittweise Integration *von innen nach außen* berechnet:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n \right) \cdots\,dx_1\,.$$

Hierbei darf die Reihenfolge der Variablen, nach denen integriert wird, vertauscht werden. Für eine Funktion $f(x,y)$ gilt also:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x + 2y), \qquad (x,y) \in (0,\pi/2) \times (0,\pi/2).$$

Wir berechnen zunächst das innere Integral (Integration bzgl. y)

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{\pi/2} \sin(x + 2y)\, dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos(x + 2y) \right]_{y=0}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(x + \pi) \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ verwendet. Wir erhalten für das gesuchte Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(x,y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx \\ &= -\sin(\pi/2) + \sin(0) = 1. \end{aligned}$$

Anhang B
Glossar

B.1 Deutsch – Englisch

Abbildung	mapping, transformation
Abhängige Variable	dependent variable
Ablehnbereich	critical region
Ableitung	derivative
Änderungsrate	rate of change
Alternative H_1	alternative hypothesis
Annahmebereich	acceptance region
Asymptotisch unverzerrter Schätzer	asymptotically unbiased estimator
Ausdruck (mathematischer)	expression
Ausgang ($\omega \in \Omega$)	(possible) outcome
Balkendiagramm	bar chart
Bedingte Verteilung	conditional distribution (law)
Bedingte Wahrscheinlichkeit	conditional probability
Beobachtungsstudie	observational study
bestimmtes Integral	definite integral
Bestimmtheitsmaß R^2	coefficient of determination
Betrag, Absolutwert	absolute value
Determinante	determinant
Dichtefunktion	(probability) density function (p.d.f.)
differenzierbare Funktion	differentiable function
Differenzenquotient	difference quotient
disjunkt	disjoint
Dreiecksmatrix	triangular matrix
Dreisatz	rule of three
Eigenwert	eigenvalue
Empirische Verteilungsfunktion	empirical distribution function
Ereignis	(random) event
Ereignisalgebra	σ field
Erwartungswert	expectation, mean

A. Steland, *Basiswissen Statistik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-49948-1

F-Test	F-Test, variance ratio test
Folge (z. B. von Zahlen)	sequence
Folgerung	conclusion
Freiheitsgrade	degrees of freedom
ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	integers
gebrochen rationale Funktion	rational function
Gesetz der großen Zahlen	law of large numbers
Gleichung	equation
Gleichverteilung	uniform distribution
Grad (eines Polynoms)	degree
Grenzwert	limes
Grundgesamtheit	population
Häufigkeitstabelle	frequency table
identisch verteilt	identically distributed
Kerndichteschätzer	kernel density estimator
Kettenregel	chain rule
Kleinste-Quadrate Schätzung	least squares estimation
Komplementärmenge	complementary set
Konfidenzintervall	confidence interval
Konsistenz	consistency
Kontingenztafel	contingency table
Konvergenz, konvergieren gegen	convergence, converge to
Kreisdiagramm	pie chart
kritischer Wert	critical value
Kurtosis	kurtosis
leere Menge	empty set
linear unabhängig	linearly independent
lokales Extremum	local extremum
Meinungsumfrage	opinion poll
Menge	set
Merkmal	feature
Mittelwert (arithm.)	(arithmetic) average, sample mean
Münzwurf	coin toss
natürliche Zahlen	natural numbers
Nenner (eines Bruchs)	denominator
Nullhypothese H_0	null hypothesis
Ordnungsstatistik	order statistic
p Wert	p-value
partielle Ableitung	partial derivative
partielle Integration	integration by parts
Polynom	polynomial
Prozent, Prozentsatz	percent, percentage
Punktschätzer	point estimator
Quantil	quantile
Randverteilung	marginal distribution
reelle Zahlen	real numbers
Regressoren	explanatory variables

Reihe	series
Residuum	residual
Schätzer	estimator
Schiefe	skewness
Schnittpunkt	point of intersection
Schranke (untere/obere)	bound (lower/upper...)
Signifikanzniveau	significance level, type I error rate
Spaltenvektor	column vector
stetige Funktion	continuous function
Stichprobe	(random) sample
Stichprobenraum (Ergebnismenge)	sample space
Stichprobenvarianz	sample variance
Störparameter	nuisance parameter
Teilmenge	subset
Test zum Niveau α	level α test
Totalerhebung	census
Trendbereinigung	detrending
Treppenfunktion	step function
(stochastisch) unabhängig	(stochastically) independent
unendlich ∞	infinity
Ungleichung	inequality
Unstetigkeitsstelle	point of discontinuity
unverbundener t-Test (2 Stichproben)	independent samples t-test
unverzerrt / verzerrt	unbiased / biased
Varianz	variance
Variationskoeffizient	coefficient of variation
Vektorraum	vector space
Verbundener t-Test (2 Stichproben)	matched pairs t-test
Verteilung	distribution (law)
Verteilungsfunktion	(cumulative) distribution function (c.d.f.)
Verteilungskonvergenz	convergence of distribution
verzerrt	biased
Wahrscheinlichkeitsmaß	probability (measure)
Wahrscheinlichkeitsraum	probability space
Wendepunkt	point of inflection
Wertetabelle	table of values
Wurzel	root
Zähldichte	probability function
Zähler (eines Bruchs)	numerator
Zeilenvektor	row vector
Zentraler Grenzwertsatz	central limit theorem
Zielvariable (Regressand)	response variable
Zufallsexperiment	random experiment
Zufallsstichprobe	random sample
Zufallsvariable	random variable
Zufallszahl	random number

B.2 Englisch – Deutsch

Absolute value	Absolutwert, Betrag
Acceptance region	Annahmebereich
Alternative hypothesis	Alternativhypothese (H_1)
arithmetic average	arithmetischer Mittelwert
Asymptotically (un)biased	asymptotisch (un)verzerrt
average	Mittelwert
bar chart	Balkendiagramm
bias	Verzerrung, Bias
biased	verzerrt
bound (lower, upper)	Schranke (untere, obere)
census	Totalerhebung
central limit theorem (CLT)	Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS)
chain rule	Kettenregel
coefficient of variation	Variationskoeffizient
coin toss	Münzwurf
column vector	Spaltenvektor
complementary set	Komplementärmenge
confidence interval	Konfidenzinterval, Vertrauensbereich
conclusion	Schlussfolgerung, Folgerung
conditional distribution	bedingte Verteilung
conditional expectation	bedingter Erwartungswert
conditional probability	bedingte Wahrscheinlichkeit
consistency	Konsistenz (eines Schätzers)
contingency table	Kontingenztafel
continuous function	stetige Funktion
Continuity	Stetigkeit
convergence, to converge (to)	Konvergenz, konvergieren (gegen)
convergence in distribution	Konvergenz in Verteilung, Verteilungskonvergenz
critical region	Ablehnbereich (eines Tests)
critical value	kritischer Wert
cumulative distribution function (c.d.f.)	Verteilungsfunktion
definite integral	bestimmmtes Integral
degree	Grad (eines Polynoms)
degrees of freedom	Freiheitsgrade
(probability) density function	Dichtefunktion
denominator	Nenner (eines Bruchs)
dependent variable	abhängige Variable
derivative	Ableitung
determinant	Determinante
detrending	Trendbereinigung
disjoint	disjunkt
difference quotient	Differenzenquotient
differentiable function	differenzierbare Funktion
differentiability	Differenzierbarkeit
distribution	Verteilung
eigenvalue	Eigenwert
empirical distribution function (e.d.f.)	Empirische Verteilungsfunktion

empty set	leere Menge
equation	Gleichung
estimator	Schätzer
event	Ereignis
expectation	Erwartungswert
explanatory variable	erklärende Variable (Regression)
expression	Ausdruck
feature	Merkmale
frequency table	Häufigkeitstabelle
identically distributed	identisch verteilt
independent	unabhängig
independent events	unabhängige Ereignisse
independent random variables	unabhängige Zufallsvariablen
independent samples t test	unverbundener t-Test
inequality	Ungleichung
infinity	unendlich
integers	ganze Zahlen
integration by parts	partielle Integration
kernel density estimator	Kerndichteschätzer
kurtosis	Kurtosis
law	Verteilung, Verteilungsgesetz
law of large numbers (LLN)	Gesetz der Großen Zahlen
least squares estimation	Kleinste-Quadrate Schätzung
level α test	Test zum Niveau α
limes	Grenzwert, Limes
linearly independent	linear unabhängig
local extremum	lokales Extremum, lokaler Hochpunkt
lower bound	untere Schranke
nuisance parameter	Störparameter
marginal distribution	Randverteilung
matched pairs t test	verbundener t-Test
matrix	Matrix
mean	Erwartungswert
natural numbers	natürliche Zahlen
null hypothesis	Nullhypothese (H_0)
numerator	Zähler (eines Bruchs)
order statistic	Ordungsstatistik
opinion poll	Meinungsumfrage
p-value	p-Wert
partial derivative	partielle Ableitung
percent, percentage	Prozent, Prozentsatz
pie chart	Kreisdiagramm
point estimator	Punktschätzer
point of discontinuity	Unstetigkeitsstelle
point of inflection	Wendepunkt
point of intersection	Schnittpunkt
polynomial	Polynom
population	Grundgesamtheit, Population
probability (measure)	Wahrscheinlichkeitsmaß

probability (mass) function	Zähldichte
probability space	Wahrscheinlichkeitsraum
quantile	Quantil
random experiment	Zufallsexperiment
random number	Zufallszahl
random sample	Zufallsstichprobe, Stichprobe
random variable	Zufallsvariable
rational function	gebrochen rationale Funktion
real numbers	reelle Zahlen
realisation	Realisierung
residual	Residuum
response variable	Zielvariable (Regressand)
root	Wurzel, Nullstelle
row vector	Zeilenvektor
sample	Stichprobe
sample mean	Stichprobenmittel, arithmetisches Mittel
sample space	Stichprobenraum, Ergebnismenge
sample variance	Stichprobenvarianz
series	Reihe
set	Menge
sequence	Folge
step function	Treppenfunktion
significance level	Signifikanzniveau
stochastically independent	stochastisch unabhängig
skewness	Schiefe
stratified sample	geschichtete Zufallsauswahl
subset	Untermenge
table of values	Wertetabelle
transpose	Transponierte (einer Matrix)
type I error rate	Signifikanzniveau, α-Fehler, Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art
type II error rate	β-Fehler, Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art
unbiased	unverzerrt
uniform distribution	Gleichverteilung
variance	Varianz
vector	Vektor
vector space	Vektorraum

Anhang C
Tabellen

C.1 Normalverteilung

Überschreitungswahrscheinlichkeiten $1 - \Phi(x + h)$										
x	h									
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183

(Fortsetzung)

A. Steland, *Basiswissen Statistik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-49948-1

Überschreitungswahrscheinlichkeiten $1 - \Phi(x + h)$										
x	*h*									
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
Beispiel: $X \sim \mathcal{N}(0,1), P(X > 2.26) = 0.0119$										

Verteilungsfunktion $\Phi(x + h)$										
x	*h*									
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916

Verteilungsfunktion $\Phi(x+h)$										
x	h									
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981

Beispiel: $X \sim \mathcal{N}(3{,}9)$,
$P(X \leq 4.26) = P\left(\frac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{4.26-3}{3}\right) = \Phi(0.42) = 0.6628$

C.2 *t*-Verteilung

q-Quantile der $t(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	15.895	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807

(Fortsetzung)

q-Quantile der $t(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
24	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750
31	1.309	1.696	2.040	2.144	2.453	2.744
32	1.309	1.694	2.037	2.141	2.449	2.738

Beispiel: $X \sim t(8)$,
$P(X \leq c) = 0.95 \Rightarrow c = 1.860$

q-Quantile der $t(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
33	1.308	1.692	2.035	2.138	2.445	2.733
34	1.307	1.691	2.032	2.136	2.441	2.728
35	1.306	1.690	2.030	2.133	2.438	2.724
36	1.306	1.688	2.028	2.131	2.434	2.719
37	1.305	1.687	2.026	2.129	2.431	2.715
38	1.304	1.686	2.024	2.127	2.429	2.712
39	1.304	1.685	2.023	2.125	2.426	2.708
40	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704
41	1.303	1.683	2.020	2.121	2.421	2.701
42	1.302	1.682	2.018	2.120	2.418	2.698
43	1.302	1.681	2.017	2.118	2.416	2.695
44	1.301	1.680	2.015	2.116	2.414	2.692
45	1.301	1.679	2.014	2.115	2.412	2.690
46	1.300	1.679	2.013	2.114	2.410	2.687
47	1.300	1.678	2.012	2.112	2.408	2.685
48	1.299	1.677	2.011	2.111	2.407	2.682
49	1.299	1.677	2.010	2.110	2.405	2.680
50	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678
51	1.298	1.675	2.008	2.108	2.402	2.676
52	1.298	1.675	2.007	2.107	2.400	2.674
53	1.298	1.674	2.006	2.106	2.399	2.672
54	1.297	1.674	2.005	2.105	2.397	2.670
55	1.297	1.673	2.004	2.104	2.396	2.668

q-Quantile der $t(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
56	1.297	1.673	2.003	2.103	2.395	2.667
57	1.297	1.672	2.002	2.102	2.394	2.665
58	1.296	1.672	2.002	2.101	2.392	2.663
59	1.296	1.671	2.001	2.100	2.391	2.662
60	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660
61	1.296	1.670	2.000	2.099	2.389	2.659
62	1.295	1.670	1.999	2.098	2.388	2.657
63	1.295	1.669	1.998	2.097	2.387	2.656
64	1.295	1.669	1.998	2.096	2.386	2.655

C.3 χ^2-Verteilung

q-Quantile der $\chi^2(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
1	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879
2	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597
3	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838
4	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860
5	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086	16.750
6	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548
7	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278
8	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955
9	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589
10	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188
11	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757
12	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300
13	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819
14	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319
15	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801
16	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267
17	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718
18	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156
19	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582
20	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997
21	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401
22	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796

q-Quantile der $\chi^2(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
23	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181
24	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.559
25	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928
26	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290
27	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963	49.645
28	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993
29	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336
30	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672
31	41.422	44.985	48.232	49.226	52.191	55.003
32	42.585	46.194	49.480	50.487	53.486	56.328
33	43.745	47.400	50.725	51.743	54.776	57.648
34	44.903	48.602	51.966	52.995	56.061	58.964
35	46.059	49.802	53.203	54.244	57.342	60.275
36	47.212	50.998	54.437	55.489	58.619	61.581
37	48.363	52.192	55.668	56.730	59.893	62.883
38	49.513	53.384	56.896	57.969	61.162	64.181
39	50.660	54.572	58.120	59.204	62.428	65.476
40	51.805	55.758	59.342	60.436	63.691	66.766
41	52.949	56.942	60.561	61.665	64.950	68.053
42	54.090	58.124	61.777	62.892	66.206	69.336
43	55.230	59.304	62.990	64.116	67.459	70.616
44	56.369	60.481	64.201	65.337	68.710	71.893
45	57.505	61.656	65.410	66.555	69.957	73.166
46	58.641	62.830	66.617	67.771	71.201	74.437
47	59.774	64.001	67.821	68.985	72.443	75.704
48	60.907	65.171	69.023	70.197	73.683	76.969
49	62.038	66.339	70.222	71.406	74.919	78.231
50	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490
51	64.295	68.669	72.616	73.818	77.386	80.747
52	65.422	69.832	73.810	75.021	78.616	82.001
53	66.548	70.993	75.002	76.223	79.843	83.253
54	67.673	72.153	76.192	77.422	81.069	84.502
55	68.796	73.311	77.380	78.619	82.292	85.749
56	69.919	74.468	78.567	79.815	83.513	86.994
57	71.040	75.624	79.752	81.009	84.733	88.236
58	72.160	76.778	80.936	82.201	85.950	89.477
59	73.279	77.931	82.117	83.391	87.166	90.715
60	74.397	79.082	83.298	84.580	88.379	91.952

q-Quantile der $\chi^2(df)$-Verteilung						
	q					
df	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995
61	75.514	80.232	84.476	85.767	89.591	93.186
62	76.630	81.381	85.654	86.953	90.802	94.419
63	77.745	82.529	86.830	88.137	92.010	95.649
64	78.860	83.675	88.004	89.320	93.217	96.878
65	79.973	84.821	89.177	90.501	94.422	98.105
66	81.085	85.965	90.349	91.681	95.626	99.330
67	82.197	87.108	91.519	92.860	96.828	100.554
68	83.308	88.250	92.689	94.037	98.028	101.776
69	84.418	89.391	93.856	95.213	99.228	102.996
70	85.527	90.531	95.023	96.388	100.425	104.215

C.4 F-Verteilung

0.950 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	18.5	10.1	7.7	6.6	6.0	5.6	5.3	5.1
2	199	19.0	9.6	6.9	5.8	5.1	4.7	4.5	4.3
3	216	19.2	9.277	6.591	5.409	4.757	4.347	4.066	3.863
4	225	19.2	9.117	6.388	5.192	4.534	4.120	3.838	3.633
5	230	19.3	9.013	6.256	5.050	4.387	3.972	3.687	3.482
6	234	19.3	8.941	6.163	4.950	4.284	3.866	3.581	3.374
7	237	19.4	8.887	6.094	4.876	4.207	3.787	3.500	3.293
8	239	19.4	8.845	6.041	4.818	4.147	3.726	3.438	3.230
9	241	19.4	8.812	5.999	4.772	4.099	3.677	3.388	3.179
10	242	19.4	8.786	5.964	4.735	4.060	3.637	3.347	3.137
11	243	19.4	8.763	5.936	4.704	4.027	3.603	3.313	3.102
12	244	19.4	8.745	5.912	4.678	4.000	3.575	3.284	3.073
13	245	19.4	8.729	5.891	4.655	3.976	3.550	3.259	3.048
14	245	19.4	8.715	5.873	4.636	3.956	3.529	3.237	3.025
15	246	19.4	8.703	5.858	4.619	3.938	3.511	3.218	3.006
16	246	19.4	8.692	5.844	4.604	3.922	3.494	3.202	2.989
17	247	19.4	8.683	5.832	4.590	3.908	3.480	3.187	2.974

0.950 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	247	19.4	8.675	5.821	4.579	3.896	3.467	3.173	2.960
19	248	19.4	8.667	5.811	4.568	3.884	3.455	3.161	2.948
20	248	19.4	8.660	5.803	4.558	3.874	3.445	3.150	2.936
21	248	19.4	8.654	5.795	4.549	3.865	3.435	3.140	2.926
22	249	19.5	8.648	5.787	4.541	3.856	3.426	3.131	2.917
23	249	19.5	8.643	5.781	4.534	3.849	3.418	3.123	2.908
24	249	19.5	8.639	5.774	4.527	3.841	3.410	3.115	2.900
25	249	19.5	8.634	5.769	4.521	3.835	3.404	3.108	2.893
26	249	19.5	8.630	5.763	4.515	3.829	3.397	3.102	2.886
27	250	19.5	8.626	5.759	4.510	3.823	3.391	3.095	2.880
28	250	19.5	8.623	5.754	4.505	3.818	3.386	3.090	2.874
29	250	19.5	8.620	5.750	4.500	3.813	3.381	3.084	2.869
30	250	19.5	8.617	5.746	4.496	3.808	3.376	3.079	2.864
31	250	19.5	8.614	5.742	4.492	3.804	3.371	3.075	2.859

Beispiel: $X \sim F(4, 6), P(X \leq c) = 0.9500 \Rightarrow c = 4.534$

Es gilt: $F(df_1, df_2)_\alpha = \frac{1}{F(df_2, df_1)_{1-\alpha}}$

0.950 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	5.0	4.8	4.7	4.7	4.6	4.5	4.5	4.5	4.4
2	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6	3.6	3.6
3	3.708	3.587	3.490	3.411	3.344	3.287	3.239	3.197	3.160
4	3.478	3.357	3.259	3.179	3.112	3.056	3.007	2.965	2.928
5	3.326	3.204	3.106	3.025	2.958	2.901	2.852	2.810	2.773
6	3.217	3.095	2.996	2.915	2.848	2.790	2.741	2.699	2.661
7	3.135	3.012	2.913	2.832	2.764	2.707	2.657	2.614	2.577
8	3.072	2.948	2.849	2.767	2.699	2.641	2.591	2.548	2.510
9	3.020	2.896	2.796	2.714	2.646	2.588	2.538	2.494	2.456
10	2.978	2.854	2.753	2.671	2.602	2.544	2.494	2.450	2.412
11	2.943	2.818	2.717	2.635	2.565	2.507	2.456	2.413	2.374
12	2.913	2.788	2.687	2.604	2.534	2.475	2.425	2.381	2.342
13	2.887	2.761	2.660	2.577	2.507	2.448	2.397	2.353	2.314
14	2.865	2.739	2.637	2.554	2.484	2.424	2.373	2.329	2.290
15	2.845	2.719	2.617	2.533	2.463	2.403	2.352	2.308	2.269
16	2.828	2.701	2.599	2.515	2.445	2.385	2.333	2.289	2.250

0.950 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung

	df_2								
df_1	10	11	12	13	14	15	16	17	18
17	2.812	2.685	2.583	2.499	2.428	2.368	2.317	2.272	2.233
18	2.798	2.671	2.568	2.484	2.413	2.353	2.302	2.257	2.217
19	2.785	2.658	2.555	2.471	2.400	2.340	2.288	2.243	2.203
20	2.774	2.646	2.544	2.459	2.388	2.328	2.276	2.230	2.191
21	2.764	2.636	2.533	2.448	2.377	2.316	2.264	2.219	2.179
22	2.754	2.626	2.523	2.438	2.367	2.306	2.254	2.208	2.168
23	2.745	2.617	2.514	2.429	2.357	2.297	2.244	2.199	2.159
24	2.737	2.609	2.505	2.420	2.349	2.288	2.235	2.190	2.150
25	2.730	2.601	2.498	2.412	2.341	2.280	2.227	2.181	2.141
26	2.723	2.594	2.491	2.405	2.333	2.272	2.220	2.174	2.134
27	2.716	2.588	2.484	2.398	2.326	2.265	2.212	2.167	2.126
28	2.710	2.582	2.478	2.392	2.320	2.259	2.206	2.160	2.119
29	2.705	2.576	2.472	2.386	2.314	2.253	2.200	2.154	2.113
30	2.700	2.570	2.466	2.380	2.308	2.247	2.194	2.148	2.107
31	2.695	2.565	2.461	2.375	2.303	2.241	2.188	2.142	2.102

0.950 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung

	df_2								
df_1	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	4.4	4.4	4.3	4.3	4.3	4.3	4.2	4.2	4.2
2	3.5	3.5	3.5	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4
3	3.127	3.098	3.072	3.049	3.028	3.009	2.991	2.975	2.960
4	2.895	2.866	2.840	2.817	2.796	2.776	2.759	2.743	2.728
5	2.740	2.711	2.685	2.661	2.640	2.621	2.603	2.587	2.572
6	2.628	2.599	2.573	2.549	2.528	2.508	2.490	2.474	2.459
7	2.544	2.514	2.488	2.464	2.442	2.423	2.405	2.388	2.373
8	2.477	2.447	2.420	2.397	2.375	2.355	2.337	2.321	2.305
9	2.423	2.393	2.366	2.342	2.320	2.300	2.282	2.265	2.250
10	2.378	2.348	2.321	2.297	2.275	2.255	2.236	2.220	2.204
11	2.340	2.310	2.283	2.259	2.236	2.216	2.198	2.181	2.166
12	2.308	2.278	2.250	2.226	2.204	2.183	2.165	2.148	2.132
13	2.280	2.250	2.222	2.198	2.175	2.155	2.136	2.119	2.103
14	2.256	2.225	2.197	2.173	2.150	2.130	2.111	2.094	2.078
15	2.234	2.203	2.176	2.151	2.128	2.108	2.089	2.072	2.056
16	2.215	2.184	2.156	2.131	2.109	2.088	2.069	2.052	2.036
17	2.198	2.167	2.139	2.114	2.091	2.070	2.051	2.034	2.018
18	2.182	2.151	2.123	2.098	2.075	2.054	2.035	2.018	2.002

0.950 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	19	20	21	22	23	24	25	26	27
19	2.168	2.137	2.109	2.084	2.061	2.040	2.021	2.003	1.987
20	2.155	2.124	2.096	2.071	2.048	2.027	2.007	1.990	1.974
21	2.144	2.112	2.084	2.059	2.036	2.015	1.995	1.978	1.961
22	2.133	2.102	2.073	2.048	2.025	2.003	1.984	1.966	1.950
23	2.123	2.092	2.063	2.038	2.014	1.993	1.974	1.956	1.940
24	2.114	2.082	2.054	2.028	2.005	1.984	1.964	1.946	1.930
25	2.106	2.074	2.045	2.020	1.996	1.975	1.955	1.938	1.921
26	2.098	2.066	2.037	2.012	1.988	1.967	1.947	1.929	1.913
27	2.090	2.059	2.030	2.004	1.981	1.959	1.939	1.921	1.905
28	2.084	2.052	2.023	1.997	1.973	1.952	1.932	1.914	1.898
29	2.077	2.045	2.016	1.990	1.967	1.945	1.926	1.907	1.891
30	2.071	2.039	2.010	1.984	1.961	1.939	1.919	1.901	1.884
31	2.066	2.033	2.004	1.978	1.955	1.933	1.913	1.895	1.878

0.975 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	648	38.5	17.4	12.2	10.0	8.8	8.1	7.6	7.2
2	799	39.0	16.0	10.6	8.4	7.3	6.5	6.1	5.7
3	864	39.2	15.439	9.979	7.764	6.599	5.890	5.416	5.078
4	900	39.2	15.101	9.605	7.388	6.227	5.523	5.053	4.718
5	922	39.3	14.885	9.364	7.146	5.988	5.285	4.817	4.484
6	937	39.3	14.735	9.197	6.978	5.820	5.119	4.652	4.320
7	948	39.4	14.624	9.074	6.853	5.695	4.995	4.529	4.197
8	957	39.4	14.540	8.980	6.757	5.600	4.899	4.433	4.102
9	963	39.4	14.473	8.905	6.681	5.523	4.823	4.357	4.026
10	969	39.4	14.419	8.844	6.619	5.461	4.761	4.295	3.964
11	973	39.4	14.374	8.794	6.568	5.410	4.709	4.243	3.912
12	977	39.4	14.337	8.751	6.525	5.366	4.666	4.200	3.868
13	980	39.4	14.304	8.715	6.488	5.329	4.628	4.162	3.831
14	983	39.4	14.277	8.684	6.456	5.297	4.596	4.130	3.798
15	985	39.4	14.253	8.657	6.428	5.269	4.568	4.101	3.769
16	987	39.4	14.232	8.633	6.403	5.244	4.543	4.076	3.744
17	989	39.4	14.213	8.611	6.381	5.222	4.521	4.054	3.722
18	990	39.4	14.196	8.592	6.362	5.202	4.501	4.034	3.701
19	992	39.4	14.181	8.575	6.344	5.184	4.483	4.016	3.683
20	993	39.4	14.167	8.560	6.329	5.168	4.467	3.999	3.667

0.975 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	994	39.5	14.155	8.546	6.314	5.154	4.452	3.985	3.652
22	995	39.5	14.144	8.533	6.301	5.141	4.439	3.971	3.638
23	996	39.5	14.134	8.522	6.289	5.128	4.426	3.959	3.626
24	997	39.5	14.124	8.511	6.278	5.117	4.415	3.947	3.614
25	998	39.5	14.115	8.501	6.268	5.107	4.405	3.937	3.604
26	999	39.5	14.107	8.492	6.258	5.097	4.395	3.927	3.594
27	1000	39.5	14.100	8.483	6.250	5.088	4.386	3.918	3.584
28	1000	39.5	14.093	8.476	6.242	5.080	4.378	3.909	3.576
29	1001	39.5	14.087	8.468	6.234	5.072	4.370	3.901	3.568
30	1001	39.5	14.081	8.461	6.227	5.065	4.362	3.894	3.560
31	1002	39.5	14.075	8.455	6.220	5.058	4.356	3.887	3.553

Beispiel: $X \sim F(4, 6), P(X \leq c) = 0.9750 \Rightarrow c = 6.227$

Es gilt: $F(df_1, df_2)_\alpha = \frac{1}{F(df_2, df_1)_{1-\alpha}}$

0.975 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	6.9	6.7	6.6	6.4	6.3	6.2	6.1	6.0	6.0
2	5.5	5.3	5.1	5.0	4.9	4.8	4.7	4.6	4.6
3	4.826	4.630	4.474	4.347	4.242	4.153	4.077	4.011	3.954
4	4.468	4.275	4.121	3.996	3.892	3.804	3.729	3.665	3.608
5	4.236	4.044	3.891	3.767	3.663	3.576	3.502	3.438	3.382
6	4.072	3.881	3.728	3.604	3.501	3.415	3.341	3.277	3.221
7	3.950	3.759	3.607	3.483	3.380	3.293	3.219	3.156	3.100
8	3.855	3.664	3.512	3.388	3.285	3.199	3.125	3.061	3.005
9	3.779	3.588	3.436	3.312	3.209	3.123	3.049	2.985	2.929
10	3.717	3.526	3.374	3.250	3.147	3.060	2.986	2.922	2.866
11	3.665	3.474	3.321	3.197	3.095	3.008	2.934	2.870	2.814
12	3.621	3.430	3.277	3.153	3.050	2.963	2.889	2.825	2.769
13	3.583	3.392	3.239	3.115	3.012	2.925	2.851	2.786	2.730
14	3.550	3.359	3.206	3.082	2.979	2.891	2.817	2.753	2.696
15	3.522	3.330	3.177	3.053	2.949	2.862	2.788	2.723	2.667
16	3.496	3.304	3.152	3.027	2.923	2.836	2.761	2.697	2.640
17	3.474	3.282	3.129	3.004	2.900	2.813	2.738	2.673	2.617
18	3.453	3.261	3.108	2.983	2.879	2.792	2.717	2.652	2.596
19	3.435	3.243	3.090	2.965	2.861	2.773	2.698	2.633	2.576
20	3.419	3.226	3.073	2.948	2.844	2.756	2.681	2.616	2.559

0.975 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	10	11	12	13	14	15	16	17	18
21	3.403	3.211	3.057	2.932	2.828	2.740	2.665	2.600	2.543
22	3.390	3.197	3.043	2.918	2.814	2.726	2.651	2.585	2.529
23	3.377	3.184	3.031	2.905	2.801	2.713	2.637	2.572	2.515
24	3.365	3.173	3.019	2.893	2.789	2.701	2.625	2.560	2.503
25	3.355	3.162	3.008	2.882	2.778	2.689	2.614	2.548	2.491
26	3.345	3.152	2.998	2.872	2.767	2.679	2.603	2.538	2.481
27	3.335	3.142	2.988	2.862	2.758	2.669	2.594	2.528	2.471
28	3.327	3.133	2.979	2.853	2.749	2.660	2.584	2.519	2.461
29	3.319	3.125	2.971	2.845	2.740	2.652	2.576	2.510	2.453
30	3.311	3.118	2.963	2.837	2.732	2.644	2.568	2.502	2.445
31	3.304	3.110	2.956	2.830	2.725	2.636	2.560	2.494	2.437

0.975 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	5.9	5.9	5.8	5.8	5.7	5.7	5.7	5.7	5.6
2	4.5	4.5	4.4	4.4	4.3	4.3	4.3	4.3	4.2
3	3.903	3.859	3.819	3.783	3.750	3.721	3.694	3.670	3.647
4	3.559	3.515	3.475	3.440	3.408	3.379	3.353	3.329	3.307
5	3.333	3.289	3.250	3.215	3.183	3.155	3.129	3.105	3.083
6	3.172	3.128	3.090	3.055	3.023	2.995	2.969	2.945	2.923
7	3.051	3.007	2.969	2.934	2.902	2.874	2.848	2.824	2.802
8	2.956	2.913	2.874	2.839	2.808	2.779	2.753	2.729	2.707
9	2.880	2.837	2.798	2.763	2.731	2.703	2.677	2.653	2.631
10	2.817	2.774	2.735	2.700	2.668	2.640	2.613	2.590	2.568
11	2.765	2.721	2.682	2.647	2.615	2.586	2.560	2.536	2.514
12	2.720	2.676	2.637	2.602	2.570	2.541	2.515	2.491	2.469
13	2.681	2.637	2.598	2.563	2.531	2.502	2.476	2.451	2.429
14	2.647	2.603	2.564	2.528	2.497	2.468	2.441	2.417	2.395
15	2.617	2.573	2.534	2.498	2.466	2.437	2.411	2.387	2.364
16	2.591	2.547	2.507	2.472	2.440	2.411	2.384	2.360	2.337
17	2.567	2.523	2.483	2.448	2.416	2.386	2.360	2.335	2.313
18	2.546	2.501	2.462	2.426	2.394	2.365	2.338	2.314	2.291
19	2.526	2.482	2.442	2.407	2.374	2.345	2.318	2.294	2.271
20	2.509	2.464	2.425	2.389	2.357	2.327	2.300	2.276	2.253
21	2.493	2.448	2.409	2.373	2.340	2.311	2.284	2.259	2.237
22	2.478	2.434	2.394	2.358	2.325	2.296	2.269	2.244	2.222

0.975 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung									
	df_2								
df_1	19	20	21	22	23	24	25	26	27
23	2.465	2.420	2.380	2.344	2.312	2.282	2.255	2.230	2.208
24	2.452	2.408	2.368	2.331	2.299	2.269	2.242	2.217	2.195
25	2.441	2.396	2.356	2.320	2.287	2.257	2.230	2.205	2.183
26	2.430	2.385	2.345	2.309	2.276	2.246	2.219	2.194	2.171
27	2.420	2.375	2.335	2.299	2.266	2.236	2.209	2.184	2.161
28	2.411	2.366	2.325	2.289	2.256	2.226	2.199	2.174	2.151
29	2.402	2.357	2.317	2.280	2.247	2.217	2.190	2.165	2.142
30	2.394	2.349	2.308	2.272	2.239	2.209	2.182	2.157	2.133
31	2.386	2.341	2.300	2.264	2.231	2.201	2.174	2.148	2.125

0.995 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung								
	df_2							
df_1	3	4	5	6	7	8	9	10
2	49.8	26.3	18.3	14.5	12.4	11.0	10.1	9.4
3	47.467	24.259	16.530	12.917	10.882	9.596	8.717	8.081
4	46.195	23.155	15.556	12.028	10.050	8.805	7.956	7.343
5	45.392	22.456	14.940	11.464	9.522	8.302	7.471	6.872
6	44.838	21.975	14.513	11.073	9.155	7.952	7.134	6.545
7	44.434	21.622	14.200	10.786	8.885	7.694	6.885	6.302
8	44.126	21.352	13.961	10.566	8.678	7.496	6.693	6.116
9	43.882	21.139	13.772	10.391	8.514	7.339	6.541	5.968
10	43.686	20.967	13.618	10.250	8.380	7.211	6.417	5.847
11	43.524	20.824	13.491	10.133	8.270	7.104	6.314	5.746
12	43.387	20.705	13.384	10.034	8.176	7.015	6.227	5.661
13	43.271	20.603	13.293	9.950	8.097	6.938	6.153	5.589
14	43.172	20.515	13.215	9.877	8.028	6.872	6.089	5.526
15	43.085	20.438	13.146	9.814	7.968	6.814	6.032	5.471
16	43.008	20.371	13.086	9.758	7.915	6.763	5.983	5.422
17	42.941	20.311	13.033	9.709	7.868	6.718	5.939	5.379
18	42.880	20.258	12.985	9.664	7.826	6.678	5.899	5.340
19	42.826	20.210	12.942	9.625	7.788	6.641	5.864	5.305
20	42.778	20.167	12.903	9.589	7.754	6.608	5.832	5.274
21	42.733	20.128	12.868	9.556	7.723	6.578	5.803	5.245
22	42.693	20.093	12.836	9.526	7.695	6.551	5.776	5.219
23	42.656	20.060	12.807	9.499	7.669	6.526	5.752	5.195
24	42.622	20.030	12.780	9.474	7.645	6.503	5.729	5.173
25	42.591	20.002	12.755	9.451	7.623	6.482	5.708	5.153

0.995 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung								
	df_2							
df_1	3	4	5	6	7	8	9	10
26	42.562	19.977	12.732	9.430	7.603	6.462	5.689	5.134
27	42.535	19.953	12.711	9.410	7.584	6.444	5.671	5.116
28	42.511	19.931	12.691	9.392	7.566	6.427	5.655	5.100
29	42.487	19.911	12.673	9.374	7.550	6.411	5.639	5.085
30	42.466	19.892	12.656	9.358	7.534	6.396	5.625	5.071
31	42.446	19.874	12.639	9.343	7.520	6.382	5.611	5.057

Beispiel: $X \sim F(4,6), P(X \leq c) = 0.9950 \Rightarrow c = 12.028$

Es gilt: $F(df_1, df_2)_\alpha = \frac{1}{F(df_2, df_1)_{1-\alpha}}$

0.995 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung								
	df_2							
df_1	11	12	13	14	15	16	17	18
2	8.9	8.5	8.2	7.9	7.7	7.5	7.4	7.2
3	7.600	7.226	6.926	6.680	6.476	6.303	6.156	6.028
4	6.881	6.521	6.233	5.998	5.803	5.638	5.497	5.375
5	6.422	6.071	5.791	5.562	5.372	5.212	5.075	4.956
6	6.102	5.757	5.482	5.257	5.071	4.913	4.779	4.663
7	5.865	5.525	5.253	5.031	4.847	4.692	4.559	4.445
8	5.682	5.345	5.076	4.857	4.674	4.521	4.389	4.276
9	5.537	5.202	4.935	4.717	4.536	4.384	4.254	4.141
10	5.418	5.085	4.820	4.603	4.424	4.272	4.142	4.030
11	5.320	4.988	4.724	4.508	4.329	4.179	4.050	3.938
12	5.236	4.906	4.643	4.428	4.250	4.099	3.971	3.860
13	5.165	4.836	4.573	4.359	4.181	4.031	3.903	3.793
14	5.103	4.775	4.513	4.299	4.122	3.972	3.844	3.734
15	5.049	4.721	4.460	4.247	4.070	3.920	3.793	3.683
16	5.001	4.674	4.413	4.200	4.024	3.875	3.747	3.637
17	4.959	4.632	4.372	4.159	3.983	3.834	3.707	3.597
18	4.921	4.595	4.334	4.122	3.946	3.797	3.670	3.560
19	4.886	4.561	4.301	4.089	3.913	3.764	3.637	3.527
20	4.855	4.530	4.270	4.059	3.883	3.734	3.607	3.498
21	4.827	4.502	4.243	4.031	3.855	3.707	3.580	3.471
22	4.801	4.476	4.217	4.006	3.830	3.682	3.555	3.446
23	4.778	4.453	4.194	3.983	3.807	3.659	3.532	3.423
24	4.756	4.431	4.173	3.961	3.786	3.638	3.511	3.402
25	4.736	4.412	4.153	3.942	3.766	3.618	3.492	3.382

0.995 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung

	df_2							
df_1	11	12	13	14	15	16	17	18
26	4.717	4.393	4.134	3.923	3.748	3.600	3.473	3.364
27	4.700	4.376	4.117	3.906	3.731	3.583	3.457	3.347
28	4.684	4.360	4.101	3.891	3.715	3.567	3.441	3.332
29	4.668	4.345	4.087	3.876	3.701	3.553	3.426	3.317
30	4.654	4.331	4.073	3.862	3.687	3.539	3.412	3.303
31	4.641	4.318	4.060	3.849	3.674	3.526	3.399	3.290

0.995 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung

	df_2							
df_1	19	20	21	22	23	24	25	26
2	7.1	7.0	6.9	6.8	6.7	6.7	6.6	6.5
3	5.916	5.818	5.730	5.652	5.582	5.519	5.462	5.409
4	5.268	5.174	5.091	5.017	4.950	4.890	4.835	4.785
5	4.853	4.762	4.681	4.609	4.544	4.486	4.433	4.384
6	4.561	4.472	4.393	4.322	4.259	4.202	4.150	4.103
7	4.345	4.257	4.179	4.109	4.047	3.991	3.939	3.893
8	4.177	4.090	4.013	3.944	3.882	3.826	3.776	3.730
9	4.043	3.956	3.880	3.812	3.750	3.695	3.645	3.599
10	3.933	3.847	3.771	3.703	3.642	3.587	3.537	3.492
11	3.841	3.756	3.680	3.612	3.551	3.497	3.447	3.402
12	3.763	3.678	3.602	3.535	3.475	3.420	3.370	3.325
13	3.696	3.611	3.536	3.469	3.408	3.354	3.304	3.259
14	3.638	3.553	3.478	3.411	3.351	3.296	3.247	3.202
15	3.587	3.502	3.427	3.360	3.300	3.246	3.196	3.151
16	3.541	3.457	3.382	3.315	3.255	3.201	3.151	3.107
17	3.501	3.416	3.342	3.275	3.215	3.161	3.111	3.067
18	3.465	3.380	3.305	3.239	3.179	3.125	3.075	3.031
19	3.432	3.347	3.273	3.206	3.146	3.092	3.043	2.998
20	3.402	3.318	3.243	3.176	3.116	3.062	3.013	2.968
21	3.375	3.291	3.216	3.149	3.089	3.035	2.986	2.941
22	3.350	3.266	3.191	3.125	3.065	3.011	2.961	2.917
23	3.327	3.243	3.168	3.102	3.042	2.988	2.939	2.894
24	3.306	3.222	3.147	3.081	3.021	2.967	2.918	2.873
25	3.287	3.203	3.128	3.061	3.001	2.947	2.898	2.853
26	3.269	3.184	3.110	3.043	2.983	2.929	2.880	2.835
27	3.252	3.168	3.093	3.026	2.966	2.912	2.863	2.818

0.995 -Quantile der $F(df_1, df_2)$-Verteilung

	df_2							
df_1	19	20	21	22	23	24	25	26
28	3.236	3.152	3.077	3.011	2.951	2.897	2.847	2.802
29	3.221	3.137	3.063	2.996	2.936	2.882	2.833	2.788
30	3.208	3.123	3.049	2.982	2.922	2.868	2.819	2.774
31	3.195	3.110	3.036	2.969	2.909	2.855	2.806	2.761

Literatur

1. Bamberg, G., & Bauer, F. (1998). *Statistik*. München: Oldenbourg.
2. Cramer, E., Kamps, U., & Oltmanns, E. (2007). *Wirtschaftsmathematik* (2. Aufl.). München: Oldenbourg.
3. Cramer, E., & Kamps, U. (2014). *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik* (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.
4. Dehling, H., & Haupt, B. (2004). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Berlin: Springer.
5. Fahrmeir, L., Künstler, R., Pigeot, I., & Tutz, G. (2004). *Statistik – Der Weg zur Datenanalyse* (5. Aufl.). Berlin: Springer.
6. Härdle, W. (1990). *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge: Cambridge University Press.
7. Hartung, J., Elpelt, B., & Klösener, K.-H. (2002). *Statistik* (13. Aufl.). München: Oldenbourg.
8. Kockelkorn, U. (1993). *Statistik für Anwender*. Berlin: Skript.
9. Kockelkorn, U. (2000). *Lineare statistische Methoden*. München: Oldenbourg.
10. Rohatgi, V. K., & Saleh, E. (2001). *An Introduction to Probability and Statistics*. New York: Wiley.
11. Schlittgen, R. (1996). *Statistische Inferenz*. München: Oldenbourg.
12. Schlittgen, R. (2003). *Einführung in die Statistik* (10. Aufl.). München: Oldenbourg.
13. Steland, A. (2004). *Mathematische Grundlagen der empirischen Forschung*. Berlin: Springer.
14. Stock, J. H., & Watson, M. H. (2007). *Introduction to Econometrics*. Boston: Pearson International.
15. Sydsaeter, K., & Hammond, P. (2006). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. München: Pearson-Studium.
16. Zucchini, W., Schlegel, A., Nenadić, O., & Sperlich, S. (2009). *Statistik für Bachelor- und Masterstudenten*. Berlin/Heidelberg: Springer.

A. Steland, *Basiswissen Statistik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-49948-1

Sachverzeichnis

A. Steland, *Basiswissen Statistik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-49948-1