Lösungshinweise (ausgewählte)

Kapitel 1

2. Bestimmen Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 200 bis 259 korrekt!

3./4. Die Beweise von Satz 1.4 (und damit entsprechend auch die von Aufgabe 4.) ergeben sich durch entsprechende Übertragungen des Beweisgedankens von Satz 1.3. Die Anzahl der Summanden ist nur jeweils um einen Summanden vorne und hinten bei Satz 1.4 bzw. um zwei Summanden vorne und hinten bei Aufgabe 4. größer.

5. Zerlegen Sie die Zahlen jeweils in alle „geeigneten“ Produkte mit zwei Faktoren (Beispiel: $51 = 3 \cdot 17$ ist geeignet, $51 = 17 \cdot 3$ dagegen nicht. Warum?). Berücksichtigen Sie auch, dass diese Produkte ebenfalls als wiederholte Addition gleicher Summanden dargestellt werden können.

6. Gehen Sie analog vor wie bei der Begründung von Satz 1.5 auf der Zahlenebene mit den Spiegelzahlen 74 und 47.

7. Abziehen von $10 \cdot b$ und gleichzeitige Addition von $1 \cdot b$ bedeutet, dass wir $9 \cdot b$ abziehen müssen.

8. Die Begründung verläuft analog zur Begründung von Satz 1.5.

9. Unterscheiden Sie die Fälle $a = b = c$, $a = b$, $a = c$, $b = c$ bzw. die Fälle: Alle drei Ziffern sind Null, je zwei Ziffern sind Null und je eine Ziffer ist Null.

Kapitel 2

6. 3) Sie können z. B. $110_{⑫}$ deuten als 1-1-0, als 11-0 und als 1-10.

8. Basis b: Ziffern $0, 1, 2, \ldots, b - 1$.

9. a) Ordnen Sie (von links nach rechts) jeder Karte den Wert 1 oder 0 zu, je nachdem, ob die Zahl auf der betreffenden Karte steht oder nicht. Deuten Sie diese Ziffernfolge als in der Basis 2 gegebene Zahl.

F. Padberg, A. Büchter, *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik*,
Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, DOI 10.1007/978-3-662-43449-9

b) Das Verfahren funktioniert stets eindeutig, da wir die Zahlen 1 bis 15 entsprechend ihrer Schreibweise in der Basis 2 auf die Karten verteilt haben und da diese Darstellung eindeutig ist.

c) Gehen Sie entsprechend für die Zahlen 1 bis 23 wie in 2) beschrieben vor.

17. Sie gehen genauso vor wie im dezimalen Stellenwertsystem. Sie vergleichen der Reihe nach von links nach rechts die Ziffern, bis Sie an eine Stelle kommen, wo die Ziffern verschieden sind. Die Zahl mit der kleineren Ziffer an dieser Stelle ist die kleinere Zahl (Begründung?).
18. b) Dieses Umrechnungsverfahren beruht auf dem sogenannten Horner-Schema. Schreiben Sie die in a) auszuführenden Rechenoperationen zunächst unausgerechnet mittels Klammern und lösen Sie anschließend die Klammern auf.
21. b) Setzen Sie in die Ausgangsgleichung $413 = 82 \cdot 5 + 3$ für 82 aufgrund der zweiten Gleichung ein und multiplizieren Sie aus. Gehen Sie entsprechend weiter vor.

Kapitel 3

2. In der Basis fünf müssen Sie die Additionsaufgaben von $0 + 0$ bis $4 + 4$ in dem vertrauten quadratischen Schema des kleinen Einspluseins anordnen und berechnen.
7. Zeigen Sie am Beispiel der Addition dreiziffriger Summanden die bei der Addition von links nach rechts auftretenden Schwierigkeiten auf.
9. b) Entbündeln Sie von den 7 Hundertern einen Hunderter (Notation: $7'$), das sind 10 Zehner. Entbündeln Sie von den 10 Zehnern einen Zehner (Notation: $0'$), das sind 10 Einer. Sie haben also jetzt 6 Hunderter, 9 Zehner, 12 Einer und können jetzt die Aufgabe problemlos rechnen.
14. Die Produktberechnung kann durch die formale Notation von einer bzw. zwei Nullzeilen erfolgen oder auf der Grundlage inhaltlicher Überlegungen über die Zerlegung von 406 bzw. 5007 in $400 + 6$ bzw. $5000 + 7$.
21. Erläutern Sie anhand einer Stellentafel, dass bei der Division durch 10 aus Zehnern Einer, aus Hundertern Zehner usw. werden.
25. Die Addition im Dualsystem ist besonders leicht, da das kleine Einspluseins nur aus den vier Aufgaben $0+0,\ 0+1,\ 1+0$ und $1+1$ besteht. Gleiches gilt für die Bildung der Gegenzahl, da wir hier nur 0 durch 1 und 1 durch 0 ersetzen müssen.

Kapitel 4

3. $a \cdot 1 = a,\ 1 \cdot a = a.$
5. a) Vergleichen Sie den Beweis von Satz 4.2.
7. Suchen Sie ein Gegenbeispiel.

8. Greifen Sie beim Begründungsniveau I auf die Grundvorstellung des Messens zurück und beachten Sie beim Begründungsniveau II und III, dass wegen $b > c$ in $m \cdot a = b$ und $n \cdot a = c$ auch $m > n$ gilt.
9. Es gilt $a \mid b$ und $a \nmid c$. Würde a trotzdem die Summe $b + c$ teilen, so müsste a nach der Differenzregel auch $b + c - b$, also c, teilen.
11. b) Die Summenregel gilt auch für mehr als zwei Summanden, wie man sukzessive zeigen kann. Im Sinne der wiederholten Addition gilt $c \cdot b = b + b + \ldots + b$ (c-mal).
14. Setzen Sie $m \cdot b = a$ in $n \cdot a = b$ ein und berücksichtigen Sie, dass n und m natürliche Zahlen sind.
15. Zeigen Sie zunächst, dass $b|(c \cdot b)$.
17. Benutzen Sie die Transitivität der Teilbarkeitsrelation.
20. Vergleichen Sie den Beweis für die Transitivität der Teilbarkeitsrelation.
21. Die erste Zeile ergibt sich aus dem Beweis von Satz 4.4. Suchen Sie für die drei übrigen Zeilen geeignete Beispiele aus, die belegen, dass die Wahrheitswerte hier jeweils teils w, teils f sind.

23.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
w	w	w	w	w
w	w	f	f	w
w	f	w	f	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	f	f	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

24. Gehen Sie entsprechend vor wie bei der Aufgabe 23, und bestimmen Sie zunächst die Wahrheitswerte der in Klammern stehenden Ausdrücke.
g) hat stets den Wahrheitswert w,
h) hat stets denselben Wahrheitswert wie p.

Kapitel 5

2. a) Beachten Sie, dass $25|100$ gilt, und gehen Sie entsprechend vor wie bei der Ableitung der Teilbarkeitsregel für 4.
b) Da $125|1000$, können Sie entsprechend vorgehen wie bei der Ableitung der Teilbarkeitsregel für 8.
4. Gehen Sie völlig analog vor wie beim Beweis der Teilbarkeitsregel für 9.
5. Sei n die Ziffer, dann hat die Zahl die Quersumme $9 \cdot n$.

6. Die Quersumme ändert sich nicht bei der Umstellung der Ziffern.
7. Zerlegen Sie die gewählten Zahlen jeweils entsprechend wie beim Beweisgang von Satz 5.4.
8. Wenden Sie in der einen Richtung die Produktregel und in der anderen Richtung die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen auf den Ausdruck $n \cdot 7 = 10 \cdot a$ an.
9. Wenden Sie die Summenregel bzw. die Variante der Summenregel sowie die Aussage von Aufgabe 8 mehrfach an.
10. Gehen Sie vor wie in Aufgabe 8.
12. Beachten Sie, dass $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ gilt und dass Sie beispielsweise 475.764 schreiben können als $475.764 = 475.475 + (764 - 475) = 475 \cdot 1001 + (764 - 475)$. Überlegen Sie, ob die Beschränkung auf maximal sechsziffrige Zahlen notwendig ist.
13. Gehen Sie bei b) entsprechend vor wie beim Beweis von Satz 5.6.
14. Die Vermutung ist zutreffend, falls die beiden Teiler keine gemeinsamen Teiler außer 1 haben. Begründen Sie die Aussage in diesem Fall über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.
15. Man ziehe jeweils das 91-Fache der letzten Ziffer ab. Also: letzte Ziffer streichen, vorletzte mit 9 multiplizieren und von der neuen Zahl subtrahieren.
16. Wir erhalten dieselbe Regel wie bei der Teilbarkeit durch 7. Diese Regel liefert gleichzeitig eine Aussage über die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 und 7.
17. Man bestimme jeweils ein Vielfaches des Teilers, das auf 1 endet. Da alle Primzahlen außer 2 und 5 auf 1, 3, 7 oder 9 enden (warum?!), ist dies stets möglich. Jetzt gewinnen Sie leicht den gesuchten Multiplikator.
18. Sie können analog zum entsprechenden Beweis in der Basis zehn vorgehen. So können Sie beispielsweise $3422_{⑥}$ folgendermaßen zerlegen und dann durch Rückgriff auf die Produkt- und Summenregel weiterschließen: $3422_{⑥} = 3420_{⑥} + 2 = 342_{⑥} \cdot 10_{⑥} + 2$.
    Wegen $10_{⑥} = 6$ gilt $2 | 10_{⑥}$ und damit gilt auch $2 | (342_{⑥} \cdot 10_{⑥})$.
20. Gehen Sie analog vor wie bei der Ableitung der Teilbarkeitsregel für 9 in der Basis zehn und zerlegen Sie beispielsweise $2321_{④} = 2 \cdot 1000_{④} + 3 \cdot 100_{④} + 2 \cdot 10_{④} + 1 = 2 \cdot (333_{④} + 1) + 3 \cdot (33_{④} + 1) + 2 \cdot (3 + 1) + 1$ geeignet.

23.–26. Benutzen Sie Wahrheitswertetafeln, und greifen Sie auf die Definition 5.5 zurück.

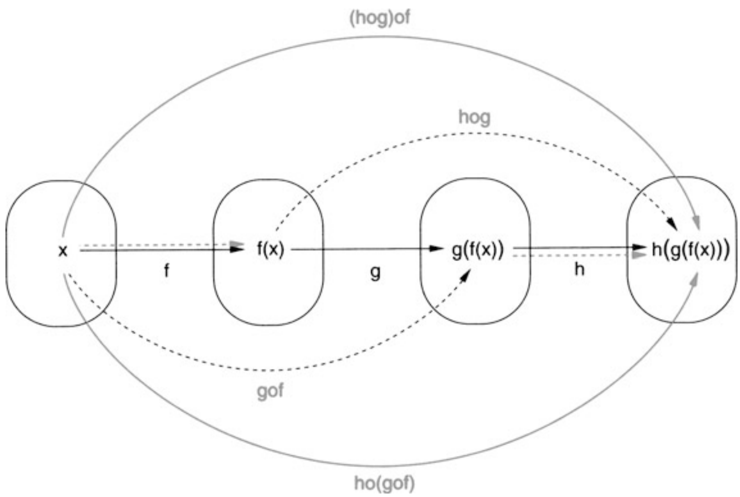
27. Stellen Sie die Wahrheitswertetafeln auf. Drei Fälle können vorkommen: stets wahr (logische Gesetze), stets falsch (logische Widersprüche) sowie teils wahr, teils falsch.
28. Benutzen Sie insbesondere Satz 5.8, 5. und 6.
29. Schreiben Sie die Sätze formal auf und wenden Sie die Verneinung der Subjunktion an.
30. Beachten Sie Satz 5.9 1. und Satz 5.8 5.

Kapitel 6

1. Nehmen Sie an, dass in $q \cdot t = n$ gelten würde: $t > n$.
3. Fall 1: Die Zahl ist eine Quadratzahl. Es gilt also $a = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Also gilt die Behauptung.
   Fall 2: Bei einer Zahl a sind ein Teiler n und der zugehörige komplementäre Teiler identisch. Dann gilt $a = n^2$, also die Behauptung.
9. Die Anwendung von Definition 6.2 und Definition 6.1 ergibt unmittelbar die Behauptung.
10. Sei v ein beliebiges Element von $V(kgV(a,b))$. Dann gilt: $kgV(a,b)|v$. Wegen $a|kgV(a,b)$ (Begründung?) und der Transitivität der Teilbarkeitsrelation gilt $a|v$, also $v \in V(a)$. Entsprechend zeigt man $v \in V(b)$, also $v \in V(a) \cap V(b)$ und daher $V(kgV(a,b)) \subseteq V(a) \cap V(b)$ (Begründung?).
11. Gehen Sie analog vor wie beim Beweis von Satz 6.2 in diesem Kapitel.
12. b) Bei Vielfachenmengen treten „Lücken" auf.
14. $A \cup B = B$
15. Die Mengen dürfen keine gemeinsamen Elemente enthalten, ihr Durchschnitt muss leer sein.
19. Unterscheiden Sie beim Zeichnen der Venn-Diagramme die vier Fälle $A \subset B$, $A \cap B = \{\}$, $A = B$ sowie insbesondere den Fall $A \cap B \neq \{\}$, $A \neq B$ und A keine Teilmenge von B.
21. Gehen Sie entsprechend vor wie beim ersten Beweisansatz von $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ im Anschluss an Satz 6.3.
22. Gehen Sie entsprechend vor wie beim zweiten Beweisansatz von $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ im Anschluss an Satz 6.3. In den Teilen a) und b) reduziert sich die Anzahl der zu unterscheidenden Fälle auf vier (völlig analog wie bei den entsprechenden Wahrheitstafeln bei den aussagenlogischen Gesetzen).
25. Ersetzen Sie in dem konkreten Beispiel vor Satz 6.4 jeweils 180 durch b und 16 durch r.
27. Lösen Sie die vorletzte Gleichung der in 26. c) gewonnenen Gleichungskette nach 15 auf und ersetzen Sie dann sukzessive 75 aufgrund der zweiten und 90 aufgrund der ersten Gleichung.
29. Zeigen Sie zunächst, dass sich 1 in der in Aufgabe 29 verlangten Form darstellen lässt. Multiplizieren Sie anschließend diese Gleichung mit einer beliebigen ganzen Zahl. Ergebnis?
32. Im Unterschied zu Aufgabe 31 gibt es hier keine Möglichkeit, von 25 nach 31 zu gelangen.
34. b) $a|b$, daher gilt $ggT(a,b) = a$ (Begründung?) und $kgV(a,b) = b$ (Begründung?).
    c) Da a und b teilerfremd sind, gilt $ggT(a,b) = 1$. In diesem Fall gilt $kgV(a,b) = a \cdot b$ (Begründung?).

Kapitel 7

3. Wegen $A = \{\}$ gibt es keine geordneten Paare $(a, b) \in A \times B$.
5. Es gilt $a < b$ genau dann, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a + n = b$. Definieren Sie entsprechend $a > b$.
10. 1) Aus $\bar{a} = \bar{b}$ ergibt sich fast unmittelbar aRb.
   2) Es gelte aRb. Wir müssen zeigen, dass dann $\bar{a} = \bar{b}$ gilt, d. h. dass für alle $x \in A$ gilt: $x \in \bar{a}$ genau dann, wenn $x \in \bar{b}$. Die beiden Teilrichtungen lassen sich bei Rückgriff auf die Voraussetzung aRb sowie auf die Transitivität bzw. Symmetrie von R leicht zeigen.
11. Untersuchen Sie die Relation $R = \{(x, y) | x$ gehört zur selben Klasse wie $y\}$.
19.



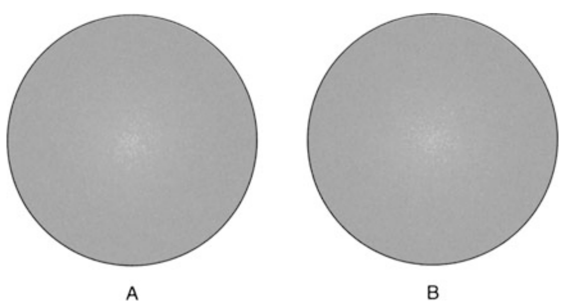
Also gilt für alle $x \in A$: Sowohl durch $(h \circ g) \circ f$ wie auch durch $h \circ (g \circ f)$ wird x jeweils *derselbe* Funktionswert $h(g(f(x)))$ zugeordnet. Also sind die beiden Funktionen $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ gleich.

Kapitel 8

5. Sie müssen zunächst zeigen, dass die Zuordnung $f : n \mapsto 2 \cdot n$ eine Abbildung ist. Diese Abbildung ist surjektiv; denn zu jeder geraden Zahl $2 \cdot m$ gibt es eine natürliche Zahl, nämlich m, mit $f(m) = 2 \cdot m$. Diese Abbildung ist injektiv; denn aus $f(m) = f(n)$ folgt leicht $m = n$. Die Abbildung f ist also bijektiv, und damit sind die Menge der geraden Zahlen und die Menge aller natürlichen Zahlen gleichmächtig.
6. A *glm* B bedeutet, dass es eine bijektive Abbildung (Funktion) von A nach B gibt. Dann ist auch die Umkehrfunktion bijektiv und damit gilt B *glm* A.
7. A *glm* B bedeutet: Es gibt eine bijektive Abbildung f von A nach B. B *glm* C bedeutet: Es gibt eine bijektive Abbildung g von B nach C. Dann ist die Verkettung $g \circ f$ der beiden Abbildungen f und g eine bijektive Abbildung und daher A *glm* C.

8. Benutzen Sie die anschauliche Fassung des Begriffs der bijektiven Abbildung mit Hilfe von Pfeildiagrammen in Abschnitt 7.5.
9. Sind A und B disjunkt, so gilt diese Beziehung offenbar. Besitzen A und B gemeinsame Elemente, so werden diese doppelt gezählt und müssen daher einmal von der Summe abgezogen werden.
10. Gehen Sie analog zum Beweis von Satz 8.2 vor, und greifen Sie auf Satz 6.3 zurück. Beachten Sie, dass mit A und B sowie $A \cup B$ und C disjunkt auch die Mengen A und $B \cup C$ sowie B und C disjunkt sind.
11. Zeichnen Sie a schwarze, b weiße und c rote Plättchen nebeneinander in einer Reihe, und argumentieren Sie mittels der (gleichen) Gesamtzahl der Plättchen bei den beiden unterschiedlichen Zusammenfassungen.
12. Greifen Sie beispielsweise auf zwei unterschiedlich hohe Türme aus Steckwürfeln zurück, und verändern Sie die Höhen gegensinnig um jeweils gleiche Anzahlen von Steckwürfeln.
14. Wie im zweiten Teil von Satz 8.3 gezeigt, gilt $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$ unter entsprechenden Voraussetzungen. Da die identische Abbildung jede Menge bijektiv auf sich abbildet, sind $A \backslash (B \cup C)$ und $(A \backslash B) \backslash C$ gleichmächtig, und es gilt $card\,[A \backslash (B \cup C)] = card\,[(A \backslash B) \backslash C]$. Für die linke Seite gilt unter den gegebenen Voraussetzungen $card\,[A \backslash (B \cup C)] = card\,A - card\,(B \cup C) = card\,A - (card\,B + card\,C) = a - (b + c)$. Rechnen Sie entsprechend die rechte Seite aus.
15. Argumentieren Sie beispielsweise mit dem Altersunterschied zweier Kinder (heute, vor n Jahren, in n Jahren) oder mit der Veränderung des Unterschieds zwischen den Sparkonten zweier Kinder bei jeweils gleichen Einzahlungen oder Auszahlungen.
17. Wir gehen zunächst aus von $a + b = c$ und zeigen, dass dann stets auch $c - b = a$ gilt.

    Es sei $a = card\,A$, $b = card\,B$ und $c = card\,C$ mit $A \cap B = \{\}$. Das Venn-Diagramm hat also folgende Struktur:

    Der grau schraffierte Bereich entspricht $C = A \cup B$. Also gilt $C \backslash B = A$ und daher $c - b = a$. Begründen Sie analog die umgekehrte Richtung obiger Aussage.

18. Argumentieren Sie mit aus Einheitswürfeln (Kantenlänge 1 cm) aufgebauten Quadern der Länge a cm, der Breite b cm und der Höhe c cm. Drehen Sie diesen Quader geeignet.
19. Sehen Sie sich Grundschulwerke für die Klasse 2 an.
20. Gehen Sie entsprechend vor wie beim Beweis von Satz 8.5. Sie müssen nur jeweils zeilenweise c Plättchen wegnehmen.
21. Führen Sie den Beweis über die Kontraposition und zeigen Sie: Sind in einem Produkt beide Faktoren a und b von Null verschieden, so ist auch das Produkt $a \cdot b$ von Null verschieden.
22. Falls $A = \{\}$ oder $B = \{\}$, ist $A \times B = \{\}$ (Begründung?), also $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$.
23. Überlegen Sie zunächst den leichten Sonderfall, dass in $a \cdot b$ gilt: $a = 0$ oder $b = 0$. Greifen Sie anschließend im Fall $a > 0$ und $b > 0$ auf die zugehörige Tabelle oder Matrix (Definition 8.8) bzw. auf das zugehörige rechteckige Punktmuster (Definition 8.7, Anmerkung (6)) zurück, wobei dieses Punktmuster im Falle $a = 1$ nur aus *einer* Zeile besteht.
    Es sei $card\ A = a$ und $card\ B = b$. Für $card\,(A \times B)$ gilt dann, wenn wir zur Veranschaulichung auf die zugehörige Tabelle zurückgreifen: Wir können die Menge $A \times B$ in a paarweise disjunkte (Begründung!) Mengen mit jeweils b Elementen zerlegen, nämlich entsprechend den Zeilen in der zugehörigen Tabelle. Also gilt nach Definition 8.7 $card\,(A \times B) = a \cdot b$.
    Argumentieren Sie analog für die umgekehrte Richtung!
24. Beweisen Sie, dass $(A \times B) \times C$ gleichmächtig ist zu $A \times (B \times C)$, indem Sie nachweisen, dass die Zuordnung $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ mit $((a, b), c) \mapsto (a, (b, c))$ eine bijektive Abbildung ist.
26. Greifen Sie auf das in Satz 5.8 bewiesene aussagenlogische Distributivgesetz sowie auf die Definitionen des Kreuzproduktes und der Vereinigungsmenge zurück.
38. Argumentieren Sie beispielsweise mittels Punktmustern anhand der Aufgabe $(12 + 8) : 4 = 12 : 4 + 8 : 4$.
43. Gehen Sie völlig analog zum Beweis von Satz 8.11 vor.
44. Es gilt in $\mathbb{N}_0$ stets $a + 0 = a$.
45. Wegen $a + m = b$ und $b + n = a$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ folgt $a + (m + n) = a$ und damit $a = b$.
46. Mit den Bezeichnungen von Definition 8.9 müssen Sie nachweisen, dass aus $B' \subset B$ stets $B' \times C \subset B \times C$ folgt.

Kapitel 9

1. Gehen Sie völlig analog wie im Beispiel in Kap. 9 vor, bringen Sie die beiden Summanden auf den Hauptnenner 2 und klammern Sie im Zähler $n + 1$ aus.
2. Gehen Sie völlig analog wie im Beispiel in Kap. 9 vor und wenden Sie die erste binomische Formel an.

Kapitel 10

4. Folgendes ist im Detail nachzuweisen: Durch den „technischen Trick“ wird aus jeder dreistelligen Kombination mit Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9\}$ eine dreistellige Kombination ohne Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9, z, e\}$. Dabei führen verschiedene dreistellige Kombinationen mit Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9\}$ zu verschiedenen dreistelligen Kombinationen ohne Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9, z, e\}$. Umgekehrt kann man von jeder dreistelligen Kombination ohne Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9, z, e\}$ ausgehen und sich überlegen, dass es eine dreistellige Kombination mit Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9\}$ als „Ausgangspunkt“ für den „technischen Trick“ hierzu gibt. Auch hier gehören zu verschiedenen dreistelligen Kombinationen ohne Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9, z, e\}$ verschiedene dreistellige Kombinationen mit Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9\}$ als Ausgangspunkte.
   Insgesamt gibt es also eine bijektive Abbildung von der Menge aller dreistelligen Kombinationen mit Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9\}$ in die Menge aller dreistelligen Kombinationen ohne Wiederholung aus $\{0, \ldots, 9, z, e\}$. Beide Menge enthalten also gleich viele Elemente.
5. In Abschnitt 10.6 wurden die 22 Möglichkeiten, 15 Cent aus 1-, 2-, 5- und 10-Cent-Münzen zusammenzulegen, tabellarisch dargestellt. Wenn man nun die Möglichkeiten auswählt, bei denen mindestens eine 1-Cent-Münze verwendet wird, und eine 1-Cent-Münze „wegnimmt“, dann erhält man genau alle Möglichkeiten, um 14 Cent aus 1-, 2-, 5- und 10-Cent-Münzen zusammenzulegen. Analog gelangt man weiter schrittweise zu den Lösungen für 13 Cent und für 12 Cent.

Kapitel 11

1. Reflexivität und Symmetrie ergeben sich fast unmittelbar durch Rückgriff auf die Definition 11.1. Bei der Transitivität multiplizieren Sie $a \cdot d = c \cdot b$ auf beiden Seiten mit f und ersetzen auf der rechten Seite $c \cdot f$ durch $e \cdot d$ wegen $c \cdot f = e \cdot d$.
2. Gehen Sie zu gleichnamigen Brüchen über, und beweisen Sie dann die beiden Eigenschaften durch Rückgriff auf die entsprechenden Eigenschaften in $\mathbb{N}$. Hierbei bedeutet Trichotomie in $\mathbb{N}$, dass für natürliche Zahlen a, b entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ gilt.
3. Zu jeder Bruchzahl $\frac{a}{b}$ finden Sie noch eine *kleinere* Bruchzahl, nämlich $\frac{a}{b+1}$.
4. Gehen Sie zu gleichnamigen Brüchen über und wenden Sie das Kommutativ- und Assoziativgesetz in $\mathbb{N}$ an.
5. Wenden Sie das Kommutativ- und Assoziativgesetz in $\mathbb{N}$ an.
6. Greifen Sie zurück auf die Definition der Addition und Multiplikation von Bruchzahlen sowie auf das Distributivgesetz in $\mathbb{N}$.

9. Die Struktur des Baums und erste Eigenschaften lassen sich recht schnell erkennen.
   (1) Der Baum beginnt mit dem Bruch $1/1$ und ist symmetrisch aufgebaut. Im Pfad ganz links stehen die Stammbrüche der Form $1/n$; im Pfad ganz rechts findet man die natürlichen Zahlen in der Form $n/1$.
   (2) An einem beliebigen Knoten steht ein Bruch der Form i/j. Den „linken Sohn“ erhält man durch $i/(i+j)$ und den „rechten Sohn“ durch $(i+j)/j$.
   (3) Man erkennt leicht, dass die Brüche auf den ersten Ebenen bzw. der „ersten Generationen“ vollständig gekürzt sind, d. h., Zähler und Nenner eines solchen Bruchs haben keine gemeinsamen Teiler. Wenn zwei Zahlen i und j teilerfremd sind, dann sind auch i und $i+j$ sowie j und $i+j$ teilerfremd (warum?). Aufgrund der Konstruktion des Baums (siehe (2)) vererbt sich die Teilerfremdheit daher „von Generation zu Generation“.

Liste der wichtigsten Symbole und Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen zuzüglich Null
$=$	gleich
$:=$	definitorisch gleich
$\neq$	ungleich
$<$	kleiner
$\leq$	kleiner oder gleich
$>$	größer
$\geq$	größer oder gleich
$\sqrt{a}$	Wurzel aus a
E	Einer
Z	Zehner
H	Hunderter
T	Tausender
$23_{④}$	zwei-drei in der Basis vier
KG	Kommutativgesetz
AG	Assoziativgesetz
DG	Distributivgesetz
$\{a, b, c\}$	Menge mit den Elementen a, b, c
$\{\}$ bzw. $\varnothing$	leere Menge
$\{\times \mid \ldots\}$	Menge aller x, für die gilt
$\in$	ist Element von
$\notin$	ist nicht Element von
$\subseteq$	ist Teilmenge von
$\subset$	ist echte Teilmenge von
$\cup$	vereinigt mit
$\cap$	geschnitten mit
$\setminus$	ohne
(a, b)	geordnetes Paar a, b
$A \times B$	Kreuzprodukt der Mengen A und B
$card\ A$	Kardinalzahl der Menge A

$A\ glm\ B$	A ist gleichmächtig zu B
$\vee$	oder
$\wedge$	und
$\neg$	nicht
$\succ\!\!\prec$	entweder oder
$\longrightarrow$	wenn . . . , dann . . .
$\longleftrightarrow$	genau dann, wenn
$\Longrightarrow$	aus . . . folgt . . .
$\Longleftrightarrow$	ist äquivalent zu
w	wahr
f	falsch
$a\ R\ b$	a steht in Relation zu b
$\overline{a}$	Äquivalenzklasse von a
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x \longmapsto 2x$	Funktion/Abbildung
$f(a)$	Funktionswert von f an der Stelle a
$f \circ g$	Verkettung der Funktionen g und f (zuerst g, dann f)
f^I	Umkehrfunktion der Funktion f
R^I	Umkehrrelation der Relation R
$a \mid b$	a ist Teiler von b / b ist Vielfaches von a
$a \nmid b$	a ist nicht Teiler von b / b ist kein Vielfaches von a
$T(n)$	Teilermenge von n
$V(n)$	Vielfachenmenge von n
$Q(a)$	Quersumme von a
$ggT(a,b)$	größter gemeinsamer Teiler von a und b
$kgV(a,b)$	kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b
$a \equiv b(n)$	a ist restgleich zu b bei Division durch n
a/b	Bruch
$\frac{a}{b}$	Bruchzahl

Literatur

[1] **Calkin, N./Wilf, H. S.:** Recounting the rationals. American Mathematical Monthly, 107, S. 360–363, Washington, DC 2000

[2] **Ebbinghaus et al.:** Zahlen, Heidelberg 1992

[3] **Freudenthal, H.:** Mathematik als pädagogische Aufgabe. 2 Bände, Stuttgart 1973

[4] **Heckmann, K./Padberg, F.:** Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2, Heidelberg 2014

[5] **Hischer, H.:** Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung, Wiesbaden 2012

[6] **Ifrah, G.:** Universalgeschichte der Zahlen, Frankfurt 1991

[7] **Käpnick, F.:** Mathematiklernen in der Grundschule, Heidelberg 2014

[8] **Krauthausen, G./Scherer, P.:** Einführung in die Mathematikdidaktik, München 2007 (3. Auflage)

[9] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen: Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen, Frechen 2008

[10] **Padberg, F./Danckwerts, R./Stein, M.:** Zahlbereiche – Eine elementare Einführung, Heidelberg 1995

[11] **Padberg, F.:** Didaktik der Arithmetik, Heidelberg 1996 (2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage)

[12] **Padberg, F.:** Einführung in die Mathematik I – Arithmetik, Heidelberg 1997/2007

[13] **Padberg, F.:** Elementare Zahlentheorie, Heidelberg 2008 (3. Auflage)

[14] **Padberg, F.:** Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, Heidelberg 2009 (4. Auflage)

[15] **Padberg, F./Benz, C.:** Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, Heidelberg 2011 (4. Auflage)

[16] **Padberg, F./Büchter, A.:** Vertiefung Mathematik Primarstufe – Arithmetik/Zahlentheorie, Heidelberg 2015

[17] **Rinkens, H.-D./Hönisch, K./Träger, G.:** Welt der Zahl 4, Braunschweig 2009

[18] **Schütte, S.:** Die Matheprofis. Schulbuchwerk Klasse 2, München 2004

[19] **Wittmann, E. Ch./Müller, G. N.:** Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Stuttgart 1992

Sachverzeichnis