

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Abbildung 0.1	JOCHENs Beobachtungen und Begründungen	1
Abbildung 1.1	Zusammenhang von reflektierendem Denken und Erfahrungen nach Dewey (1916/1993, 1933)	13
Abbildung 1.2	Vier zentrale Merkmale von Reflexion	18
Abbildung 1.3	Reflexionsebenen (Lengnink, 2006a, S. 344).....	22
Abbildung 1.4	Vier zentrale Merkmale von Reflexion	26
Abbildung 1.5	Analyseraster ‚Mathematische Reflexion‘ (Schülke, 2013, S. 111, neu erstellt JH)	39
Abbildung 1.6	Anforderungsbereiche zur Charakterisierung von Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule (KMK, 2004, S. 13)	48
Abbildung 1.7	Aufgabenbeispiel aus Walther et al. (2011, S. 16).....	49
Abbildung 2.1	Das epistemologische Dreieck (Steinbring, 2000, S. 34)	58
Abbildung 2.2	Empirische Deutung des Zeichens ‚0‘	58
Abbildung 2.3	Relationale Deutung des Zeichens ‚0‘	59
Abbildung 2.4	Das sprachliche Zeichen, bestehend aus Bezeichnetem und Bezeichnendem (de Saussure, 2001, S. 136).....	61
Abbildung 3.1	Der Kern eines Arguments bestehend aus den Komponenten Datum, Konklusion und Argumentationsregel (Schwarzkopf, 2001a, S. 258).....	69
Abbildung 3.2	Das vollständige Analyseschema (Schwarzkopf, 2001a, S. 261)	71
Abbildung 3.3	Mehrgliedriges Argument mit zwei Begründungsschritten (vgl. Meyer, 2007, S. 89)	71
Abbildung 3.4	Mehrschichtiges Argument mit zusätzlicher Begründung für die erste Argumentationsregel R1 (vgl. Meyer, 2007, S. 90).....	72
Abbildung 3.5	Konstruktion neuer Beziehungen zwischen den bekannten Punktefeldern von 9-2 und 3-6	75
Abbildung 3.6	Die neu erkannte Beziehung zwischen den Punktefeldern dient als Stützung in einem Argument	76
Abbildung 3.7	Ein empirisches Argument	80
Abbildung 3.8	Ein empirisch-konstruktives Argument	81
Abbildung 3.9	Ein strukturell-mathematisches Argument	82
Abbildung 3.10	Argumentationskette (Bezold, 2009, S. 37)	92
Abbildung 3.11	Argument mit allen fünf funktionalen Komponenten (Schwarzkopf, 2001a, S. 261; Erläuterung des Beispiels in Kap. 3.1)	94
Abbildung 3.12	Argumentationskette (Bezold, 2009, S. 37)	97

Abbildung 4.1	Vier zentrale Merkmale von Reflexion im Mathematikunterricht nach Kapitel 1.1.3.....	99
Abbildung 4.2	Reflektieren als Zwischenschritt zwischen Deuten und Argumentieren	102
Abbildung 4.3	Zusammenhang zwischen Reflektieren als Zwischenschritt zwischen Deuten und Argumentieren und der Argumentationskette von Bezold (2009).....	103
Abbildung 4.4	Mathematische Reflexion im Sinne von Perspektiv- oder Standpunktwechseln in argumentativ geprägten Gesprächen führt zur (Weiter-)Entwicklung von Standpunkten.....	105
Abbildung 5.1	Didaktische Prinzipien (vgl. Wittmann, 1998b, S. 150)	126
Abbildung 5.2	DETLEV nutzt eine negative Startzahl, als er Zahlenstreifen mit der Zielzahl 45 findet (Ausschnitt)	131
Abbildung 5.3	Die Zahl 1302 ist auf unterschiedliche Weise in der Stellenwerttafel dargestellt.....	132
Abbildung 5.4	Elli hat die Zahlen, die sie mit zwei Plättchen legen kann, nach der Größe geordnet.....	134
Abbildung 5.5	PEER legt an allen 6 Stellen der Zahlen ein Plättchen dazu und erklärt die Veränderungen über den Wert dieser Stellen	135
Abbildung 5.6	Aufgabenbeispiel aus der Erprobung: Vorgegebene Veränderungen von der Startzahl (oben links) zur Zielzahl (unten rechts)	136
Abbildung 5.7	Aufgabenbeispiel aus der Erprobung: jakob und NORA finden Zielzahlen mit den Unterschieden 99 und 990 (Ausschnitt).....	137
Abbildung 5.8	Aufgabenbeispiel aus dem ersten Jahr der Hauptuntersuchung: lydia macht die intendierten Entdeckungen, kann aber nicht adäquat begründen	137
Abbildung 5.9	Aufgabenbeispiel aus dem zweiten Jahr der Hauptuntersuchung: GREGOR findet mit Hilfe der Stellenwerttafel Zahlen mit vorgegebenen Unterschieden (Ausschnitt).....	138
Abbildung 5.10	magda (li) und STINA (re) nutzen die Stellenwerte zum geschickten Rechnen.....	139
Abbildung 5.11	Aspekte bei Aufgaben zur Untersuchung von operativen Veränderungen	140
Abbildung 5.12	Zwei Begründungen für den Zusammenhang zwischen dem Unterschied +90 und der gegensinnigen Veränderung des Zahlwertes an der Zehner- und der Hunderterspalte.....	141

Abbildung 5.13	Das Malkreuz ordnet alle Teilprodukte übersichtlich in einer Tabellenstruktur an.....	143
Abbildung 5.14	Die Faktoren und Teilprodukte werden entsprechend ihrer Lage im Malkreuz bezeichnet.....	143
Abbildung 5.15	Das Malkreuz wird mit Hilfe von Punktefeldern begründet.....	144
Abbildung 5.16	Das erweiterte, nach rechts und nach unten offene Malkreuz.....	144
Abbildung 5.17	Beispielkarten der Aufgabe ‚Malkreuze ordnen‘.....	145
Abbildung 5.18	Beispiel für die Aufgabe ‚Malkreuze mit dem gleichen Ergebnis‘.....	146
Abbildung 5.19	Die beiden operativen Serien zur Aufgabe ‚Ein Faktor wird erhöht‘.....	146
Abbildung 5.20	Die beiden operativen Serien zur Aufgabe ‚Beide Faktoren einer Quadrataufgabe werden um 1 erhöht‘ in der jahrgangsgemischten Lerngruppe.....	147
Abbildung 5.21	Aufgabenpaare für beide Partnerkinder zur Aufgabe ‚Der eine Faktor einer Quadrataufgabe wird verringert und der andere um denselben Betrag erhöht‘.....	148
Abbildung 5.22	Eine arithmetische Folge und ihre Summe in einem 5er-Zahlenstreifen am Beispiel $s = 3$ und $a = 2$ sowie allgemein.....	152
Abbildung 5.23	Bezeichnungen im Zahlenstreifen.....	152
Abbildung 5.24	Veränderung der Startzahl und Auswirkung auf Felderzahlen und Zielzahl.....	154
Abbildung 5.25	Beispielhafte Bearbeitung der Aufgabe ‚Die Additionszahl bleibt gleich!‘ durch ANDI (Ausschnitt).....	154
Abbildung 5.26	Veränderung der Additionszahl und Auswirkung auf Felderzahlen und Zielzahl.....	155
Abbildung 5.27	Forschertipp zum Auffinden von Zahlenstreifen mit der Zielzahl 50.....	156
Abbildung 5.28	Startzahl und Additionszahl werden so verändert, dass die Zielzahl gleich bleibt.....	156
Abbildung 5.29	Die Veränderungen der Felderzahlen gleichen sich gegenseitig aus.....	157
Abbildung 5.30	Alle Felderzahlen können zur Mittelzahl m ausgeglichen werden.....	158
Abbildung 5.31	Arbeitsblätter zum Vergleich von Mittelzahl und Zielzahl (Ausschnitte).....	158
Abbildung 5.32	Arbeitsblätter zur Fragestellung ‚Welche Zielzahl kann man treffen?‘ (Ausschnitte).....	159
Abbildung 5.33	Es lassen sich 3 Paare mit derselben Summe bilden.....	160

Abbildung 5.34	Ausschnitt aus den Listen von 4er-Zahlenstreifen mit der festen Additionszahl 1 und 2	160
Abbildung 5.35	Das Arbeitsblatt ‚Zielzahlen ganz nah an 99‘ von JOCHEN und jarik (Ausschnitt)	161
Abbildung 5.36	Tafelbild zu einer Begründung der multiplikativen Beziehung zwischen Mittelzahl und Zielzahl	162
Abbildung 5.37	Das epistemologische Dreieck (Steinbring, 2000, S. 34)	168
Abbildung 5.38	Das Toulmin-Schema (vgl. Schwarzkopf, 2001a)	170
Abbildung 5.39	Das Standpunkt-Schema in seiner Grundform	172
Abbildung 5.40	Das erweiterte Standpunkt-Schema	173
Abbildung 5.41	JOCHENs Arbeitsblätter	174
Abbildung 5.42	Darstellung der Perspektiven von JOCHEN und jarik als Ergebnis des Vergleichs ihrer Deutungen	179
Abbildung 5.43	Darstellung der Standpunkte von JOCHEN und jarik	180
Abbildung 5.44	Darstellung eines Perspektiv- oder Standpunktwechsels im Reflexionsdiagramm	181
Abbildung 5.45	Zeitliche Abfolge der Perspektiven und Standpunkte von jarik und JOCHEN	182
Abbildung 6.1	JOCHENs Arbeitsblatt	186
Abbildung 6.2	JOCHENs Beobachtungszettel	187
Abbildung 6.3	Jariks Arbeitsblatt	190
Abbildung 6.4	Jariks Beobachtungszettel	190
Abbildung 6.5	JOCHENs Beobachtungszettel mit Bezeichnungen für die einzelnen Teilsätze	193
Abbildung 6.6	JOCHENs Beobachtungszettel mit Bezeichnungen für die einzelnen Teilsätze	199
Abbildung 6.7	Arbeitsblatt von JOCHEN und jarik	215
Abbildung 6.8	Jariks Beobachtungszettel	217
Abbildung 6.9	JAKOBs Beobachtungszettel zu Beginn der Phase	220
Abbildung 6.10	gregors Beobachtungszettel zu Beginn der Phase	220
Abbildung 6.11	Strukturierung der orange gefärbten Punktefelder durch gregor und die Lehrerin	221
Abbildung 6.12	Arbeitsblatt von JAKOB mit gefärbten Teilpunktefeldern	222
Abbildung 6.13	Arbeitsblatt von gregor mit gefärbten Teilpunktefeldern	223
Abbildung 6.14	JAKOBs Beobachtung zu Beginn der Phase	224
Abbildung 6.15	Mögliche Interpretationen des Satzes: „Bei den Zeilen wird immer einer mer aber auch in den Spalten“	225
Abbildung 6.16	JAKOBs Arbeitsblatt zu Beginn von Phase 3.1	227
Abbildung 6.17	Mögliche Interpretationen von Z. 213	228
Abbildung 6.18	Das Punktefeld 17·17 mit eingezeichnetem Winkel	234
Abbildung 6.19	Das Punktefeld 17·17 mit eingezeichnetem Winkel	236

Abbildung 6.20	JAKOBs Beobachtung und Begründung am Ende der Szene	247
Abbildung 6.21	JAKOBs Umstrukturierung der Punkte des äußeren Winkels	248
Abbildung 6.22	JOCHENS Zahlenstreifen mit der Startzahl -2	255
Abbildung 6.23	jariks Zahlenstreifen -3/+6	256
Abbildung 6.24	jariks Rechnungen zur Bestimmung der Zielzahl 47	256
Abbildung 6.25	JOCHENS Zahlenstreifen -2/+6.....	258
Abbildung 6.26	jariks Zahlenstreifen -2/+6	258
Abbildung 6.27:	Jariks Rechnungen zur Bestimmung der Zielzahl 52.....	258
Abbildung 6.28	Beim Ausfüllen der Felderzahlen liegt eine ordinale Interpretation nahe	259
Abbildung 6.29	Beim Berechnen der Zielzahl liegt eine kardinale Interpretation nahe	260
Abbildung 6.30	JOCHENS Zahlenstreifen -2/+6	260
Abbildung 6.31	jariks Zahlenstreifen -2/+6	260
Abbildung 6.32	JENS' und jariks Erklärung, wie der Unterschied 990 entsteht	280
Abbildung 6.33	Die Veränderungen in der Hunderterspalte heben sich auf ..	281
Abbildung 6.34	Stand der Aufgabenbearbeitung am Anfang von Phase 3.4 ..	281
Abbildung 6.35	JENS' erster Lösungsvorschlag (Z. 107).....	283
Abbildung 6.36	JENS' zweiter Lösungsvorschlag (Z. 109).....	283
Abbildung 6.37	Jariks Berechnung der Partnerzahl.....	288
Abbildung 6.38	Jariks Interpretation von JENS' Vorgehen	288
Abbildung 6.39	Jarik bezieht seine Rechnung auf die Stellenwerttafel, indem er eine ‚Nullerspalte‘ einführt (Z. 118)	289
Abbildung 6.40	Die Standpunkte von jarik und JENS stehen gegeneinander	293
Abbildung 6.41	Bei beiden Zahlenpaaren sind die gleichen Pfeile eingezeichnet.....	296
Abbildung 6.42	Tafelbild zu den Zahlenstreifen mit der Zielzahl 50 (Etappe 1).....	306
Abbildung 6.43	Tafelbild am Anfang von Phase 2	307
Abbildung 6.44	Tafelbild am Ende von Phase 2 mit zusätzlicher Zeile unter den Zahlenstreifen mit der Mittelzahl 9 und Zielzahl 45	308
Abbildung 7.1	Der Zusammenhang von Umgebung, Aspekt und Kontext: allgemein und anhand zweier Beispiele	345
Abbildung 7.2	Jarik und JENS nutzen die beiden Zahldarstellungen der Lernumgebung als verschiedene Aspekte derselben Umgebung.....	347

Abbildung 7.3	JENS' Standpunkt widerspricht der empirischen Beobachtung	355
Abbildung 7.4	JENS bezieht seinen Standpunkt auf die Zahlenstreifen mit der Zielzahl 45	357
Abbildung 7.5	Das Arbeitsblatt von sonja und lydia mit den Bezeichnungen für die Zahlenstreifen im Transkript.....	362
Abbildung 7.6	Standpunkte von jarik und JENS zur Aufgabe „Finde die Partnerzahl 2132-999“ (vgl. Kap. 6.4)	365
Abbildung 7.7	Jarik entwickelt einen Standpunkt zu Beziehungen zwischen Zahlenstreifen.....	366
Abbildung 7.8	JENS festigt seinen Standpunkt zur Berechnung der Partnerzahl, indem er den Kontext ausweitet.....	366
Abbildung 7.9	Jarik verändert den Kontext und die Konklusion	367
Epis. Dreieck 5.1	Jariks erste Deutung	175
Epis. Dreieck 5.2	JOCHENS Deutung	177
Epis. Dreieck 5.3	Jariks zweite Deutung	178
Epis. Dreieck 6.1	JOCHENS algorithmische Deutung entsprechend seinen notierten Beobachtungen.....	188
Epis. Dreieck 6.2	Jariks algorithmische Deutung entsprechend der notierten Beobachtung.....	191
Epis. Dreieck 6.3	Jariks algorithmische Deutung in Phase 2.1	195
Epis. Dreieck 6.4	Jariks empirische Deutung in Phase 2.1	196
Epis. Dreieck 6.5	Jariks algorithmische Deutung in Phase 2.2.1	202
Epis. Dreieck 6.6	JOCHENS relationale Deutung in Phase 2.2.2	206
Epis. Dreieck 6.7	Jariks relationale Deutung in Phase 2.2.3	211
Epis. Dreieck 6.8	JAKOBS erste algorithmische Deutung in Phase 3.1.1 ..	229
Epis. Dreieck 6.9	JAKOBS zweite algorithmische Deutung in Phase 3.1.1	231
Epis. Dreieck 6.10	Deutung der Lehrerin in Phase 3.1.1	232
Epis. Dreieck 6.11	JAKOBS empirische Deutung in Phase 3.2	237
Epis. Dreieck 6.12	JAKOBS Deutung in Phase 3.3	243
Epis. Dreieck 6.13	JAKOBS Deutung in Phase 3.4	249
Epis. Dreieck 6.14	JOCHENS algorithmische Deutung in Phase 3.2	262
Epis. Dreieck 6.15	Jariks empirische Deutung in Phase 3.2	264
Epis. Dreieck 6.16	Gemeinsame relationale Deutung von JOCHEN und jarik in Phase 3.3	268
Epis. Dreieck 6.17	JOCHENS relationale Deutung in Phase 3.4	271
Epis. Dreieck 6.18	Gemeinsame relationale Deutung von JOCHEN und jarik in Phase 3.4	272
Epis. Dreieck 6.19	JENS' algorithmische Deutung in Phase 3.4.1	285
Epis. Dreieck 6.20	Jariks algorithmische Deutung in Phase 3.4.2	290

Epis. Dreieck 6.21	Gemeinsame Deutung von JENS und jarik in Phase 3.4.5.....	299
Epis. Dreieck 6.22	Deutung von TOM und der Lehrerin in Phase 3.3.....	312
Epis. Dreieck 6.23	Empirische Deutung der Lehrerin in Phase 4.1	314
Epis. Dreieck 6.24	Kollektive algorithmische Deutung von JOSEF und JANINA	318
Epis. Dreieck 6.25	Kollektive Deutung von LORENZ und TITUS.....	322
Epis. Dreieck 6.26	Kollektive Deutung von LENA und LORENZ	326
Epis. Dreieck 6.27	EDITHs relationale Deutung in Phase 4.8.....	330
Reflexions-Diagramm 5.1	Jariks Richtwechsel	183
Reflexions-Diagramm 6.1	Jariks Standpunktwechsel in Phase 2.2.3	214
Reflexions-Diagramm 6.2	JOCHENs vermutlicher Standpunktwechsel in Phase 2.2.3	217
Reflexions-Diagramm 6.3	JAKOBs Richtwechsel in Phase 3.4.....	252
Reflexions-Diagramm 6.4	Abgebrochener Richtwechsel von JOCHEN und jarik	269
Reflexions-Diagramm 6.5	Richt-Parallelwechsel von jarik.....	276
Reflexions-Diagramm 6.6	Reziprok-Parallelwechsel von JOCHEN.....	277
Reflexions-Diagramm 6.7	JENS' Perspektivwechsel in Phase 3.4.5.....	302
Reflexions-Diagramm 6.8	Jariks Richt-Parallelwechsel in Phase 3.4.5	303
Reflexions-Diagramm 6.9	Kollektiver Richtwechsel	332
Reflexions-Diagramm 7.1	Ein abgebrochener Reflexionsprozess von sonja und lydia	364
Reflexions-Diagramm 7.2	Möglicher Verlauf eines relativen reflexiven Lernprozesses von sonja und lydia.....	368
Standpunkt-Schema 5.1	Jariks erste Perspektive	176
Standpunkt-Schema 6.1	Mögliche Interpretationen von JOCHENs Standpunkt, den er auf dem Beobachtungszettel (vgl. Abb. 6.2) aufgeschrieben hat.....	189
Standpunkt-Schema 6.2	Jariks algorithmisch-vertikale Perspektive, die er als Beobachtung notiert hat	192
Standpunkt-Schema 6.3	Jariks algorithmischer Standpunkt in Phase 2.1	198
Standpunkt-Schema 6.4	Jariks empirischer Standpunkt in Phase 1.1	198
Standpunkt-Schema 6.5	Jariks Interpretation von JOCHENs Perspektive in Phase 2.2.1	203
Standpunkt-Schema 6.6	JOCHENs relational-horizontaler Standpunkt in Phase 2.2.2	208

Standpunkt-Schema 6.7	Jariks relational-horizontaler Standpunkt in Phase 2.2.3.....	213
Standpunkt-Schema 6.8	Die Perspektiven von JAKOB und der Lehrerin in Phase 3.1.....	233
Standpunkt-Schema 6.9	JAKOBs empirisch-arithmetische Perspektive in Phase 3.2.....	238
Standpunkt-Schema 6.10	Standpunkt der Lehrerin in Phase 3.2, der JAKOBs Perspektiven aufgreift.....	240
Standpunkt-Schema 6.11	JAKOBs Perspektive in Phase 3.3.....	245
Standpunkt-Schema 6.12	JAKOBs Standpunkt am Ende von Phase 3.4 ..	251
Standpunkt-Schema 6.13	JOCHENs algorithmisch-rechnerischer Standpunkt in Phase 3.2	266
Standpunkt-Schema 6.14	Jariks empirisch-kardinaler Standpunkt in Phase 3.2	266
Standpunkt-Schema 6.15	Die gemeinsame Perspektive von JOCHEN und jarik in Phase 3.3	269
Standpunkt-Schema 6.16	JOCHENs relationale Perspektive in der parallelen Umgebung ‚Guthaben und Schulden‘ (Phase 3.4), die den kardinalen und den rechnerischen Aspekt verbindet.....	275
Standpunkt-Schema 6.17	Gemeinsamer relationaler Standpunkt von JOCHEN und jarik in Phase 3.4.....	275
Standpunkt-Schema 6.18	JENS' relational-handlungsorientierter Standpunkt in Phase 3.4.1	287
Standpunkt-Schema 6.19	Jariks algorithmisch-rechnerischer Standpunkt in Phase 3.4.2	292
Standpunkt-Schema 6.20	JENS' Perspektive in der parallelen Umgebung ‚Rechenstrich‘	301
Standpunkt-Schema 6.21	Gemeinsamer Standpunkt von JENS und jarik	301
Standpunkt-Schema 6.22	Gemeinsamer algorithmisch-horizontaler Standpunkt von TOM und der Lehrerin in Phase 3.3	313
Standpunkt-Schema 6.23	Empirisch-horizontaler Standpunkt der Lehrerin in Phase 4.1	316
Standpunkt-Schema 6.24	Kollektiver algorithmisch-horizontaler Standpunkt von JOSEF und JANINA	320
Standpunkt-Schema 6.25	Kollektiver relational-horizontaler Standpunkt von LORENZ und TITUS	324
Standpunkt-Schema 6.26	Kollektive algorithmisch-horizontale Perspektive von LENA und LORENZ	327

Standpunkt-Schema 7.1	Standpunkt von sonja und lydia beim Ausfüllen des Zahlenstreifens	363
Tabelle 1.1	Sieben Unterkategorien von Reflexion nach Winkel (2012, S. 35, Hervorhebungen durch Fettdruck i. O.)	25
Tabelle 3.1	Drei unterschiedliche Formen des Lernens (nach Miller, 1986, S. 140)	73
Tabelle 3.2	Drei Typen von Argumenten (Schwarzkopf, 2003, S. 231)	79
Tabelle 4.1	Vier Arten des mathematischen Perspektiv- oder Standpunktwechsels in argumentativ geprägten Gesprächen.	106
Tabelle 5.1	Überblick über die durchgeführten Design-Experimente	121
Tabelle 5.2	Ablauf einer Unterrichtsstunde in Anlehnung an die Kooperationsform „Ich-Du-Wir“ (Barzel et al., 2008, S. 118)	123
Tabelle 5.3	Themen der Design-Experimente in der Erprobungsphase (SJ 2009/2010)	141
Tabelle 5.4	Themen der Unterrichtseinheiten der jahrgangsbezogenen und -gemischten Lerngruppen	142
Tabelle 5.5	Themen der Design-Experimente in der Erprobungsphase (SJ 2009/2010)	150
Tabelle 5.6	Themen der Unterrichtseinheiten der jahrgangsbezogenen Lerngruppe	150
Tabelle 5.7	Themen der Unterrichtseinheiten der jahrgangsgemischten Lerngruppen	151
Tabelle 5.8	Themen der Design-Experimente in der Erprobungsphase (SJ 2009/2010)	163
Tabelle 5.9	Themen der Unterrichtseinheiten der jahrgangsbezogenen Lerngruppe	163
Tabelle 5.10	Themen der Unterrichtseinheiten der jahrgangsgemischten Lerngruppe	164
Tabelle 6.1	Phasenübersicht mit Zuordnung zu den entwickelten Perspektiven und Standpunkten	309
Tabelle 6.2	Verlauf von Phase 4 mit Blick auf die strukturierenden Äußerungen der Lehrerin	334
Tabelle 7.1	Vier Arten des mathematischen Perspektiv- und Standpunktwechsels – Überblick über die Analysen in Kapitel 6 (inkl. abgebrochener Reflexionsprozesse)	339
Tabelle 7.2	Charakterisierung von Perspektiven und Standpunkten nach dem epistemologischen Status des mathematischen Wissens	343
Tabelle 7.3	Zusammenfassender Vergleich	348
Tabelle 7.4	Beispiel für eine persönliche Perspektive	349

Tabelle 7.5	Beispiel für eine gemeinsame Perspektive.....	349
Tabelle 7.6	Beispiel für eine kollektive Perspektive.....	350
Tabelle 7.7	Zusammenfassender Vergleich von persönlicher und kollektiver Reflexion	351
Tabelle 7.8	Überblick über die in Kapitel 6 analysierten Reflexionsverläufe, sortiert nach dem Einfluss der Lehrkraft auf ihr Zustandekommen	358
Toulmin-Schema 6.1	Jariks erstes Argument in Phase 2.1	195
Toulmin-Schema 6.2	Jariks zweites Argument in Phase 2.1	197
Toulmin-Schema 6.3	Jariks Interpretation von JOCHENs schriftlichem Argument	201
Toulmin-Schema 6.4	JOCHENs Argument in Phase 1.2	207
Toulmin-Schema 6.5	Jariks relational gestütztes Argument in Phase 2.2.3	212
Toulmin-Schema 6.6	Argument der Lehrerin in Phase 3.2	239
Toulmin-Schema 6.7	JAKOBs Argument in Phase 3.4.....	250
Toulmin-Schema 6.8	JOCHENS Argument in Phase 3.2.....	263
Toulmin-Schema 6.9	Jariks Argument in Phase 3.2.....	264
Toulmin-Schema 6.10	Die neue Deutung kann das ursprüngliche Argument von JOCHEN aus Phase 3.2 stützen.	271
Toulmin-Schema 6.11	Gemeinsames Argument von JOCHEN und jarik in Phase 3.4.....	274
Toulmin-Schema 6.12	JENS' Argument in Phase 3.4.1	286
Toulmin-Schema 6.13	Jariks Argument in Phase 3.4.2.....	291
Toulmin-Schema 6.14	Gemeinsamens Argument von JENS und jarik in Phase 3.4.5	300
Toulmin-Schema 6.15	Argument von TOM und der Lehrerin in Phase 3.3..	311
Toulmin-Schema 6.16	Argument der Lehrerin in Phase 4.1	315
Toulmin-Schema 6.17	Kollektives Argument von JANINA und JOSEF	319
Toulmin-Schema 6.18	Kollektives Argument von LORENZ und TITUS	323
Toulmin-Schema 6.19	EDITHs Argument in Phase 4.8.....	331

Literatur

- Adhami, M. (2008). Successive reflections for pupils and teachers. *Equals Mathematics and Special Educational Needs*, 14(2), 3-5.
- Akinwumni, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Arnold, J. H. & Sieger, S. (2010). *Interaktive Wissenskonstruktion in der Grundschule – Interpretative Analysen von Episoden exemplarischer Reflexionsprozesse in Unterrichtsstunden zum Aufgabenformat »Malkreuz«*. Unveröffentlichte Bachelorarbeit. TU Dortmund.
- Baraldi, C., Corsi, G. & Esposito, E. (1997). *GLU: Glossar zu Niklas Luhmanns Theorie sozialer Systeme*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Barzel, B., Büchter, A. & Leuders, T. (2008). *Mathematik-Methodik: Handbuch für die Sekundarstufe I und II* (2. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Bauer, L. (1988). *Mathematik und Subjekt: Eine Studie über pädagogisch-didaktische Grundkategorien und Lernprozesse im Unterricht*. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.
- Bauer, L. (1990). Mathematikunterricht und Reflexion. *mathematik lehren*, 8(38), 6-9.
- Bauersfeld, H. (1978). Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht: Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antwortwartung. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht* (S. 158-170). Hannover: Schroedel.
- Beck, C. & Jungwirth, H. (1999). Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 20(4), 231-259.
- Beck, C. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung: Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 43-76). Köln: Aulis.
- Beth, E. W. & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht: Reidel.
- Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hamburg: Dr. Kovač.
- Borsch, F., Gold, A., Konenberger, J. & Souvignier, E. (2007). Der Experteneffekt: Grenzen kooperativen Lernens in der Primarstufe? *Unterrichtswissenschaft*, 35(3), 202-213.
- Brandt, B. (1997). „Ja, wie habe ich gerechnet?“. *Die Grundschulzeitschrift*, 11(110), 45-47.

- Brandt, B. & Krummheuer, G. (1999). Verantwortlichkeit und Originalität in mathematischen Argumentationsprozessen der Grundschule. *mathematica didactica*, 22(2), 3-36.
- Brandt, B. & Krummheuer, G. (2000). Das Prinzip der Komparation im Rahmen der Interpretativen Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(3/4), 193-226.
- Brandt, B. & Nührenböcker, M. (2009). Kinder im Gespräch über Mathematik. *Die Grundschulzeitschrift*, 23(4), 28-33.
- Bruner, J. S. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.
- Changeux, J.-P. & Connes, A. (1995). *Conversations on mind, matter, and mathematics*. Princeton, New Jersey: Princeton University.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.
- Cohen, E. G. (1994). Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups. *Review of Educational Research*, 64(1), 1-35.
- Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003). Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für „guten“ gymnasialen Mathematikunterricht. In H.-W. Henn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 173-180). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Davidson, P. M. (1987). How should non-positive integers be introduced in elementary mathematics? In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Hrsg.), *Proceedings of the 11th International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME 11)* (Bd. 2, S. 430-436).
- de Saussure, F. (1997). *Linguistik und Semiologie: Notizen aus dem Nachlaß; Texte, Briefe und Dokumente. Gesammelt, übersetzt und eingeleitet von Johannes Fehr*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- de Saussure, F. (2001). *Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft* (3. Aufl.). Berlin: Walter de Gruyter.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. London: Allen Lane The Pinguin Press.
- Dewey, J. (1993). *Demokratie und Erziehung: eine Einleitung in die philosophische Pädagogik*. Weinheim: Beltz. (Original erschienen 1916: Democracy and education)
- Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process* (2. Aufl.). Boston: D.C. Heath.

- Diederich, J. (1996). *Erster Zwischenbericht zum Forschungsprojekt KRAUM: Analyse von Unterrichtssituationen des Typs Einübung in „kritische Auseinandersetzung mit...“*. Berlin: Humboldt-Universität zu Berlin.
- Dörfler, W. (1988). Rolle und Mittel von Vergegenständlichung in der Mathematik *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 110-113). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Dudenredaktion (Hrsg.). (2001). *Duden: Herkunftswörterbuch: Etymologie der deutschen Sprache* (3. völlig neu bearbeitete und erweiterte Aufl.). Mannheim: Dudenverlag.
- Elbers, E. (2003). Classroom Interaction as reflection: Learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 77-99.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.
- Freudenthal, H. (1974). Die Stufen im Lernprozeß und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Middenschool. *Neue Sammlung*, 14(4), 161-172.
- Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München: Oldenbourg.
- Freudenthal, H. (1979). Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Freudenthal, H. (1983). Wie entwickelt sich reflexives Denken? *Neue Sammlung*, 23(5), 485-497.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gellert, A. (2012). Diskursive Aushandlung mathematischer Strittigkeiten in Kleingruppengesprächen. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 293-296). Münster: WTM.
- Gellert, A. (2013). GrundschulKinder erörtern verschiedenartige Deutungen eigener Lösungen - Interpretative Rekonstruktion mathematischer Argumentationsprozesse. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 344-347). Münster: WTM.
- Gellert, A. (2014). Students discussing mathematics in small-group interactions: opportunities for discursive negotiation processes focused on contentious mathematical issues. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 46(6), 855-869.
- Gellert, A. & Steinbring, H. (2012). Dispute in mathematical classroom discours - „No go“ or chance for fundamental learning? *Orbis Scholae*, 6(2), 103-118.
- Gellert, A. & Steinbring, H. (2014). Students constructing meaning for the number line in small-group discussions: negotiation of essential

- epistemological issues of visual representations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 46(1), 15-27.
- Glaserfeld, E., von. (1998). *Radikaler Konstruktivismus: Ideen, Ergebnisse, Probleme*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Götze, D. (2014). Ko-konstruktive Lerngespräche unter Grundschulkindern: Ergebnisse einer empirischen Studie zur sozialen Interaktion im Mathematikunterricht. *Mathematica didactica*, 37, 86-117.
- Hasselhorn, M. & Labuhn, A. S. (2008). Metakognition und selbstreguliertes Lernen. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogischen Psychologie* (S. 28-37). Göttingen: Hofgrefe.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* London: Jonathan Cape.
- Hirt, U. & Wälti, B. (2008). Triff die 50. In U. Hirt & B. Wälti (Hrsg.), *Lernumgebungen im Mathematikunterricht: Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte* (S. 86-91).
- Jungwirth, H. (2003). Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik - ein Überblick für Irrgäste, Teilzieher und Standvögel. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(5), 189-200.
- Jungwirth, H., Steinbring, H., Voigt, J. & Wollring, B. (1994). Interpretative Unterrichtsforschung in der Lehrerbildung. In H. Maier & u.a. (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung: Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 12-42). Köln: Aulis.
- Kadunz, G. (2005). Mittel für neues Wissen: Metaphern und Diagramme beim Lösen eines geometrischen Problems. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 119-128). Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Kaune, C. (2001). Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. *Der Mathematikunterricht*, 47(1), 14-34.
- Kaune, C. (2006). Reflection and metacognition in mathematics education – Tools for the improvement of teaching quality. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(4), 350-360.
- Kelle, U. (1994). *Empirisch begründete Theoriebildung: Zur Logik und Methodologie interpretativer Sozialforschung*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
- Kilpatrick, J. (1985). Reflection and Recursion. *Educational Studies in Mathematics*, 16(1), 1-26.
- Kilpatrick, J. (1986). Reflection and Recursion. In M. Carss (Hrsg.), *Proceedings of the 5th International Congress on Mathematical Education (ICME 5)* (S. 7-29). Boston: Birkhäuser.
- Klein, W. (1980). Argumentation und Argument. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik*, 10(38), 9-57.

- KMK - Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: (Jahrgangsstufe 4): Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters-Kluwer Deutschland.
- Kopperschmidt, J. (1989). *Methodik der Argumentationsanalyse*. Stuttgart, Bad Cannstatt: frommann-holzboog.
- Krauthausen, G. (2001). „Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat“. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt* (S. 99-113). Hamburg: Verlag Dr. Kovač.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). München: Elsevier.
- Krummheuer, G. (1995a). Argumentieren und Lernen: argumentationstheoretische Analyse einer mathematischen Partnerarbeit im 2. Schuljahr. In H.-G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Neue Ansätze für Konzentrationsbereiche und Arbeitsprogramme in der mathematikdidaktischen Forschung im deutschsprachigen Raum: Darstellung, Analysen, Perspektiven* (S. 85-90). Köln: Dümmler.
- Krummheuer, G. (1995b). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Hrsg.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (S. 229-270). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Krummheuer, G. (1997). Zum Begriff der „Argumentation“ im Rahmen einer Interaktionstheorie des Lernens und Lehrens von Mathematik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 29(1), 1-10.
- Krummheuer, G. (2003). Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(6), 122-138.
- Krummheuer, G. (2008). Inskription, Narration und diagrammatisch basierte Argumentation. Narrative Rationalisierungspraxen im Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Hrsg.), *Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht* (Bd. 2, S. 7-36). Münster: Waxmann.
- Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung*. Opladen: Leske + Budrich.
- Krummheuer, G. & Voigt, J. (1991). Interaktionsanalysen von Mathematikunterricht: Ein Überblick über einige Bielefelder Arbeiten. In H. Maier & u.a. (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung* (S. 13-32). Köln: Aulis.
- Kuntze, S. (2005). Also ich meine dazu ...: Materialien und Lernumgebungen zum Nachdenken über Mathematik. *mathematik lehren*, 23(132), 4-10.
- Kuntze, S. & Prediger, S. (2005). Ich schreibe, also denk' ich - Über Mathematik schreiben. *PM*, 47(5), 1-6.

- Lengnink, K. (2005a). Mathematik reflektieren und beurteilen: Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 21-36). Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Lengnink, K. (2005b). Reflecting mathematics: An approach to achieve mathematical literacy. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), 246-249.
- Lengnink, K. (2006a). Das Stellenwertsystem als Prinzip vom Rechnen mit wenigen Steinen: Reflektierend mathematisch handeln. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 343-346). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Lengnink, K. (2006b). Reflected acting in mathematical learning processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(4), 341-349.
- Leuders, T. (2010). Nachdenken geboten - Unterrichtskonzepte zur Förderung selbstständiger Reflexion im Mathematikunterricht. In T. Bohl, K. Kansteiner-Schänzlin, M. Kleinknecht, B. Kohler & A. Nold (Hrsg.), *Selbstbestimmung und Classroom-Management: Empirische Befunde und Entwicklungsstrategien zum guten Unterricht* (S. 221-235). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Locke, J. (1962). *Über den menschlichen Verstand* (Bd. 1). Berlin: Akademie. (Original erschienen 1894: An essay concerning human understanding)
- Lorenz, J. H. (1995). Mathematik anschaulich: Arithmetischen Strukturen auf der Spur: Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift*, 82, 8-12.
- Luhmann, N. (1997a). *Die Gesellschaft der Gesellschaft*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Luhmann, N. (1997b). Was ist Kommunikation? In F. B. Simon (Hrsg.), *Lebende Systeme: Wirklichkeitskonstruktionen in der systemischen Therapie* (S. 19-31). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht: Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.
- Maier, H. & Beck, C. (2001). Zur Theoriebildung in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 22(1), 29-50.
- Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse: Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Miller, M. (2006). *Dissens: Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens*. Bielefeld: transcript.
- Neubrand, M. (1990a). Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. *mathematica didactica*, 13(1), 21-48.

- Neubrand, M. (1990b). Über Mathematik sprechen - Möglichkeiten und Beispiele aus der Analysis. In M. Glatfeld (Hrsg.), *Finden, Erfinden, Lernen - Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt* (S. 62-83). Frankfurt: Lang.
- Nührenbörger, M. (2009). Interaktive Konstruktionen mathematischen Wissens - Epistemologische Analysen zum Diskurs von Kindern im jahrgangsgemischtem Anfangsunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(2), 147-172.
- Nührenbörger, M. (2010a). Einsichtsvolles Mathematiklernen im Kontext von Heterogenität. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 641-644). Münster: WTM.
- Nührenbörger, M. (2010b). Mathematische Zusammenhänge vorausschauend deuten und rückblickend betrachten: Anregungen zum jahrgangsgemischtem Mathematikunterricht in der Schuleingangsphase. *Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen*. Abruf am 09.05.2011 unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/user_upload/Material_aus_SGS/Handreichung_Nuehrenboerger.pdf
- Nührenbörger, M. (2015). Mathematical argumentation processes of children between calculation and conversion. In J. Novotná & H. Moraová (Hrsg.), *Developing mathematical language and reasoning: Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching (SEMT '15)* (S. 18-29). Prag: Charles University Prag.
- Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2010a). Die Entwicklung mathematischen Wissens in sozial-interaktiven Kontexten. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbeke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder: Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 73-81). Seelze: Klett-Kallmeyer.
- Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2010b). Diskurse über mathematische Zusammenhänge. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbeke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder: Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 169-215). Seelze: Klett-Kallmeyer.
- Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013). Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen“. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 716-719). Münster: WTM.
- Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2016). Processes of mathematical reasoning of equations in primary mathematics lessons. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (S. 316-323).

- Oevermann, U. (1995). Die objektive Hermeneutik als unverzichtbare methodologische Grundlage für die Analyse von Subjektivität: Zugleich eine Kritik der Tiefenhermeneutik. In T. Jung & S. Müller-Doohm (Hrsg.), „Wirklichkeit“ im Deutungsprozeß: Verstehen und Methoden in den Kultur- und Sozialwissenschaften (S. 106-189). Frankfurt: Suhrkamp.
- Oevermann, U., Allert, T., Konau, E. & Krambeck, J. (1979). Die Methodologie einer „objektiven Hermeneutik“ und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften. In H.-G. Soeffler (Hrsg.), *Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften*. Stuttgart: Metzlersche Verlagsbuchhandlung.
- Oevermann, U., Allert, T., Konau, E. & Krambeck, J. (1983). Die Methodologie einer „objektiven Hermeneutik“. In P. Zedler & H. Moser (Hrsg.), *Aspekte qualitativer Sozialforschung: Studien zu Aktionsforschung, empirischer Hermeneutik und reflexiver Sozialtechnologie* (S. 95-123). Opladen: Leske + Budrich.
- Padberg, F. (2005). *Didaktik der Arithmetik*. München: Elsevier.
- Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.
- Peschek, W. (2005). Reflexion und Reflexionswissen in R. Fischers Konzept der Höheren Allgemeinbildung. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 55-68). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Peschek, W., Prediger, S. & Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. *PM*, 50(20).
- Piaget, J. (1964). Development and Learning. In R. E. Ripple & V. N. Rockcastle (Hrsg.), *Piaget Rediscovered* (S. 7-20). Ithaca, New York: Cornell University.
- Piaget, J. (1973). *Einführung in die genetische Erkenntnistheorie*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Piaget, J. (1974a). *Abriß der genetischen Epistemologie*. Olten: Walter.
- Piaget, J. (1974b). *Biologie und Erkenntnis: Über die Beziehungen zwischen organischen Regulationen und kognitiven Prozessen*. Frankfurt am Main: S. Fischer.
- Piaget, J. (1975a). *Biologische Anpassung und Psychologie der Intelligenz*. Stuttgart: Klett.
- Piaget, J. (1975b). *Die Entwicklung des Erkennens I: Das mathematische Denken*. Stuttgart: Klett.
- Piaget, J. (1976). *Die Äquilibration der kognitiven Strukturen*. Stuttgart: Klett.
- Piaget, J. (1977a). *The grasp of consciousness: Action and concept in the young child*. London: Routledge & Paul.
- Piaget, J. (1977b). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante: L'Abstraction de l'ordre et des relations spatiales* (Bd. 2). Paris: Presses univ. de France.

- Piaget, J. (1977c). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante: L'Abstraction des relations logico-arithmétiques* (Bd. 1). Paris: Presses univ. de France.
- PISA-Konsortium, D. (Hrsg.). (2000). *Schülerleistungen im internationalen Vergleich: Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten* (Bd. 1). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.
- Prediger, S. (2002). Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In W. Pescheck (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 399-402). Hildesheim, Berlin: div-verlag Franzbecker.
- Prediger, S. (2005). „Was hat die Exponentialfunktion mit mir zu tun?“: Wege zur Nachdenklichkeit im Mathematikunterricht. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 97-110). Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung - ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In H. Bayrhuber, U. Harms, B. Muszynski, B. Ralle, M. Rothgangel, L.-H. Schön, H. J. Vollmer & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Formate Fachdidaktischer Forschung: Empirische Projekte - historische Analysen - theoretische Grundlegungen* (S. 29-45). Münster: Waxmann.
- Sandkühler, H. J. (Hrsg.). (1999). *Enzyklopädie Philosophie* (Bd. 2). Hamburg: Meiner.
- Scharlau, I. (1996). *Jean Piaget zur Einführung*. Hamburg: Junius.
- Schindler, M. (2014). *Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl: Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze Zahlen aus inferentieller Perspektive*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schmidt-Thieme, B. (2002). Reflexion im Mathematikunterricht. *Karlsruher pädagogische Beiträge*, 24(53), 76-91.
- Schmidt-Thieme, B. (2003). Gute Aufgaben als Ausgangspunkt für Reflexion. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 157-168). Offenburg: Mildenerger Verlag.
- Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 42(2), 149-161.
- Schülke, C. (2007). Reflexive mathematische Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im jahrgangsgemischtem Mathematikunterricht der flexiblen Schuleingangsstufe. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 291-294). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Schülke, C. (2009). „Sag mal, wie ich da vielleicht drauf gekommen bin“. *Die Grundschulzeitschrift*, 23 (4), 34-37.

- Schülke, C. (2013). *Mathematische Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern: Theoretische Grundlegung und empirisch-interpretative Evaluation*. Münster: Waxmann.
- Schülke, C. & Steinbring, H. (2010). Mathematical reflection in primary school education: Theoretical foundation and empirical analysis of a case study. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Hrsg.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (S. 862-872). Paris: INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PÉDAGOGIQUE.
- Schwarzkopf, R. (1999). Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 461-464). Hildesheim, Berlin: div-verlag Franzbecker.
- Schwarzkopf, R. (2000a). Argumentation als interaktiver Prozess. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 587-590). Hildesheim, Berlin: diVerlag Franzbecker.
- Schwarzkopf, R. (2000b). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Hildesheim, Berlin: div-verlag Franzbecker.
- Schwarzkopf, R. (2001a). Argumentationsanalysen im Unterricht der frühen Jahrgangsstufen - eigenständiges Schließen mit Ausnahmen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 22(3/4), 253-276.
- Schwarzkopf, R. (2001b). „Wir haben es herausgefunden“ - argumentative Beziehungen zwischen neuem und altem Wissen. In G. Kaiser (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 564-567). Hildesheim, Berlin: div-verlag Franzbecker.
- Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24(3/4), 211-235.
- Searle, J. R. (1995). *The construction of social reality*. New York: The Free Press.
- Selman, R. L., Demorest, A. P. & Krupa, M. P. (1984). Interpersonale Verhandlungen: Eine entwicklungstheoretische Analyse. In W. Edelstein & J. Habermas (Hrsg.), *Soziale Interaktion und soziales Verstehen: Beiträge zur Entwicklung der Interaktionskompetenz* (S. 113-166). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Siebel, F. (2005). Schreibend Mathematik reflektieren: Wie kann man zu Textproduktionen anregen? In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 85-96). Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Sjuts, J. (1999). *Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: Theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative*

- Auswertung eines kognitions- und konstruktivismustheoriegeleiteten Mathematikunterrichts.* Osnabrück: Forschungsinst. für Mathematikdidaktik.
- Skovsmose, O. (1998). Linking mathematics education and democracy: Citizenship, mathematical archaeology, mathemacy and deliberative interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 30(6), 195-203.
- Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! Wie Kinder im Arithmetikunterricht strategisch-strukturelle Vorgehensweisen entwickeln. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 225-239). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule - Der Grundschulverband.
- Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als soziale Konstruktion: Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(1), 28-49.
- Steinbring, H. (2004). *Die Konstruktion neuen mathematischen Wissens in der Unterrichtsinteraktion: Eine epistemologische Perspektive.* Universität Dortmund. Dortmund.
- Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective.* New York: Springer.
- Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? - An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 133-162.
- Steinbring, H. & Nührenböcker, M. (2010). Mathematisches Wissen als Gegenstand von Lehr-/Lerninteraktionen: Eigenständige Schülerinteraktionen in Differenz zu Lehrerinterventionen. In U. Dausendschön-Gay, C. Domke & S. Ohlhus (Hrsg.), *Wissen in (Inter-)Aktion: Verfahren der Wissensgenerierung in unterschiedlichen Praxisfeldern* (S. 161-188). Berlin: de Gruyter.
- Steinbring, H. & Scherer, P. (2004). Summenformeln. In G. N. Müller, H. Steinbring & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 237-254). Seelze: Kallmeyer, Klett.
- Steinke, I. (2000). Gütekriterien qualitativer Forschung. In U. Flick, E. von Kardorff & I. Steinke (Hrsg.), *Qualitative Forschung: Ein Handbuch* (S. 319-331). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch.
- Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung.* Münster: LIT.
- Suhr, M. (1994). *John Dewey zur Einführung* (1. Aufl.). Hamburg: Junius.
- Thiel, U. (1997). Einleitung. In U. Thiel (Hrsg.), *John Locke: Essay über den menschlichen Verstand* (S. 3-10). Berlin: Akademie.
- Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument.* Cambridge: Cambridge University.

- Toulmin, S. E. (1975). *Der Gebrauch von Argumenten*. Kronberg: Scriptor.
- Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology*, 21(4), 555-570.
- Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Weinheim, Basel: Beltz.
- Voigt, J. (1996). Empirische Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. In G. Kadunz (Hrsg.), *Trends und Perspektiven: 7. Kärntner Symposium zur Didaktik der Mathematik* (S. 383-398). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Voigt, J. (2000). Abduktion. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 694-667). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Vygotsky, L. S. (1969). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a. M.: Fischer.
- Vygotsky, L. S. (1987). *Ausgewählte Schriften: Band 2: Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persönlichkeit*. Köln: Pahl-Rugenstein.
- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Granzer, D. (Hrsg.). (2011). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (5. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Weingarten, R. & Pansegrau, P. (1993). Argumentationsstile im Unterricht. In B. Sandig & U. Püschel (Hrsg.), *Stilistik: Band III. Argumentationsstile* (S. 127-146). Hildesheim: Georg Olms.
- Wheatley, G. H. (1992). The role of reflection in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 23(5), 529-541.
- Wille, R. (2005). Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 3-19). Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
- Winkel, K. (2012). *Entwicklungsmechanismen von Metakognition im mathematischen Unterrichtsdiskurs der Grundschule: Ein designbasierter Unterrichtsversuch über vier Schuljahre*. München: Dr. Hut.
- Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4(1), 59-95.
- Winter, H. (1984a). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, 2(2), 4-16.
- Winter, H. (1984b). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. *Grundschule*, 16(4), 26-29.
- Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Winter, H. (2001). Inhalte mathematischen Lernens und Fundamentale Ideen in der Grundschule. Abruf am 11.05.2011 unter <http://www.schulabakus.de/Wechselspiele/winter-ideen.html>

- Wittmann, E. C. (1985). Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren*, 3(11), 7-11.
- Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Bd. 1, S. 152-166). Stuttgart, Düsseldorf: Ernst-Klett Schulbuchverlag.
- Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als „design science“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(2), 55-70.
- Wittmann, E. C. (1993). „Weniger ist mehr“: Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 394-397). Hildesheim: Franzbecker.
- Wittmann, E. C. (1994). Üben im Lernprozess. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (Bd. 2, S. 175-182). Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.
- Wittmann, E. C. (1995a). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht - vom Kind und vom Fach aus. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10-41). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule - Der Grundschulverband.
- Wittmann, E. C. (1995b). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 355-374.
- Wittmann, E. C. (1998a). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 16(3), 329-342.
- Wittmann, E. C. (1998b). Standard number representations in the teaching of arithmetic. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(2/3), 149-178.
- Wittmann, E. C. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 1-20.
- Wittmann, E. C. (2004). Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In G. Faust, M. Götz, H. Hacker & H.-G. Rossbach (Hrsg.), *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich* (S. 49-63). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Wittmann, E. C. (2010). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule - vom Fach aus. In P. Hanke, G. Möwes Butschko, A. K. Hein, D. Berntzen & A. Thielges (Hrsg.), *Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule* (S. 63-78): ZfL.
- Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2001). *Das Zahlenbuch: Mathematik im 3. Schuljahr*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag.

- Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (Hrsg.). (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (Bd. 2). Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.
- Wollring, B. (2008). Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In Kasseler Forschungsgruppe (Hrsg.), *Lernumgebungen auf dem Prüfstand: Zwischenergebnisse aus den Forschungsprojekten* (S. 9-26). Kassel university press GmbH: Kassel.
- Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In S. Lerman (Hrsg.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom* (S. 149-158). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling of focusing? In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Hrsg.), *Language and communication in the mathematics classroom* (S. 167-178). Reston, Virginia: National council of Teachers of Mathematics.
- Zwahr, A. (2006a). *Brockhaus-Enzyklopädie in 30 Bänden* (21., völlig neu bearbeitete Aufl. Bd. 23). Leipzig: Brockhaus.
- Zwahr, A. (2006b). *Brockhaus-Enzyklopädie in 30 Bänden* (21., völlig neu bearbeitete Aufl. Bd. 22). Leipzig: Brockhaus.

Transkriptionsregeln

24	Fortlaufende Zeilennummerierung
L	Lehrkraft
ly / JE	Namenskürzel Die angegebenen Namen der Kinder sind Pseudonyme und werden jeweils mit den ersten beiden Buchstaben abgekürzt. Jedes Pseudonym ist nur einmal vergeben, sodass derselbe Name an verschiedenen Stellen der Arbeit auch dasselbe Kind bezeichnet. Kleinbuchstaben bedeuten, dass das Kind im dritten Schulbesuchsjahr ist (hier ly). Großbuchstaben bedeuten, dass das Kind im vierten oder einem höheren Schulbesuchsjahr ist (hier JE).
(.)	Pause von ca. 1 Sekunde
(..)	2 Sekunden
(...)	3 Sekunden Länge
(15 sec Pause)	Längere Pause
<u>Die</u>	Besondere Betonung
<u>dreizehn</u>	Besonders lang gezogene Wörter
(unverständlich)	Völlig unverständlicher Beitrag
[bei allen]	Unverständlicher Beitrag, bei dem eine Vermutung über den Inhalt besteht
(zeigt auf die Additionszahl)	Handlungen, Ausdruck, Anmerkungen werden in kursiver Schrift wiedergegeben. Hierbei markiert das Satzzeichen die Gleichzeitigkeit von Handlung und Sprechakt.
JO: Mit der # Additionszahl 1	Gleichzeitig verlaufende Sprechakte oder auch Handlungen: Das Zeichen # markiert den Beginn.
ja: # Mhm	In Interaktionssequenzen mit vielen Unterbrechungen oder gleichzeitig verlaufenden Aktionen werden die Rauten nummeriert (#1, #2 usw.).
?	Durch Intonation oder Satzstellung erkennbare Frage
.	Stimmensenkung
Mhm	Eindeutige Bejahung
Hmhm	Eindeutige Verneinung
[...]	Besonderheit in Kapitel 7: Das Transkript ist gekürzt worden. Die vollständigen Transkripte können bei der Autorin angefragt werden.