Literatur

[A+01] Ahrens, J. u. a.: First Measurement of the Gerasimov-Drell-Hearn Integral for ^{1}H from 200 to 800 MeV. In: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), 022003

[A+02] Arndt, R. A. u. a.: Analysis of Pion Photoproduction Data. In: *Phys. Rev.* C 66 (2002), 055213

[Bal60] Baldin, A. M.: Polarizability of Nucleons. In: *Nucl. Phys.* 18 (1960),
S. 310

[Ber12] Beringer, J. u. a. [Particle Data Group]: Review of Particle Physics. In: *Phys. Rev.* D 86 (2012), 010001

[BGM00] Babusci, D. ; Giordano, G. ; Matone, G.: New Evaluation of the Baldin Sum Rule. In: *Phys. Rev.* C 57 (2000), S. 291

[BT99] Bianchi, N. ; Thomas, E.: Parameterisation of $[\sigma_{1/2} - \sigma_{3/2}]$ for $Q^2 \geq 0$ and Non-Resonance Contribution to the GDH Sum Rule. In: *Phys. Lett.* B 450 (1999), S. 439

[Cha73] Champeney, D. C.: *Fourier Transforms and their Physical Applications.* London u.a. : Academic Press, Inc., 1973

[Com23] Compton, A. H.: A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements. In: *Phys. Rev.* 21 (1923), S. 483

[CTDL99a] Cohen-Tannoudji, C. ; Diu, B. ; Laloë , F.: *Quantenmechanik 1.* Berlin u.a. : Walter de Gruyter, 1999

[CTDL99b] Cohen-Tannoudji, C. ; Diu, B. ; Laloë , F.: *Quantenmechanik 2.* Berlin u.a. : Walter de Gruyter, 1999

[D+99] Drechsel, D. u. a.: A Unitary Isobar Model for Pion Photo- and Electroproduction on the Proton up to 1 GeV. In: *Nucl. Phys.* A 645 (1999),
S. 145

[D+04] Dutz, H. u. a.: Experimental Check of the Gerasimov-Drell-Hearn Sum Rule for ^{1}H. In: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), 032003

[DA70] Duren, P. L. ; Arbor, A.: *Theory of H^p-Spaces.* New York u.a. : Academic Press, 1970

[Dem10] Demtröder, W.: *Experimentalphysik 3.* Berlin u.a. : Springer, 2010

D. Schallus, *Kausalität, Analytizität und Dispersionsrelationen*, BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-13201-9

[DH66] Drell, S. D. ; Hearn, A. C.: Exact Sum Rule for Nucleon Magnetic Moments. In: *Phys. Rev.* 16 (1966), S. 908

[DPV03] Drechsel, D. ; Pasquini, B. ; Vanderhaeghen, M.: Dispersion Relations in Real and Virtual Compton Scattering. In: *Phys. Rept.* 378 (2003), S. 99

[Fli97] Fliessbach, T.: *Elektrodynamik.* Heidelberg u.a. : Spektrum Akademischer Verlag, 1997

[FLS67] Feynman, R. P. ; Leighton, R. B. ; Sands, M.: *The Feynman Lectures on Physics.* Reading, Massachusetts u.a. : Addison-Wesley Publishing Company, 1967

[For01] Forster, O.: *Analysis 1.* Braunschweig u.a. : Viehweg, 2001

[For12] Forster, O.: *Analysis 3.* Wiesbaden : Viehweg-Teubner, 2012

[Fri09] Fritzsche, K.: *Grundkurs Funktionentheorie.* Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 2009

[Ger66] Gerasimov, S. B.: A Sum Rule for Magnetic Moments and the Damping of the Nucleon Magnetic Moment in Nuclei. In: *Sov. J. Nucl. Phys.* 2 (1966), S. 598

[GMG54] Gell-Mann, M. ; Goldberger, M. L.: Scattering of Low-Energy Photons by Particles of Spin 1/2. In: *Phys. Rev.* 96 (1954), S. 1433

[GMGT54] Gell-Mann, M. ; Goldberger, M. L. ; Thirring, W.E.: Use of Causality Conditions in Quantum Theory. In: *Phys. Rev.* 95, 2 (1954), S. 1612

[GR95] Greiner, W. ; Reinhardt, J.: *Quantenelektrodynamik.* Thun u.a. : Harri Deutsch, 1995

[Gre82] Greiner, W.: *Theoretische Physik: Klassische Elektrodynamik.* Thun : Harri Deutsch, 1982

[Gri05] Griffiths, D. J.: *Introduction to Quantum Mechanics.* Upper Saddle River : Pearson Education, Inc., 2005

[Gri08] Griffiths, D. J.: *Introduction to Elektrodynamics.* Upper Saddle River : Pearson Education, Inc., 2008

[Hag63] Hagedorn, R.: *Introduction to Field Theory and Dispersion Relations.* Berlin : Akademie-Verlag, 1963

[Hag66] HAGEDORN, R. ; DE-SHALIT, A. (Hrsg.): *Preludes in Theoretical Physics: In Honor of V. F. Weisskopf.* Amsterdam : North-Holland Publ., 1966.
S. 153–165

[Heu98] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis: Teil 1.* Stuttgart u.a. : B.G. Teubner, 1998

[Hil62] HILGEVOORD, J.: *Dispersion Relations and Causal Description: An Introduction to Dispersion Relations in Field Theory.* Amsterdam : North-Holland Publ., 1962

[HS13] HOLSTEIN, B. R. ; SCHERER, S.: Hadron Polarizabilities, arXiV: 1401.0140 [hep-ph]

[Jac02] JACKSON, J. D.: *Klassische Elektrodynamik.* Berlin u.a. : Walter de Gruyter, 2002

[KH07] KOPITZKI, K. ; HERZOG, P.: *Einführung in die Festkörperphysik.* Wiesbaden : B.G. Teubner, 2007

[Kin09a] KING, F. W.: *Hilbert Transforms.* Bd. 1. Cambridge : Cambridge University Press, 2009

[Kin09b] KING, F. W.: *Hilbert Transforms.* Bd. 2. Cambridge : Cambridge University Press, 2009

[KN29] KLEIN, O. ; NISHINA, Y.: Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantenmechanik nach Dirac. In: *Zeitschrift für Physik* 52 (1929), S. 853

[Kra27] KRAMERS, H. A.: La Diffusion de la Lumiere par les Atomes. In: *Atti Cong. Interm. Fisici, (Transactions of Volta Centenary Congress), Como*, Bd. 2 (1927), S. 545

[Kro26] KRONIG, R. de L.: On the Theory of Dispersion of X-Rays. *J. Opt. Soc. Am. 12* (1926), S. 547

[L+01] LEON, Olmos de u. a.: Low-energy Compton Scattering and the Polarizabilities of the Proton. In: *Eur. Phys. J.* A 10 (2001), S. 207

[LL76] LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Lehrbuch der Theoretische Physik II: Klassische Feldtheorie.* Berlin : Akademie-Verlag, 1976

[LL79] LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Lehrbuch der Theoretische Physik III: Quantenmechanik.* Berlin : Akademie-Verlag, 1979

[LL00] LEVCHUK, M. I. ; L'VOV, A. I.: Deuteron Compton Scattering below Pion Photoproduction Threshold. In: *Nucl. Phys.* A 674 (2000), S. 449

[Low54] LOW, F. E.: Scattering of Light of Very Low Frequency by Systems of Spin 1/2. In: *Phys. Rev.* 96 (1954), S. 1428

[Mue73] MÜLLER, H. H.: *Meyers Physik-Lexikon.* Mannheim u.a. : Bibliographisches Institut, 1973. S. 776

[Nol04] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 5/2.* Berlin u.a. : Springer-Verlag, 2004

[NU88] NIKIFOROV, A . F. ; UVAROV, V. B.: *Special Functions of Mathematical Physics.* Basel u.a. : Birkhäuser, 1988

[Nus72] NUSSENZVEIG, H. M.: *Causality and Dispersion Relations.* New York u.a. : Academic Press, 1972

[Piv10] PIVATO, M.: *Linear Partial Differential Equations and Fourier Theory.* Cambridge : Cambridge University Press, 2010

[Rol95] ROLLNIK, H.: *Quantentheorie.* Braunschweig u.a. : Vieweg, 1995

[S+02] SIMULA, S. u. a.: Leading and Higher Twists in the Proton Polarized Structure Function g_1^p at Large Bjorken x. In: *Phys. Rev.* D 65 (2002), 034017

[Sch99] SCHERER, S.: Real and Virtual Compton Scattering at Low Energies. In: *Czech. J. Phys.* 49 (1999), S. 1307

[Sch00] SCHECK, F.: *Theoretische Physik 2.* Berlin u.a. : Springer, 2000

[Sch04] SCHECK, F.: *Theoretische Physik 3.* Berlin u.a. : Springer, 2004

[Tay72] TAYLOR, J. R.: *Scattering Theory.* New York : John Wiley & Sons, Inc., 1972

[Tit48] TITCHMARSH, E. C.: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Oxford : Clarendorn Press, 1948

[WK06] WAHL, W. V. ; KERNER, H.: *Mathematik für Physiker.* Berlin u.a. : Springer, 2006

[WS05] WENDLAND, W. L. ; STEINBACH, O.: *Analysis: Integral- und Differentialrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen, komplexe Funktionentheorie.* Wiesbaden : B. G. Teubner, 2005

A Beweis der Dispersionsrelation des harmonischen Oszillators

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass

$$\mathscr{H}\left[\frac{\gamma\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega)^2}\right]=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega)^2} \tag{154}$$

gilt. Nach [Kin09b][12] gilt:

$$\mathscr{H}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right]=\frac{ab-x^2}{(a+b)(x^2+a^2)(x^2+b^2)}. \tag{155}$$

Setzt man nun

$$(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega)^2=(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2),$$

so folgt daraus unmittelbar

$$a^2+b^2=\gamma^2-2\omega_0^2 \quad \text{und} \quad a^2b^2=\omega_0^4 \quad \text{bzw.} \quad ab=\omega_0^2.$$

Daraus lässt sich $a+b$ folgendermaßen bestimmen

$$a+b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}=\sqrt{\gamma^2-2\omega_0^2+2\omega_0^2}=\gamma.$$

Setzt man dies nun in Gl. (155) ein, so führt dies auf

$$\mathscr{H}\left[\frac{\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega)^2}\right]=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\gamma[(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma\omega)^2]}.$$

Vergleicht man dies nun mit Gl. (154), so folgt die Behauptung mittels der Linearität der Hilbert-Transformation.

[12] Appendix: S. 460. King verwendet eine Definition der Hilbert-Transformierten, die sich im Vergleich zu der von Titchmarsh um ein Minuszeichen unterscheidet. Aus Konsistenzgründen wurde die obige Formel gemäß Titchmarshs Definition angepasst.

D. Schallus, *Kausalität, Analytizität und Dispersionsrelationen*, BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-13201-9

B Herleitung der Dispersionsrelationen

Für die Funktionen $g(\nu)$ bzw. $f(\nu)$ gelten die folgenden Kreuzungsrelationen [DPV03]:

$$f(-\nu) = f(\nu), \tag{156}$$
$$g(-\nu) = -g(\nu). \tag{157}$$

Zudem gilt unter entsprechenden Voraussetzungen nach dem Schwarz'schen Spieglungsprinzip [Fri09], S. 304:

$$f(z^*) = f^*(z) \quad \text{bzw.} \quad g(z^*) = g^*(z). \tag{158}$$

Mittels dieser Beziehung lassen sich nun die beiden Dispersionsrelationen für f und g herleiten. Es soll dabei mit der entsprechenden Relation für die Funktion g begonnen werden.

D. Schallus, *Kausalität, Analytizität und Dispersionsrelationen*, BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-13201-9

B.1 Dispersionsrelation für $g(\nu)$

Nach der Cauchy'schen Integralformel (Thm. 4), lässt sich die Funktion g schreiben als

$$g(\nu + \mathrm{i}\epsilon) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_C \frac{g(z)}{z - \nu - \mathrm{i}\epsilon} \mathrm{d}z, \tag{159}$$

wobei der Weg C genau so verläuft, wie in Abschnitt 7.6 erläutert. Es lässt sich zeigen, dass die infinitisimalen Kreise für verschwindendes ϵ keinen Beitrag liefern, falls die Funktion an der Stelle ν_0 beschränkt ist. Auch wurde erläutert, dass die Halbkreise in der unteren und der oberen Halbebene für hinreichend großen Radius vernachlässigbar sind. Demzufolge gilt es also noch das Integral über die verbleibenden Wege I, III, V, VII zu berechnen. Dafür soll nun zunächst das Integral über I und VII betrachtet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C_I + C_{VII}} \frac{g(z)}{z - \nu - \mathrm{i}\epsilon} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{g(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu} \mathrm{d}\nu' + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\infty}^{\nu_0} \frac{g(\nu' - \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu - 2\mathrm{i}\epsilon} \mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left[\frac{g(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu} - \frac{g(\nu' - \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu - 2\mathrm{i}\epsilon} \right] \mathrm{d}\nu' \\
&\overset{158}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left[\frac{g(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu} - \frac{g^*(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu - \mathcal{O}(\epsilon)} \right] \mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{(\nu' - \nu) g(\nu' + \mathrm{i}\epsilon) - (\nu' - \nu) g^*(\nu' + \mathrm{i}\epsilon) - \mathcal{O}(\epsilon) g(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{(\nu' - \nu)^2 - (\nu' - \nu)\mathcal{O}(\epsilon)} \mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{2\mathrm{i}(\nu' - \nu)\mathrm{Im}[g(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)] - \mathcal{O}(\epsilon) g(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{(\nu' - \nu)^2 - (\nu' - \nu)\mathcal{O}(\epsilon)} \mathrm{d}\nu' \\
&\overset{\epsilon \to 0}{\to} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu' - \nu} \mathrm{d}\nu'.
\end{aligned} \tag{160}$$

Analog gilt für das Integral über die beiden anderen Wege III und V:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_{III}+C_V} \frac{g(z)}{z-\nu-\mathrm{i}\epsilon} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{-\nu_0} \frac{g(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'-\nu} \mathrm{d}\nu' + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\nu_0}^{-\infty} \frac{g(\nu'-\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'-\nu-\mathcal{O}(\epsilon)} \mathrm{d}\nu' \\
&= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{g(-\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu} \mathrm{d}\nu' + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{g(-\nu'-\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu+\mathcal{O}(\epsilon)} \mathrm{d}\nu' \\
&\overset{157}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{g(\nu'-\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu} \mathrm{d}\nu' - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{g(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu+\mathcal{O}(\epsilon)} \mathrm{d}\nu' \\
&\overset{158}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{g^*(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu} \mathrm{d}\nu' - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{g(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu+\mathcal{O}(\epsilon)} \mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{(\nu'+\nu)[g^*(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)-g(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)]+\mathcal{O}(\epsilon)g^*(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{(\nu'+\nu)^2+\mathcal{O}(\epsilon)(\nu'+\nu)} \mathrm{d}\nu' \\
&\overset{\epsilon\to 0}{\to} -\frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'+\nu} \mathrm{d}\nu' .
\end{aligned}
$$

Abschließend gilt es nun die erhaltenen Ergebnisse über die Wegstücke zu addieren. Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
g(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'-\nu} \mathrm{d}\nu' - \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'+\nu} \mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{2\nu}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'^2-\nu^2} \mathrm{d}\nu' .
\end{aligned}
$$

Verwendet man nun das optische Theorem, so ergibt sich abschließend

$$
g(\nu) = \frac{\nu}{4\pi^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu'[\sigma_{1/2}(\nu')-\sigma_{3/2}(\nu')]}{\nu'^2-\nu^2} \mathrm{d}\nu' .
$$

Die obige Herleitung ist sicherlich für $\nu < \nu_0$, d. h. unterhalb der Pionproduktionsschwelle, korrekt. In diesem Fall liegt die Singularität des Integrals (159) innerhalb des durch C umrandeten Gebietes. Komplizierter wird die Untersuchung für den komplementären Fall $\nu_0 \leq \nu$. Dann befindet sich die Singularität auf dem Integrationsweg. Um dies zu verhindern umgeht man die Singularität auf einem infinitesimalen Umkreis nach unten (vgl. Abb. 12). Entlang der reellen Achse muss also der sogenannte *Linkswert des Integrals* untersucht werden (vgl. [Fri09], Kap. 3.4). Als Folge daraus geht Gl. (160) in

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'-\nu}\mathrm{d}\nu' \rightarrow \frac{1}{\pi}\mathscr{L}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'-\nu}\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{C.H.}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'-\nu}\mathrm{d}\nu' + \pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{res}_\nu\left\{\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'-\nu}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{C.H.}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'-\nu}\mathrm{d}\nu' + \mathrm{i}g(\nu)
\end{aligned}$$

über. Da die Integration der beiden anderen Wege über die negative Achse verläuft, kann dort wie gewöhnlich verfahren werden. Insgesamt ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
g(\nu) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{C.H.}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'-\nu}\mathrm{d}\nu' + \mathrm{i}g(\nu) - \int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'+\nu}\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{2\nu}{\pi}\mathrm{C.H.}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'^2-\nu^2}\mathrm{d}\nu' + \mathrm{i}g(\nu).
\end{aligned}$$

Subtrahiert man nun auf beiden Seiten $\mathrm{i}g(\nu)$, so erhält man schlussendlich

$$\mathrm{Re}[g(\nu)] = \frac{2\nu}{\pi}\mathrm{C.H.}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[g(\nu')]}{\nu'^2-\nu^2}\mathrm{d}\nu'.$$

Unter Verwendung des optischen Theorems wird daraus

$$\mathrm{Re}[g(\nu)] = \frac{\nu}{4\pi^2}\mathrm{C.H.}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{\nu'[\sigma_{1/2}(\nu')-\sigma_{3/2}(\nu')]}{\nu'^2-\nu^2}\mathrm{d}\nu'.$$

B.2 Dispersionsrelation für $f(\nu)$

Zur Berechnung der Dispersionsrelation für die Funktion f definiere man sich zunächst die Hilfsfunktionen h mit

$$h(\nu) = \frac{f(\nu) - f(0)}{\nu^2} \quad \text{und} \quad \widetilde{h}(\nu) = \frac{f^*(\nu) - f(0)}{\nu^2}.$$

Für das komplex Konjugierte dieser Hilfsfunktion gilt dann mittels Gl. (158)

$$h(\nu^*) = \frac{\nu^2}{(\nu^2)^*}\widetilde{h}(\nu). \tag{161}$$

Für die Differenz der beiden Funktionen h und $\widetilde{h}$ erhält man

$$h(\nu) - \widetilde{h}(\nu) = \frac{2\mathrm{i}}{\nu^2}\mathrm{Im}[f(\nu)]. \tag{162}$$

Mittels dieser Definitionen verläuft die Herleitung der Dispersionsrelation völlig analog zur vorangegangenen Rechnung. Man betrachtet also wieder die Integration über die Wege I,VII. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{C_I + C_{VII}} \frac{h(z)}{z - \nu - \mathrm{i}\epsilon}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{v_0}^{\infty} \frac{h(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu}\mathrm{d}\nu' + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\infty}^{v_0} \frac{h(\nu' - \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu - 2\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left[\frac{h(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu} - \frac{h(\nu' - \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu - 2\mathrm{i}\epsilon}\right]\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left\{\frac{h(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu} - \frac{h[(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)^*]}{\nu' - \nu - 2\mathrm{i}\epsilon}\right\}\mathrm{d}\nu' \\
&\overset{161}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left[\frac{h(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)}{\nu' - \nu} - \frac{\widetilde{h}(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)[\nu'^2 + \mathcal{O}(\epsilon)]}{[\nu'^2 - \mathcal{O}(\epsilon)][\nu' - \nu - \mathcal{O}(\epsilon)]}\right]\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\nu'^2\{[\nu' - \nu][h(\nu' + \mathrm{i}\epsilon) - \widetilde{h}(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)]\} + \mathcal{O}(\epsilon)}{\nu'^2(\nu' - \nu)^2 + \mathcal{O}(\epsilon)}\mathrm{d}\nu' \\
&\overset{162}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\{[\nu' - \nu]\mathrm{Im}[f(\nu' + \mathrm{i}\epsilon)]\} + \mathcal{O}(\epsilon)}{\nu'^2(\nu' - \nu)^2 + \mathcal{O}(\epsilon)}\mathrm{d}\nu' \\
&\overset{\epsilon \to 0}{\to} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[f(\nu')]}{(\nu' - \nu)\nu'^2}\mathrm{d}\nu'.
\end{aligned}$$

Nun gilt es die beiden anderen Wegstücke zusammenzufassen.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{C_{III}+C_V} \frac{g(z)}{z-\nu-\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{-\infty}^{-\nu_0} \frac{h(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'-\nu}\mathrm{d}\nu' + \int\limits_{-\nu_0}^{-\infty} \frac{h(\nu'-\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'-\nu+\mathcal{O}(\epsilon)}\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left[-\frac{h(-\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu} + \frac{h(-\nu'-\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu+\mathcal{O}(\epsilon)} \right]\mathrm{d}\nu' \\
&\overset{156}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left[\frac{h(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu+\mathcal{O}(\epsilon)} - \frac{h(\nu'-\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu} \right]\mathrm{d}\nu' \\
&\overset{161}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \left[\frac{h(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)}{\nu'+\nu+\mathcal{O}(\epsilon)} - \frac{\widetilde{h}(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)[\nu'^2+\mathcal{O}(\epsilon)]}{(\nu'+\nu)[\nu'^2-\mathcal{O}(\epsilon)]} \right]\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{(\nu'+\nu)(\nu'^2)[h(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)-\widetilde{h}(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)]+\mathcal{O}(\epsilon)}{(\nu'+\nu)^2\nu'^2+\mathcal{O}(\epsilon)}\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{(\nu'+\nu)\mathrm{Im}[f(\nu'+\mathrm{i}\epsilon)]+\mathcal{O}(\epsilon)}{(\nu'+\nu)^2\nu'^2+\mathcal{O}(\epsilon)}\mathrm{d}\nu' \\
&\overset{\epsilon\to 0}{\to} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[f(\nu)]}{(\nu'+\nu)\nu'^2}\mathrm{d}\nu'.
\end{aligned}
$$

Addiert man nun alle Wege, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
h(\nu) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[f(\nu')]}{(\nu'-\nu)\nu'^2}\mathrm{d}\nu' + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[f(\nu)]}{(\nu'+\nu)\nu'^2}\mathrm{d}\nu' \\
&= \frac{2}{\pi} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[f(\nu')]}{v'(\nu'^2-\nu^2)}\mathrm{d}\nu'.
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung des optischen Theorems führt dies zunächst auf

$$
h(\nu) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\sigma_T(\nu')}{(\nu'^2-\nu^2)}\mathrm{d}\nu'
$$

und nach Ersetzung von h schlussendlich auf

$$
f(\nu) = f(0) + \frac{\nu^2}{2\pi^2} \int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\sigma_T(\nu')}{(\nu'^2-\nu^2)}\mathrm{d}\nu'.
$$

Liegt die Singularität auf dem Integrationsweg, so muss wie bereits erläutert verfahren werden und man erhält

$$\mathrm{Re}[f(\nu)] = f(0) + \frac{\nu^2}{2\pi^2}\mathrm{C.H.}\int\limits_{\nu_0}^{\infty} \frac{\sigma_T(\nu')}{(\nu'^2 - \nu^2)}\mathrm{d}\nu'.$$

C Danksagung

Ich danke allen, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben. Dies schließt insbesondere Prof. Dr. Stefan Müller-Stach und Prof. Dr. Stefan Scherer ein, die mir bei Fragen immer hilfsbereit zur Seite standen. Vor allem bei Letzterem möchte ich mich an dieser Stelle ausdrücklich bedanken. Trotz seiner Rolle als „Zweitgutachter“, stand mir Stefans Tür immer offen und seine Ratschläge waren stets hilfreich und konstruktiv. Abschließend gilt ein besonderer Dank meiner Familie, meinen Freunden und meiner Freundin, die mich während der Erstellung dieser Arbeit und das gesamte Studium über immer wieder ermutigt und unterstützt haben.

D. Schallus, *Kausalität, Analytizität und Dispersionsrelationen*, BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-13201-9