
Anhang

Herleitung der Lorentz-Transformation

Bei dieser Herleitung möchten wir Einstein selbst zu Wort kommen lassen und zitieren deshalb (nicht immer wörtlich und mit leichten textlichen Änderungen) aus seinem Buch „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie“. Er hat dort eine einfache Herleitung der Lorentz-Transformation angegeben, die man gut mit Schulmathematik nachvollziehen kann.

Sei K ein (x, t) -Koordinatensystem und K' ein (x', t') -Koordinatensystem. Gesucht sind x' und t' , wenn x und t gegeben sind.

Ein Lichtstrahl soll sich in x -Richtung einer Zeit t fortpflanzen, Dann gilt

$$x = ct \text{ oder } x - ct = 0. \quad (1)$$

Dasselbe soll in x' -Richtung mit t' geschehen. Dann ist

$$x' - ct' = 0, \quad (2)$$

da c in allen Systemen prinzipiell konstant ist. Also müssen alle Raum-Zeitpunkte, die 1. und 2. erfüllen, die Beziehung

$$(x - ct) = \lambda(x' - ct') \quad (3)$$

erfüllen, wobei λ eine Konstante bedeutet, und ebenso

$$(x' + ct') = \mu(x + ct) \quad (4)$$

längs der negativen x -Achse. Die Addition und Subtraktion von 3. und 4. ergibt mit $a = (\lambda + \mu) / 2$ und $b = (\lambda - \mu) / 2$ dann

$$x' = ax - bct \text{ und } ct' = act - bx \quad (5)$$

Nun muss man noch a und b bestimmen. Wenn $x' = 0$ ist, dann gilt nach 5 $x = bct/a$. Nennen wir v die Geschwindigkeit, mit sich der sich K' relativ zu K bewegt, dann ist für $x' = 0$ nach 5.

$$v = bc / a \quad (6)$$

Nun muss die Länge eines in K' ruhenden Einheitsmaßstabes genau so lang sein ein in K ruhender. Wenn wir in einer „Momentaufnahme“ von K' von K aus für $t = 0$ betrachten, erhält man wiederum aus 5. $x' = ax$.

Zwei Punkte in K' sollen den Einheitsmaßstabes $x' = 1$ haben, also

$$\Delta x = x' - x = 1 / a. \quad (7)$$

Bildet aber die Momentaufnahme von K' mit $t' = 0$ aus, so erhält man aus 5. durch Eliminieren von t und unter Berücksichtigung von 6. $x' = ax(1 - v^2/c^2)$. Hieraus schließt man, daß zwei Punkte mit Abstand 1 auf der x -Achse (relativ zu K) auf unserer Momentaufnahme den Abstand

$$\Delta x' = a(1 - v^2 / c^2) \quad (7a)$$

haben. Nun muß aber $\Delta x = \Delta x'$ sein, so daß man erhält

$$a^2 = 1 / (1 - v^2 / c^2) \quad (7b)$$

Die Gl. 6. und 7b bestimmen die Konstanten a und b .

Dann gilt für die beiden Gl. 5.

$$\begin{aligned} x' &= (x - ct) / (1 - v^2 / c^2) \\ \text{und} \\ t' &= (t - vx / c^2) / (1 - v^2 / c^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Damit ist die Lorentz-Transformation für Ereignisse auf der x -Achse gewonnen. Sie genügt der Bedingung

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad (8a)$$

In y - und z -Richtung ändert sich nichts, da die Bewegung nur in x -Richtung stattfinden soll.

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (9)$$

An dieser Stelle verlassen wir Einsteins Herleitung, die für 8a noch etwas für beliebige Bewegungsrichtungen erweitert wird. Es gibt auch noch andere Herleitungen. Sie erfordern aber Kenntnisse, die über die Schulphysik hinausgehen.

Herleitung der Gleichung $E = m \cdot c^2$

Diese wohl berühmteste Gleichung der Physik haben wir bereits kennengelernt. Es gibt sehr viele Herleitungen dazu. Wir wollen hier die Schulmathematik mit Differential- und Integralrechnung benutzen. Sei m_0 die Ruhemasse also die Masse eines Objektes, das sich nicht bewegt. Dieses Objekt soll nun in x -Richtung mit der Beschleunigung a beschleunigt werden. Dann beträgt die Beschleunigung a' im System des Objektes gemäß der Gleichung

$$a' = \gamma^3 a \quad (10)$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ist und als Lorentz-Faktor bezeichnet wird.

Für eine Kraft K , die auf das Objekt wirkt (Kraft = Masse mal Beschleunigung), gilt dann:

$$K = m_0 a' \quad (11)$$

Der Zuwachs der kinetischen Energie dE_{kin} entlang eines Wegelementes dx beträgt mit a' , $a = dv/dt$ und $v = dx/dt$

$$dE_{kin} = K dx = K \cdot dx / dt \cdot dt = m_0 \gamma^3 dv / dt \cdot v \cdot dt = m_0 \gamma^3 \cdot v dv \quad (12)$$

Diese Gleichung kann man direkt nach v integrieren. Sie ergibt

$$E_{kin} = \int_0^v m_0 (1 - (v/c)^2)^{-3/2} \cdot v dv = m_0 c^2 (1 - (v/c)^2)^{-1/2} - m_0 c^2 \quad (13)$$

Dabei ist

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (14)$$

die Ruheenergie, die jedes Objekt besitzt (außer dem Licht!), auch wenn sich das Objekt nicht bewegt. Je größer die Geschwindigkeit wird, desto größer wird die bewegte träge Masse

$$m = m_0 (1 - (v/c)^2)^{-1/2} \quad (15)$$

Dass dies wirklich stimmt, hat man in Beschleunigern nachgewiesen. Die Gl. 13, 14, und 15. ergeben dann Einsteins berühmte Gleichung.

$$E = E_{kin} + E_0 = mc^2 \quad (16)$$

Im Newton'schen Grenzfall $c = \infty$ erhalten wir aus Gl. 13 und Entwicklung der Wurzel bis zur 1. Ordnung die bekannte Formel für die kinetische Energie

$$E_{kin} = mv^2 / 2 \quad (17)$$

Das Licht selbst hat zwar keine Ruhemasse und damit auch keine Ruheenergie. Aber es bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit und hat gemäß der quantenmechanischen Beziehung, die auch von Einstein entdeckt wurde, die Energie

$$E_{Licht} = h\nu \quad (18)$$

Dabei ist h das Planck'sche Wirkungsquantum, ν die Lichtfrequenz. Nach Gl. 16, und 18. kann man deshalb dem Licht eine (bewegte) Masse zuordnen:

$$m_{Licht} = h\nu / c^2, \quad (19)$$

die in der SRT und auch in der ART verwendet wird.

Vom Wesen physikalischer Theorien und Experimente

Dieses Kapitel steht zwar außerhalb dieses *essential*. Aber es passt zu der Thematik, wie Theorien und Experimente grundsätzlich im Zusammenhang mit der realen Welt zu beurteilen sind.

Es gibt immer wieder Literatur, in der Autoren – teilweise auch Physiker – sich über Sinn- und Unsinn einer bestehenden physikalischen Theorie auslassen, ja sie sogar als falsch bezeichnen. Kritik zu üben ist natürlich das gute Recht eines jeden. Dies soll auch nicht bestritten werden. In den vielen Fällen kann man die Kritik leicht entkräften, da oftmals nicht genügend mathematische und physikalische Vorkenntnisse vorhanden sind. Aber es gibt auch kritisierende Leute, bei denen man den Eindruck hat, dass sie überhaupt nicht den Sinn und Zweck einer physikalischen Theorie verstanden haben. Ich möchte dies zum Anlass nehmen, ein paar Worte über eben diesen Sinn und Zweck zu verlieren.¹

Eine Theorie versucht zunächst einmal, Naturerscheinungen qualitativ zu verstehen. Beispiele sind: Regenbogen, Wind und Wetter, Bewegungen, Wärme, Magnetismus, Licht und vieles andere. Wenn es dann noch gelingt, mit Hilfe der Mathematik eine Gesetzmäßigkeit zu formulieren, dann ist man schon ziemlich zufrieden.

Aber das reicht noch nicht, um eine Theorie als erfolgreich zu bezeichnen. Man benötigt auch noch Experimente, mit denen die Theorie verifiziert werden kann. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn eine Theorie Vorhersagen über Erscheinungen macht, die man bisher noch gar nicht beobachtet hat.

Umgekehrt gibt es auch experimentelle Ergebnisse, für die noch keine Theorie existiert. Sie wird aber benötigt, damit man die Ergebnisse auch auf andere Experimente übertragen kann. Falls dies möglich ist, spricht man oft von einer allgemeingültigen Theorie.

Welche Eigenschaften muss eine Theorie erfüllen, damit sie anerkannt wird? Sie darf zunächst einmal keine mathematischen und echten physikalischen Widersprüche enthalten. Man sagt, sie muss in sich konsistent sein. Weiterhin muss sie die Experimente, auf die sie sich bezieht, möglichst gut erklären können. Das sie „alles“ erklären kann, ist nicht notwendig, aber ihr Ziel. Sofern es sich um eine neue Theorie zu einem Thema handelt, muss sie mindestens so gut wie die bisherige sein.

An die Experimente werden aber auch einige Anforderungen gestellt. Der wichtigste Punkt ist die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse. D. h. wenn Experimente zu einem Thema wiederholt werden, müssen jedes mal im Rahmen der Messgenauigkeit dieselben Ergebnisse herauskommen. Weiterhin müssen die Messergebnisse statistischen Anforderungen genügen also signifikant sein, wie man sagt. Schließlich müssen immer vergleichbare Ergebnisse herauskommen, wenn das Experi-

¹ In den folgenden Ausführungen wird das Wort „Theorie“ verwendet. Es ist dabei immer eine „physikalische“ Theorie gemeint. Dieser Beitrag ist unter Mitwirkung von Frau Rahel Knöpfel entstanden. Sie ist Physikerin am Leibniz-Institut für Atmosphärenphysik, Kühlungsborn.

ment erneut mit anderen Methoden und Personen durchgeführt und ausgewertet wird.

Falls sich herausstellt, dass die Theorie mit den reproduzierbaren Daten des Experimentes nicht übereinstimmt, dann gilt die Theorie nur eingeschränkt auf bestimmte Bereiche oder sie muss entweder modifiziert oder gar verworfen werden. Diese Forderung hat Einstein selbst an seine Relativitätstheorie gestellt. Bisher sind aber experimentell keine Widersprüche zur SRT und ART nachgewiesen worden!

Aber es gibt noch einen weiteren wichtigen Punkt, der die Theorie und ihre Experimente betrifft: die physikalische Interpretation der Ergebnisse. Dies ist ein sehr weites Feld, über das immer wieder diskutiert wird und auch zu Kontroversen führt, z. B. bei der Quantentheorie. Dennoch sind ihre Erfolge unbestritten, wenngleich auch noch nicht alles wirklich verstanden wird.

Eine Theorie ist nur solange gültig, solange es keine bessere oder genauere Theorie gibt, die noch bisher offene Fragen beantworten kann. Sie muss auch von Experimenten bestätigt werden. Ein Widerspruch oder ein Paradoxon sind noch kein Beweis dafür, dass die Theorie falsch ist. Ein Widerspruch kann nur durch Experimente erhärtet werden. Ein Paradoxon muss durch die Theorie selbst aufgelöst werden können.

Eine allumfassende Theorie, die alle bisherigen einschließt, gibt es bisher noch nicht. Obwohl schon der Zusammenschluss der SRT mit der Maxwell'schen und Quantentheorie gelungen ist, fehlt noch die Verbindung der ART mit der Quantentheorie. Sie ist Gegenstand der heutigen Forschung in theoretischer Physik. Eine einzige Formel, die die physikalische Welt beschreibt, ist das Ziel, zu dem weitere experimentelle Forschungen in der Zukunft beitragen können.

Deshalb sei dazu ein mit Goethe kombiniertes Schlusswort des Autors erlaubt:

Die Natur ist ein andauernder und unerschöpflicher Gegenstand der Forschung,
 „...daß ich erkenne, was die Welt im Innersten zusammenhält...“².
 Aufgabe von WissenschaftlerInnen ist es, die Natur
 zu begreifen und zum Wohle des Menschen zu erhalten.

² Goethes Faust hatte sich im Rahmen dieses Zitates der „Magie ergeben“. Für manche Leserinnen und Leser ist Physik vielleicht auch so etwas wie „Magie“, muss es aber nach Ansicht des Autors nicht für immer bleiben.

Literatur

Lehrbücher und Fachartikel

- C. Møller „The Theory of Relativity“, Clarendon Press, Oxford, 1972
- W. Rindler „Relativity“, Oxford University Press, New York, 2006
- R. d’Iverno „Einführung in die Relativitätstheorie“, VCH-Verlag, Weinheim, 1995
- J. Bailey et. al. „Final report on the CERN muon storage ring including the anomalous magnetic moment and the electric dipole moment of the muon, and a direct test of relativistic time dilation“, Nuclear Physics B, Vol. 150, p. 1–75, 1979
<http://de.arxiv.org/abs/gr-qc/9909054>
- Dan Schroeder „Purcell Simplified: Magnetism, Radiation and Relativity“
<http://physics.weber.edu/schroeder/mrr/MRRhandout.pdf>
http://en.wikibooks.org/wiki/Special_Relativity/Simultaneity,_time_dilation_and_length_contraction
- C. Will „Theory and Experiment in Gravitational Physics“, Cambridge Univ. Press, 1993
- H. Goenner „Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie“, Spectrum Akad. Verlag, 1996
- E. Rebhan „Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie“, Springer, Heidelberg, 2012

Sachbücher

- B. Sonne, R. Weiß „Einsteins Theorien – Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für interessierte Einsteiger und zur Wiederholung“, Springer Spektrum, Heidelberg, 2013
- A. Einstein „Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie“, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1917.
- H. Moritz, B. Hofmann-Wellenhof „Geometry, Relativity, Geodesy“, Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1993
- J. Stachel (Hrsg.) „Einsteins Annus mirabilis“ Fünf Schriften, die die Welt der Physik revolutionierten, Rowohlt, 2001

- A. Einstein „Grundzüge der Relativitätstheorie“, 6. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1990
P.J. Nahin „Time Machines – Time Travel in Physics, Metaphysics, and Science Fiction“, Springer, New York, 1999

Allgemein verständlich

- A. Einstein, L. Infeld „Die Evolution der Physik“, Rowohlt, 1962
http://en.wikipedia.org/wiki/Hafele%E2%80%93Keating_experiment
F. Embacher „Relativistische Korrekturen für GPS“, <http://homepage.univie.ac.at/franz.e>

Biographien

- R. W. Clark „Albert Einstein – Leben und Werk“, Heyne, München, 1974
A. Fölsing „Albert Einstein – Eine Biographie“, Suhrkamp, Frankfurt a. M., 1995
P. Jordan „Albert Einstein“, Huber, Frauenfeld, 1969
J. Wickert „Albert Einstein – In Selbstzeugnissen und Bilddokumenten“, Rowohlt, Reinbeck, 1972