
Anhang

Herleitung der Gleichung $E = m \cdot c^2$

Diese wohl berühmteste Gleichung der Physik haben wir bereits kennengelernt. Es gibt sehr viele Herleitungen dazu. Wir wollen hier die Schulmathematik mit Differential- und Integralrechnung benutzen. Sei m_0 die Ruhemasse also die Masse eines Objektes, das sich nicht bewegt. Dieses Objekt soll nun in x-Richtung mit der Beschleunigung a_x beschleunigt werden. Dann beträgt die Beschleunigung a' im System des Objektes gemäß der Gleichung

$$a'_x = \gamma^3 a_x, \quad (1)$$

wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ist und als Lorentz-Faktor bezeichnet wird.

Für eine Kraft K , die auf das Objekt wirkt (Kraft = Masse mal Beschleunigung), gilt dann:

$$K = m_0 a' \quad (2)$$

Der Zuwachs der kinetischen Energie dE_{kin} entlang eines Wegelementes dx beträgt mit a' und $v = dx/dt$

$$dE_{kin} = K dx = K \cdot dx / dt \cdot dt = m_0 \gamma^3 dv / dt \cdot v \cdot dt = m_0 \gamma^3 \cdot v dv \quad (3)$$

Diese Gleichung kann man direkt nach v integrieren. Sie ergibt

$$E_{kin} = \int_0^v m_0 (1 - (v/c)^2)^{-3/2} \cdot v dv = m_0 c^2 (1 - (v/c)^2)^{-1/2} - m_0 c^2 \quad (4)$$

Dabei ist

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (5)$$

die *Ruheenergie*, die jedes Objekt besitzt (außer dem Licht!), auch wenn sich das Objekt nicht bewegt. Je größer die Geschwindigkeit wird, desto größer wird die *bewegte* träge Masse

$$m = m_0 (1 - (v/c)^2)^{-1/2} \quad (6)$$

Dass dies wirklich stimmt, hat man in Beschleunigern nachgewiesen. Die Gl. 4. 5. und 6. ergeben dann Einsteins berühmte Gleichung.

$$E = E_{kin} + E_0 = mc^2 \quad (7)$$

Im Newton'schen Grenzfall c gegen unendlich erhalten wir aus Gl. 4 und Entwicklung der Wurzel bis zur 1. Ordnung die bekannte Formel für die kinetische Energie

$$E_{kin} = mv^2/2 \quad (8)$$

Das Licht selbst hat zwar keine Ruhemasse und damit auch keine Ruheenergie. Aber es bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit und hat gemäß der quantenmechanischen Beziehung, die auch von Einstein entdeckt wurde, die Energie

$$E_{Licht} = hv \quad (9)$$

Dabei ist h das Planck'sche Wirkungsquantum, v die Lichtfrequenz. Nach Gl. 7. und 9. kann man deshalb dem Licht eine (bewegte) Masse zuordnen:

$$m_{Licht} = hv/c^2 \quad (10)$$

die in der SRT und ART verwendet wird.

Eigenzeiten für GPS und Flug mit Atomuhren

GPS

Die Zeitunterschiede zwischen Uhren auf der Erde und im Satellit berechnen sich beim GPS nach der Formel

$$\Delta\tau_s = \Delta t_e * \text{Wurzel}(1 - 2 GM/c^2 / (1/r_s - 1/r_e)) - v^2/c^2)$$

$\Delta\tau_s$ ist ein im Satelliten abgelaufenes Zeitintervall. Δt_e ist dann das entsprechende Zeitintervall auf der Erde. r_s und r_e sind die Radien der Erde und der Kreisbahn des Satelliten. v ist die Geschwindigkeit des Satelliten. G und M sind die Newton'sche Gravitationskonstante bzw. Masse der Erde. Wichtig ist, dass bei deren Nenner ($1/r_s - 1/r_e$) steht, da es nur auf die Differenz des Gravitationspotentials von Erde und Satellit ankommt. c ist wie gehabt die Lichtgeschwindigkeit.

Daraus ergibt sich als Verhältnis beider Zeitintervalle, wenn man die Wurzel bis zur 1. Ordnung entwickelt:

$$\Delta\tau_s / \Delta t_e = 1 - GM/c^2 / (1/r_s - 1/r_e) - v^2 / (2c^2)$$

und numerisch zu

$$\Delta\tau_s / \Delta t_e = 1 + 4,44 * 10^{-10}$$

was einer Abweichung der Signalfrequenz, die auf der Erde vom Satelliten gesendet ankommt, entspricht, Multipliziert man den Korrekturterm mit der Lichtgeschwindigkeit, dann erhält man eine Ortsabweichung auf der Erde von 13,3 cm pro Sekunde. Um diese Abweichung zu kompensieren, wird die Signalfrequenz geringfügig verstellt. Es gibt noch andere Bewegungskorrekturen, auf die wir hier nicht eingehen.

Flug mit Atomuhren

Die Zeitunterschiede zwischen der Uhr im Flugzeug, das um die Erde fliegt, und der Uhr auf der Erde berechnet sich nach einer ähnlichen Formel wie beim GPS:

$$\tau_e = t * \text{Wurzel}\left(1 - 2 GM / (c^2 r_e) - r_e^2 \Omega_e^2 / c^2\right)$$

und

$$\tau_s = t * \text{Wurzel}\left(1 - 2 GM / (c^2 (r_e + h_F)) - ((r_e + h_F) \Omega_e + v_F)^2 / c^2\right)$$

Es gelten die gleichen Bezeichnungen wie oben bei GPS. Die Zeit t bezieht sich in diesem Fall auf das Koordinatensystem die Erde, die sich im freien Fall um die

Sonne bewegt. Zusätzlich ist h_F die Flughöhe, v_F ist die Geschwindigkeit des Flugzeuges, das um den Äquator fliegt, g ist die Erdbeschleunigung, Ω_e ist die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung um sich selbst. Wenn man wiederum die Wurzel bis zur 1. Ordnung entwickelt, dann beträgt der relative Zeitunterschied

$$(\tau_s - \tau_e)/\tau_e = gh_F/c^2 - (2 r_e \Omega_e v_F + v_F^2)/c^2$$

In westlicher Flugrichtung ($v < 0$) ist das $2,13 \cdot 10^{-12}$ und in östlicher Richtung ($v > 0$) $-0,95 \cdot 10^{-12}$. Diese Unterschiede kann man messen. Sie stimmen gut mit der Theorie überein.

Literatur (kleine Auswahl)

Lehrbücher und Fachartikel

- Adler, R., Silbergleit, A.: A general treatment of orbiting gyroscope precession. (1999). <http://de.arxiv.org/abs/gr-qc/9909054>
- Ashby, N.: Relativity in the global positioning system. (2003). <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1>
- Bailey, J. et. al.: Final report on the CERN muon storage ring including the anomalous magnetic moment and the electric dipole moment of the muon, and a direct test of relativistic time dilation. Nucl. Phys. B. **150**, 1–75 (1979)
- Dirac, P.A.M.: General theory of relativity. Princeton University Press, New Jersey (1996)
- d'Iverno, R.: Einführung in die Relativitätstheorie. VCH-Verlag, Weinheim (1995)
- Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Annalen der Physik, 4. Folge. **49** (1916). (Es ist manchmal ganz interessant in Einsteins Originalarbeiten nachzulesen, wie er seine Theorien erklärt und herleitet)
- Everitt, F. et. al.: "Gravity probe B: Final results of a space experiment to test general relativity". (2011). <http://arxiv.org/abs/1105.3456>
- Fließbach, T.: Allgemeine Relativitätstheorie. Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg (2006)
- Foster, J., Nightingale, J.D.: A short course in general relativity. Springer-Verlag, Berlin (1995)
- Goenner, H.: Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg (1996)
- Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A.: Gravitation. Freeman, San Francisco (1973)
- Møller, C.: The theory of relativity. Clarendon Press, Oxford (1972)
- Rebhan, E.: Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie. Springer, Heidelberg (2012)
- Rindler, W.: Relativity. Oxford University Press, New York (2006)
- Weinberg, S.: Gravitation and cosmology. Wiley & Sons, Hoboken (1972)
- Will, C.: Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993)

Sachbücher

- Berry, M.: Kosmologie und Gravitation. Teubner Studienbücher, Stuttgart (1990)
- Einstein, A.: „Grundzüge der Relativitätstheorie“. 6. Aufl Vieweg, Braunschweig (1990)
- Einstein, A.: Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Vieweg Verlag, Braunschweig (1917)
- Gravity Probe B. (2011). <http://einstein.stanford.edu>
- Moritz, H., Hofmann-Wellenhof, B.: Geometry, relativity, geodesy. Wichmann Verlag, Karlsruhe (1993)
- Nahin, P.J.: Time machines – time travel in physics, metaphysics, and science fiction. Springer, New York (1999)
- Penrose, R.: Computerdenken. Spektrum Verlag, Heidelberg (1990)
- Sonne, B., Weiß, R.: Einsteins Theorien – Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für interessierte Einsteiger und zur Wiederholung. Springer Spektrum, Heidelberg (2013)
- Stachel, J. (Hrsg.): „Einsteins Annus mirabilis“ Fünf Schriften, die die Welt der Physik revolutionierten. Rowohlt, (2001)

Allgemein verständlich

- Al-Khalili, J.: Schwarze Löcher, Wurmlöcher und Zeitmaschinen. Spektrum, Heidelberg (2004)
- Brassett, B., Edney, R.: Relativitätstheorie – ein Sachcomic. Tibia Press, Überlingen (2012)
- Campbell, J.: GPS im Schatten des Uhrenparadoxons – Betrachtungen zu den Auswirkungen der Relativitätstheorie bei Satellitennavigationssystemen, Festschrift 125 Jahre Geodäsie und Geoinformatik, Leibnitz-Universität Hannover, Heft Nr. 263, S. 129 146 (2006)
- Einstein, A., Infeld, L.: Die Evolution der Physik, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg (1962)
- Embacher, F.: Relativistische Korrekturen für GPS. <http://homepage.univie.ac.at/franz.e>
http://en.wikipedia.org/wiki/Hafele%E2%80%93Keating_experiment
- Lesch, H., Müller, j.: Kosmologie für helle Köpfe – Die dunklen Seiten des Universums, Goldmann, München (2006)

Biographien

- Clark, R.W.: Albert Einstein – Leben und Werk. Heyne, München (1974)
- Fölsing, A.: Albert Einstein – Eine Biographie, Suhrkamp, Frankfurt a. M (1995)
- Jordan, P.: Albert Einstein, Huber, Frauenfeld (1969)
- Wickert, J.: Albert Einstein – In Selbstzeugnissen und Bilddokumenten, Rowohlt, Reinbeck (1972)