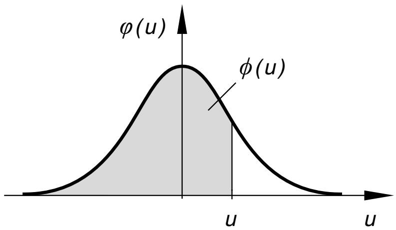
Anhang

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3*, DOI 10.1007/978-3-658-11924-9

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung



Schrittweite: $\Delta u = 0{,}01$

Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \qquad (u > 0)$$

Für $u \geq 4$ ist $\phi(u) \approx 1$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8398
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0.9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Zahlenbeispiele

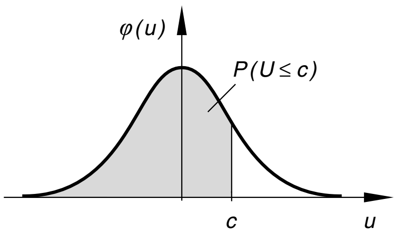
(1) $\phi\,(1{,}32) = 0{,}9066$

(2) $\phi\,(1{,}855) = 0{,}9682$ (durch lineare Interpolation)

(3) $\phi\,(-2{,}36) = 1 - \phi\,(2{,}36) = 1 - 0{,}9909 = 0{,}0091$

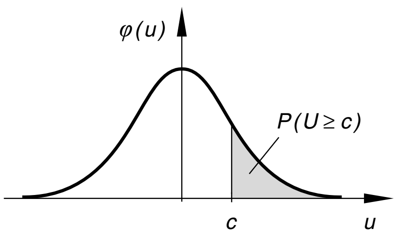
Formeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

(1) *Einseitige* Abgrenzung nach *oben* $(c > 0)$



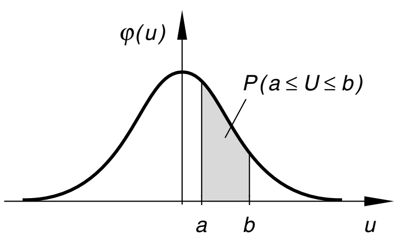
$$P\,(U \le c) = \phi\,(c)$$

(2) *Einseitige* Abgrenzung nach *unten* $(c > 0)$



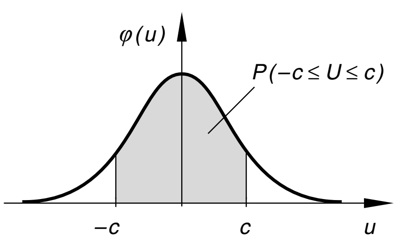
$$P\,(U \ge c) = 1 - P\,(U \le c) = 1 - \phi\,(c)$$

(3) *Zweiseitige* (unsymmetrische) Abgrenzung $(a < b)$



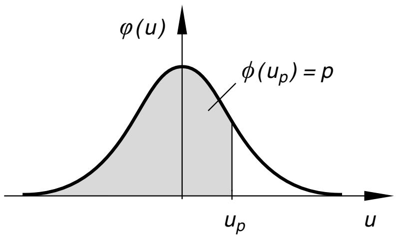
$$P\,(a \le U \le b) = \phi\,(b) - \phi\,(a)$$

(4) *Zweiseitige* (symmetrische) Abgrenzung $(c > 0)$



$$P\,(-c \le U \le c) = P\,(|U| \le c) = 2 \cdot \phi\,(c) - 1$$

Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit
$(0 < p < 1)$

u_p: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil u_p (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

p	u_p	p	u_p
0,90	1,282	0,1	−1,282
0,95	1,645	0,05	−1,645
0,975	1,960	0,025	−1,960
0,99	2,326	0,01	−2,326
0,995	2,576	0,005	−2,576
0,999	3,090	0,001	−3,090

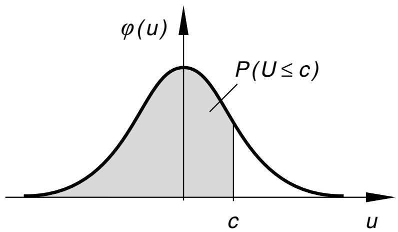
Formeln:

$$u_{1-p} = -u_p$$

$$u_p = -u_{1-p}$$

Formeln zur Berechnung von Quantilen der Standardnormalverteilung

(1) *Einseitige* Abgrenzung nach *oben*



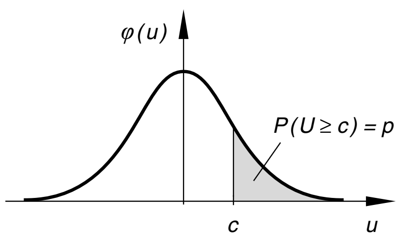
$$P(U \leq c) = \phi(c) = p$$

$$\phi(c) = p \rightarrow c = u_p$$

Zahlenbeispiel:

$$P(U \leq c) = \phi(c) = 0{,}90 \rightarrow c = u_{0,90} = 1{,}282$$

(2) *Einseitige* Abgrenzung nach *unten*



$$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) =$$

$$= 1 - \phi(c) = p$$

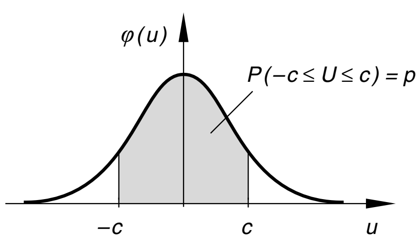
$$\phi(c) = 1 - p \rightarrow c = u_{1-p}$$

Zahlenbeispiel:

$$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c) = 0{,}90$$

$$\phi(c) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \rightarrow c = u_{0,10} = -1{,}282$$

(3) *Zweiseitige* (symmetrische) Abgrenzung



$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = p$$

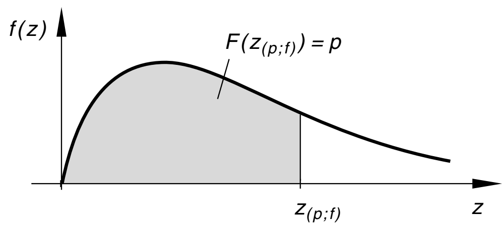
$$\phi(c) = \frac{1}{2}(1 + p) \rightarrow c = u_{(1+p)/2}$$

Zahlenbeispiel:

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0{,}90$$

$$\phi(c) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}90) = 0{,}95 \rightarrow c = u_{0,95} = 1{,}645$$

Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit $(0 < p < 1)$

f: Anzahl der Freiheitsgrade

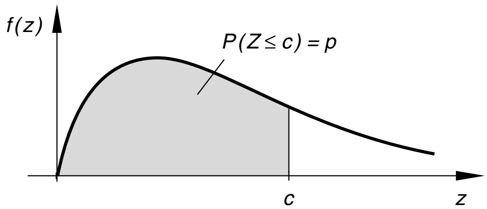
$z_{(p;f)}$: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil $z_{(p;f)}$ in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

	p									
f	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,020	0,051	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,554	0,831	1,15	1,16	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,06	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,67	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
22	8,6	9,5	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
24	9,9	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Formeln zur Berechnung von Quantilen der Chi-Quadrat-Verteilung

(1) *Einseitige* Abgrenzung nach *oben* $(c > 0)$



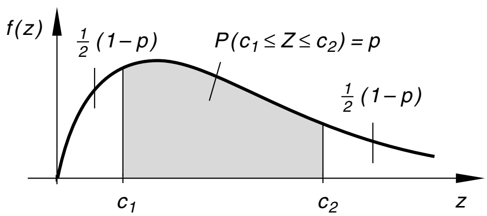
$$P(Z \le c) = F(c) = p$$

$$F(c) = p \rightarrow c = z_{(p;\, f)}$$

Zahlenbeispiel (bei $f = 10$ Freiheitsgraden):

$$P(Z \le c) = F(c) = 0{,}90 \xrightarrow{f=10} c = z_{(0{,}90;\, 10)} = 15{,}99$$

(2) *Zweiseitige* (symmetrische) Abgrenzung $(c_1 < c_2)$



$$P(c_1 \le Z \le c_2) = p$$

Bestimmung der Schranken (Grenzen) c_1 und c_2:

$$P(Z \le c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2}(1 - p)$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1 - p) \rightarrow c_1 = z_{((1-p)/2;\, f)}$$

$$P(Z \ge c_2) = 1 - P(Z \le c_2) = 1 - F(c_2) = \frac{1}{2}(1 - p)$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2}(1 + p) \rightarrow c_2 = z_{((1+p)/2;\, f)}$$

Zahlenbeispiel (bei $f = 10$ Freiheitsgraden):

$$P(c_1 \le Z \le c_2) = 0{,}90$$

$$P(Z \le c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}90) = 0{,}05$$

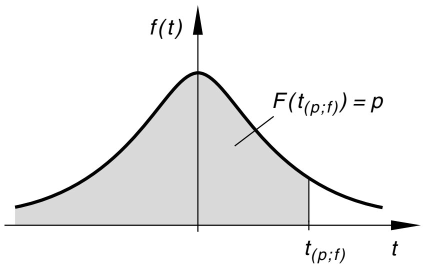
$$F(c_1) = 0{,}05 \xrightarrow{f=10} c_1 = z_{(0{,}05;\, 10)} = 3{,}94$$

$$P(Z \ge c_2) = 1 - P(Z \le c_2) = 1 - F(c_2) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}90) = 0{,}05$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}90) = 0{,}95 \xrightarrow{f=10} c_2 = z_{(0{,}95;\, 10)} = 18{,}31$$

Somit gilt: $c_1 = 3{,}94$ und $c_2 = 18{,}31$

Tabelle 4: Quantile der t-Verteilung von „Student“



p: Vorgegebene Wahrscheinlichkeit ($0 < p < 1$)

f: Anzahl der Freiheitsgrade

$t_{(p;f)}$: Zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden (*obere* Schranke)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von p das jeweils zugehörige Quantil $t_{(p;f)}$ in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad f (*einseitige* Abgrenzung nach *oben*).

	p				
f	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,707	31,820	63,654
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

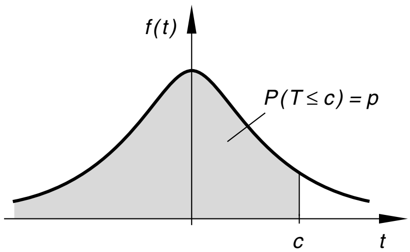
Formeln:

$$t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}$$

$$t_{(p;f)} = -t_{(1-p;f)}$$

Formeln zur Berechnung von Quantilen der *t*-Verteilung von „Student"

(1) *Einseitige* Abgrenzung nach *oben*

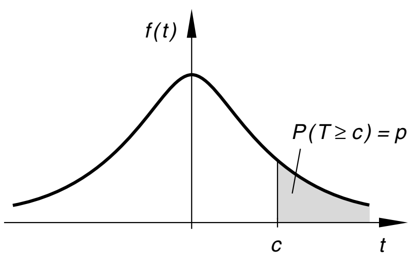


$$P(T \le c) = F(c) = p$$
$$F(c) = p \rightarrow c = t_{(p;\,f)}$$

Zahlenbeispiel (bei $f = 10$ Freiheitsgraden):

$$P(T \le c) = F(c) = 0{,}90 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0{,}90;\,10)} = 1{,}372$$

(2) *Einseitige* Abgrenzung nach *unten*

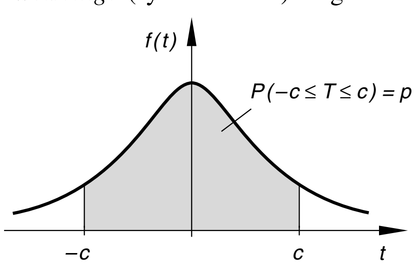


$$P(T \ge c) = 1 - P(T \le c) =$$
$$= 1 - F(c) = p$$
$$F(c) = 1 - p \rightarrow c = t_{(1-p;\,f)}$$

Zahlenbeispiel (bei $f = 10$ Freiheitsgraden):

$$P(T \ge c) = 1 - P(T \le c) = 1 - F(c) = 0{,}90$$
$$F(c) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0{,}10;\,10)} = -t_{(0{,}90;\,10)} = -1{,}372$$

(3) *Zweiseitige* (symmetrische) Abgrenzung



$$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = p$$
$$F(c) = \frac{1}{2}(1 + p) \rightarrow c = t_{((1+p)/2;\,f)}$$

Zahlenbeispiel (bei $f = 10$ Freiheitsgraden):

$$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = 0{,}90$$
$$F(c) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}90) = 0{,}95 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0{,}95;\,10)} = 1{,}812$$

Anhang

Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben

I Vektoranalysis

Abschnitt 1

1) $x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2$ (Fallgesetz) $\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0)$

2) a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4t^2 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8t \end{pmatrix} \qquad (t \geq 0)$

b) $\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}}(t) = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad (0 \leq t < 2\pi)$

c) $x = t, \quad y = 2x = 2t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (-\infty < t < \infty)$

3) a) Die Bahnkurve ist eine *Ellipse* mit den Halbachsen a und b und dem „Startpunkt" $A = (a; 0)$ zur Zeit $t = 0$ (siehe Bild A-1). ω ist die *Winkelgeschwindigkeit*.

b) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega \cdot \sin(\omega t) \\ b\omega \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ -b\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\omega t) \\ b \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$

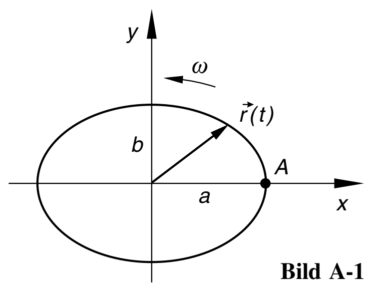


Bild A-1

Minuszeichen bedeutet: $\vec{a}(t)$ ist dem Ortsvektor $\vec{r}(t)$ stets entgegen gerichtet.

4) a) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cdot \cos(\omega t) \\ -\omega^2 R \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \cdot \sin t \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin t \\ R \cdot \cos t \end{pmatrix}$

5) a) $\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2t) \\ e^t \\ -2 \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}; \quad \ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(2t) \\ e^t \\ -4 \cdot \cos(2t) \end{pmatrix}$

b) $\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \cdot \cos t - \sin t \cdot e^{-t} \\ -e^{-t} \cdot \sin t + \cos t \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sin t + \cos t) \cdot e^{-t} \\ -(\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -(\cos t - \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ -(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

(Ableitungen jeweils mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*)

6) a) $$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot\cos t \\ 2\cdot\sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\cdot\sin t \\ 2\cdot\cos t \\ 2t \end{pmatrix} =$$
$$= 2\cdot\cos t + 4t\cdot\sin t + 3t^4 - 2t\cdot\sin t + 2t^2\cdot\cos t + 2t^4 =$$
$$= 5t^4 + 2t\cdot\sin t + 2(1+t^2)\cdot\cos t$$

b) $$\frac{d}{dt}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \dot{\vec{b}}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\dot{\vec{c}} = 3t^2 - 4\cdot \mathrm{e}^{-t}\cdot\sin t$$

c) $$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2\cdot\cos t \\ 2\cdot\sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\cdot\sin t \\ 2\cdot\cos t \\ 2t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2t^3 - 6t^2\cdot\sin t \\ 6t^2\cdot\cos t - t^2 \\ 2\cdot\sin t - 4t\cdot\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^3 - 2t^3\cdot\cos t \\ -2t^3\cdot\sin t - 2t^2 \\ 2t\cdot\cos t + 2t^2\cdot\sin t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4t^3 - 6t^2\cdot\sin t - 2t^3\cdot\cos t \\ -3t^2 - 2t^3\cdot\sin t + 6t^2\cdot\cos t \\ 2(1+t^2)\cdot\sin t - 2t\cdot\cos t \end{pmatrix}$$

d) $$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{c}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{c} + \vec{a}\times\dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 3t^2 + (t^3 - 3t^2)\cdot \mathrm{e}^{-t} \\ -2t - (t^3 - 3t^2)\cdot \mathrm{e}^{-t} \\ (1 - 3t + t^2)\cdot \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

7) $$\dot{\vec{r}}(t) = 10(-\sin(5t)\,\vec{e}_x + \cos(5t)\,\vec{e}_y + \vec{e}_z); \qquad |\dot{\vec{r}}(t)| = 10\sqrt{2}$$
$$\vec{T}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,[-\sin(5t)\,\vec{e}_x + \cos(5t)\,\vec{e}_y + \vec{e}_z]; \quad \vec{T}(t = \pi/4) = \frac{1}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \sqrt{2}\,\vec{e}_z)$$
$$\dot{\vec{T}}(t) = -\frac{5}{2}\sqrt{2}\,(\cos(5t)\,\vec{e}_x + \sin(5t)\,\vec{e}_y); \qquad |\dot{\vec{T}}| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$
$$\vec{N}(t) = -\cos(5t)\,\vec{e}_x - \sin(5t)\,\vec{e}_y; \qquad \vec{N}(t = \pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$
$$\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = 10\cdot 50\begin{pmatrix} -\sin(5t) \\ \cos(5t) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ -\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix} = 500\begin{pmatrix} \sin(5t) \\ -\cos(5t) \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$|\dot{\vec{r}}| \times \ddot{\vec{r}}| = 500\sqrt{2}; \qquad \kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{500\sqrt{2}}{(10\sqrt{2})^3} = 1/4; \qquad \kappa(t = \pi/4) = 1/4$$

8) a) $$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}; \qquad |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{8t^2 + 1} = \sqrt{8\left(t^2 + \frac{1}{8}\right)} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{8} + t^2}$$
$$s = 2\sqrt{2}\cdot\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{8} + t^2}\,dt = \sqrt{2}\left[t\sqrt{\frac{1}{8} + t^2} + \frac{1}{8}\cdot\ln\left(t + \sqrt{\frac{1}{8} + t^2}\right)\right]_0^1 =$$
$$= 1{,}8116 \quad (\text{Integral 116 mit } a^2 = 1/8)$$

b) $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 2\sqrt{2}$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(8t^2+1)^{3/2}}; \qquad \kappa(t=1) = \frac{2}{27}\sqrt{2}; \qquad \varrho(t=1) = \frac{27}{4}\sqrt{2}$$

9) a) $x = t, \quad y = t^2 \quad \Rightarrow$ Normalparabel $y = x^2$

b) $\dot{\vec{r}} = 1\,\vec{e}_x + 2t\,\vec{e}_y; \qquad |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{1+4t^2} = 2\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}$

$$s = 2 \cdot \underbrace{\int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\,dt}_{\text{Integral 116 mit } a^2 = 1/4} = \left[t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2} + \frac{1}{4} \cdot \ln\left(t + \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\right)\right]_0^2 = 4{,}6468$$

c) $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 2$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}; \qquad \kappa(t=1) = 0{,}1789$$

d) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_x + 2t\,\vec{e}_y; \qquad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = 2\,\vec{e}_y$

e) $v_T = v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{1+4t^2}; \qquad v_N = 0$

$$a_T = \dot{v} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}; \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} \cdot (1+4t^2) = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

10) Ableitungen jeweils mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos t - \sin t \cdot \mathrm{e}^{-t})\,\vec{e}_x + (-\mathrm{e}^{-t} \cdot \sin t + \cos t \cdot \mathrm{e}^{-t})\,\vec{e}_y =$$
$$= -(\cos t + \sin t) \cdot \mathrm{e}^{-t}\,\vec{e}_x + (\cos t - \sin t) \cdot \mathrm{e}^{-t}\,\vec{e}_y = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos t + \sin t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \cos t \cdot \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin t)\,\vec{e}_x +$$
$$+ (\mathrm{e}^{-t} \cdot \sin t - \cos t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \sin t \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} \cdot \cos t)\,\vec{e}_y =$$
$$= 2 \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin t\,\vec{e}_x - 2 \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \cos t\,\vec{e}_y = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y$$

$$v_T = v = |\dot{\vec{r}}| = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} =$$
$$= \mathrm{e}^{-t} \cdot \sqrt{\cos^2 t + 2 \cdot \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \cdot \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t} =$$
$$= \mathrm{e}^{-t} \cdot \sqrt{2\,\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{-t}; \qquad v_N = 0$$

Krümmung (wird für die Berechnung von $a_N = \kappa v^2$ benötigt):

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{-(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t}(-2 \cdot e^{-t} \cdot \cos t) - 2 \cdot e^{-t} \cdot \sin t (\cos t - \sin t) \cdot e^{-t}}{(\sqrt{2} \cdot e^{-t})^3} =$$

$$= \frac{2 \cdot e^{-2t}(\cos^2 t \sin t \cdot \cos t - \sin t \cdot \cos t + \sin^2 t)}{2\sqrt{2} \cdot e^{-3t}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^t$$

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e^t \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{-t})^2 = \sqrt{2} \cdot e^{-t}; \qquad a_T = \dot{v} = -\sqrt{2} \cdot e^{-t}$$

11) $x = x, \quad \dot{x} = 1, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = y', \quad \ddot{y} = y''; \quad \kappa = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \dfrac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$

Abschnitt 2

1) a) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = 4 \begin{pmatrix} -\sin(2u) \\ \cos(2u) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$ b) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} v \\ -v \cdot \sin(uv) \\ -v \end{pmatrix}; \quad \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} u \\ -u \cdot \sin(uv) \\ -u \end{pmatrix}$

2) *Flächenparameter:* Winkel φ, Höhenkoordinate z (Bild A-2)

$x = 2 \cdot \cos\varphi; \qquad y = 2 \cdot \sin\varphi; \qquad z = z$

Mantelfläche: $\vec{r}(\varphi; z) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos\varphi \\ 2 \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$(0 \le \varphi < 2\pi; \ 0 \le z \le 5)$

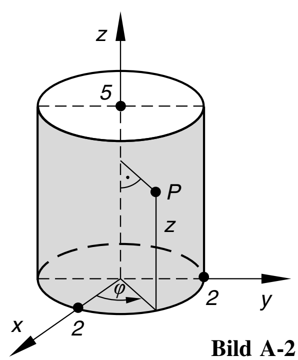


Bild A-2

3) Nach Bild A-3 (u, v: reelle Parameter):

$\vec{r}(P) = \vec{r}(u; v) = \vec{r}_1 + u\vec{a} + v\vec{b} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 + u + 2v \\ 1 - u + 2v \\ 1 + u + 2v \end{pmatrix}$$

$(u, v \in \mathbb{R})$

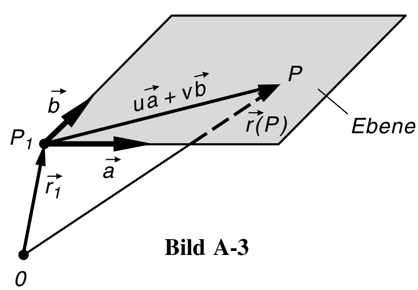


Bild A-3

4) a) Mit $x = \cos u \cdot \sin v$, $y = \sin u \cdot \sin v$ und $z = \cos v$ folgt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 u \cdot \sin^2 v + \sin^2 u \cdot \sin^2 v + \cos^2 v =$$
$$= \sin^2 v \cdot \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{1} + \cos^2 v = \underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_{1} = 1$$

Diese Gleichung beschreibt die Oberfläche einer *Kugel* um den Nullpunkt mit dem Radius $r = 1$.

b) $$\vec{t}_u \cdot \vec{t}_v = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \sin v \\ \cos u \cdot \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cos v \\ \sin u \cdot \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix} =$$
$$= -\sin u \cdot \cos u \cdot \sin v \cdot \cos v + \sin u \cdot \cos u \cdot \sin v \cdot \cos v + 0 = 0$$

Die Vektoren $\vec{t}_u$ und $\vec{t}_v$ sind *orthogonal* (stehen senkrecht aufeinander), da ihr Skalarprodukt verschwindet.

5) $$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vartheta}\, \vec{t}_\vartheta + \dot{\varphi}\, \vec{t}_\varphi\,; \qquad \vec{t}_\vartheta = 2 \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cdot \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}; \qquad \vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $$\vartheta = \vartheta_0\,; \quad \varphi = t\,; \quad \dot{\vartheta} = 0\,; \quad \dot{\varphi} = 1\,; \quad \vec{v}(t) = 0\,\vec{t}_\vartheta + 1\,\vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} -\sin t \cdot \sin\vartheta_0 \\ \cos t \cdot \sin\vartheta_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(t) = 2\sqrt{\sin^2\vartheta_0\, \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1} + 0} = 2 \cdot \sin\vartheta_0\,; \qquad v(t = \pi) = 2 \cdot \sin\vartheta_0$$

b) $$\vartheta = t\,; \qquad \varphi = \varphi_0\,; \qquad \dot{\vartheta} = 1\,; \qquad \dot{\varphi} = 0$$

$$\vec{v}(t) = 1\,\vec{t}_\vartheta + 0\,\vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \cdot \cos t \\ \sin\varphi_0 \cdot \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$v(t) = 2\sqrt{\cos^2 t\, \underbrace{(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0)}_{1} + \sin^2 t} = 2\sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}} = 2$$

$$v(t = \pi) = 2$$

c) $$\vartheta = t\,; \qquad \varphi = t^2\,; \qquad \dot{\vartheta} = 1\,; \qquad \dot{\varphi} = 2t$$

$$\vec{v}(t) = 1\,\vec{t}_\vartheta + 2t\,\vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} \cos(t^2) \cdot \cos t - 2t \cdot \sin(t^2) \cdot \sin t \\ \sin(t^2) \cdot \cos t + 2t \cdot \cos(t^2) \cdot \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$v^2(t) = 4\{[\cos(t^2)\cdot\cos t - 2t\cdot\sin(t^2)\cdot\sin t]^2 +$$
$$+ [\sin(t^2)\cdot\cos t + 2t\cdot\cos(t^2)\cdot\sin t]^2 + \sin^2 t\} =$$
$$= 4[\cos^2(t^2)\cdot\cos^2 t - 4t\cdot\cos(t^2)\cdot\sin(t^2)\cdot\cos t\cdot\sin t +$$
$$+ 4t^2\cdot\sin^2(t^2)\cdot\sin^2 t + \sin^2(t^2)\cdot\cos^2 t +$$
$$+ 4t\cdot\sin(t^2)\cdot\cos(t^2)\cdot\cos t\cdot\sin t + 4t^2\cdot\cos^2(t^2)\cdot\sin^2 t + \sin^2 t] =$$
$$= 4[\underbrace{(\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2))}_{1}\cdot\cos^2 t + 4t^2\underbrace{(\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2))}_{1}\cdot\sin^2 t + \sin^2 t] =$$
$$= 4[\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1} + 4t^2\cdot\sin^2 t] = 4[1 + 4t^2\cdot\sin^2 t]$$
$$v(t) = 2\sqrt{1 + 4t^2\cdot\sin^2 t}; \qquad v(t = \pi) = 2$$

6) a) $$\vec{t}_u = R\begin{pmatrix}\cos u\cdot\cos v\\ \cos u\cdot\sin v\\ -\sin u\end{pmatrix}; \qquad \vec{t}_v = R\begin{pmatrix}-\sin u\cdot\sin v\\ \sin u\cdot\cos v\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_u\times\vec{t}_v = R^2\begin{pmatrix}0 + \sin^2 u\cdot\cos v\\ \sin^2 u\cdot\sin v\\ \sin\mathrm{u}\cdot\cos\mathrm{u}\,\underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{1}\end{pmatrix} = R^2\cdot\sin u\begin{pmatrix}\sin u\cdot\cos v\\ \sin u\cdot\sin v\\ \cos u\end{pmatrix}$$

$$|\vec{t}_u\times\vec{t}_v| = R^2\cdot\sin u\cdot\sqrt{\sin^2 u\,\underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{1} + \cos^2 u} =$$
$$= R^2\cdot\sin u\cdot\sqrt{\underbrace{\sin^2 u + \cos^2 u}_{1}} = R^2\cdot\sin u$$

$$\vec{N} = \frac{t_u\times t_v}{|\vec{t}_u\times\vec{t}_v|} = \begin{pmatrix}\sin u\cdot\cos v\\ \sin u\cdot\sin v\\ \cos u\end{pmatrix}$$

An der Stelle $u = v = \pi/2$ gilt: $\vec{t}_u = R\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$; $\vec{t}_v = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$; $\vec{N} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

b) $dA = |\vec{t}_u\times\vec{t}_v|\,du\,dv = R^2\cdot\sin u\,du\,dv$

c) $R = 1; \qquad u = v = \dfrac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad P = \left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

Flächennormale in P: $\vec{N}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Tangentialebene in P:

$$\vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1/2 \\ y - 1/2 \\ z - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} + \sqrt{2}\,z - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + \sqrt{2}\,z - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(-x - y + 2)$$

7) Ortsvektor der Rotationsfläche: $\vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}$

a) *Tangentenvektoren:* $\vec{t}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u/\sqrt{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v/\sqrt{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}$

Tangentenvektoren in $P = (1;\ 2;\ 3)$: $\vec{t}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

b) *Flächennormale* in $P = (1;\ 2;\ 3)$:

$$(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0| = \frac{1}{3}\sqrt{14}$$

$$\vec{N}_0 = \frac{(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0}{|(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) *Tangentialebene* in $P = (1;\ 2;\ 3)$:

$$\vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\,[-1\,(x - 1) - 2\,(y - 2) + 3\,(z - 3)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\,(-x - 2y + 3z - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{3}\,(x + 2y + 4)$$

8) Ortsvektor der Fläche: $\vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_x \times \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangentialebene in $P = (2; 1; 3)$:

$$(\vec{t}_x \times \vec{t}_y)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z - 3 \end{pmatrix} = -4(x - 2) + 2(y - 1) + 1(z - 3) =$$

$$= -4x + 2y + z + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4x - 2y - 3$$

9) Lösungsweg wie in Aufgabe 8.

Ortsvektor der Fläche: $\vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}$; *Tangentialebene* in P: $z = 5x + 2y - 10$

Abschnitt 3

1) a) $x^2 + y^2 = \text{const.} = c > 0$: *Konzentrische Kreise* (Radius: $r = \sqrt{c}$); (siehe Bild A-4)

b) $x^2 - y = \text{const.} = c$ oder $y = x^2 - c$ $(c \in \mathbb{R})$: *Parabelschar* (Normalparabeln, der jeweilige Scheitelpunkt liegt auf der y-Achse bei $y = -c$; siehe Bild A-5)

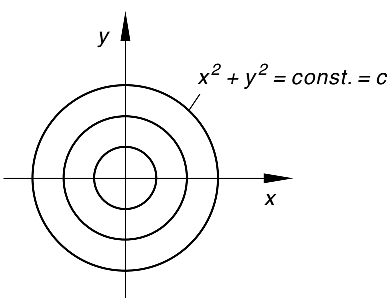


Bild A-4

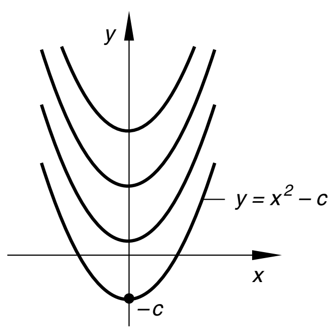


Bild A-5

2) a) $z - x^2 - y^2 = \text{const.} = c$ oder $z = x^2 + y^2 + c$ $(c \in \mathbb{R})$:

Schar von *Rotationsparaboloiden*, durch Drehung der Parabel $z = x^2 + c$ um die z-Achse entstanden (der jeweilige Tiefpunkt liegt auf der z-Achse bei $z = c$; siehe Bild A-6)

b) $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} = c$ (mit $c > 0$):

Konzentrische Kugelschalen (Mittelpunkt = Nullpunkt; Radius: $r = \sqrt{c}$)

3) $2x^2 + 2y^2 = \text{const.} = c$ oder $x^2 + y^2 = c^*$ $(c^* = c/2 > 0;\ z$: beliebig$)$:
Koaxiale Zylindermäntel (Zylinderachse = z-Achse; Zylinderradius: $\sqrt{c^*}$; siehe Bild A-7)

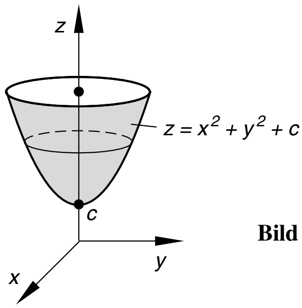


Bild A-6

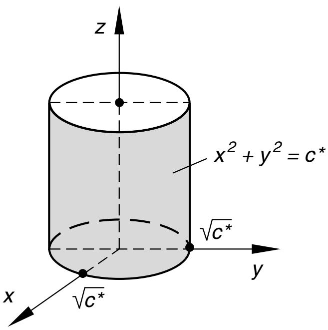


Bild A-7

4) Aus $U = \text{const.}$ folgt $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} = c$ mit $c \geq R$. Die Äquipotentialflächen sind daher *konzentrische Kugelschalen* (Radius: $r = \sqrt{c}$; Kugelmittelpunkt = Nullpunkt; siehe Bild A-8).

5) Aus $U = \text{const.}$ folgt $x = \text{const.} = c\ (0 \leq c \leq d)$. Die Äquipotentialflächen sind daher *Ebenen* parallel zu den Plattenflächen (siehe Bild A-9).

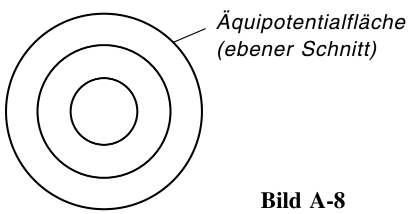


Bild A-8

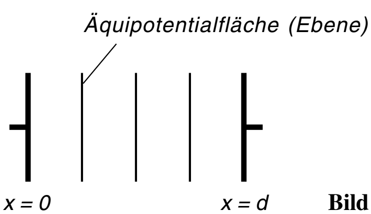


Bild A-9

6) Das Geschwindigkeitsfeld wächst *linear* mit der x-Koordinate: $v = |\vec{v}| = x$ (mit $x \geq 0$). Längs einer Parallelen zur y-Achse bleibt v konstant (siehe Bild A-10).

7) $\vec{F}(x; y) = \dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{r}\,\vec{r} = \vec{e}_r$

$\vec{r}$: Ortsvektor des Punktes $P = (x; y)$ mit $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\vec{e}_r$: Radialer Einheitsvektor

Das Feld ist *radial nach außen* gerichtet, der Feldvektor besitzt überall den Betrag 1:
$|\vec{F}(x; y)| = |\vec{e}_r| = 1$ (siehe Bild A-11)

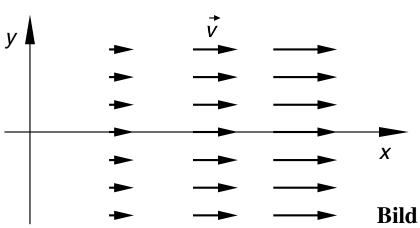


Bild A-10

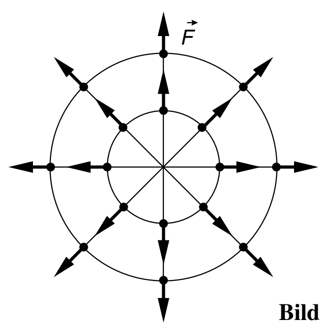


Bild A-11

8) $\vec{F}(x; y) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ steht *senkrecht* auf dem Ortsvektor $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des Punktes $P = (x, y)$, da das Skalarprodukt dieser Vektoren verschwindet (siehe Bild A-12):

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{r}(-xy + xy) = 0$$

Die Feldlinien sind *konzentrische Kreise* um den Nullpunkt und werden vom Feldvektor in der aus Bild A-13 ersichtlichen Weise tangiert. Der Feldvektor hat ferner die *konstante* Länge $|\vec{F}(x; y)| = 1$.

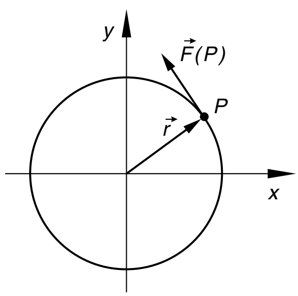


Bild A-12

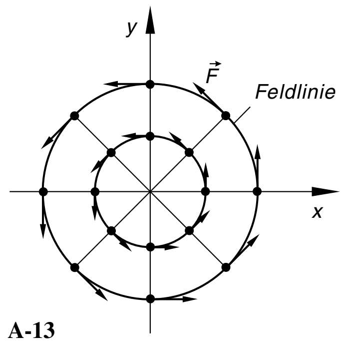


Bild A-13

9) Die Feldlinien genügen der Gleichung $\vec{v} \times d\vec{r} = \vec{0}$:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dy - y\,dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad dy - y\,dx = 0$$

Daraus erhält man die Differentialgleichung $dy = y\,dx$ oder $y' = y$, die sich durch „Trennung der Variablen" lösen lässt. Man erhält so Feldlinien vom Exponentialtyp $y = C \cdot e^x$ (mit $C \in \mathbb{R}$). Unser Teilchen „startet" aus der Anfangslage $P = (0; 2)$ und bewegt sich dann auf der Bahnkurve $y = 2 \cdot e^x$.

10) a) Es ist $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$. Daher nimmt der Betrag der elektrischen Feldstärke auf einer *Kugelschale* $r = \text{const.}$ jeweils einen *festen* Wert an. Die gesuchten Flächen sind somit die Oberflächen *konzentrischer* Kugeln (siehe Bild A-14).

b) Wegen $|\vec{H}| \sim \frac{1}{\varrho}$ nimmt der Betrag der magnetischen Feldstärke auf jedem *Zylindermantel* mit der Leiterachse (z-Achse) als Symmetrieachse einen *festen* Wert an. Die gesuchten Flächen sind somit die Mantelflächen *koaxialer* Zylinder (Zylinderachse = Leiterachse = z-Achse; $\varrho > 0$; siehe Bild A-15)

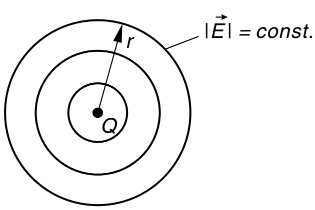


Bild A-14

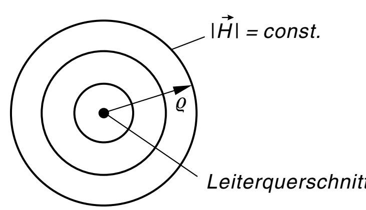


Bild A-15

Abschnitt 4

1) a) *Niveaulinien:* $y = \text{const.} = c$ (Parallelen zur x-Achse, $c \in \mathbb{R}$; siehe Bild A-16)

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y = 0 \, \vec{e}_x + 1 \, \vec{e}_y = \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) *Niveaulinien:* $x^2 + y^2 = \text{const.} = c$ (konzentrische Kreise um den Nullpunkt mit den Radien $r = \sqrt{c}$, $c > 0$; siehe Bild A-17)

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y = 2x \, \vec{e}_x + 2y \, \vec{e}_y = 2 \, (\underbrace{x \, \vec{e}_x + y \, \vec{e}_y}_{\text{Ortsvektor } \vec{r}}) = 2 \, \vec{r} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

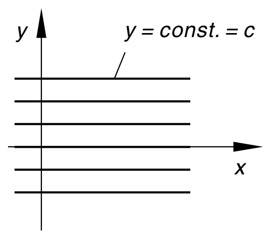


Bild A-16

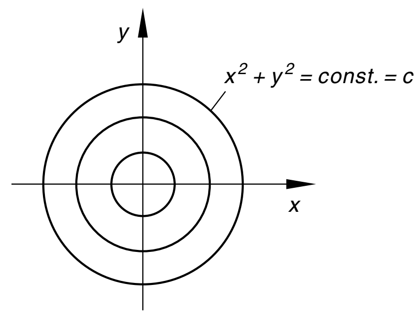


Bild A-17

2) $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = y; \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x \quad \Rightarrow \quad \phi = \displaystyle\int \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx = \int y \, dx = xy + K(y)$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von y abhängen: $K = K(y)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy + K(y)) = x + K'(y) = x \quad \Rightarrow \quad K'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad K(y) = \text{const.} = C$$

Lösung: $\phi = \phi(x; y) = xy + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

3) a) $\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 20xy^3 - 5yz^2 \\ 30x^2y^2 - 5xz^2 \\ -10xyz \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}; \quad |(\operatorname{grad} \phi)_P| = 10\sqrt{5}$

b) $\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2x \cdot e^{yz} \\ x^2 z \cdot e^{yz} + z^3 \\ x^2 y \cdot e^{yz} + 3yz^2 \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |(\operatorname{grad} \phi)_P| = \sqrt{41}$

(Ableitungen mit Hilfe der *Kettenregel*)

c) $\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |(\operatorname{grad} \phi)_P| = 6$

4) $\phi = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \ln (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \ln (x^2 + y^2 + z^2)$

Kettenregel: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r^2}$; Analog: $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{r^2}$; $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{x}{r^2} \vec{e}_x + \frac{y}{r^2} \vec{e}_y + \frac{z}{r^2} \vec{e}_z = \frac{1}{r^2} \underbrace{(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)}_{\text{Ortsvektor } \vec{r}} = \frac{1}{r^2} \vec{r}$$

5) **1. Lösungsweg:** $U = \phi \cdot \psi = x^2 y^2 z \cdot \mathrm{e}^x + x y \cdot \mathrm{e}^{x+y}$

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} (\phi \cdot \psi) = \begin{pmatrix} x y^2 z (x + 2) \cdot \mathrm{e}^x + (x + 1) y \cdot \mathrm{e}^{x+y} \\ 2 x^2 y z \cdot \mathrm{e}^x + x (y + 1) \cdot \mathrm{e}^{x+y} \\ x^2 y^2 \cdot \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

(Ableitungen mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*)

2. Lösungsweg (nach Rechenregel (5) für Gradienten, Produktregel Gleichung I-122):

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2 x y z + \mathrm{e}^y \\ x^2 z + x \cdot \mathrm{e}^y \\ x^2 y \end{pmatrix}; \qquad \operatorname{grad} \psi = \begin{pmatrix} y \cdot \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} (\phi \cdot \psi) = \phi (\operatorname{grad} \psi) + \psi (\operatorname{grad} \phi) =$$
$$= \begin{pmatrix} x y^2 z (x + 2) \cdot \mathrm{e}^x + (x + 1) y \cdot \mathrm{e}^{x+y} \\ 2 x^2 y z \cdot \mathrm{e}^x + x (y + 1) \cdot \mathrm{e}^{x+y} \\ x^2 y^2 \cdot \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

6) $\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} y z + 3 z^3 \\ x z \\ x y + 9 x z^2 \end{pmatrix}$; $(\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} \right)_P = (\operatorname{grad} \phi)_P \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (5 - 2 + 22) = \frac{25}{3}$$

7) a) *Richtungsvektor* (Ortsvektor von P): $\vec{r} = \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $|\vec{r}| = 5$; $\vec{e}_r = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2 x \\ -2 y \end{pmatrix}$; $(\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \right)_P = (\operatorname{grad} \phi)_P \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (18 - 32) = -\frac{14}{5}$$

b) *Richtungsvektor* (Ortsvektor von P): $\vec{r} = \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_r$; $\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 8 x \\ 18 y \end{pmatrix}$;

$(\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \right)_P = (\operatorname{grad} \phi)_P \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$

8) Fläche: $F(x; y; z) = x^2 + (y - 1)^2 - z^2 - 10 = 0; \qquad \operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-1) \\ -2z \end{pmatrix}$

Normalenvektor in P: $(\operatorname{grad} F)_P = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}; \qquad |(\operatorname{grad} F)_p| = 6\sqrt{3}$

Flächennormale in P: $\vec{N} = \dfrac{1}{|(\operatorname{grad} F)_P|} (\operatorname{grad} F)_P = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

9) a) $F(x; y; z) = x^2 + y^2 - 5 = 0; \qquad \operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (\operatorname{grad} F)_P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tangentialebene: $(\operatorname{grad} F)_P \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$4(x-2) + 2(y-1) + 0(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 5 = 0$

b) $F(x; y; z) = xy^2 z + 6x^2 z^2 - 22 = 0$

$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} y^2 z + 12xz^2 \\ 2xyz \\ xy^2 + 12x^2 z \end{pmatrix}; \qquad (\operatorname{grad} F)_P = \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ -46 \end{pmatrix}$

Tangentialebene: $(\operatorname{grad} F)_P \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ -46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$

$23(x-2) - 4(y-1) - 46(z+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 23x - 4y - 46z = 88$

10) Die *größte* Zunahme des Potentials erfolgt in Richtung des *Gradienten*, d. h. hier also wegen der Kugelsymmetrie des Feldes in *radialer* Richtung nach *außen*.

$$U = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{r^3} \qquad \text{(mit der \textit{Kettenregel})}$$

Analog: $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{y}{r^3}; \quad \dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{z}{r^3}$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \underbrace{(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}_{\text{Ortsvektor } \vec{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Maximalwert: $|\operatorname{grad} U| = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Abschnitt 5

1) a) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 + 0 = 0$

b) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 1) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 3x^2 + 2xy$

c) $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot e^{-y}) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot e^{-x}) = e^{-y} + e^{-x}$

d) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} =$

$= \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$ (*Quotientenregel*)

2) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y - 4y) =$

$= y^2 + x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$

Die Divergenz des Vektorfeldes *verschwindet* somit längs des Mittelpunktkreises mit dem Radius $R = 2$ (siehe Bild A-18).

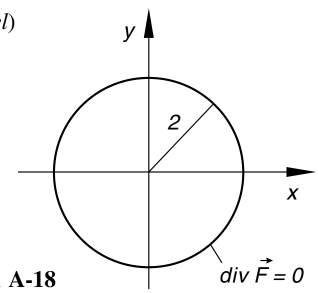


Bild A-18

3) a) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 6x^2 z^2 + 0 + xy = 6x^2 z^2 + xy$

b) $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y + yz) = y - 2xz + 2z^2 + y =$

$= 2y - 2xz + 2z^2$

4) $\operatorname{div} \vec{F} = y^2 + 2z^3 + xy; \quad (\operatorname{div} \vec{F})_{P_1} = 2; \quad (\operatorname{div} \vec{F})_{P_2} = 4; \quad (\operatorname{div} \vec{F})_{P_3} = 64$

5) $\operatorname{grad} \phi = 2 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 5 \\ z \end{pmatrix}; \qquad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = 2(1 + 1 + 1) = 6$

6) **1. Lösungsweg:** $\vec{A} = \phi \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 y \cdot e^{yz} \\ -x^3 \cdot e^{yz} \\ x^2 z \cdot e^{yz} \end{pmatrix}$

$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div}(\phi \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y \cdot e^{yz}) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^3 \cdot e^{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 z \cdot e^{yz}) =$

$= (2xy - x^3 z + x^2 + x^2 yz) \cdot e^{yz}$ (*Produkt-* und *Kettenregel*)

2. Lösungsweg (nach Rechenregel (5) für Divergenzen, Produktregel Gleichung I-160):

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 z \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = x^2 y \cdot e^{yz} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} \phi = e^{yz} \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 z \\ x^2 y \end{pmatrix}$

$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 0 + 1 = 1$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}(\phi\,\vec{F}) = (\operatorname{grad}\phi)\cdot\vec{F} + \phi\,(\operatorname{div}\vec{F}) =$$

$$= e^{yz}\begin{pmatrix} 2x \\ x^2 z \\ x^2 y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} + x^2 \cdot e^{yz} \cdot 1 = (2xy - x^3 z + x^2 yz + x^2) \cdot e^{yz}$$

7) Die Divergenz des Zentralfeldes $\vec{F} = f(r)\,\vec{r} = f(r)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r)\cdot x \\ f(r)\cdot y \\ f(r)\cdot z \end{pmatrix}$ muss bei einem quellenfreien Feld *verschwinden*:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}[f(r)\cdot x] + \frac{\partial}{\partial y}[f(r)\cdot y] + \frac{\partial}{\partial z}[f(r)\cdot z] = 0$$

Unter Beachtung von $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ folgt mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(r)\cdot x] = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x + 1\cdot f(r) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x + f(r)\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}$$

Somit: $\frac{\partial}{\partial x}[f(r)\cdot x] = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x + f(r) = f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot x + f(r) =$

$$= f'(r)\cdot\frac{x}{r}\cdot x + f(r) = f'(r)\cdot\frac{x^2}{r} + f(r)$$

Analoge Ausdrücke erhält man für die beiden übrigen partiellen Ableitungen (statt x^2 erscheint y^2 bzw. z^2). Daher folgt:

$$\operatorname{div}\vec{F} = f'(r)\cdot\frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r)\cdot\frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r)\cdot\frac{z^2}{r} + f(r) =$$

$$= f'(r)\cdot\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} + 3\cdot f(r) = f'(r)\cdot\frac{r^2}{r} + 3\cdot f(r) = f'(r)\cdot r + 3\cdot f(r) = 0$$

Diese Differentialgleichung 1. Ordnung löst man durch „Trennung der Variablen" wie folgt:

Substitution: $u = f(r)$, $\frac{du}{dr} = f'(r)$ (in die Dgl einsetzen)

$$\frac{du}{dr}\cdot r + 3u = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{u} = -3\cdot\frac{dr}{r} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{du}{u} = -3\cdot\int\frac{dr}{r} \quad\Rightarrow$$

$$\ln u = -3\cdot\ln r + \ln C = \ln r^{-3} + \ln C = \ln C\cdot r^{-3} \quad\Rightarrow\quad u = C\cdot r^{-3}$$

Lösung: $f(r) = \frac{\text{const.}}{r^3} = \frac{C}{r^3} \qquad (C\in\mathbb{R};\ r > 0)$

8) $\phi = a + \frac{b}{r} = a + b(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \qquad (\text{mit } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2})$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -bx(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -\frac{bx}{r^3}\,; \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{by}{r^3}\,; \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{bz}{r^3} \quad (\textit{Kettenregel})$$

$$\operatorname{grad}\phi = \begin{pmatrix} -bx/r^3 \\ -by/r^3 \\ -bz/r^3 \end{pmatrix} = -\frac{b}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{b}{r^3}\,\vec{r} \qquad (\vec{r}\text{: Ortsvektor})$$

Das Gradientenfeld ist somit ein *Zentralfeld* vom Typ $F(r) = f(r)\,\vec{r}$ mit $f(r) = \dfrac{\text{const.}}{r^3} = -\dfrac{b}{r^3}$ und daher nach Aufgabe 7 *quellenfrei*, d. h. $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = 0$.

9) Die x- und y-Komponenten der Rotation *verschwinden* automatisch!

a) $F_x = y(x^2 + y^2)^{-1/2}; \qquad F_y = -x(x^2 + y^2)^{-1/2}$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2 + y^2)^{-1/2}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[y(x^2 + y^2)^{-1/2}\right] =$$

$$= -(x^2 + y^2)^{-1/2} + x^2(x^2 + y^2)^{-3/2} - (x^2 + y^2)^{-1/2} + y^2(x^2 + y^2)^{-3/2} =$$

$$= -2(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{-3/2} =$$

$$= -2(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2)^{-1/2} = -(x^2 + y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(unter Verwendung der *Produkt-* und *Kettenregel*)

Somit: $\operatorname{rot}\vec{F} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{e}_z = -\dfrac{1}{r}\,\vec{e}_z \qquad \left(\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

b) $F_x = (x - y + 2)(x^2 + y^2)^{-1/2}; \qquad F_y = (x + y - 1)(x^2 + y^2)^{-1/2}$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + y - 1)(x^2 + y^2)^{-1/2} =$$

$$= 1(x^2 + y^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x(x + y - 1) =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{x^2 + xy - x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + y^2 - (x^2 + xy - x)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^2 - xy + x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

(*Produkt-* und *Kettenregel*; grau unterlegter Bruch mit $(x^2 + y^2)^1$ erweitert)

Analog: $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x - y + 2)(x^2 + y^2)^{-1/2} = -\dfrac{x^2 + xy + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{y^2 - xy + x + x^2 + xy + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + y^2 + x + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

c) $F_x = x^2 y^3 - x; \qquad F_y = xy^2 + e^y; \qquad (\operatorname{rot}\vec{F})_z = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = y^2 - 3x^2 y^2$

10) $v_x = -x(x^2 + y^2)^{-1/2}; \qquad v_y = -y(x^2 + y^2)^{-1/2}$

$$(\operatorname{rot}\vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = xy(x^2 + y^2)^{-3/2} - xy(x^2 + y^2)^{-3/2} = 0 \qquad (\textit{Kettenregel})$$

Somit gilt (die x- und y-Komponenten *verschwinden* automatisch): $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow$
$\vec{v}$ ist *wirbelfrei*.

11) a) $F_x = xy - z^2; \quad F_y = 2xyz; \quad F_z = x^2 z - y^2 z$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -2yz - 2xy \\ (\operatorname{rot}\vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2z - 2xz \\ (\operatorname{rot}\vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2yz - x \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} -2y(x+z) \\ -2z(x+1) \\ 2yz - x \end{pmatrix}$$

b) $F_x = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}; \; F_y = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}; \; F_z = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) =$$

$$= z\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2y - y\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2z =$$

$$= -yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0$$

Analog: $(\operatorname{rot}\vec{F})_y = (\operatorname{rot}\vec{F})_z = 0$ (alle Ableitungen mit der *Kettenregel*)

Somit: $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}$ ist *wirbelfrei*.

12) $F_x = 2xz^2 + y^3 z; \quad F_y = axy^2 z; \quad F_z = 2x^2 z + bxy^3$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 3bxy^2 - axy^2 = (3b - a)xy^2$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 4xz + y^3 - (4xz + by^3) = (1 - b)y^3$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = ay^2 z - 3y^2 z = (a - 3)y^2 z$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} (3b - a)xy^2 \\ (1 - b)y^3 \\ (a - 3)y^2 z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} 3b - a &= 0 \\ 1 - b &= 0 \\ a - 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad a = 3, \quad b = 1$$

13) $F_x = xy^3; \quad F_y = 2xy^2 z; \quad F_z = x^2 y - z^2$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = x^2 - 2xy^2; \qquad (\operatorname{rot}\vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2xy;$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y^2 z - 3xy^2$$

Somit: $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ -2xy \\ 2y^2 z - 3xy^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{rot}\vec{F})_P = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

14) Komponenten von $\vec{F}$: $F_x = f(r) \cdot x; \quad F_y = f(r) \cdot y; \quad F_z = f(r) \cdot z$

(mit $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$)

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}[f(r) \cdot z] - \frac{\partial}{\partial z}[f(r) \cdot y] = z \cdot \frac{\partial}{\partial y}[f(r)] - y \cdot \frac{\partial}{\partial z}[f(r)]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(r)] = \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} =$$

$$= f'(r) \cdot \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}_{1/r} \cdot y = f'(r) \cdot \frac{y}{r} \qquad \textit{(Kettenregel)}$$

Analog: $\dfrac{\partial}{\partial z}[f(r)] = f'(r) \cdot \dfrac{z}{r}$

Damit erhalten wir für die x-Koordinate der Rotation:

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_x = z \cdot \frac{\partial}{\partial y}[f(r)] - y \cdot \frac{\partial}{\partial z}[f(r)] = z \cdot f'(r) \cdot \frac{y}{r} - y \cdot f'(r) \cdot \frac{z}{r} = 0$$

Analog: $(\operatorname{rot} \vec{F})_y = (\operatorname{rot} \vec{F})_z = 0$

Somit: $\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}[f(r)\,\vec{r}] = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}$ ist *wirbelfrei.*

15) **1. Lösungsweg:** $\vec{A} = \phi \vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 y^2 z^2 \\ x^2 y^2 z^2 \\ x^2 y z^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = x^2 z^4 - 2x^2 y^2 z \\ (\operatorname{rot} \vec{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 2x^3 y^2 z - 2xyz^4 \\ (\operatorname{rot} \vec{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 2xy^2 z^2 - 2x^3 y z^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} x^2 z^4 - 2x^2 y^2 z \\ 2x^3 y^2 z - 2xyz^4 \\ 2xy^2 z^2 - 2x^3 y z^2 \end{pmatrix}$$

2. Lösungsweg (nach Regel (5) für Rotationen, Produktregel Gleichung I-176):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xyz^2; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 z^2; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2x^2 yz \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2xyz^2 \\ x^2 z^2 \\ 2x^2 yz \end{pmatrix}$$

$F_x = xy; \qquad F_y = y; \qquad F_z = z^2$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 - x = -x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = (\operatorname{grad}\phi) \times \vec{F} + \phi\,(\operatorname{rot}\vec{F}) = \begin{pmatrix} 2xyz^2 \\ x^2z^2 \\ 2x^2yz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy \\ y \\ z^2 \end{pmatrix} + x^2yz^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2z^4 - 2x^2y^2z \\ 2x^3y^2z - 2xyz^4 \\ 2xy^2z^2 - x^3yz^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x^3yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2z^4 - 2x^2y^2z \\ 2x^3y^2z - 2xyz^4 \\ 2xy^2z^2 - 2x^3yz^2 \end{pmatrix}$$

16) $F_x = 2xz + y^2; \qquad F_y = 2xy; \qquad F_z = x^2$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \\ (\operatorname{rot}\vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 2x - 2x = 0 \\ (\operatorname{rot}\vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{F}$ ist somit *wirbelfrei*. Die Vektorkomponenten von $\vec{F}$ sind demnach die partiellen Ableitungen 1. Ordnung eines (noch unbekannten) Skalarfeldes $\phi = \phi(x; y; z)$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_x = 2xz + y^2; \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = F_y = 2xy; \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = F_z = x^2$$

$$\phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx = \int (2xz + y^2)\,dx = x^2z + xy^2 + K(y; z)$$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von y und z abhängen: $K = K(y; z)$. Sie wird aus den bekannten partiellen Ableitungen von ϕ nach y bzw. z wie folgt bestimmt:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(x^2z + xy^2 + K(y; z)) = 2xy + \frac{\partial K}{\partial y} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial K}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow$$

K ist *unabhängig* von y, *kann* aber noch von z abhängen: $K = K_1(z)$

Zwischenergebnis: $\phi = x^2z + xy^2 + K_1(z)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\,(x^2z + xy^2 + K_1(z)) = x^2 + K_1'(z) = x^2 \quad \Rightarrow \quad K_1'(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$K_1(z) = \text{const.} = C$

Lösung: $\phi = \phi(x; y; z) = x^2z + xy^2 + C \qquad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

17) Im dreidimensionalen *Raum*: $\phi = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -x\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \qquad (\textit{Kettenregel})$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -1\,(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2})^{-3/2} + 3x^2\,(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2})^{-5/2} = -r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5}$$

(unter Verwendung der *Produkt-* und *Kettenregel*)

Analog: $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5}; \qquad \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -r^{-3} + 3z^2 \cdot r^{-5}$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = (-r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5}) + (-r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5}) +$$

$$+ (-r^3 + 3z^2 \cdot r^{-5}) = -3r^{-3} + 3r^{-5}\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0$$

In der *Ebene*: $\phi = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (x^2 + y^2)^{-1/2}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x = -x(x^2 + y^2)^{-3/2} \qquad (\textit{Kettenregel})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -1\underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2}{}^{-3/2} - \frac{3}{2}\underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2}{}^{-5/2} \cdot 2x(-x) = -(r^2)^{-3/2} + 3x^2(r^2)^{-5/2} =$$

$$= -r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5} \qquad (\textit{Produkt- } \text{und } \textit{Kettenregel})$$

Analog: $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5}$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5} + -r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5} =$$

$$= -2r^{-3} + 3r^{-5}\underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} = -2r^{-3} + 3r^{-3} = r^{-3} \neq 0$$

18) $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 + z^2); \qquad \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) \qquad$ (*Produkt-* und *Kettenregel*)

Analog: $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 4(x^2 + 3y^2 + z^2); \quad \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4(x^2 + y^2 + 3z^2)$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) + 4(x^2 + 3y^2 + z^2) + 4(x^2 + y^2 + 3z^2) =$$

$$= 4(5x^2 + 5y^2 + 5z^2) = 20\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = 20r^2$$

Abschnitt 6

1) a) $F_x = \dfrac{y}{x^2 + y^2} = \dfrac{r \cdot \sin\varphi}{r^2} = \dfrac{\sin\varphi}{r}; \qquad F_y = -\dfrac{x}{x^2 + y^2} = -\dfrac{r \cdot \cos\varphi}{r^2} = -\dfrac{\cos\varphi}{r}$

$$F_r = F_x \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \sin\varphi = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{r} = 0$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin\varphi + F_y \cdot \cos\varphi = -\frac{\sin^2\varphi}{r} - \frac{\cos^2\varphi}{r} = -\frac{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{r} = -\frac{1}{r}$$

$$\vec{F}(r;\varphi) = F_r\,\vec{e}_r + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi = 0\,\vec{e}_r - \frac{1}{r}\,\vec{e}_\varphi = -\frac{1}{r}\,\vec{e}_\varphi$$

b) $F_x = xy = r^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi\,; \qquad F_y = y^2 = r^2 \cdot \sin^2\varphi$

$$F_r = F_x \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \sin\varphi = r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi + r^2 \cdot \sin^3\varphi =$$

$$= r^2 \cdot \sin\varphi\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2 \cdot \sin\varphi$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin\varphi + F_y \cdot \cos\varphi = -r^2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi = 0$$

$$\vec{F}(r;\varphi) = F_r\,\vec{e}_r + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi = (r^2 \cdot \sin\varphi)\,\vec{e}_r + 0\,\vec{e}_\varphi = (r^2 \cdot \sin\varphi)\,\vec{e}_r$$

2) $H_x = \dfrac{I}{2\pi r^2}(-y) = -\dfrac{I}{2\pi r} \cdot \sin\varphi\,; \qquad H_y = \dfrac{I}{2\pi r^2}\,x = \dfrac{I}{2\pi r} \cdot \cos\varphi$

$$H_r = H_x \cdot \cos\varphi + H_y \cdot \sin\varphi = \frac{I}{2\pi r}(-\sin\varphi \cdot \cos\varphi + \cos\varphi \cdot \sin\varphi) = 0$$

$$H_\varphi = -H_x \cdot \sin\varphi + H_y \cdot \cos\varphi = \frac{I}{2\pi r}\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\vec{H}(r;\varphi) = H_r\,\vec{e}_r + H_\varphi\,\vec{e}_\varphi = 0\,\vec{e}_r + \frac{I}{2\pi r}\,\vec{e}_\varphi = \frac{I}{2\pi r}\,\vec{e}_\varphi$$

3) Die x- und y-Komponenten der Rotation *verschwinden* automatisch.

a) $F_r = 1; \qquad F_\varphi = 0; \qquad \operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r) + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial\varphi}(0) = \dfrac{1}{r} \cdot 1 + 0 = \dfrac{1}{r}$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(0) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(1) = \frac{1}{r}(0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

b) $F_r = r^2; \qquad F_\varphi = 0; \qquad \operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r^3) + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial\varphi}(0) = \dfrac{1}{r} \cdot 3r^2 + 0 = 3r$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(0) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(r^2) = \frac{1}{r}(0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

4) $F_r = \mathrm{e}^{r+\varphi}; \qquad F_\varphi = \dfrac{1}{r} \cdot \mathrm{e}^{r+\varphi}; \qquad (\operatorname{rot}\vec{F})_x = (\operatorname{rot}\vec{F})_y = 0 \qquad$ (ebener Vektor)

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{e}^{r+\varphi}) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{e}^{r+\varphi}) = \frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r+\varphi} - \mathrm{e}^{r+\varphi}) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$$

Somit: $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}$ ist *wirbelfrei* und als *Gradient* einer Potentialfunktion ϕ darstellbar:

$$\vec{F} = \operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\vec{e}_\varphi = F_r\,\vec{e}_r + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi = \mathrm{e}^{r+\varphi}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \mathrm{e}^{r+\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Dann aber gilt: $\dfrac{\partial\phi}{\partial r} = \mathrm{e}^{r+\varphi}\,; \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \mathrm{e}^{r+\varphi}\,; \qquad$ Integration der 1. Gleichung $\Rightarrow$

$$\phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial r}\,dr = \int \mathrm{e}^{r+\varphi}\,dr = \mathrm{e}^{r+\varphi} + K(\varphi)$$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von φ abhängen: $K = K(\varphi)$. Sie lässt sich wie folgt aus der bekannten partiellen Ableitung von ϕ nach φ bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mathrm{e}^{r+\varphi} + K(\varphi)\right) = \mathrm{e}^{r+\varphi} + K'(\varphi) = \mathrm{e}^{r+\varphi} \quad \Rightarrow \quad K'(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$K(\varphi) = \text{const.} = C$$

Lösung: $\phi = \phi(r; \varphi) = \mathrm{e}^{r+\varphi} + C \qquad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

5) Darstellung in Polarkoordinaten: $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$

Zwischen den Geschwindigkeitskomponenten v_r, v_φ und den kartesischen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}, \dot{y}$ besteht der folgende Zusammenhang (Gleichung I-238):

$$v_r = \dot{x} \cdot \cos\varphi + \dot{y} \cdot \sin\varphi \quad \text{und} \quad v_\varphi = -\dot{x} \cdot \sin\varphi + \dot{y} \cdot \cos\varphi$$

Aus den Transformationsgleichungen $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ erhält man mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel* die benötigten Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ (sowohl r als auch φ sind dabei *zeitabhängige* Funktionen):

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad \dot{y} = \dot{r} \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} v_r &= (\dot{r} \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) \cos\varphi + (\dot{r} \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin\varphi = \\ &= \dot{r} \cdot \cos^2\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{r} \cdot \sin^2\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = \\ &= \dot{r} \cdot \cos^2\varphi + \dot{r} \cdot \sin^2\varphi = \dot{r}\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = \dot{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\varphi &= -(\dot{r} \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin\varphi + (\dot{r} \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) \cos\varphi = \\ &= -\dot{r} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{r} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi} = \\ &= r \cdot \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi} = r\,\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1}\,\dot{\varphi} = r\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Lösung: $\vec{v} = \vec{v}(r; \varphi) = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r}\,\vec{e}_r + (r\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$

6) Die Laplace-Gleichung mit dem Operator (I-245) reduziert sich auf $\Delta\phi = \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$ und somit auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = \phi''(\varphi) = 0$$

Lösung durch *zweimalige* Integration: $\phi = \phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

7) a) $F_x = x = \varrho \cdot \cos\varphi; \qquad F_y = y = \varrho \cdot \sin\varphi; \qquad F_z = z$

$$F_\varrho = F_x \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \sin\varphi = \varrho \cdot \cos^2\varphi + \varrho \cdot \sin^2\varphi = \varrho\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = \varrho$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin\varphi + F_y \cdot \cos\varphi = -\varrho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0$$

$$F_z = z; \quad \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z = \varrho\,\vec{e}_\varrho + 0\,\vec{e}_\varphi + z\,\vec{e}_z = \varrho\,\vec{e}_\varrho + z\,\vec{e}_z$$

b) $F_x = y = \varrho \cdot \sin\varphi; \qquad F_y = -2; \qquad F_z = x = \varrho \cdot \cos\varphi$

$$F_\varrho = F_x \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \sin\varphi = \varrho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - 2 \cdot \sin\varphi = \sin\varphi\,(\varrho \cdot \cos\varphi - 2)$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin\varphi + F_y \cdot \cos\varphi = -\varrho \cdot \sin^2\varphi - 2 \cdot \cos\varphi; \qquad F_z = \varrho \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z =$$
$$= \sin\varphi\,(\varrho \cdot \cos\varphi - 2)\,\vec{e}_\varrho - (\varrho \cdot \sin^2\varphi + 2 \cdot \cos\varphi)\,\vec{e}_\varphi + (\varrho \cdot \cos\varphi)\,\vec{e}_z$$

8) $v_x = v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\varrho = v_\varphi = 0; \qquad v_z = \dfrac{(1+z)^2 - x^2 - y^2}{(1+z)^4} = \dfrac{(1+z)^2 - \varrho^2}{(1+z)^4}$

$$\vec{v} = v_\varrho \vec{e}_\varrho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z = 0\,\vec{e}_\varrho + 0\,\vec{e}_\varphi + \frac{(1+z)^2 - \varrho^2}{(1+z)^4}\,\vec{e}_z = \frac{(1+z)^2 - \varrho^2}{(1+z)^4}\,\vec{e}_z$$

9) Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten (Gleichung I-296): $\vec{v} = \dot{\varrho}\,\vec{e}_\varrho + (\varrho\,\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z$
Die (ebenfalls zeitabhängigen) Zylinderkoordinaten lauten:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = e^{-t} \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}_{1} = e^{-t}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{e^{-t} \cdot \sin t}{e^{-t} \cdot \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t \quad \Rightarrow \quad \varphi = t; \qquad z = 2t$$

Somit gilt: $\quad \dot{\varrho} = -e^{-t}; \qquad \dot{\varphi} = 1; \qquad \dot{z} = 2$

Der Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten lautet damit:

$$\vec{v} = \dot{\varrho}\,\vec{e}_\varrho + (\varrho\,\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z = -e^{-t}\,\vec{e}_\varrho + e^{-t}\,\vec{e}_\varphi + 2\,\vec{e}_z$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-e^{-t})^2 + (e^{-t})^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot e^{-2t} + 4}; \qquad \vec{v}(t=1) = 2{,}0666$$

10) a) $\dfrac{\partial\phi}{\partial\varrho} = e^{\varphi}; \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \varrho \cdot e^{\varphi}; \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad}\phi = e^{\varphi}\,\vec{e}_\varrho + e^{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$

b) $\dfrac{\partial\phi}{\partial\varrho} = -\dfrac{1}{\varrho^2}; \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} = e^{\varphi+z}; \qquad \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = e^{\varphi+z} \quad \Rightarrow$

$$\operatorname{grad}\phi = -\frac{1}{\varrho^2}\,\vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\,e^{\varphi+z}\,\vec{e}_\varphi + e^{\varphi+z}\,\vec{e}_z$$

11) a) $F_\varrho = \dfrac{1}{\varrho^2}; \quad F_\varphi = F_z = 0; \quad F_\varrho$ hängt nur von ϱ, nicht aber von φ und z ab.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = \frac{1}{\varrho}\left(-\frac{1}{\varrho^2}\right) + \frac{1}{\varrho} \cdot 0 + 0 = -\frac{1}{\varrho^3}$$

$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ (alle partiellen Ableitungen in Formel (I-277) *verschwinden*)

b) $F_\varrho = \dfrac{1}{\varrho}; \qquad F_\varphi = z; \qquad F_z = 1$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho}(1) + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = \frac{1}{\varrho} \cdot 0 + \frac{1}{\varrho} \cdot 0 + 0 = 0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_\varrho = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}(1) - \frac{\partial}{\partial z}(z) = \frac{1}{\varrho} \cdot 0 - 1 = -1$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{\partial}{\partial\varrho}(1) = 0 - 0 = 0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho z) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) = \frac{1}{\varrho}(z-0) = \frac{z}{\varrho}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = -1\,\vec{e}_\varrho + 0\,\vec{e}_\varphi + \frac{z}{\varrho}\,\vec{e}_z = -\vec{e}_\varrho + \frac{z}{\varrho}\,\vec{e}_z$$

12) Der Laplace-Operator (Gleichung I-278) reduziert sich jeweils auf *einen* Summand, da ϕ nur von *einer* Variablen abhängt.

a) $$\Delta\phi(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial\varrho}\underbrace{\left(\varrho\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\right)}_{\text{const.}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \varrho\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varrho} = \varrho\cdot\phi'(\varrho) = \text{const.} = C_1 \quad\Rightarrow$$

$$\phi'(\varrho) = \frac{C_1}{\varrho} \quad\Rightarrow\quad \phi(\varrho) = C_1\cdot\int\frac{1}{\varrho}\,d\varrho = C_1\cdot\ln\varrho + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b) $$\Delta\phi(\varphi) = \frac{1}{\varrho^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = \phi''(\varphi) = 0$$

Nach *zweimaliger* unbestimmter Integration: $\phi(\varphi) = C_1\varphi + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

c) $$\Delta\phi(z) = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \phi''(z) = 0$$

Nach *zweimaliger* unbestimmter Integration: $\phi(z) = C_1 z + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

13) $F_r = F_x\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi + F_y\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi + F_z\cdot\cos\vartheta$;

$F_\vartheta = F_x\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi + F_y\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi - F_z\cdot\sin\vartheta; \qquad F_\varphi = -F_x\cdot\sin\varphi + F_y\cdot\cos\varphi$

a) $F_x = x = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi; \quad F_y = -z = -r\cdot\cos\vartheta; \quad F_z = y = r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$

$$F_r = r\cdot\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\varphi - r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi + r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi =$$
$$= r\cdot\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\varphi$$

$$F_\vartheta = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\cos^2\varphi - r\cdot\cos^2\vartheta\cdot\sin\varphi - r\cdot\sin^2\vartheta\cdot\sin\varphi =$$
$$= r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\cos^2\varphi - r\cdot\sin\varphi\,\underbrace{(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)}_{1} =$$
$$= r(\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\cos^2\varphi - \sin\varphi)$$

$$F_\varphi = -r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi - r\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi = -r\cdot\cos\varphi\,(\sin\vartheta\cdot\sin\varphi + \cos\vartheta)$$

$$\vec{F}(r;\vartheta;\varphi) = F_r\,\vec{e}_r + F_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi = (r\cdot\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\varphi)\,\vec{e}_r +$$
$$+ r(\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\cos^2\varphi - \sin\varphi)\,\vec{e}_\vartheta - r\cdot\cos\varphi\,(\sin\vartheta\cdot\sin\varphi + \cos\vartheta)\,\vec{e}_\varphi$$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad F_x = \dfrac{\sin\vartheta\cdot\cos\varphi}{r}; \quad F_y = \dfrac{\sin\vartheta\cdot\sin\varphi}{r}; \quad F_z = \dfrac{\cos\vartheta}{r}$

$$F_r = \frac{\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\vartheta\cdot\sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\vartheta}{r} =$$
$$= \frac{1}{r}\,[\sin^2\vartheta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + \cos^2\vartheta] = \frac{1}{r}\,\underbrace{(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)}_{1} = \frac{1}{r}$$

$$F_{\vartheta} = \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin^2\varphi}{r} - \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\,[\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta] =$$

$$= \frac{1}{r}\,(\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$$

$$F_{\varphi} = -\frac{\sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{r} + \frac{\sin\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{r} = 0$$

$$\vec{F}(r;\vartheta;\varphi) = F_r\,\vec{e}_r + F_{\vartheta}\,\vec{e}_{\vartheta} + F_{\varphi}\,\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r}\,\vec{e}_r + 0\,\vec{e}_{\vartheta} + 0\,\vec{e}_{\varphi} = \frac{1}{r}\,\vec{e}_r$$

14) $$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi = r^2 \cdot \sin^2\vartheta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} =$$

$$= r^2 \cdot \sin^2\vartheta$$

$$v_x = \frac{-yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi\,; \quad v_y = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi\,; \quad v_z = 0$$

$$v_r = v_x \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + v_y \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + v_z \cdot \cos\vartheta =$$

$$= -r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + 0 \cdot \cos\vartheta = 0$$

$$v_{\vartheta} = v_x \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi + v_y \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi - v_z \cdot \sin\vartheta =$$

$$= -r \cdot \cos^2\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos^2\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - 0 \cdot \sin\vartheta = 0$$

$$v_{\varphi} = -v_x \cdot \sin\varphi + v_y \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos\vartheta \cdot \sin^2\varphi + r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi =$$

$$= r \cdot \cos\vartheta\,\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} = r \cdot \cos\vartheta$$

$$\vec{v}(r;\vartheta;\varphi) = v_r\,\vec{e}_r + v_{\vartheta}\,\vec{e}_{\vartheta} + v_{\varphi}\,\vec{e}_{\varphi} = 0\,\vec{e}_r + 0\,\vec{e}_{\vartheta} + (r \cdot \cos\vartheta)\,\vec{e}_{\varphi} = (r \cdot \cos\vartheta)\,\vec{e}_{\varphi}$$

15) Gesuchte Darstellungsform: $\vec{v}(r;\vartheta;\varphi) = v_r\,\vec{e}_r + v_{\vartheta}\,\vec{e}_{\vartheta} + v_{\varphi}\,\vec{e}_{\varphi}$

Aus den Transformationsgleichungen (I-320) folgt mit $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ und $v_z = \dot{z}$:

$$v_r = \dot{x} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + \dot{y} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + \dot{z} \cdot \cos\vartheta$$

$$v_{\vartheta} = \dot{x} \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi + \dot{y} \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi - \dot{z} \cdot \sin\vartheta$$

$$v_{\varphi} = -\dot{x} \cdot \sin\varphi + \dot{y} \cdot \cos\varphi$$

Zwischen den kartesischen Koordinaten x, y, z und den Kugelkoordinaten r, ϑ, φ bestehen die Beziehungen $x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$, $z = r \cdot \cos\vartheta$. Dabei sind r, ϑ und φ Funktionen der Zeit t. Dann gilt für die zeitlichen Ableitungen der kartesischen Koordinaten (*Produkt*- und *Kettenregel* verwenden):

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin\varphi + r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cdot \cos\vartheta - r \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die obigen Transformationsgleichungen erhält man:

$$\begin{aligned}
v_r &= \dot{x} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + \dot{y} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + \dot{z} \cdot \cos\vartheta = \\
&= (\dot{r} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + \\
&\quad + (\dot{r} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin\varphi + r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + \\
&\quad + (\dot{r} \cdot \cos\vartheta - r \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta}) \cos\vartheta = \\
&= \dot{r} \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi + r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi \cdot \dot{\vartheta} - r \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \\
&\quad + \dot{r} \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi + r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin^2\varphi \cdot \dot{\vartheta} + r \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + \\
&\quad + \dot{r} \cdot \cos^2\vartheta - r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \\
&= \dot{r} \cdot \sin^2\vartheta \, \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \, \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} \dot{\vartheta} + \\
&\quad + \dot{r} \cdot \cos^2\vartheta - r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \\
&= \dot{r} \cdot \sin^2\vartheta + r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} + \dot{r} \cdot \cos^2\vartheta - r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \\
&= \dot{r} \cdot \sin^2\vartheta + \dot{r} \cdot \cos^2\vartheta = \dot{r} \, \underbrace{(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)}_{1} = \dot{r}
\end{aligned}$$

Analog: $v_\vartheta = r\dot{\vartheta}$; $v_\varphi = r \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\varphi}$

Der *Geschwindigkeitsvektor* lautet somit in Kugelkoordinaten:

$$\vec{v}(r; \vartheta; \varphi) = v_r \vec{e}_r + v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r}\,\vec{e}_r + (r\,\dot{\vartheta})\,\vec{e}_\vartheta + (r \cdot \sin\vartheta \cdot \dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$$

16) Aus $r = \text{const.} = R$ und $\vartheta = \text{const.} = \vartheta_0$ folgt $dr = 0$ und $d\vartheta = 0$ und somit nach Gleichung (I-308) für das Linienelement $ds = R \cdot \sin\vartheta_0\, d\varphi$.

17) $F_r = F_\vartheta = \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}$; $\quad F_\varphi = \dfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\vec{F})_r &= \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} (\mathrm{e}^{\vartheta+\varphi}) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (\mathrm{e}^{\vartheta+\varphi}) \right] = \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \left[\mathrm{e}^{\vartheta+\varphi} - \mathrm{e}^{\vartheta+\varphi} \right] = \\
&= \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\vec{F})_\vartheta &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} (\mathrm{e}^{\vartheta+\varphi}) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{1}{\sin\vartheta} \cdot \mathrm{e}^{\vartheta+\varphi} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\vartheta} \cdot \mathrm{e}^{\vartheta+\varphi} - \frac{1}{\sin\vartheta} \cdot \mathrm{e}^{\vartheta+\varphi} \right) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta+\varphi}) - \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\mathrm{e}^{\vartheta+\varphi}) \right] = \frac{1}{r} \left[\mathrm{e}^{\vartheta+\varphi} - \mathrm{e}^{\vartheta+\varphi} \right] = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$$

Somit ist $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist daher *wirbelfrei* und als *Gradient* einer Potentialfunktion ϕ darstellbar:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\, \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\, \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\, \vec{e}_\varphi =$$

$$= \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}\, \vec{e}_r + \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}\, \vec{e}_\vartheta + \frac{\mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}}{\sin \vartheta}\, \vec{e}_\varphi$$

Dann aber gilt: $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}$; $\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}$; $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}$

Integration der 1. Gleichung:

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial r}\, dr = \int \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi}\, dr = \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} \cdot \int 1\, dr = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} + K(\vartheta; \varphi)$$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von ϑ und φ abhängen: $K = K(\vartheta; \varphi)$. Sie lässt sich wie folgt aus den bereits bekannten partiellen Ableitungen von ϕ nach ϑ bzw. φ bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} + K\right) = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} + \frac{\partial K}{\partial \vartheta} = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial K}{\partial \vartheta} = 0 \quad \Rightarrow$$

K ist unabhängig von ϑ, kann aber noch von φ abhängen: $K = K_1(\varphi)$

Zwischenergebnis: $\phi = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} + K_1(\varphi)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} + K_1(\varphi)\right) = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} + K_1'(\varphi) = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} \quad \Rightarrow \quad K_1'(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$K_1(\varphi) = \text{const.} = C$

Lösung: $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi) = r \cdot \mathrm{e}^{\vartheta + \varphi} + C \qquad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

18) $F_r = r^n$; $F_\vartheta = F_\varphi = 0$; Man beachte: F_r ist unabhängig von ϑ und φ.

a) Formel I-325 für die Divergenz reduziert sich auf den 1. Summand:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot r^n\right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+2}\right) = \frac{1}{r^2} \cdot (n+2)\, r^{n+1} = (n+2)\, r^{n-1}$$

Für ein *quellenfreies* Feld gilt: $\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(n+2)}_{0}\, r^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = -2$

b) $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ (alle partiellen Ableitungen in der Formel I-326 verschwinden und zwar unabhängig vom Exponenten n)

Folgerung: *Jedes* Vektorfeld vom Typ $\vec{F} = r^n\, \vec{e}_r$ ist *wirbelfrei* und damit ein Zentralfeld.

c) $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ *und* $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad n = -2$ (siehe Lösung a)). Nur das spezielle Feld $\vec{F} = r^{-2}\, \vec{e}_r = \frac{1}{r^2}\, \vec{e}_r$ ist daher quellen- *und* wirbelfrei.

19) Der Laplace-Operator (Formel I-327) reduziert auch jeweils auf *einen* Summand, da ϕ stets nur von *einer* Variablen abhängt.

a) $\Delta \phi(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}\underbrace{\left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r}\right)}_{\text{const.} = C_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} = r^2 \cdot \phi'(r) = C_1 \quad \Rightarrow$

$$\phi'(r) = \frac{C_1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = C_1 \cdot \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{C_1}{r} + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b) $\Delta\,\phi\,(\vartheta) = \dfrac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial}{\partial\vartheta} \underbrace{\left(\sin\vartheta \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)}_{\text{const.} \,=\, C_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\vartheta \cdot \dfrac{\partial\phi}{\partial\vartheta} = \sin\vartheta \cdot \phi'(\vartheta) = C_1$

$$\phi'(\vartheta) = \frac{C_1}{\sin\vartheta} \quad \Rightarrow \quad \phi\,(\vartheta) = C_1 \cdot \int \frac{1}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = C_1 \cdot \ln\left(\tan\left(\vartheta/2\right)\right) + C_2$$

(Integral 214 mit $a = 1$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

c) $\Delta\,\phi\,(\varphi) = \dfrac{1}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta} \cdot \dfrac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = \phi''(\varphi) = 0$

Nach *zweimaliger* elementarer Integration folgt: $\phi\,(\varphi) = C_1\,\varphi + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Abschnitt 7

1) C_1: $y = 2x, \quad dy = 2\,dx, \quad 0 \le x \le 2; \qquad C_2$: $y = x^2, \quad dy = 2x\,dx, \quad 0 \le x \le 2$

$$\int_{C_1} [y\,dx + (x^2 + xy)\,dy] = \int_0^2 (2x + 6x^2)\,dx = \left[x^2 + 2x^3\right]_0^2 = 20$$

$$\int_{C_2} [y\,dx + (x^2 + xy)\,dy] = \int_0^2 (x^2 + 2x^3 + 2x^4)\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{2}{5}\,x^5\right]_0^2 = \frac{352}{15}$$

2) a) $\dfrac{\partial}{\partial y}\,(2xy + 4x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\,(x^2 - 1) = 2x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + 4x; \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 - 1$

$$\phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx = \int (2xy + 4x)\,dx = x^2 y + 2x^2 + K(y)$$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von y abhängen $(K = K(y))$ und lässt sich aus der bekannten partiellen Ableitung von ϕ nach y wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(x^2 y + 2x^2 + K(y)) = x^2 + K'(y) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad K'(y) = -1 \quad \Rightarrow$$

$$K(y) = \int (-1)\,dy = -y + C$$

Lösung: $\phi = \phi\,(x; y) = x^2 y + 2x^2 - y + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

b) $\dfrac{\partial}{\partial y}\,(\mathrm{e}^y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\,(x \cdot \mathrm{e}^y) = \mathrm{e}^y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \mathrm{e}^y; \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x \cdot \mathrm{e}^y$

$$\phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx = \int \mathrm{e}^y\,dx = \mathrm{e}^y \cdot \int 1\,dx = x \cdot \mathrm{e}^y + K(y)$$

Die Integrationskonstante K kann noch von y abhängen: $K = K(y)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(x \cdot \mathrm{e}^y + K(y)) = x \cdot \mathrm{e}^y + K'(y) = x \cdot \mathrm{e}^y \quad \Rightarrow \quad K'(y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$K(y) = \text{const.} = C$

Lösung: $\phi = \phi\,(x; y) = x \cdot \mathrm{e}^y + C \qquad$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

c) $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + y^3) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 3xy^2) = 3x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2y + y^3; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^3 + 3xy^2;$ 1. Gleichung integrieren $\Rightarrow$

$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx = \int (3x^2y + y^3)\,dx = x^3y + xy^3 + K(y)$ (K kann von y abhängen)

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y + xy^3 + K(y)) = x^3 + 3xy^2 + K'(y) = x^3 + 3xy^2 \quad \Rightarrow$

$K'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad K(y) = \text{const.} = C$

Lösung: $\phi = \phi(x;y) = x^3y + xy^3 + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

3) a) $\frac{\partial}{\partial y}(x) = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0 \quad \Rightarrow$ konservatives Kraftfeld $\Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = x; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = y$

b) $\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + K(y)$ (K kann von y abhängen)

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 + K(y)\right) = K'(y) = y \quad \Rightarrow \quad K(y) = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + C$

Lösung: $\phi = \phi(x;y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

c) Das Arbeitsintegral ist *wegunabhängig*, hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt ab:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \underbrace{(x\,dx + y\,dy)}_{d\phi} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \Big[\phi(x;y)\Big]_{P_1}^{P_2} = \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]_{(1;0)}^{(3;5)} = 16{,}5$$

4) Die Integrabilitätsbedingung (I-373) ist *nicht* erfüllt (Ableitungen mit der *Quotientenregel*):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1 + x^2 + y^2}\right) = \frac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{1 + x^2 + y^2}\right) = \frac{-1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Das Kraftfeld $\vec{F}$ ist somit *nichtkonservativ*, das Arbeitsintegral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ hängt daher noch vom Verbindungsweg C der Punkte A und B ab:

Parameterdarstellung der beiden Halbkreise (Radius $= 1$):

$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad dx = -\sin t\,dt, \quad dy = \cos t\,dt$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{y\,dx - x\,dy}{1 + x^2 + y^2} = \frac{-(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt}{1 + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}} = -\frac{1}{2}\,dt$$

Oberer Halbkreis C_1 $(0 \le t \le \pi)$:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} 1\,dt = -\frac{1}{2}\Big[t\Big]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

Unterer Halbkreis C_2 (t durchläuft alle Werte von 0 bis $-\pi$):

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-\pi} 1\,dt = -\frac{1}{2}\Big[t\Big]_0^{-\pi} = \frac{\pi}{2}$$

5) Weg C (Einheitskreis): $x = \cos t,\ y = \sin t;\ dx = -\sin t\, dt,\ dy = \cos t\, dt;\ 0 \le t \le 2\pi$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [(x + 2y)\,dx + 0\,dy] = \int_C (x + 2y)\,dx = -\int_0^{2\pi} (\sin t \cdot \cos t + 2 \cdot \sin^2 t)\,dt =$$

$$= -\left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t + 2\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

(Integrale: 254 und 205, jeweils mit $a = 1$)

6) Die Integrabilitätsbedingung (Gleichung I-373) ist *erfüllt*:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{C_V}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{R}{V}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{C_V}{T} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{R}{V}$$

Durch unbestimmte Integration folgt:

$$S(T; V) = C_V \cdot \ln T + R \cdot \ln V + K \qquad (K \in \mathbb{R})$$

7) *Integrationsweg C:* $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ dx = dt,\ dy = 2t\,dt,\ dz = 3t^2\,dt;$ $1 \le t \le 2$

$$\int_C (xy^2\,dx - x^2 yz\,dy + xz^2\,dz) = \int_1^2 (t \cdot t^4 - t^2 \cdot t^2 \cdot t^3 \cdot 2t + t \cdot t^6 \cdot 3t^2)\,dt =$$

$$= \int_1^2 (t^5 - 2t^8 + 3t^9)\,dt = \left[\frac{1}{6}\,t^6 - \frac{2}{9}\,t^9 + \frac{3}{10}\,t^{10}\right]_1^2 = 203{,}8444$$

8) *Integrationsweg C:* $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t;\ dx = -\sin t\,dt,\ dy = \cos t\,dt,\ dz = dt;$ $0 \le t \le 2\pi$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \\ yz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = xy\,dx + dy + yz\,dz = (-\sin^2 t \cdot \cos t + \cos t + t \cdot \sin t)\,dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cdot \cos t + \cos t + t \cdot \sin t)\,dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} \cdot \sin^3 t + 2 \cdot \sin t - t \cdot \cos t\right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

(Integrale: 255 mit $n = 2, a = 1$ und 208 mit $a = 1$)

9) $F_x = x;\qquad F_y = y;\qquad F_z = z;\qquad \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0$

Die Integrabilitätsbedingungen (I-374) bzw. (I-375) sind somit *erfüllt*. Daher gilt $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = x$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = y$ und $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = z$ und damit (nach unbestimmter Integration):

$$\phi(x; y; z) = \int_C (x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2 + z^2) + C \qquad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

10) $\vec{F} = r^2\,\vec{r} = (x^2 + y^2 + z^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 + xz^2 \\ x^2y + y^3 + yz^2 \\ x^2z + y^2z + z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2 + xz^2) = 2xy \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^3 + yz^2) = 2xy \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy$$

Ebenso zeigt man, dass die beiden restlichen Integrabilitätsbedingungen (I-374) *erfüllt* sind:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 2xz; \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 2yz \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

Somit gilt für die noch unbekannte Potentialfunktion $\phi = \phi(x, y, z)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^3 + xy^2 + xz^2; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2y + y^3 + yz^2; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = x^2z + y^2z + z^3$$

Unbestimmte Integration der 1. Gleichung:

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx = \int (x^3 + xy^2 + xz^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + K(y; z)$$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von y und z abhängen $(K = K(y; z))$ und lässt sich aus den bereits bekannten partiellen Ableitungen von ϕ nach y bzw. z wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + K(y; z)\right) = x^2y + \frac{\partial K}{\partial y} = x^2y + y^3 + yz^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = y^3 + yz^2 \quad \Rightarrow \quad K = \int (y^3 + yz^2)\,dy = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + K_1(z)$$

Die Integrationskonstante K_1 kann noch von z abhängen: $K_1 = K_1(z)$

Zwischenergebnis: $\phi = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + K_1(z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + K_1(z)\right) =$$

$$= x^2z + y^2z + K_1'(z) = x^2z + y^2z + z^3 \quad \Rightarrow$$

$$K_1'(z) = z^3 \quad \Rightarrow \quad K_1(z) = \int z^3\,dz = \frac{1}{4}z^4 + C$$

Die Potentialfunktion lautet somit wie folgt:

$$\phi = \phi(x; y; z) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + \frac{1}{4}z^4 + C =$$

$$= \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4) + \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + C =$$

$$= \frac{1}{4}(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2})^2 + C = \frac{1}{4}r^4 + C \qquad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

11) Die Integrabilitätsbedingung (I-373) bzw. (I-376) ist in der gesamten x, y-Ebene *erfüllt*:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y^2) = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + y^2) = 2y$$

Somit verschwindet das Linienintegral des Vektorfeldes $\vec{F}$ längs einer *jeden* geschlossenen Kurve (also auch längs des Einheitskreises):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint [(2x + y^2)\,dx + (2xy + y^2)\,dy] = 0$$

12) a) $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1; \qquad \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xy + y^2) = y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$

Die Integrabilitätsbedingung (I-373) ist *nicht* erfüllt, das Vektorfeld daher *nichtkonservativ*.

b) $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2 \cdot \sin x - 2x) = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-2y \cdot \cos x + 4y) = 2y \cdot \sin x$

Das ebene Vektorfeld ist somit *konservativ* und für das noch unbekannte Potential ϕ gilt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = y^2 \cdot \sin x - 2x; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = -2y \cdot \cos x + 4y$$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx = \int (y^2 \cdot \sin x - 2x)\,dx = -y^2 \cdot \cos x - x^2 + K(y)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten $K = K(y)$, die noch von y abhängen kann, aus der bereits bekannten partiellen Ableitung von ϕ nach y:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \cdot \cos x - x^2 + K(y)) = -2y \cdot \cos x + K'(y) = -2y \cdot \cos x + 4y \quad \Rightarrow$$

$$K'(y) = 4y \quad \Rightarrow \quad K(y) = \int 4y\,dy = 2y^2 + C$$

Lösung: $\phi = \phi(x; y) = -y^2 \cdot \cos x - x^2 + 2y^2 + C \qquad$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

c) Bereits die erste der drei Integrabilitätsbedingungen (I-374) ist *nicht* erfüllt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - z^3) = 2x, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Das Vektorfeld ist daher *nichtkonservativ*.

d) Auch hier ist bereits die erste der drei Integrabilitätsbedingungen (I-374) *nicht* erfüllt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot \mathrm{e}^y) = x^2 \cdot \mathrm{e}^y, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Das Vektorfeld ist daher *nichtkonservativ*.

13) a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x + yz \\ xz \\ y + yz \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \cos t + 2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 3 \cdot \sin t \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos t \\ 5 \cdot \sin t \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}} = 5 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 25 \begin{pmatrix} \cos t + 2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 3 \cdot \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 25\,(-\sin t \cdot \cos t - 2 \cdot \sin^2 t + 2 \cdot \underbrace{\cos^2 t}_{1 - \sin^2 t}) =$$

$$= 25\,(-\sin t \cdot \cos t - 4 \cdot \sin^2 t + 2)$$

$$W = \oint_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})\,dt = 25 \cdot \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot \cos t - 4 \cdot \sin^2 t + 2)\,dt =$$

$$= 25 \left[-\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t - 4 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) + 2t \right]_0^{2\pi} =$$

$$= 25 \left[-\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t + \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = 25 \cdot 0 = 0$$

(Integrale: 254 und 205, jeweils mit $a = 1$)

b) $\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + yz & xz & y + yz \end{vmatrix} = \left[\dfrac{\partial}{\partial y}(y + yz) - \dfrac{\partial}{\partial z}(xz) \right] \vec{e}_x +$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}(x + yz) - \frac{\partial}{\partial x}(y + yz) \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x + yz) \right] \vec{e}_z =$$

$$= (1 + z - x)\,\vec{e}_x - (0 - y)\,\vec{e}_y + (z - z)\,\vec{e}_z =$$

$$= (1 - x + z)\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z \neq \vec{0}$$

c) Die Integrabilitätsbedingung (I-375) $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ ist *nicht* erfüllt, das Vektorfeld somit *nichtkonservativ.*

14) a) $F_x = \sin y; \quad F_y = x \cdot \cos y + \sin z; \quad F_z = y \cdot \cos z$

Die Integrabilitätsbedingungen (I-374) sind *erfüllt*:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \cos y; \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = \cos z; \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

Das Feld ist daher *konservativ.*

b) Somit: $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = \sin y; \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = x \cdot \cos y + \sin z; \quad \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = F_z = y \cdot \cos z$

Integration der 1. Gleichung: $\phi = \displaystyle\int \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx = \int \sin y\,dx = x \cdot \sin y + K(y; z)$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von y und z abhängen $(K = K(y; z))$ und lässt sich aus den bereits bekannten partiellen Ableitungen von ϕ nach y bzw. z bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \sin y + K(y; z)) = x \cdot \cos y + \frac{\partial K}{\partial y} = x \cdot \cos y + \sin z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \sin z \quad \Rightarrow \quad K = \int \sin z \, dy = y \cdot \sin z + K_1(z)$$

Zwischenergebnis: $\phi = x \cdot \sin y + y \cdot \sin z + K_1(z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x \cdot \sin y + y \cdot \sin z + K_1(z)) = y \cdot \cos z + K_1'(z) = y \cdot \cos z \quad \Rightarrow$$

$$K_1'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1(z) = \text{const.} = C$$

Lösung: $\phi = \phi(x; y; z) = x \cdot \sin y + y \cdot \sin z + C \qquad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

c) Da das Vektorfeld *konservativ* ist, gilt für jeden Verbindungsweg C der beiden Punkte:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \Big[\phi(x; y; z)\Big]_{(x_1; y_1; z_1)}^{(x_2; y_2; z_2)} = \Big[x \cdot \sin y + y \cdot \sin z\Big]_{(0; 0; 0)}^{(5; \pi; 3\pi)} =$$

$$= (5 \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} + \pi \cdot \underbrace{\sin(3\pi)}_{0}) - (0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} + 0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{0}) = 0$$

Abschnitt 8

1) Gleichung der Ebene: $\phi(x; y; z) = x + y + z - 1 = 0$ oder $z = 1 - x - y$

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |\operatorname{grad} \phi| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{|\operatorname{grad} \phi|} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4y \\ x^2 \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(4y + x^2 + x\underbrace{z}_{z = 1 - x - y}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - xy + 4y)$$

$$(\underbrace{\vec{N} \cdot \vec{e}_z}_{N_z})\, dA = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dA = dy\, dx \quad \Rightarrow \quad dA = \sqrt{3}\, dy\, dx$$

Integrationsbereich A^* (in Bild A-19 *grau* unterlegt):

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = -x + 1$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 1$

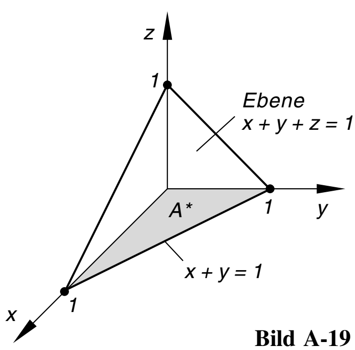


Bild A-19

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \int_{x=0}^{1} \underbrace{\int_{y=0}^{-x+1} (x - xy + 4y)\, dy}_{I(x)}\, dx$$

$$I(x) = \int_{y=0}^{-x+1} (x - xy + 4y)\, dy = \left[xy - \frac{1}{2}xy^2 + 2y^2\right]_{y=0}^{-x+1} =$$

$$= x(-x+1) - \frac{1}{2}x(-x+1)^2 + 2(-x+1)^2 = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{7}{2}x + 2$$

$$\iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \int\limits_{x=0}^{1} I(x)\, dx = \int\limits_{0}^{1} \left(-\frac{1}{2}\, x^3 + 2x^2 - \frac{7}{2}\, x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{8}\, x^4 + \frac{2}{3}\, x^3 - \frac{7}{4}\, x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{19}{24}$$

2) $\vec{v} \cdot \vec{N} = \vec{v} \cdot \vec{e}_z = v_z = z^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{N} = 2^2 = 4$ auf der Ebene $z = 2$

Flächenelement: $dA = dy\, dx$

$$\iint\limits_{(A)} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, dA = \int\limits_{x=0}^{10} \int\limits_{y=0}^{10} 4\, dy\, dx = 4 \cdot \underbrace{\int\limits_{x=0}^{10} \int\limits_{y=0}^{10} dy\, dx}_{A\, =\, 100} = 4 \cdot 100 = 400$$

3) Wir betrachten zunächst den Fluss in **z-Richtung** durch die beiden Würfelflächen A_u und A_0 (in Bild A-20 *grau* unterlegt).

Fluss durch A_u (Teil der x, y-Ebene $z = 0$):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_z) = -\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_z = -xyz = -xy \cdot 0 = 0$$

$$\iint\limits_{(A_u)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iint\limits_{(A_u)} 0\, dA = 0$$

Fluss durch A_0 (Teil der Ebene $z = 1$):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_z = xyz = xy \cdot 1 = xy$$

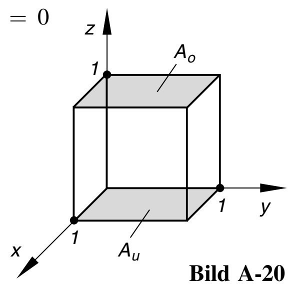


Bild A-20

$$\iint\limits_{(A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} xy\, dy\, dx = \int\limits_{0}^{1} x\, dx \cdot \int\limits_{0}^{1} y\, dy = \left[\frac{1}{2}\, x^2 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}\, y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Gesamtfluss in z-Richtung: $\displaystyle\iint\limits_{(A_u + A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Fluss in x-Richtung (siehe Bild A-20)

Fluss durch die *hintere* Würfelfläche A_h (Teil der y, z-Ebene $x = 0$):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_x) = -\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}_{x\text{-Komponente von } \vec{F}} = -F_x = -x = 0$$

$$\iint\limits_{(A_h)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iint\limits_{(A_h)} 0\, dA = 0$$

Fluss durch die *vordere* Würfelfläche A_v (Teil der Ebene $x = 1$):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}_{x\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_x = x = 1$$

$$\iint_{(A_v)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iint_{(A_v)} 1\, dA = A_v = 1 \qquad (A_v\text{: Quadrat mit der Seitenlänge 1})$$

Gesamtfluss in x-Richtung: $\displaystyle\iint_{(A_h + A_v)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 0 + 1 = 1$

Fluss in y-Richtung (siehe Bild A-20)

Gleiches Ergebnis wie in y-Richtung.

Gesamtfluss durch die Würfeloberfläche A: $\displaystyle\oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

4) Gleichung der Mantelfläche A: $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 - 16 = 0$ (mit $x \ge 0$, $y \ge 0$ und $0 \le z \le 5$)

$$\operatorname{grad} \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad |\operatorname{grad} \phi| = 2\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2}_{16}} = 8 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten: $\varrho = 4$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le z \le 5$

Transformationsgleichungen: $x = 4 \cdot \cos\varphi$, $y = 4 \cdot \sin\varphi$, $z = z$; $dA = 4\, dz\, d\varphi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} y \\ x \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(xy + xy + 0) = \frac{1}{2} xy =$$

$$= 8 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi = 4 \cdot \sin(2\varphi) \quad (\text{mit } 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi = \sin(2\varphi))$$

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 16 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{5} \sin(2\varphi)\, dz\, d\varphi = 16 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin(2\varphi)\, d\varphi}_{\text{Integral 204 mit } a = 2} \cdot \int_{z=0}^{5} 1\, dz =$$

$$= 16 \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(2\varphi) \right]_0^{\pi/2} \cdot \Big[z \Big]_0^5 = 16 \cdot 1 \cdot 5 = 80$$

5) **Vektorfluss durch den Zylindermantel M (in Zylinderkoordinaten):**

Gleichung des Zylindermantels M: $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$; $0 \le z \le 5$

$$\operatorname{grad} \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad |\operatorname{grad} \phi| = 2\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2}_{4}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten: $\varrho = 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 5$

Transformationsgleichungen: $x = 2 \cdot \cos\varphi$, $y = 2 \cdot \sin\varphi$, $z = z$; $dA = 2\, dz\, d\varphi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x^4 - y^2 + 0) = 2(4 \cdot \cos^4\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$\iint\limits_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 4 \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{5} (4 \cdot \cos^4 \varphi - \sin^2 \varphi)\, dz\, d\varphi =$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\int\limits_{z=0}^{5} 1\, dz}_{5} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (4 \cdot \cos^4 \varphi - \sin^2 \varphi)\, d\varphi = 20 \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} (4 \cdot \cos^4 \varphi - \sin^2 \varphi)\, d\varphi =$$

$$= 80 \cdot \underbrace{\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^4 \varphi\, d\varphi}_{I_1} - 20 \cdot \underbrace{\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi}_{I_2} = 80 I_1 - 20 I_2$$

Auswertung der Teilintegrale I_1 und I_2 (mit der Integraltafel):

$$I_1 = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^4 \varphi\, d\varphi = \left[\frac{\cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi}{4}\right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{\cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\pi$$

(Integrale: 231 mit $n = 4$, $a = 1$ und 229 mit $a = 1$)

$$I_2 = \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi \qquad \text{(Integral 205 mit } a = 1\text{)}$$

Somit: $\displaystyle\iint\limits_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 80 I_1 - 20 I_2 = 80 \cdot \frac{3}{4}\pi - 20\pi = 40\pi$

Fluss in z-Richtung durch den „*Boden*" A_u (Teil der x, y-Ebene $z = 0$):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_z) = -(\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}}) = -F_z = -z = 0$$

$$\iint\limits_{(A_u)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iint\limits_{(A_u)} 0\, dA = 0 \qquad \text{(kein Beitrag)}$$

Fluss in z-Richtung durch den „*Deckel*" A_0 (Teil der Ebene $z = 5$):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_z = z = 5$$

$$\iint\limits_{(A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iint\limits_{(A_0)} 5\, dA = 5 \cdot \iint\limits_{(A_0)} 1\, dA = 5 A_0 = 5(\pi \cdot 2^2) = 20\pi$$

***Gesamtfluss* durch die geschlossene Zylinderoberfläche $A = M + A_u + A_0$:**

$$\oint\!\!\oint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \oint\!\!\oint\limits_{(M + A_u + A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 40\pi + 0 + 20\pi = 60\pi$$

6) A_1: Mantelfläche der Halbkugel (Oberfläche *ohne* Boden); A_2: Bodenfläche;
Oberfläche der Halbkugel: $A = A_1 + A_2$

Fluss durch A_1 (in Kugelkoordinaten):

Gleichung der Halbkugel: $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (mit $z \geq 0$)

$$\operatorname{grad}\phi = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad}\phi| = 2\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{1}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten: $r = 1,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen: $x = \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$, $y = \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$, $z = \cos\vartheta$;
$dA = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ -y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 y + yz - yz = x^2 y = \sin^3\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi$$

$$\iint_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^4\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^4\vartheta\, d\vartheta}_{I_2} = I_1 \cdot I_2$$

Auswertung der Teilintegrale I_1 und I_2 (mit der Integraltafel):

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi\, d\varphi = \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{(Integral 256 mit } n = 2, a = 1)$$

Die Berechnung des Teilintegrals I_2 erübrigt sich, da mit $I_1 = 0$ auch das Produkt $I_1 \cdot I_2$ verschwindet (unabhängig vom Wert des Integrals I_2, der im Übrigen $3\pi/16$ beträgt.

Somit gilt: $\iint_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = I_1 \cdot I_2 = 0 \cdot I_2 = 0$ (kein Beitrag)

Fluss durch **A_2 (in Polarkoordinaten):**

Polarkoordinaten: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$, $dA = r\, dr\, d\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_z) = -\underbrace{(\vec{F} \cdot \vec{e}_z)}_{z\text{-Koordinate von } \vec{F}} = -F_z = y = r \cdot \sin\varphi$$

$$\iint_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^2 \cdot \sin\varphi\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \cdot \int_{r=0}^{1} r^2\, dr =$$

$$= \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^1 = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad \text{(kein Beitrag)}$$

***Gesamtfluss* durch die geschlossene Oberfläche $A = A_1 + A_2$ der Halbkugel:**

$$\oiint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iint\limits_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA + \iint\limits_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = 0 + 0 = 0$$

7) Ortsvektor der Rotationsfläche: $\vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

$$\vec{t}_x \times \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |\vec{t}_x \times \vec{t}_y| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$$

Mantelfläche: $M = \iint\limits_{(A)} |\vec{t}_x \times \vec{t}_y|\, dy\, dx = \iint\limits_{(A)} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}\, dy\, dx$

Integrationsbereich A ist die Kreisfläche $x^2 + y^2 \le 2$. Übergang zu *Polarkoordinaten*: $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$; $x^2 + y^2 = r^2$, $dy\, dx = r\, dr\, d\varphi$

$$M = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1} \cdot r\, dr\, d\varphi = \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr}_{I} = 2\pi \cdot I$$

Auswertung des Integrals I (Integral 117 mit $a^2 = 1/4$):

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{4r^2 + 1}\, dr = 2 \cdot \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{\frac{1}{4} + r^2}\, dr = \frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{4} + r^2\right)^3}\,\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}$$

Somit gilt: $M = 2\pi \cdot I = 2\pi \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{3}\pi$

8) Gleichung der Kugeloberfläche: $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$

$$\operatorname{grad} \phi = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad} \phi| = 2\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{25}} = 10 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten: $r = 5$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

Transformationsgleichungen $x = 5 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$, $y = 5 \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$, $z = 5 \cdot \cos\vartheta$; $dA = 25 \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(2x^2 - xy + z^2) =$$

$$= 5\,[2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi - \sin^2\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \cos^2\vartheta] =$$

$$= 5\,[\,(\underbrace{2\cdot\cos^2\varphi}_{1\,+\,\cos(2\varphi)} - \underbrace{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}_{\frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)})\cdot\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\,] =$$

$$= 5\left[\left[1 + \cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right]\cdot\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right] =$$

$$= 5\left[\underbrace{(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)}_{1} + \left(\cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)\cdot\sin^2\vartheta\right] =$$

$$= 5\left[1 + \left(\cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)\cdot\sin^2\vartheta\right]$$

$$\iint_{(A)} (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dA = 125\cdot\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\left[\sin\vartheta + \left(\cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)\cdot\sin^3\vartheta\right]d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= 125\left\{\underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta + \underbrace{\int_0^{2\pi}\left(\cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)d\varphi}_{I_1}\cdot\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta}_{I_2}\right\} =$$

$$= 125\left\{2\pi\cdot\Big[-\cos\vartheta\Big]_0^{\pi} + I_1\cdot I_2\right\} = 125\,(2\pi\cdot 2 + I_1\cdot I_2)$$

Auswertung der Integrale I_1 und I_2 mit der Integraltafel:

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\left(\cos(2\varphi) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)d\varphi = \left[\frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi) + \frac{1}{4}\cdot\cos(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = 0$$

(Integrale: 228 und 204, jeweils mit $a = 2$)

Die Berechnung von I_2 erübrigt sich, da mit $I_1 = 0$ auch das Produkt $I_1\cdot I_2$ *verschwindet* (unabhängig vom Wert des Integrals I_2, der im Übrigen $4/3$ beträgt).

Somit: $\displaystyle\iint_{(A)} (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dA = 125\left(2\pi\cdot 2 + 0\cdot\frac{4}{3}\right) = 125\,(4\pi + 0) = 500\,\pi$

9) Das Vektorfeld besitzt *Zylindersymmetrie*. Daher folgt nach Formel (I-439) mit $f(\varrho) = \dfrac{a}{\varrho}$:

$$\oiint_{(A)} (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dA = f(R)\cdot 2\pi R H = \frac{a}{R}\cdot 2\pi R H = 2\pi a H$$

10) Wegen der *Kugelsymmetrie* des Vektorfeldes können wir Formel (I-445) verwenden. Mit $f(r) = r^n$ folgt dann für den Vektorfluss durch die Kugelschale:

$$\oiint_{(A)} (\vec{F}\cdot\vec{N})\,dA = f(R)\cdot 4\pi R^2 = R^n\cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^{n+2}$$

Abschnitt 9

1) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + 2y + x = x + 3y$

$$\oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (x + 3y)\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \underbrace{\int_{z=0}^{1} 1\, dz}_{1} \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} (x + 3y)\, dy\, dx}_{I\, =\, 2} = 1 \cdot 2 = 2$$

Schrittweise Berechnung des *Doppelintegrals* I:

$$\int_{y=0}^{1} (x + 3y)\, dy = \left[xy + \frac{3}{2} y^2 \right]_{y=0}^{1} = x + \frac{3}{2}$$

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x \right]_0^1 = 2$$

2) Verwendung von *Zylinderkoordinaten*: $0 \le \varrho \le 3, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 2$

Transformationsgleichungen: $x = \varrho \cdot \cos\varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin\varphi, \quad z = z; \quad dV = \varrho\, d\varrho\, dz\, d\varphi$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 0 + 2z = 2(x + z) = 2(\varrho \cdot \cos\varphi + z)$$

$$\oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 2 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2} \int_{\varrho=0}^{3} (\varrho^2 \cdot \cos\varphi + \varrho z)\, d\varrho\, dz\, d\varphi}_{I\, =\, 18\pi} = 36\pi$$

Schrittweise Berechnung des *Dreifachintegrals* I:

$$\int_{\varrho=0}^{3} (\varrho^2 \cdot \cos\varphi + \varrho \cdot z)\, d\varrho = \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \cdot \cos\varphi + \frac{1}{2} \varrho^2 z \right]_{\varrho=0}^{3} = 9 \cdot \cos\varphi + \frac{9}{2} z$$

$$\int_{z=0}^{2} \left(9 \cdot \cos\varphi + \frac{9}{2} z \right) dz = \left[9 \cdot \cos\varphi \cdot z + \frac{9}{4} z^2 \right]_{z=0}^{2} = 18 \cdot \cos\varphi + 9$$

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (18 \cdot \cos\varphi + 9)\, d\varphi = \left[18 \cdot \sin\varphi + 9\varphi \right]_0^{2\pi} = 18\pi$$

3) *Berechnung des Volumenintegrals* (in Kugelkoordinaten):

Kugelkoordinaten: $0 \le r \le R, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi, \quad z = r \cdot \cos\vartheta; \quad dV = r^2 \cdot \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3\,(\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2}) = 3\,r^2$$

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 3 \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{R} r^4 \cdot \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 3 \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi \cdot \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \cdot \int\limits_{r=0}^{R} r^4\, dr =$$

$$= 3\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{5}\, r^5\right]_0^R = 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5}\, R^5 = \frac{12}{5}\,\pi R^5$$

Berechnung des Oberflächenintegrals (in Kugelkoordinaten mit $r = \text{const.} = R$):

Gleichung der Kugeloberfläche: $\phi\,(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

$$\operatorname{grad}\phi = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad}\phi| = 2\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{R^2}} = 2R \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{R}\,(x^4 + y^4 + z^4) = R^3\,[\sin^4\vartheta\,(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) + \cos^4\vartheta\,]$$

Flächenelement auf der Kugeloberfläche $(r = R)$: $dA = R^2 \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\oiint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = R^5 \cdot \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} [\sin^5\vartheta\,(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) + \sin\vartheta \cdot \cos^4\vartheta\,]\, d\vartheta\, d\varphi}_{I\, =\, 12\pi/5} = \frac{12}{5}\,\pi R^5$$

Schrittweise Berechnung des *Doppelintegrals* I:

$$I = \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\, d\varphi}_{I_1 + I_2} \cdot \underbrace{\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^5\vartheta\, d\vartheta}_{I_3} + \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\, \cos^4\vartheta\, d\vartheta}_{I_4} =$$

$$= (I_1 + I_2)\, I_3 + 2\pi \cdot I_4$$

Auswertung der Teilintegrale I_1 bis I_4 (mit der Integraltafel):

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi\, d\varphi = \left[\frac{\cos^3\varphi \cdot \sin\varphi}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\,\pi$$

(Integrale: 231 mit $n = 4$, $a = 1$ und 229 mit $a = 1$)

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi = \left[-\frac{\sin^3\varphi \cdot \cos\varphi}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\,\pi$$

(Integrale: 207 mit $n = 4$, $a = 1$ und 205 mit $a = 1$)

$$I_3 = \int_0^{\pi} \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = \left[- \frac{\sin^4 \vartheta \cdot \cos \vartheta}{5} + \frac{4}{5} \left(- \cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right) \right]_0^{\pi} = \frac{16}{15}$$

(Integrale: 207 mit $n = 5$, $a = 1$ und 206 mit $a = 1$)

$$I_4 = \int_0^{\pi} \sin \vartheta \cdot \cos^4 \vartheta \, d\vartheta = \left[- \frac{\cos^5 \vartheta}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{5} \qquad \text{(Integral 256 mit } n = 4, \ a = 1)$$

Somit: $I = (I_1 + I_2) I_3 + 2\pi \cdot I_4 = \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi \right) \cdot \frac{16}{15} + 2\pi \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5}\pi$

Somit gilt: $\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = \frac{12}{5} \pi R^5$

4) Der *Gaußsche Integralsatz* liefert für $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$ unter Berücksichtigung von $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{E}) = 0$ (siehe Gleichung I-191):

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = \oint\!\!\!\oint\limits_{(A)} [(\operatorname{rot} \vec{E}) \cdot \vec{N}] \, dA = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint\limits_{(V)} \underbrace{\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{E})}_{0} \, dV = 0$$

5) *Berechnung des Flächenintegrals* (in Polarkoordinaten): $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

Transformationsgleichungen: $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$; $dA = r \, dr \, d\varphi$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x y) = 2x + x = 3x = 3r \cdot \cos \varphi$$

$$\iint\limits_{(A)} \operatorname{div} \vec{F} \, dA = 3 \cdot \int_{\varphi = 0}^{2\pi} \int_{r = 0}^{2} r^2 \cdot \cos \varphi \, dr \, d\varphi = 3 \cdot \int_{\varphi = 0}^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_{r = 0}^{2} r^2 \, dr =$$

$$= 3 \left[\sin \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^2 = 3 \cdot 0 \cdot \frac{8}{3} = 0$$

Berechnung des Kurvenintegrals (in Polarkoordinaten mit $r = 2, x = 2 \cdot \cos \varphi, y = 2 \cdot \sin \varphi$):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \qquad |\vec{r}| = \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2}_{4}} = 2; \qquad \vec{N} = \vec{e}_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ x y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} x \, (\underbrace{x^2 + y^2}_{4}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos \varphi \cdot 4 = 4 \cdot \cos \varphi$$

Linienelement (auf dem Kreisbogen): $ds = 2 \, d\varphi$

$$\oint\limits_{C} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, ds = 8 \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 8 \left[\sin \varphi \right]_0^{2\pi} = 8 \cdot 0 = 0$$

Somit gilt: $\iint\limits_{(A)} \operatorname{div} \vec{F} \, dA = \oint\limits_{C} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, ds = 0$

6) **1. Lösungsweg** (direkte Berechnung über ein *Oberflächenintegral* in *Kugelkoordinaten*):

Gleichung der Mantelfläche A: $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \quad (\text{mit } z \geq 0)$

$$\operatorname{grad} \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad} \phi| = 2 \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{4}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F})_x &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2 z) - \frac{\partial}{\partial z}(y z^2) = 2yz - 2yz = 0 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_y &= \frac{\partial}{\partial z}(-y^3) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2 z) = 0 - 0 = 0 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_z &= \frac{\partial}{\partial x}(y z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^3) = 0 + 3y^2 = 3y^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten: $r = 2, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen: $x = 2 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \quad y = 2 \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi, \quad z = 2 \cdot \cos\vartheta$

Flächenelement: $dA = 4 \cdot \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$

$$(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3}{2} y^2 z = 12 \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin^2\varphi$$

$$\iint_{(A)} [(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N}] \, dA = 48 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin^2\varphi \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= 48 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi}_{\substack{\text{Integral 205} \\ \text{mit } a = 1}} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3\vartheta \cdot \cos\vartheta \, d\vartheta}_{\substack{\text{Integral 255} \\ \text{mit } n = 3, a = 1}} = 48 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\sin^4\vartheta}{4} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 48 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = 12\pi$$

2. Lösungsweg (Berechnung über ein Linienintegral, Integralsatz von *Stokes*):

$$\iint_{(A)} [(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N}] \, dA = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C (-y^3 \, dx + y z^2 \, dy + y^2 z \, dz)$$

Randkurce C (Kreis um den Nullpunkt der x, y-Ebene mit dem Radius $r = 2$):

$x = 2 \cdot \cos t, \quad y = 2 \cdot \sin t, \quad z = 0; \quad dx = -2 \cdot \sin t \, dt, \quad dy = 2 \cdot \cos t \, dt, \quad dz = 0$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C (-y^3 \, dx + \underbrace{y z^2 \, dy}_{0} + \underbrace{y^2 z \, dz}_{0}) = \oint_C (-y^3) \, dx = 16 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt =$$

$$= 16 \left[-\frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = 16 \cdot \frac{3}{4} \pi = 12\pi$$

(Integrale: 207 mit $n = 4$, $a = 1$ und 205 mit $a = 1$)

7) $$\left.\begin{array}{l} (\operatorname{rot}\vec{F})_x = \dfrac{\partial}{\partial y}(y) - \dfrac{\partial}{\partial z}(xz) = 1 - x \\[2ex] (\operatorname{rot}\vec{F})_y = \dfrac{\partial}{\partial z}(x) - \dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0 - 0 = 0 \\[2ex] (\operatorname{rot}\vec{F})_z = \dfrac{\partial}{\partial x}(xz) - \dfrac{\partial}{\partial y}(x) = z - 0 = z \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 - x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Gleichung der Fläche A: $\phi(x; y; z) = x + y + z - 2 = 0$ oder $z = 2 - x - y$

$$\operatorname{grad}\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad}\phi| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F}) \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 - x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - x + z) \underset{z = 2 - x - y}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}(-2x - y + 3)$$

$$(\underbrace{\vec{N} \cdot \vec{e}_z}_{\substack{z\text{-Komponente} \\ \text{von } \vec{N}}})\, dA = N_z\, dA = \frac{1}{\sqrt{3}}\, dA = dy\, dx \quad \Rightarrow \quad dA = \sqrt{3}\, dy\, dx$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} [(\operatorname{rot}\vec{F}) \cdot \vec{N}]\, dA = \underbrace{\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{-x+2} (-2x - y + 3)\, dy\, dx}_{I = 2} = 2$$

Schrittweise Berechnung des *Doppelintegrals* I:

$$\int_{y=0}^{-x+2} (-2x - y + 3)\, dy = \left[-2xy - \frac{1}{2}y^2 + 3y\right]_{y=0}^{-x+2} =$$

$$= -2x(-x + 2) - \frac{1}{2}(-x + 2)^2 + 3(-x + 2) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4$$

$$I = \int_{x=0}^{2} \left(\frac{3}{2}x^2 - 5x + 4\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^2 = 2$$

8) a) Das Vektorfeld besitzt *keine* Radialkomponente. Daher ist der Vektorfluss durch die Kugeloberfläche gleich *null*.

b) Zum gleichen Ergebnis führt der Integralsatz von *Gauß* (in Kugelkoordinaten):

$0 \le r \le R, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \quad dV = r^2 \cdot \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$

Vektorkomponenten: $F_r = 0, \quad F_\vartheta = r^2 \cdot \cos\varphi, \quad F_\varphi = 0$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta \cdot r^2 \cdot \cos\varphi) = \frac{r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$\oiint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dA = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{R} r^3 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \cdot \int\limits_{r=0}^{R} r^3\, dr = \Big[\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[\sin\vartheta\Big]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}\, r^4\right]_0^R =$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4}\, R^4 = 0$$

9) a) $$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}(z) - \dfrac{\partial}{\partial z}(2x) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(-y) - \dfrac{\partial}{\partial x}(z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(2x) - \dfrac{\partial}{\partial y}(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Halbkugel: $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad (\text{mit } z \geq 0)$

$$\operatorname{grad}\phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad}\phi| = 2\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{9}} = 6 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten: $r = 3$ (auf der Halbkugeloberfläche), $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen: $x = 3 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$, $y = 3 \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$, $z = 3 \cdot \cos\vartheta$; Flächenelement: $dA = 9 \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z = 3 \cdot \cos\vartheta$$

$$\iint\limits_{(A)} [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N}]\, dA = 27 \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= 27 \cdot \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta}_{\text{Integral 254 mit } a = 1} = 54\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 54\pi \cdot \frac{1}{2} = 27\pi$$

b) *Randkurve* C (Kreis um den Nullpunkt der x, y-Ebene mit dem Radius $r = 3$):

$x = 3 \cdot \cos t, \ y = 3 \cdot \sin t, \ z = 0; \ dx = -3 \cdot \sin t\, dt, \ dy = 3 \cdot \cos t\, dt, \ dz = 0$

Aus dem *Stokesschen Integralsatz* folgt dann:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = -y\,dx + 2x\,dy + \underbrace{z\,dz}_{0} = 9 \cdot \sin^2 t\,dt + 18 \cdot \cos^2 t\,dt =$$

$$= 9\,(\underbrace{\sin^2 t}_{1\,-\,\cos^2 t} + 2 \cdot \cos^2 t)\,dt = 9\,(1 + \cos^2 t)\,dt$$

$$\iint\limits_{(A)} [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N}]\,dA = \oint\limits_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9 \cdot \int\limits_{0}^{2\pi} (1 + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= 9\left[t + \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = 9 \cdot 3\pi = 27\pi \qquad \text{(Integral 229 mit } a = 1)$$

II Wahrscheinlichkeitsrechnung

Abschnitt 1

1) a) $P(5) = 5! = 120$

b) Eine Person nimmt einen beliebigen, dann aber festen Platz ein. Für die übrigen vier Personen gibt es dann $P(4) = 4! = 24$ verschiedene Anordnungsmöglichkeiten. Somit sind 24 verschiedene Plazierungen möglich.

2) $C(6;3) = \binom{6}{3} = 20$

3) a) $C(5;2) = \binom{5}{2} = 10$ b) $C_w(5;2) = \binom{6}{2} = 15$

4) $C_w(6;2) = \binom{7}{2} = 21$

5) Aus den restlichen 7 Aufgaben (Aufgabe 4 bis 10) müssen 4 richtig gelöst werden (die Reihenfolge, in der die Aufgaben gelöst werden, spielt dabei *keine* Rolle → *Kombinationen* 4. Ordnung *ohne* Wiederholung). Es gibt $C(7;4) = \binom{7}{4} = 35$ verschiedene Möglichkeiten.

6) a) Mögliche Stichprobenanzahl: $C(20;4) = \binom{20}{4} = 4845$

b) Die Stichprobe enthält 1 fehlerhaftes und 3 einwandfreie Geräte. Daher gibt es $C(3;1) \cdot C(17;3) = 3 \cdot 680 = 2040$ verschiedene Stichproben mit genau *einem* fehlerhaften Gerät.

Anteil an Stichproben mit *einem* fehlerhaften Gerät: $\dfrac{2040}{4845} \approx 0{,}421 = 42{,}1\,\%$

7) Für Position a gibt es 5 Möglichkeiten, denn *jede* der 5 Federn $F_1, F_2, \ldots, F_5$ kann diesen Platz einnehmen. Ist Position a belegt, so stehen für die Positionen b und c noch 4 verschiedene Federn zur Verfügung. Somit gibt es $C(4;2) = \binom{4}{2} = 6$ *verschiedene* Bele-

gungsmöglichkeiten für die Plätze b und c (die Reihenfolge der Belegung spielt *keine* Rolle $\rightarrow$ *Kombinationen* 2. Ordnung *ohne* Wiederholung). Insgesamt gibt es also $5 \cdot 6 = 30$ *verschiedene* Federsysteme.

8) Die Reihenfolge der Buchstaben ist von Bedeutung $\rightarrow$ *Variationen* 3. Ordnung (ohne bzw. mit Wiederholung).

a) $V(6;3) = \dfrac{6!}{(6-3)!} = 120$ b) $V_w(6;3) = 6^3 = 216$

9) 4 Plätze können jeweils mit „Zahl" oder „Wappen" belegt werden $\rightarrow$ *Variationen* 4. Ordnung *mit* Wiederholung: $V_w(2;4) = 2^4 = 16$

10) Es handelt sich um *Variationen* 3. Ordnung ohne bzw. mit Wiederholung ($n = 10$ verschiedenen Kugeln).

a) $V(10;3) = \dfrac{10!}{(10-3)!} = 720$ b) $V_w(10;3) = 10^3 = 1000$

11) 2 Buchstaben aus 26 (Reihenfolge ist von Bedeutung $\rightarrow$ *Variationen* 2. Ordnung *mit* Wiederholung) $\Rightarrow$ $V_w(26;2) = 26^2 = 676$ Möglichkeiten

1. Ziffer: 9 Möglichkeiten (Ziffern 1 bis 9; Ziffer 0 ist nicht erlaubt)

2. bis 4. Ziffer: 3 Ziffern aus 10 $\Rightarrow$ $V_w(10;3) = 10^3 = 1000$ Möglichkeiten

Somit gibt es $676 \cdot 9 \cdot 1000 = 6\,084\,000$ verschiedene Kennzeichen.

Abschnitt 2

1) a) $\Omega = \{ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ, WWZ, WZW, ZWW, WWW\}$ (8 Elementarereignisse)

b) $A = \{ZZW, ZWZ, WZZ\}$; $B = \{WWZ, WZW, ZWW\}$; $C = \{ZWW, WZW, WWZ\}$;

$D = \{ZZZ\}$; $E = \{WWW\}$

$B = C$: Die Teilmengen B und C unterscheiden sich nur in der Anordnung ihrer Elemente, sind daher *gleich* (je 2-mal „Wappen", 1-mal „Zahl").

c) $A \cup B = \{ZZW, ZWZ, WZZ, WWZ, WZW, ZWW\}$
$\rightarrow$ mindestens einmal „Zahl" und „Wappen"

$A \cap D = \{\ \}$ $\rightarrow$ unmögliches Ereignis

$B \cup E = \{WWZ, WZW, ZWW, WWW\}$ $\rightarrow$ mindestens zweimal „Wappen"

$D \cup E = \{ZZZ, WWW\}$ $\rightarrow$ dreimal „Zahl" oder dreimal „Wappen"

$A \cap B = \{\ \}$ $\rightarrow$ *unmögliches* Ereignis

$(C \cup D) \cap B = \{ZWW, WZW, WWZ, ZZZ\} \cap \{WWZ, WZW, ZWW\} =$

$= \{\underbrace{ZWW, WZW, WWZ}_{B\,=\,C}\} = B = C$ $\rightarrow$ zweimal „Wappen" bzw. einmal „Zahl"

d) $\overline{A} = \{ZZZ, WWZ, WZW, ZWW, WWW\}$
$\rightarrow$ alle Elementarereignisse mit Ausnahme derjenigen, bei denen einmal „Wappen" eintritt

$\overline{D} = \{ZZW, ZWZ, WZZ, WWZ, WZW, ZWW, WWW\}$
$\rightarrow$ mindestens einmal „Wappen"

2) a) $\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), (4;4), (4;5), (4;6), (5;5), (5;6), (6;6)\}$

b) $A = \{(1;3), (2;2)\}$

$B = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3)\}$

$C = \{(1;1), (1;3), (1;5), (3;3), (3;5), (5;5)\}$

$D = \{(1;2), (1;4), (1;6), (2;3), (2;5), (3;4), (3;6), (4;5), (5;6)\}$

$E = \{(1;2), (1;4), (1;6), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;4), (3;6), (4;4), (4;5), (4;6), (5;6), (6;6)\}$

3) a) *Reihenschaltung*: $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ (*mindestens eine* Glühlampe brennt durch)
Parallelschaltung: $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (alle drei Glühlampen brennen *gleichzeitig* durch)

b) $A_1 \cup A_2$: a_1 *oder* a_2 *oder* beide brennen durch $\rightarrow$ Unterbrechung bei *Reihenschaltung*
$A_2 \cap A_3$: a_2 und a_3 brennen *gleichzeitig* durch $\rightarrow$ Unterbrechung bei *Reihenschaltung*
Bei Parallelschaltung wird der Stromkreis in beiden Fällen *nicht* unterbrochen.

Abschnitt 3

1) a) 16 rote Karten $\Rightarrow$ $P = 16/32 = 1/2$ b) 4 Asse $\Rightarrow$ $P = 4/32 = 1/8$

c) Je 4 Damen und Könige $\Rightarrow$ $P = 8/32 = 1/4$

d) 2 schwarze Buben $\Rightarrow$ $P = 2/32 = 1/16$

2) Ziehungen $\rightarrow$ *Kombinationen* 3. Ordnung *ohne* Wiederholung. Es gibt $C(20;3) = \binom{20}{3} = 1140$ Möglichkeiten, aus 20 Glühbirnen 3 auszuwählen.

a) Es gibt $C(16;3) = \binom{16}{3} = 560$ Möglichkeiten, aus 16 *einwandfreien* Glühbirnen 3 auszuwählen.

Somit: $P_0 = \dfrac{560}{1140} = 0{,}4912$ (Stichprobenanteil *ohne* defekte Glühbirne)

b) $P_1 = 1 - P_0 = 1 - 0{,}4912 = 0{,}5088$ (mindestens 1 defekte Glühbirne)

3) Es gibt 36 verschiedene gleichwahrscheinliche Augenpaare $(i;j)$ mit $i, j = 1, 2, 3, \ldots, 6$.

$A = \{(1;3), (2;2), (3;1)\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$B = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$C = \{(3;3), (3;6), (6;3), (6;6)\} \quad \Rightarrow \quad P(C) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

4) a) $p\,(\text{gerade}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{8} + p_4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p_4 = \frac{1}{8}$

$p\,(\text{ungerade}) = p_1 + p_3 + p_5 = p_1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{4}$

b) $P(A) = p_1 + p_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $\quad P(B) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

5) a) $p(g) + p(u) = 4p(u) + p(u) = 5p(u) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(u) = 1/5; \quad p(g) = 4/5$

$p(2) = p(4) = p(6) = 4/15; \quad p(1) = p(3) = p(5) = 1/15$

b) $P(A) = 6/15 = 2/5; \quad P(B) = 5/15 = 1/3; \quad P(C) = 12/15 = 4/5;$

$P(D) = 3/15 = 1/5; \quad P(E) = P(\{1, 2, 4, 6\}) = 13/15; \quad P(F) = P(\{6\}) = 4/15$

6) $P(A) = 5P(C); \quad P(B) = 3P(C); \quad P(A) + P(B) + P(C) = 1$

a) $5P(C) + 3P(C) + P(C) = 9P(C) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(C) = 1/9;$

$P(A) = 5/9; \quad P(B) = 3/9$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$

7) Von 8 möglichen gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen sind 4 „günstig", nämlich (Z = Zahl; W = Wappen):

$WWZ, WZW, ZWW, WWW \quad \Rightarrow \quad P = 4/8 = 1/2$

8) Ereignis A_i: Das bei der i-ten Ziehung erhaltene Bauelement ist *einwandfrei* $(i = 1, 2, 3)$

1. Ziehung (20 Elemente, davon 18 einwandfreie): $P(A_1) = 18/20$

2. Ziehung (19 Elemente, davon 17 einwandfreie): $P(A_2 \,|\, A_1) = 17/19$

3. Ziehung (18 Elemente, davon 16 einwandfreie): $P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) = 16/18$

Der Multiplikationssatz (II-59) liefert:

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \,|\, A_1) \cdot P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) = \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{16}{18} = \frac{68}{95} \approx 0{,}72$

9) A: Die bei der 1. Ziehung erhaltene Kugel ist weiß $\Rightarrow \quad P(A) = 8/10$

B: Die bei der 2. Ziehung erhaltene Kugel ist schwarz $\Rightarrow \quad P(B \,|\, A) = 2/9$

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \,|\, A) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \approx 0{,}1778$

10) Es gibt 6 gleichwahrscheinliche Elementarereignisse mit einer „2" beim ersten Wurf, darunter 3 „günstige" (Augensumme < 6), nämlich:

$(2; 1), \ (2; 2), \ (2; 3) \quad \Rightarrow \quad P = 3/6 = 1/2$

11) $A \cap B$: A und B treffen gleichzeitig $\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$A \cup B$: Schütze A *oder* Schütze B trifft *oder* beide Schützen treffen

Additionssatz (II-55): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

12) $\overline{B} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$: *Keines* der drei Glühlämpchen brennt durch (komplementäres Ereignis).

$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = (1 - p)(1 - p)(1 - p) = (1 - p)^3 = (1 - 0{,}2)^3 = 0{,}8^3$

(mit $p = p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}2$)

Der Stromkreis wird *unterbrochen*, wenn auch nur *eines* der drei Glühlämpchen durchbrennt:

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}8^3 = 0{,}488$

13) T: Treffer; $\overline{T}$: Fehlschuss (kein Treffer); $p(T) = p = 0{,}6$; $p(\overline{T}) = 0{,}4$

a) Ereignis A: genau *zwei* Treffer bei 3 Schüssen $\Rightarrow$ $A = \{TT\overline{T},\, T\overline{T}T,\, \overline{T}TT\}$ $\Rightarrow$

$P(A) = 3 \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4) = 0{,}432$

b) Ereignis B: *kein* Treffer bei 3 Schüssen $\Rightarrow$ $B = \{\overline{T}\,\overline{T}\,\overline{T}\}$ $\Rightarrow$

$P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$

Ereignis $\overline{B}$: *mindestens ein* Treffer $\Rightarrow$ $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$

14) Aus dem *unvollständigen* Ereignisbaum in Bild A-21 folgt:

a) $P(ab) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{25} = 0{,}08$

b) $P(cc) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$

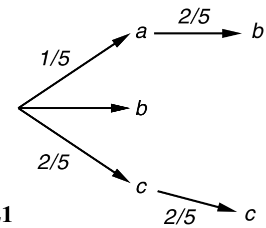


Bild A-21

15) Die Urne enthält *stets* 10 Kugeln, nach der 1. Ziehung somit *entweder* 3 weiße und 7 schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *weiße* Kugel gezogen wurde) *oder* je 5 weiße und schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *schwarze* Kugel gezogen wurde).

Aus dem Ereignisbaum in Bild A-22 folgt:

a) $P(W) = P(WW) + P(SW) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

b) $P(WW \cup SS) = P(WW) + P(SS) =$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

c) $P(WW) = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{12}{100}$

$$P = \frac{P(WW)}{P(WW \cup SS)} = \frac{12/100}{42/100} = \frac{2}{7}$$

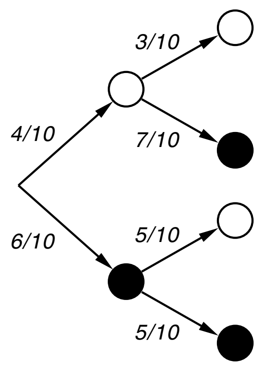


Bild A-22

16) Der Karton enthält nach der 1. Ziehung 4 Glühbirnen, nach der 2. Ziehung nur noch 3 Glühbirnen. Aus dem Ereignisbaum in Bild A-23 folgt dann (d: defekt; $\overline{d}$: einwandfrei):

$$P = P(d\overline{d}d) + P(\overline{d}dd) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

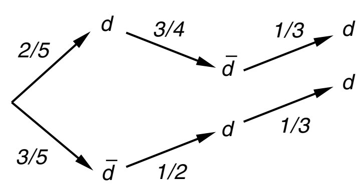


Bild A-23

17) Anteile der 3 Maschinen A, B und C an der Gesamtproduktion (250 Kondensatoren):

A: 80 von 250 $\Rightarrow$ $P(A) = 80/250 = 0{,}32$

B: 50 von 250 $\Rightarrow$ $P(B) = 50/250 = 0{,}2$

C: 120 von 250 $\Rightarrow$ $P(C) = 120/250 = 0{,}48$

Wahrscheinlichkeiten für die Produktion eines *defekten* Kondensators (d) auf den Maschinen:

$P_A(d) = 2/80 = 0{,}025$; $P_B(d) = 1/50 = 0{,}02$; $P_C(d) = 3/120 = 0{,}025$

Aus dem *unvollständigen* Ereignisbaum in Bild A-24 folgt:

a) $P = 0{,}32 \cdot 0{,}025 + 0{,}2 \cdot 0{,}02 + 0{,}48 \cdot 0{,}025 = 0{,}024$

b) $P = \dfrac{0{,}48 \cdot 0{,}025}{0{,}024} = 0{,}5$

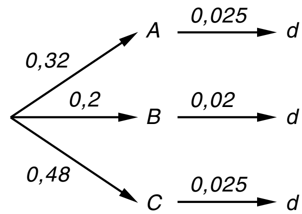


Bild A-24

Abschnitt 4

1) a) *Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-25

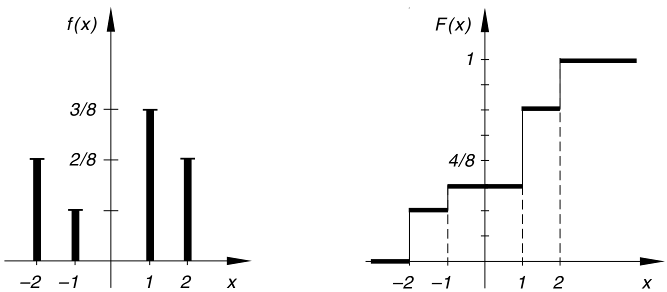


Bild A-25

b) *Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-26

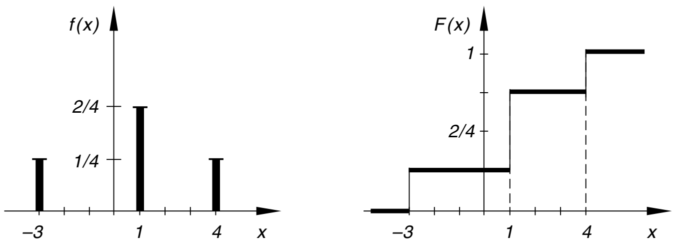


Bild A-26

c) *Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-27

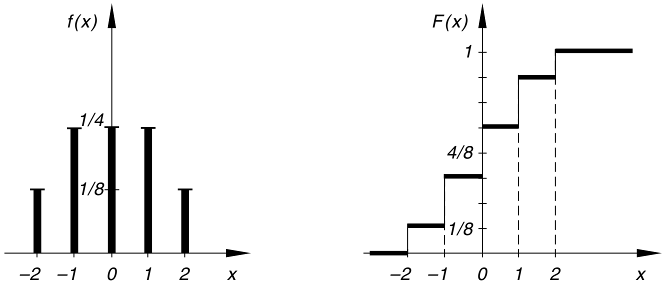


Bild A-27

2) a) $\sum f(x_i) = 0{,}95 + p(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(4) = 0{,}05$

b) *Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-28

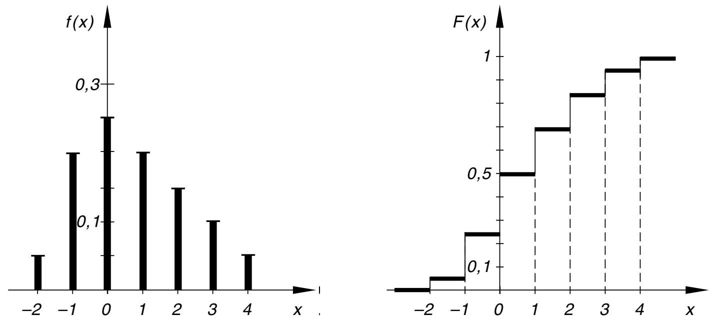


Bild A-28

3) Es gibt 8 *gleichwahrscheinliche* Elementarereignisse (Laplace-Experiment mit $p = 1/8$; Z: Zahl; W: Wappen): *ZZZ, WZZ, ZWZ, ZZW, WWZ, WZW, ZWW, WWW*

Verteilung:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

a) *Stabdiagramm und Verteilungsfunktion:* Bild A-29

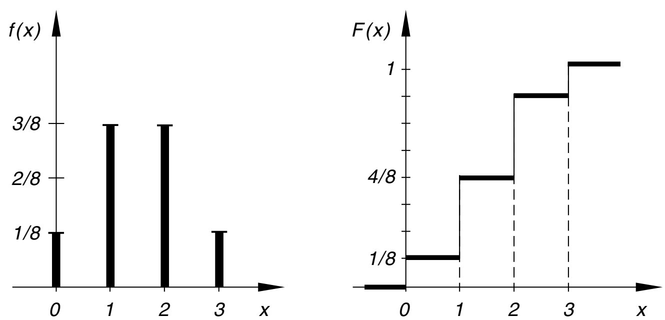


Bild A-29

b) $P(1 \le X \le 2) = f(1) + f(2) = 3/8 + 3/8 = 3/4$

4) a) Anzahl der möglichen Stichproben (Kombinationen 3. Ordnung *ohne* Wiederholung):

$C(10; 3) = \binom{10}{3} = 120$

$\boxed{X = 0}$ Nur einwandfreie Glühbirnen (3 aus 8): $C(8; 3) = \binom{8}{3} = 56$

Somit: $P(X = 0) = f(0) = 56/120 = 7/15$

$\boxed{X = 1}$ 1 defekte (aus 2) und 2 einwandfreie Glühbirnen (aus 8):

$C(2; 1) \cdot C(8; 2) = \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{2} = 2 \cdot 28 = 56$

Somit: $P(X = 1) = f(1) = 56/120 = 7/15$

$\boxed{X = 2}$ 2 defekte (aus 2) und 1 einwandfreie Glühbirne (aus 8):

$$C(2;2) \cdot C(8;1) = \binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1} = 1 \cdot 8 = 8$$

Somit: $P(X = 2) = f(2) = 8/120 = 1/15$

Verteilungstabelle:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$7/15$	$7/15$	$1/15$

b) $P(X = 1) = f(1) = 7/15$

5) a) Der Schütze trifft *erstmals* beim x-ten Schuss (vorher $x - 1$ Fehlschüsse, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0{,}2$). Der *Multiplikationssatz* liefert dann:

$$p(x) = f(x) = \underbrace{(0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot \ldots \cdot 0{,}2)}_{(x-1)\text{-mal}} \cdot 0{,}8 = 0{,}8 \cdot 0{,}2^{x-1} \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

b) Der Schütze trifft *spätestens* beim 3. Schuss:

$$P = f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}8\,(1 + 0{,}2 + 0{,}2^2) = 0{,}992$$

6) Außerhalb der angegebenen Intervalle *verschwindet* die Verteilungsfunktion $(F(x) = 0)$.

a) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^x u\,du = \frac{1}{4}\left[u^2\right]_0^x = \frac{1}{4}x^2 \qquad (0 \le x \le 2)$

b) $F(x) = \lambda \cdot \underbrace{\int\limits_0^x e^{-\lambda u}\,du}_{\text{Integral 312 mit } a = -\lambda} = \lambda\left[\frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda}\right]_0^x = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x \ge 0)$

c) $F(x) = \int\limits_1^x \frac{1}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \qquad (x \ge 1)$

7) a) $\int\limits_0^4 \left(\frac{1}{16}x + b\right)dx = \left[\frac{1}{32}x^2 + bx\right]_0^4 = \frac{1}{2} + 4b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{8}$

b) $c \cdot \int\limits_a^b 1\,dx = c\left[x\right]_a^b = c\,(b - a) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b - a}$

c) $a \cdot \int\limits_{-1}^1 (1 + x)\,dx = a\left[x + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

8) a) $\int\limits_0^{10} kx\,dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{10} = 50k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{50}$

b) *Verteilungsfunktion:* $F(x) = \frac{1}{50} \cdot \int\limits_0^x u\,du = \frac{1}{100}\left[u^2\right]_0^x = \frac{1}{100}x^2 = 0{,}01\,x^2$

$(0 \le x \le 10)$

$P(X \le -2) = 0; \qquad P(1 \le X \le 2) = F(2) - F(1) = 0{,}04 - 0{,}01 = 0{,}03$

$P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F(5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P(3 \le X \le 8) = F(8) - F(3) = 0{,}64 - 0{,}09 = 0{,}55$

9) a) Normierung: $a \cdot \int\limits_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx = a\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{4}{3}a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3/4$

b) $F(x) = \frac{3}{4} \cdot \int\limits_0^x (2u^2 - u^3)\,du = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4\right]_0^x = \frac{1}{16}(8x^3 - 3x^4)$

$(0 \le x \le 2)$

c) $P(X \le 1) = F(1) = 5/16$

10) a) Aus den Grenzwerten $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ lassen sich die unbekannten Parameter a und b wie folgt bestimmen:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & \lim\limits_{x \to -\infty}(a \cdot \arctan x + b) = a\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = 0 \\ (\mathrm{II}) & \lim\limits_{x \to \infty}(a \cdot \arctan x + b) = a\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = 1 \end{array}\right\} + \quad \Rightarrow$$

$2b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}; \qquad (\mathrm{II}) \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\pi}$

b) $F(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$

11) $P(0 \le T \le 2\lambda^{-1}) = \lambda \cdot \underbrace{\int\limits_0^{2\lambda^{-1}} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt}_{\text{Integral 312 mit } a = -\lambda} = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{2\lambda^{-1}} = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0{,}8647$

12) a) $f(t) = F'(t) = -[0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t} + \mathrm{e}^{-0{,}2t} \cdot (-0{,}2)(1 + 0{,}2t)] = 0{,}04\,t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}$

b) $P(1 \le T \le 5) = F(5) - F(1) = 0{,}2642 - 0{,}0175 = 0{,}2467$

Abschnitt 5

1) a) $E(X) = -0{,}1 + 0 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}75$

b) $E(X) = -\frac{2}{12} - \frac{2}{12} + 0 + \frac{3}{12} + \frac{8}{12} + \frac{5}{12} + \frac{10}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

2) $E(X) = 0{,}5 \cdot \int\limits_{-1}^{1} x(1 + x)\,dx = 0{,}5 \cdot \int\limits_{-1}^{1}(x + x^2)\,dx = 0{,}5\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$

3) a) $E(X) = -\frac{2}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$

b) Linearitätssatz: $E(Z_1) = E(5X + 2) = 5 \cdot E(X) + 2 = 5 \cdot \frac{1}{8} + 2 = \frac{21}{8}$

$$E(Z_2) = E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot f(x_i) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{17}{8}$$

4) a) *Gewinnerwartung* („mittlerer" Gewinn): $E(Z) = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{9}{8} + \frac{8}{8} = 3 \quad \Rightarrow \quad$ 3 Euro

b) *Nein*, denn der Einsatz (4 Euro) ist *größer* als die Gewinnerwartung (3 Euro).

5) a) $\mu = E(X) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{4}{4} + \frac{6}{4} + \frac{8}{12} = 3$

$$E(X^2) = \frac{4}{4} + \frac{4}{6} + \frac{16}{4} + \frac{36}{4} + \frac{64}{12} = 20$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 20 - 3^2 = 11; \qquad \sigma = \sqrt{11} = 3{,}3166$$

b) $\mu = \frac{23}{16} = 1{,}4375; \qquad \sigma^2 = \frac{575}{256} = 2{,}2461; \qquad \sigma = 1{,}4987$

c) $\mu = 0{,}7; \qquad \sigma^2 = 2{,}41; \qquad \sigma = 1{,}5524$

6) a) $\mu = E(X) = -0{,}4 - 0{,}3 + 0 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}45 = -0{,}05$

$$E(X^2) = 0{,}8 + 0{,}3 + 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 1{,}35 = 2{,}75$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = 2{,}75 - (-0{,}05)^2 = 2{,}7475; \qquad \sigma = 1{,}6576$$

b) $\mu_Z = E(Z) = \underbrace{E[(X - \mu)^2]}_{\sigma^2} = E[(X + 0{,}05)^2] = \sigma^2 = 2{,}7475$

$$E(Z^2) = E[(X - \mu)^4] = E[(X + 0{,}05)^4] = \sum_i (x_i + 0{,}05)^4 \cdot f(x_i) =$$

$$= (-2 + 0{,}05)^4 \cdot 0{,}2 + (-1 + 0{,}05)^4 \cdot 0{,}3 + (0 + 0{,}05)^4 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (1 + 0{,}05)^4 \cdot 0{,}1 + (2 + 0{,}05)^4 \cdot 0{,}05 + (3 + 0{,}05)^4 \cdot 0{,}15 = 17{,}1212$$

$$\sigma_Z^2 = E(Z^2) - \mu_Z^2 = 17{,}1212 - 2{,}7475^2 = 9{,}5724; \qquad \sigma_Z = 3{,}0939$$

7)

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	7/15	7/15	1/15

$$E(X) = 0 + \frac{7}{15} + \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

8) a) Aus dem *unvollständigen* Ereignisbaum in Bild A-30 folgt:

$$f(1) = P(OZ) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(OWZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = P(OWWZ) + P(OWWW) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

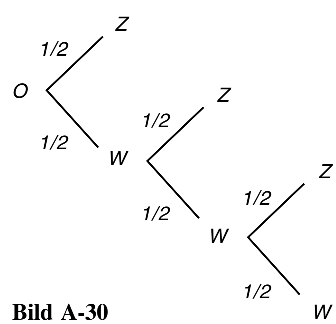


Bild A-30

Verteilungstabelle:

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	1/2	1/4	1/4

b) $E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

9) a) *Normierung*: $\int\limits_a^b c\,dx = c\left[x\right]_a^b = c(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}$

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b x\,dx = \frac{1}{2(b-a)}\left[x^2\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3(b-a)}\left[x^3\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

NR: $(b^3-a^3):(b-a) = a^2+ab+b^2$ (Polynomdivision)

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{1}{4}(a+b)^2 =$$

$$= \frac{4(a^2+ab+b^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} =$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{1}{12}(a-b)^2$$

$\sigma = 0{,}2887\,(b-a)$

b) *Normierung:* $\int\limits_0^{10} m\,x\,dx = \left[\frac{1}{2}\,m\,x^2\right]_0^{10} = 50\,m = 1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{50}$

$$\mu = \int\limits_0^{10} x \cdot \frac{1}{50}\,x\,dx = \frac{1}{50} \cdot \int\limits_0^{10} x^2\,dx = \frac{1}{150}\left[x^3\right]_0^{10} = \frac{20}{3}$$

$$E(X^2) = \int\limits_0^{10} x^2 \cdot \frac{1}{50}\,x\,dx = \frac{1}{50} \cdot \int\limits_0^{10} x^3\,dx = \frac{1}{200}\left[x^4\right]_0^{10} = 50$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 50 - \frac{400}{9} = \frac{50}{9} = 5{,}5556; \qquad \sigma = 2{,}3570$$

10) $\mu = \lambda^2 \cdot \int\limits_0^{\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \lambda^2\left[\frac{\lambda^2x^2+2\lambda x+2}{-\lambda^3} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \lambda^2\left(0+\frac{2}{\lambda^3}\right) = \frac{2}{\lambda}$

(Integral 314 mit $a = -\lambda$)

$$E(X^2) = \lambda^2 \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-\lambda x}\, dx}_{\text{Integral 315 mit } n = 3,\, a = -\lambda} = \lambda^2 \left[\frac{x^3 \cdot e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty + \lambda^2 \cdot \frac{3}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\lambda x}\, dx}_{\text{Integral 314 mit } a = -\lambda} =$$

$$= \lambda^2 (0 + 0) + 3\lambda \left[\frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 3\lambda\left(0 + \frac{2}{\lambda^3}\right) = \frac{6}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}; \qquad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$$

11) *Normierung:* $a \cdot \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = a \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12} a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 12$

$$\mu = 12 \cdot \int_0^1 x(x^2 - x^3)\, dx = 12 \cdot \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = 12 \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5\right]_0^1 = 12 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$$

$$E(X^2) = 12 \cdot \int_0^1 x^2 (x^2 - x^3)\, dx = 12 \cdot \int_0^1 (x^4 - x^5)\, dx = 12 \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6\right]_0^1 =$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{5}; \qquad \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}; \qquad \sigma = \frac{1}{5}$$

12) *Dichtefunktion:* $f(t) = F'(t) = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t} + 0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t}(1 + 0{,}2t) = 0{,}04\, t \cdot e^{-0{,}2t}$
(*Produkt-* und *Kettenregel*)

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt = 0{,}04 \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-0{,}2t}\, dt = 0{,}04 \left[\frac{0{,}04 t^2 + 0{,}4 t + 2}{-0{,}008} \cdot e^{-0{,}2t}\right]_0^\infty =$$

$$= 0{,}04 \left(0 + \frac{2}{0{,}008}\right) = 10 \qquad \text{(Integral 314 mit } a = -0{,}2\text{)}$$

13) a) $\mu_Z = \int_0^\infty z \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-(1+\lambda)x}\, dx = \lambda \left[\frac{e^{-(1+\lambda)x}}{-(1+\lambda)}\right]_0^\infty = \lambda\left(0 + \frac{1}{1+\lambda}\right) =$

$$= \frac{\lambda}{1+\lambda} \qquad \text{(Integral 312 mit } a = -(1+\lambda)\text{)}$$

b) $\mu_Z = \int_0^\infty z \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_0^\infty (2x + 1) \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \cdot \int_0^\infty (2x \cdot e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x})\, dx =$

$$= \lambda \left[2 \cdot \frac{-\lambda x - 1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda x} + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \lambda\left(0 + 0 + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{2 + \lambda}{\lambda}$$

(Integrale: 313 und 312, jeweils mit $a = -\lambda$)

c) $\mu_Z = \int_0^\infty z \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[\frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty =$

$$= \lambda\left(0 + \frac{2}{\lambda^3}\right) = \frac{2}{\lambda^2} \qquad \text{(Integral 314 mit } a = -\lambda\text{)}$$

14) $E(Z = aX + b) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu_X + b$

$\operatorname{Var}(Z = aX + b) = a^2 \cdot \operatorname{Var}(X) = a^2 \cdot \sigma_X^2$

a) $E(Z) = 1$; $\operatorname{Var}(Z) = 2$ b) $E(Z) = 1$; $\operatorname{Var}(Z) = 0{,}125$

c) $E(Z) = 20$; $\operatorname{Var}(Z) = 50$ d) $E(Z) = -2$; $\operatorname{Var}(Z) = 0{,}5$

Abschnitt 6

1) a) $f(x) = \binom{8}{x} 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{8-x}$ $(x = 0, 1, 2, \ldots, 8)$

Stabdiagramm: Bild A-31

x	$f(x)$
0	0,1678
1	0,3355
2	0,2936
3	0,1468
4	0,0459
5	0,0092
6	0,0011
7	0,0001
8	0

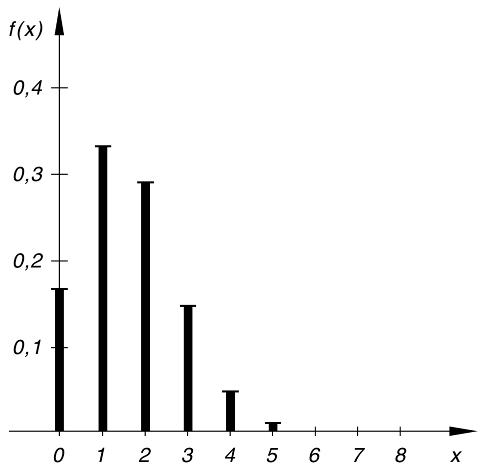


Bild A-31

b) $P(X = 0) = f(0) = 0{,}1678$

$P(X \geq 5) = f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 0{,}0104$

$P(1 \leq X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}7759$

2) Die Zufallsvariable X (= Anzahl „Zahl" bei 10 Würfen) ist *binomialverteilt* mit den Parametern $n = 10$, $p = 0{,}5$ und $q = 0{,}5$:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0{,}5^{10} = \frac{1}{1024} \binom{10}{x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 10)$$

a) $P(X = 0) = 0{,}0010$ b) $P(X = 2) = 0{,}0439$

c) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0{,}8281$ d) $P(X = 5) = 0{,}2461$

3) Die Zufallsvariable X (= Anzahl der „Erfolge" bei 5 Würfen) ist *binomialverteilt* mit den Parametern $n = 5$, $p = 1/3$ und $q = 2/3$:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 5)$$

a) $P(X = 2) = 0{,}3292$ b) $P(X \geq 3) = 0{,}2099$

4) *Binomialverteilung* mit $n = 300$ und $p = 1/3$ (nur 3 und 6 sind durch 3 teilbar, somit 2 „günstige" Fälle). Mittelwert: $\mu = np = 100$

5) Ein „rotes Ass“ (d. h. Herz- oder Karo-Ass) wird im Einzelversuch mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/16$ gezogen. Die Zufallsvariable X (= Anzahl der gezogenen „roten Asse“ bei n Ziehungen) ist daher *binomialverteilt* mit den Parametern n (noch unbekannt), $p = 1/16$ und $q = 15/16$:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{16}\right)^{x} \left(\frac{15}{16}\right)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Ereignis $X = 0$ (*kein* „rotes Ass“): $P(X = 0) = f(0) < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{15}{16}\right)^{n} < 0{,}5 \quad \Rightarrow$

Logarithmieren: $n \cdot \ln\left(\frac{15}{16}\right) < \ln 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad n > 10{,}74$

Lösung: $n \geq 11$ (n muss ganzzahlig sein)

6) *Binomialverteilung* mit den Parametern $n = 250$, $p = 0{,}02$ und $q = 1 - p = 0{,}98$:

$\mu = np = 250 \cdot 0{,}02 = 5$; $\quad \sigma^2 = npq = np(1 - p) = 250 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 4{,}9$;

$\sigma = 2{,}2136$

7) Die Zufallsvariable X (= Anzahl Treffer bei 5 Schüssen) ist *binomialverteilt* mit den Parametern $n = 5, p = 1/3$ und $q = 1 - p = 2/3$:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 5)$$

a) $P(X = 0) = f(0) = 0{,}1317$ b) $P(X = 3) = f(3) = 0{,}1646$

c) $P(X \geq 3) = f(3) + f(4) + f(5) = 0{,}2099$

8) $$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}\binom{4}{x}\binom{6}{3-x} \qquad (x = 0, 1, 2, 3)$$

a) $P(X = 0) = f(0) = 1/6$ b) $P(1 \leq X \leq 3) = 1 - f(0) = 5/6$

c) $P(X < 2) = f(0) + f(1) = 2/3$

9) Die Zufallsvariable X (= Anzahl der *unvollständigen* Packungen unter n gekauften Packungen) ist *hypergeometrisch* verteilt ($N = 40$; M = Anzahl der *unvollständigen* Packungen = 4):

a) $N = 40, \quad M = 4, \quad n = 1; \quad P(X = x) = f(x) = \dfrac{\binom{4}{x}\binom{36}{1-x}}{\binom{40}{1}}$

$X = 0$ (nur *vollständige* Packungen): $P(X = 0) = f(0) = 0{,}9$

b) $N = 40, \quad M = 4, \quad n = 10; \quad P(X = x) = f(x) = \dfrac{\binom{4}{x}\binom{36}{10-x}}{\binom{40}{10}}$

$P(X = 2) = f(2) = 0{,}2142$

10) *Hypergeometrische* Verteilung mit den Parametern $N = 5$, $M = 3$ (Anzahl der *weißen* Kugeln) und $n = 2$:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{2-x}}{\binom{5}{2}} =$$

$$= \frac{1}{10}\binom{3}{x}\binom{2}{2-x} \qquad (x = 0, 1, 2)$$

x	0	1	2
$f(x)$	0,1	0,6	0,3

Stabdiagramm: Bild A-32

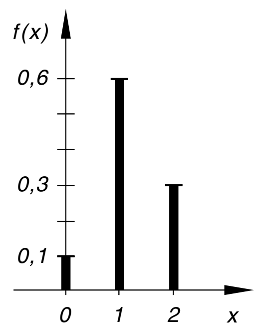


Bild A-32

11) $P(X = x) = f(x) = \dfrac{3^x}{x!} \cdot e^{-3} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$

a) $P(X = 0) = f(0) = 0{,}0498$

b) $P(X \le 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}6472$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - 0{,}6472 = 0{,}3528$

d) $P(1 \le X \le 5) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 0{,}8663$

12) Die Zufallsvariable X (= Anzahl der Brennelemente, die den Anforderungen *nicht* genügen) ist *binomialverteilt* mit den Parametern $n = 1500$ und $p = 10^{-4}$. Sie darf jedoch durch eine (rechnerisch bequemere) *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter (Mittelwert) $\mu = np = 0{,}15$ ersetzt werden:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{0{,}15^x}{x!} \cdot e^{-0{,}15} \quad \Rightarrow \quad P(X = 0) = f(0) = 0{,}8607$$

Exakte Verteilung (*Binomialverteilung* mit $n = 1500$, $p = 0{,}0001$ und $q = 1 - p = 0{,}9999$):

$$P(X = x) = f(x) = \binom{1500}{x} \cdot 0{,}0001^x \cdot 0{,}9999^{1500-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 1500)$$

$P(X = 0) = f(0) = 0{,}8607$ (in Übereinstimmung mit der Näherung)

13) a) $P(U \le 1{,}52) = \phi(1{,}52) = 0{,}9357$

b) $P(U \le -0{,}42) = \phi(-0{,}42) = 1 - \phi(0{,}42) = 1 - 0{,}6628 = 0{,}3372$

c) $P(0{,}2 \le U \le 2{,}13) = \phi(2{,}13) - \phi(0{,}2) = 0{,}9834 - 0{,}5793 = 0{,}4041$

d) $P(-1{,}01 \le U \le -0{,}25) = \phi(-0{,}25) - \phi(-1{,}01) =$
$= 1 - \phi(0{,}25) - 1 + \phi(1{,}01) = \phi(1{,}01) - \phi(0{,}25) = 0{,}8438 - 0{,}5987 = 0{,}2451$

e) $P(-1 \le U \le 1) = P(|U| \le 1) = 2 \cdot \phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$

f) $P(|U| \le 1{,}69) = 2 \cdot \phi(1{,}69) - 1 = 2 \cdot 0{,}9545 - 1 = 0{,}9090$

g) $P(U \ge 0{,}95) = 1 - P(U \le 0{,}95) = 1 - \phi(0{,}95) = 1 - 0{,}8289 = 0{,}1711$

h) $P(U \ge -2{,}13) = 1 - P(U \le -2{,}13) = 1 - \phi(-2{,}13) =$
$= 1 - 1 + \phi(2{,}13) = \phi(2{,}13) = 0{,}9834$

14) a) $\phi(a) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

b) $\phi(a) = 0{,}3210 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad (\text{Wir setzen } a = -k \text{ mit } k > 0) \quad \Rightarrow$
$\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}3210 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) = 0{,}6790 \quad \Rightarrow$
$k = 0{,}465 \quad \Rightarrow \quad a = -k = -0{,}465$

c) $\phi(b) - \phi(0{,}15) = 0{,}35 \quad \Rightarrow$

$\phi(b) = 0{,}35 + \phi(0{,}15) = 0{,}35 + 0{,}5596 = 0{,}9096 \quad \Rightarrow \quad b = 1{,}338$

d) $\phi(b) - \phi(-0{,}22) = \phi(b) - 1 + \phi(0{,}22) = \phi(b) - 1 + 0{,}5871 =$
$= \phi(b) - 0{,}4129 = 0{,}413 \quad \Rightarrow \quad \phi(b) = 0{,}8259 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}938$

e) $2 \cdot \phi(a) - 1 = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \phi(a) = 0{,}975 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}96$

f) $2 \cdot \phi(c) - 1 = 0{,}4682 \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = 0{,}7341 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}625$

g) $P(U \geq a) = 1 - P(U \leq a) = 1 - \phi(a) = 0{,}8002 \quad \Rightarrow$
$\phi(a) = 0{,}1998 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad a < 0 \quad (\text{Wir setzen } a = -k \text{ mit } k > 0) \quad \Rightarrow$
$\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}1998 \quad \Rightarrow \quad \phi(k) = 0{,}8002 \quad \Rightarrow$
$k = 0{,}842 \quad \Rightarrow \quad a = -k = -0{,}842$

h) $P(U \geq a) = 1 - P(U \leq a) = 1 - \phi(a) = 0{,}4010 \quad \Rightarrow \quad \phi(a) = 0{,}5990 \quad \Rightarrow$
$a = 0{,}251$

15) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 6}{2}$; a) $U = 2{,}21$ b) $U = -2{,}57$ c) $U = -1{,}75$
d) $U = -5{,}34$ e) $U = \pm 3{,}2$ f) $U = 6$

16) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 2}{0{,}5}$

a) $P(X \leq 2{,}52) = P(U \leq 1{,}04) = \phi(1{,}04) = 0{,}8508$

b) $P(X \leq 0{,}84) = P(U \leq -2{,}32) = \phi(-2{,}32) = 1 - \phi(2{,}32) =$
$= 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$

c) $P(X \leq -1{,}68) = P(U \leq -7{,}36) = \phi(-7{,}36) = 1 - \phi(7{,}36) = 1 - 1 = 0$

d) $P(-0{,}5 \leq X \leq 4{,}5) = P(-5 \leq U \leq 5) = 2 \cdot \phi(5) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

e) $P(-1{,}86 \leq X \leq -0{,}24) = P(-7{,}72 \leq U \leq -4{,}48) = \phi(-4{,}48) - \phi(-7{,}72) =$
$= 1 - \phi(4{,}48) - 1 + \phi(7{,}72) = \phi(7{,}72) - \phi(4{,}48) = 1 - 1 = 0$

f) $P(-3 \leq X \leq 3) = P(-10 \leq U \leq 2) = \phi(2) - \phi(-10) =$
$= \phi(2) - 1 + \phi(10) = 0{,}9772 - 1 + 1 = 0{,}9772$

g) $P(|X| \leq 2{,}13) = P(-2{,}13 \leq X \leq 2{,}13) = P(-8{,}26 \leq U \leq 0{,}26) =$
$= \phi(0{,}26) - \phi(-8{,}26) = \phi(0{,}26) - 1 + \phi(8{,}26) = 0{,}6026 - 1 + 1 = 0{,}6026$

h) $P(X \geq 0{,}98) = P(U \geq -2{,}04) = 1 - P(U \leq -2{,}04) = 1 - \phi(-2{,}04) =$
$= 1 - 1 + \phi(2{,}04) = \phi(2{,}04) = 0{,}9793$

17) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 100}{4}$

a) Abweichung vom Sollwert: $\pm 5\ \mu\mathrm{F}$

$$P(95 \le X \le 105) = P(-1{,}25 \le U \le 1{,}25) = P(|U| \le 1{,}25) =$$
$$= 2 \cdot \phi(1{,}25) - 1 = 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888$$

Ausschussanteil: $P = 1 - P(95 \le X \le 105) = 1 - 0{,}7888 = 0{,}2112 \approx 21{,}1\,\%$

b) $P(98 \le X \le 104) = P(-0{,}5 \le U \le 1) = \phi(1) - \phi(-0{,}5) =$
$$= \phi(1) - 1 + \phi(0{,}5) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}6915 = 0{,}5328$$

Ausschussanteil: $P = 1 - P(98 \le X \le 104) = 1 - 0{,}5328 = 0{,}4672 \approx 46{,}7\,\%$

18) *Mindestpunktzahl*: $a \quad \Rightarrow \quad P(X \ge a) = 0{,}6\,; \qquad U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 20}{4}$

$$P(X \ge a) = P\left(U \ge \frac{a - 20}{4}\right) = P(U \ge c) = 0{,}6 \qquad \left(\text{mit } c = \frac{a - 20}{4}\right)$$

$P(U \ge c) = 1 - P(U \le c) = 1 - \phi(c) = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = 0{,}4 < 0{,}5 \quad \Rightarrow$

$c < 0$ (Wir setzen $c = -k$ mit $k > 0$) $\quad \Rightarrow \quad \phi(c) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0{,}4 \quad \Rightarrow$

$\phi(k) = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}253 \quad \Rightarrow \quad c = -k = -0{,}253 \quad \Rightarrow \quad c = \dfrac{a - 20}{4} = -0{,}253 \quad \Rightarrow$

$a = 4c + 20 = -1{,}012 + 20 = 18{,}988 \approx 19$

Daher: Die geforderte *Mindestpunktzahl* betrug 19 Punkte.

19) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 75}{5}$

a) $P(69 \le X \le 80) = P(-1{,}2 \le U \le 1) = \phi(1) - \phi(-1{,}2) =$
$$= \phi(1) - 1 + \phi(1{,}2) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}8849 = 0{,}7262$$

Anzahl der Studenten: $5000 \cdot 0{,}7262 = 3631$

b) $P(X > 80) = 1 - P(X \le 80) = 1 - P(U \le 1) = 1 - \phi(1) =$
$$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

Anzahl der Studenten: $5000 \cdot 0{,}1587 = 794$

c) $P(X < 65) = P(U \le -2) = \phi(-2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

Anzahl der Studenten: $5000 \cdot 0{,}0228 = 114$

20) $U = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 750}{20}$

a) $P(X < 730) = P(U < -1) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587 \approx 15{,}9\,\%$

b) Abweichung: $2\,\%$ von $750\ \mathrm{cm}^3 = 15\ \mathrm{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad 735 \le X \le 765$

$$P(735 \le X \le 765) = P(-0{,}75 \le U \le 0{,}75) = 2 \cdot \phi(0{,}75) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}7734 - 1 = 0{,}5468 \approx 54{,}7\,\%$$

21) $\mu = 4\,\text{h}; \qquad \lambda = 1/\mu = 0{,}25\,\text{h}^{-1}$

Verteilungsfunktion: $F(t) = P(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}25\,t} \qquad (t \text{ in h}; \; t \ge 0)$

a) $P(T \le 3) = F(3) = 0{,}5276 \approx 52{,}8\,\%$

b) $P(3 \le T \le 5) = F(5) - F(3) = 0{,}7135 - 0{,}5276 = 0{,}1859 \approx 18{,}6\,\%$

c) $P(T > 4) = 1 - P(T \le 4) = 1 - F(4) = 1 - 0{,}6321 = 0{,}3679 \approx 36{,}8\,\%$

22) $\mu = \overline{T} = 10\,000\,\text{h}; \qquad \lambda = 1/\mu = 0{,}0001\,\text{h}^{-1}$

Verteilungsfunktion: $F(t) = P(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}0001\,t} \qquad (t \text{ in h}; \; t \ge 0)$

a) $P(T \le 500) = F(500) = 0{,}0488 = 4{,}9\,\%$

b) $P(1000 \le T \le 3000) = F(3000) - F(1000) = 0{,}2592 - 0{,}0952 = 0{,}1640 \approx 16{,}4\,\%$

c) $P(T > 12\,000) = 1 - P(T \le 12\,000) = 1 - F(12\,000) = 1 - 0{,}6988 =$
$= 0{,}3012 \approx 30{,}1\,\%$

23) $\mu = \overline{T} = 2\,\text{min}; \qquad \lambda = 1/\mu = 0{,}5\,\text{min}^{-1}$

Verteilungsfunktion: $F(t) = P(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5\,t} \qquad (t \text{ in min}; \; t \ge 0)$

a) $30\,\text{s} = 0{,}5\,\text{min}; \qquad P(T \le 0{,}5) = F(0{,}5) = 0{,}2212 \approx 22{,}1\,\%$

b) $P(T \ge 5) = 1 - P(T \le 5) = 1 - F(5) = 1 - 0{,}9179 = 0{,}0821 \approx 8{,}2\,\%$

c) $P(1 \le T \le 3) = F(3) - F(1) = 0{,}7769 - 0{,}3935 = 0{,}3834 \approx 38{,}3\,\%$

24) Die binomialverteilte Zufallsvariable X (= Anzahl an *Ausschussstücken* in einer Stichprobe vom Umfang $n = 100$) kann näherungsweise durch eine *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter (Mittelwert) $\mu = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1$ ersetzt werden (die **Faustregel** für diese Näherung ist erfüllt: $np = 100 \cdot 0{,}01 = 1 < 10$ und $n = 100 > 1500\,p = 1500 \cdot 0{,}01 = 15$):

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{x!} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 100)$$

a) $P(X = 2) = f(2) = 0{,}1839 \approx 18{,}4\,\%$

b) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) = 0{,}0803 \approx 8{,}0\,\%$

c) **Exakte Lösung** (*Binomialverteilung* mit $n = 100$, $p = 0{,}01$ und $q = 1 - p = 0{,}99$):

$$f(x) = P(X = x) = \binom{100}{x} \cdot 0{,}01^{x} \cdot 0{,}99^{100-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 100)$$

$P(X = 2) = f(2) = 0{,}1849 \approx 18{,}5\,\%$

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) = 0{,}0794 \approx 7{,}9\,\%$

25) $n = 20, \quad p = 1/2, \quad q = 1 - p = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \mu = np = 10; \quad \sigma^2 = npq = 5;$

$$\sigma = \sqrt{5}; \qquad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{\sqrt{5}}; \qquad P^*(8 \le X \le 12)$$

Stetigkeitskorrektur: (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$P^*(8 \le X \le 12) \approx P(7{,}5 \le X \le 12{,}5) = P(-1{,}118 \le U \le 1{,}118) =$$
$$= P(|U| \le 1{,}118) = 2 \cdot \phi(1{,}118) - 1 = 2 \cdot 0{,}8682 - 1 = 0{,}7364$$

Exakte Lösung (*Binomialverteilung* mit $n = 20$ und $p = q = 1/2$):

$$f(x) = P(X = x) = \binom{20}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{20-x} = \frac{1}{2^{20}}\binom{20}{x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, 20)$$

$$P(8 \le X \le 12) = f(8) + f(9) + f(10) + f(11) + f(12) =$$

$$= \frac{1}{2^{20}}\left(\binom{20}{8} + \binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11} + \binom{20}{12}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{20}}\left(\frac{20!}{8!\,12!} + \frac{20!}{9!\,11!} + \frac{20!}{10!\,10!} + \frac{20!}{11!\,9!} + \frac{20!}{12!\,8!}\right) =$$

$$= \frac{20!}{2^{20}\cdot 8!\,10!}\left(\frac{2}{11\cdot 12} + \frac{2}{9\cdot 11} + \frac{1}{9\cdot 10}\right) = 0{,}7368$$

26) $n = 360, \quad p = 1/3, \quad q = 1 - p = 2/3; \quad \mu = np = 120; \quad \sigma^2 = npq = 80;$

$$\sigma = \sqrt{80}; \qquad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 120}{\sqrt{80}}; \qquad P^*(100 \le X \le 140)$$

Stetigkeitskorrektur (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$P^*(100 \le X \le 140) \approx P(99{,}5 \le X \le 140{,}5) = P(-2{,}292 \le U \le 2{,}292) =$$

$$= P(|U| \le 2{,}292) = 2\cdot\phi(2{,}292) - 1 = 2\cdot 0{,}9891 - 1 = 0{,}9782$$

27) Die Zufallsvariable X (= Anzahl derjenigen Geräte in der Stichprobe vom Umfang $n = 200$, die einer Zuverlässigkeitsprüfung *nicht* standhalten) ist *binomialverteilt* mit den Parametern $n = 200$, $p = 0{,}06$ und $q = 1 - p = 0{,}94$, kann jedoch durch eine *Normalverteilung* mit den folgenden Parametern ersetzt werden:

$$\mu = np = 200\cdot 0{,}06 = 12; \quad \sigma^2 = npq = 200\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94 = 11{,}28; \quad \sigma = \sqrt{11{,}28}$$

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 12}{\sqrt{11{,}28}}; \qquad P^*(10 \le X \le 15)$$

Stetigkeitskorrektur (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$P^*(10 \le X \le 15) \approx P(9{,}5 \le X \le 15{,}5) = P(-0{,}744 \le U \le 1{,}042) =$$

$$= \phi(1{,}042) - \phi(-0{,}744) = \phi(1{,}042) - 1 + \phi(0{,}744) =$$

$$= 0{,}8513 - 1 + 0{,}7716 = 0{,}6229$$

Abschnitt 7

1) *Verteilungen* der Komponenten (*Randverteilungen*):

a)

x_i	1	3
$f_1(x_i)$	1/2	1/2

y_i	-2	1	4
$f_2(y_i)$	1/4	3/8	3/8

$$\mu_X = 1\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} = 2; \qquad \sigma_X^2 = (-1)^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$\mu_Y = -2\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\sigma_Y^2 = \left(-\frac{27}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{3}{8} + \left(\frac{21}{8}\right)^2\cdot\frac{3}{8} = \frac{351}{64}$$

b)

x_i	0	1
$f_1(x_i)$	0,6	0,4

y_i	-2	-1	1	2
$f_2(y_i)$	0,25	0,15	0,15	0,45

$\mu_X = 0 + 0{,}4 = 0{,}4$; $\quad \sigma_X^2 = (-0{,}4)^2 \cdot 0{,}6 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

$\mu_Y = -0{,}5 - 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}9 = 0{,}4$

$\sigma_Y^2 = (-2{,}4)^2 \cdot 0{,}25 + (-1{,}4)^2 \cdot 0{,}15 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}15 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}45 = 2{,}94$

2) Wahrscheinlichkeitsfunktion: $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

X \ Y	0	2	3	6	$\sum$
1	0,02	0,04	0,08	0,06	0,20
2	0,05	0,10	0,20	0,15	0,50
3	0,03	0,06	0,12	0,09	0,30
$\sum$	0,10	0,20	0,40	0,30	

$f_1(x)$

$f_2(y)$

3) a) $f_1(6) = 1 - 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}4$; $\quad f_2(1) = 1 - 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}2$

$f(2; 0) = 0{,}4 - 0{,}08 - 0{,}04 = 0{,}28$; $\quad f(6; 0) = 0{,}7 - \underbrace{f(2; 0)}_{0{,}28} - 0{,}14 = 0{,}28$

$f(6; 1) = \underbrace{f_1(6)}_{0{,}4} - \underbrace{f(6; 0)}_{0{,}28} - 0{,}04 = 0{,}08$; $\quad f(4; 1) = \underbrace{f_2(1)}_{0{,}2} - 0{,}08 - \underbrace{f(6; 1)}_{0{,}08} = 0{,}04$

$f(4; 2) = 0{,}1 - 0{,}04 - 0{,}04 = 0{,}02$

X \ Y	0	1	2	$\sum$
2	0,28	0,08	0,04	0,40
4	0,14	0,04	0,02	0,20
6	0,28	0,08	0,04	0,40
$\sum$	0,70	0,20	0,10	

$f_1(x)$

$f_2(y)$

b)

x_i	2	4	6
$f_1(x_i)$	0,4	0,2	0,4

y_i	0	1	2
$f_2(y_i)$	0,7	0,2	0,1

$\mu_X = 0{,}8 + 0{,}8 + 2{,}4 = 4$; $\quad \sigma_X^2 = (-2)^2 \cdot 0{,}4 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}4 = 3{,}2$

$\mu_Y = 0 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$; $\quad \sigma_Y^2 = (-0{,}4)^2 \cdot 0{,}7 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}6^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}44$

c) $f_1(2) \cdot f_2(0) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28 = f(2;0)$

$f_1(2) \cdot f_2(1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08 = f(2;1)$

$f_1(2) \cdot f_2(2) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04 = f(2;2)$ usw.

Es gilt: $f(x;y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (für $x = 2, 4, 6$ und $y = 0, 1, 2$) $\Rightarrow$
X und Y sind stochastisch unabhängige Zufallsvariable.

4) a)

x_i	1	2	3
$f_1(x_i)$	1/4	1/2	1/4

y_i	0	1	2
$f_2(y_i)$	1/4	1/2	1/4

b) $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} = 2$; $\quad \operatorname{Var}(X) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$E(Y) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$; $\quad \operatorname{Var}(Y) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c) Lösungsweg wie in Aufgabe 3 c).

Es gilt: $f(x;y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ für $x = 1, 2, 3$ und $y = 0, 1, 2$. Die Zufallsvariablen X und Y sind somit stochastisch *unabhängig*.

5) a) $$\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} k \cdot e^{-2x-y}\, dy\, dx = k \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy =$$

$$= k \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-x} \right]_0^{\infty} \cdot \left[-e^{-y} \right]_0^{\infty} = k \left(0 + \frac{1}{2} \right) (0 + 1) = \frac{1}{2} k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

(Integrale: 312 mit $a = -2$ bzw. $a = -1$)

b) $$f_1(x) = 2 \cdot \int_{y=0}^{\infty} e^{-2x-y}\, dy = 2 \cdot e^{-2x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = 2 \cdot e^{-2x} \left[-e^{-y} \right]_0^{\infty} =$$

$$= 2 \cdot e^{-2x}(0 + 1) = 2 \cdot e^{-2x}$$ (Integral 312 mit $a = -1$)

$$f_2(y) = 2 \cdot \int_{x=0}^{\infty} e^{-2x-y}\, dx = 2 \cdot e^{-y} \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = 2 \cdot e^{-y} \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} =$$

$$= 2 \cdot e^{-y} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = e^{-y}$$ (Integral 312 mit $a = -2$)

c) $$E(X) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot e^{-2x}\, dx}_{\text{Integral 313 mit } a = -2} = 2 \left[\frac{-2x - 1}{4} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} = 2 \left(0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-2x}\, dx}_{\text{Integral 314 mit } a = -2} = 2 \left[\frac{4x^2 + 4x + 2}{-8} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} = 2 \left(0 + \frac{2}{8} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$E(Y) = \underbrace{\int_0^{\infty} y \cdot e^{-y}\, dy}_{\text{Integral 313 mit } a = -1} = \Big[(-y-1)\cdot e^{-y}\Big]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

$$E(Y^2) = \underbrace{\int_0^{\infty} y^2 \cdot e^{-y}\, dy}_{\text{Integral 314 mit } a = -1} = \left[\frac{y^2 + 2y + 2}{-1}\cdot e^{-y}\right]_0^{\infty} = 0 + 2 = 2$$

$$\operatorname{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2 - 1^2 = 1$$

d) $$P(0 \le X \le 2;\ 0 \le Y \le 3) = 2 \cdot \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{3} e^{-2x-y}\, dy\, dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 e^{-2x}\, dx \cdot \int_0^3 e^{-y}\, dy = 2\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\right]_0^2 \cdot \Big[-e^{-y}\Big]_0^3 =$$

$$= \Big[e^{-2x}\Big]_0^2 \cdot \Big[e^{-y}\Big]_0^3 = (e^{-4} - 1)(e^{-3} - 1) = 0{,}9328$$

6) a) $$f(x;y) = f_1(x)\cdot f_2(y) = \frac{1}{4}(x+1)\left(y + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(x+1)(2y+1)$$

b) $$F(x;y) = \int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y} f(u;v)\, dv\, du = \frac{1}{8}\cdot\int_{u=0}^{x}\int_{v=0}^{y}(u+1)(2v+1)\, dv\, du =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\int_0^x (u+1)\, du \cdot \int_0^y (2v+1)\, dv = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}u^2 + u\right]_0^x \cdot \Big[v^2 + v\Big]_0^y =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)(y^2 + y) = \frac{1}{16}(x^2 + 2x)(y^2 + y)$$

c) $$P(0 \le X \le 1;\ 0 \le Y \le 1) = F(1;1) = \frac{1}{16}\cdot 3 \cdot 2 = \frac{3}{8}$$

7) a)

x_i	0	1	2
$f_1(x_i)$	1/4	3/8	3/8

y_i	0	1	2
$f_2(y_i)$	1/4	1/2	1/4

X und Y sind *stochastisch abhängig*, da z. B. $f_1(1)\cdot f_2(0) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{32}$, aber $f(1;0) = \frac{1}{16}$ und somit $f_1(1)\cdot f_2(0) \neq f(1;0)$ gilt.

b)

x_i	1	2
$f_1(x_i)$	0,8	0,2

y_i	0	1	2
$f_2(y_i)$	0,5	0,3	0,2

X und Y sind *stochastisch unabhängig*, da $f_1(x_i)\cdot f_2(y_k) = f(x_i;y_k)$ für alle i, k gilt:

$f_1(1)\cdot f_2(0) = f(1;0) = 0{,}4$; $f_1(1)\cdot f_2(1) = f(1;1) = 0{,}24$

$f_1(1)\cdot f_2(2) = f(1;2) = 0{,}16$; $f_1(2)\cdot f_2(0) = f(2;0) = 0{,}1$

$f_1(2)\cdot f_2(1) = f(2;1) = 0{,}06$; $f_1(2)\cdot f_2(2) = f(2;2) = 0{,}04$

8)

$X \backslash Y$	5	10	15	$\sum$
1	0,075	0,300	0,125	0,500
2	0,045	0,180	0,075	0,300
3	0,030	0,120	0,050	0,200
$\sum$	0,150	0,600	0,250	

$f_1(x)$

$f_2(y)$

9) *Additions-* bzw. *Linearitätssatz* für Mittelwerte verwenden:

a) $E(Z_1) = \mu_1 + 2\mu_2 - 5\mu_4 = 2 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 7$

b) $E(Z_2) = \mu_1 + 8\mu_2 - 3(\mu_3 + \mu_4) = 2 + 8 \cdot 5 - 3(-3 + 1) = 48$

c) $E(Z_3) = \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 - \mu_4 = 2 + 5 + 2(-3) - 1 = 0$

10)

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
μ_i	2	8	18	32

Multiplikations- und *Additionssatz* für Mittelwerte verwenden:

a) $E(Z_1) = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 = 2 \cdot 8 \cdot 18 \cdot 32 = 9216$

b) $E(Z_2) = \mu_1(\mu_2 + \mu_3) = 2(8 + 18) = 52$

c) $E(Z_3) = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \mu_2) = \mu_1^2 - \mu_2^2 = 2^2 - 8^2 = -60$

d) $E(Z_4) = 3\mu_1 \cdot \mu_4^2 = 3 \cdot 2 \cdot 32^2 = 6144$

11) *Additions-* bzw. *Linearitätssätze* für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

a) $E(Z_1) = \mu_1 - 3\mu_2 + \mu_4 = 2 - 3 \cdot 8 + 3 = -19$

$\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma_1^2 + (-3)^2 \cdot \sigma_2^2 + \sigma_4^2 = 1 + 9 \cdot 2 + 3 = 22$

b) $E(Z_2) = \mu_1 + 2(\mu_2 - \mu_3) = 2 + 2(8 + 2) = 22$

$\mathrm{Var}(Z_2) = \sigma_1^2 + 2^2 \cdot \sigma_2^2 + (-2)^2 \cdot \sigma_3^2 = 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 29$

c) $E(Z_3) = 11$; $\mathrm{Var}(Z_3) = 11$ d) $E(Z_4) = -18$; $\mathrm{Var}(Z_4) = 57$

12) *Additions-* bzw. *Linearitätssätze* für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

a) $\mu_Z = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_3 = \frac{1}{2}(2 - 4) - 5 = -6$

$\sigma_Z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (-1)^2 \cdot \sigma_3^2 = \frac{1}{4}(1 + 4) + 9 = 10{,}25$; $\sigma_Z = 3{,}2016$

b) $\mu_Z = 2(\mu_1 + \mu_3) - 3\mu_2 = 2(2 + 5) - 3(-4) = 26$

$\sigma_Z^2 = 2^2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) + (-3)^2 \cdot \sigma_2^2 = 4(1 + 9) + 9 \cdot 4 = 76$; $\sigma_Z = 8{,}7178$

13) $Z = aX + b$ ist *normalverteilt* mit dem Mittelwert $\mu_Z = a\mu + b$ und der Varianz $\sigma_Z^2 = a^2 \cdot \sigma^2$ bzw. der Standardabweichung $\sigma_z = a\sigma$.

14) a) *Additionssatz* für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = (200 + 120 + 180)\,\Omega = 500\,\Omega$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = (4 + 1 + 4)\,\Omega^2 = 9\,\Omega^2; \qquad \sigma = 3\,\Omega$$

b) Übergang von der Zufallsvariablen R zur standardnormalverteilten Zufallsvariablen U:

$$U = \frac{R - \mu}{\sigma} = \frac{R - 500}{3} \quad \Rightarrow \quad |R - 500| = 3\,|U|$$

$$|R - 500| \le c \quad \Rightarrow \quad 3\,|U| \le c \quad \Rightarrow \quad |U| \le c/3$$

$$P(|R - 500| \le c) = P\left(|U| \le \frac{c}{3}\right) = 2 \cdot \phi\left(\frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$\phi\left(\frac{c}{3}\right) = 0{,}975 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{3} = u_{0,975} = 1{,}960 \qquad c = 5{,}88$$

(Tabelle 2 im Anhang, Teil A)

Lösung: $494{,}12\,\Omega \le R \le 505{,}88\,\Omega$

15) $\mu = \mu_x + \mu_y = 10 + 20 = 30; \qquad \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 9 + 16 = 25; \qquad \sigma = 5$

$Z = X + Y$ ist *normalverteilt* mit dem Mittelwert $\mu = 30$ und der Standardabweichung $\sigma = 5$. Die *Dichtefunktion* lautet somit:

$$f(z) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-30}{5}\right)^2} \qquad (-\infty < z < \infty)$$

III Grundlagen der mathematischen Statistik

Abschnitt 1

1) Verteilung (*Stabdiagramm:* Bild A-33)

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	1	2	3	1	2
h_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

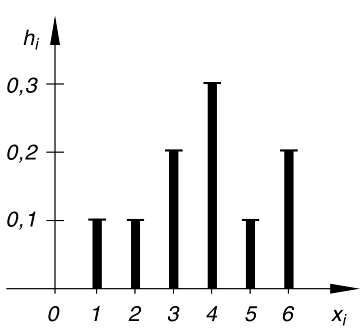


Bild A-33 Stabdiagramm

2) a) Verteilung (*Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-34)

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	39,7	39,8	39,9	40,0	40,1	40,2
$f(x_i)$	0,05	0,15	0,20	0,30	0,20	0,10
$F(x_i)$	0,05	0,20	0,40	0,70	0,90	1

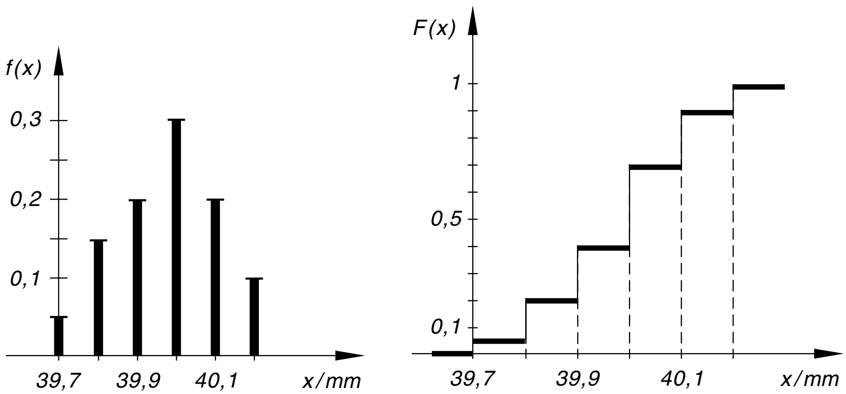


Bild A-34 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

b) Verteilung (*Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-35)

$\frac{x_i}{\Omega}$	97	98	99	100	101	102	103
$f(x_i)$	0,04	0,12	0,16	0,36	0,20	0,08	0,04
$F(x_i)$	0,04	0,16	0,32	0,68	0,88	0,96	1

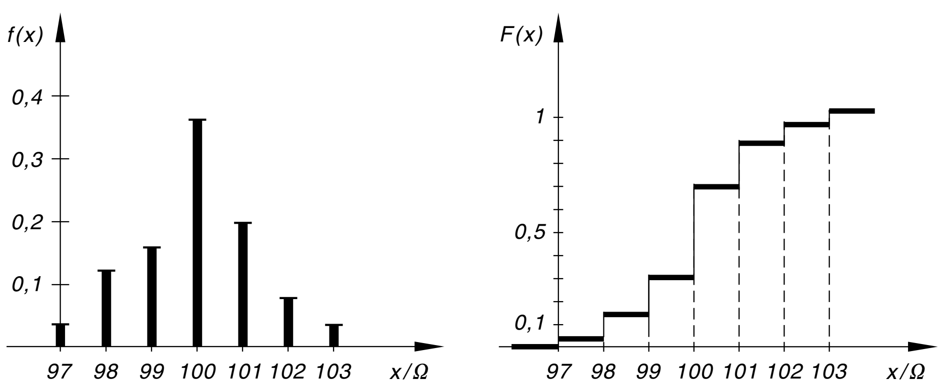


Bild A-35 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

c) Verteilung (*Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-36)

$\frac{x_i}{\mu F}$	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5
$f(x_i)$	0,12	0,22	0,38	0,18	0,10
$F(x_i)$	0,12	0,34	0,72	0,90	1

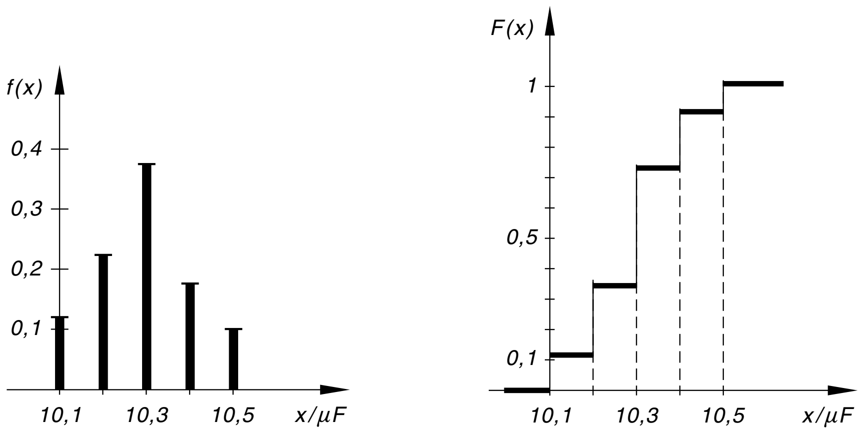


Bild A-36 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

3) *Verteilung* (Stabdiagramm und Verteilungskurve: Bild A-37)

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	0,204	0,176	0,160	0,130	0,180	0,150
$F(x_i)$	0,204	0,380	0,540	0,670	0,850	1

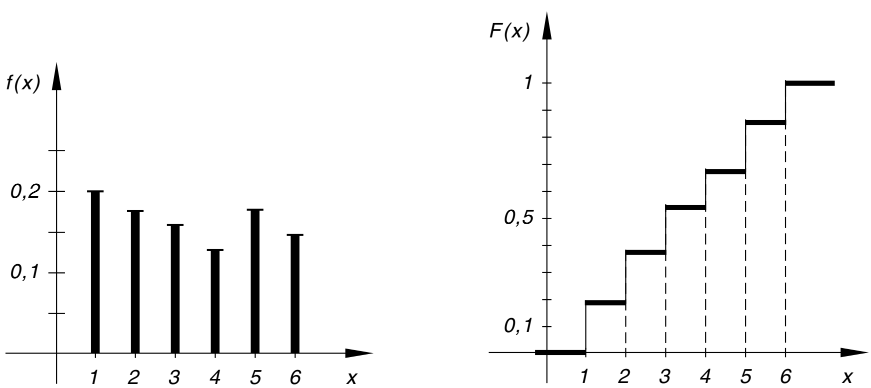


Bild A-37 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

4) a)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0,100	0,410	0,365	0,125
$F(x_i)$	0,100	0,510	0,875	1

b) *Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-38

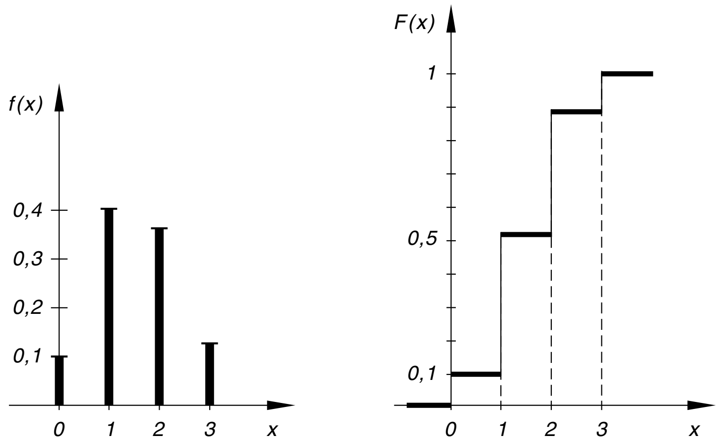


Bild A-38 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

c) $\dfrac{82 + 73}{200} = \dfrac{155}{200} = 0{,}775 = 77{,}5\,\%$

5) a)

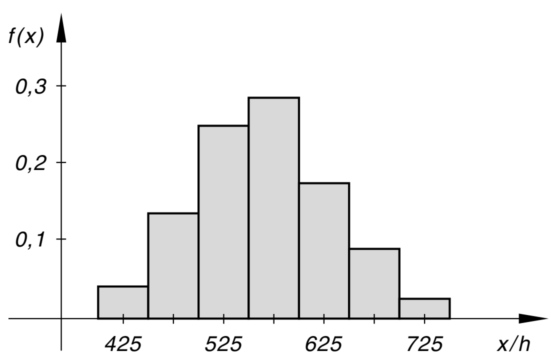
Klasse i	1	2	3	4	5	6	7
$\tilde{x}_i/h$	425	475	525	575	625	675	725
n_i	3	11	20	23	14	7	2
$f(\tilde{x}_i)$	0,0375	0,1375	0,25	0,2875	0,175	0,0875	0,025
$F(\tilde{x}_i)$	0,0375	0,175	0,425	0,7125	0,8875	0,975	1

b) Lebensdauer $X \leq 500\,\text{h}$:
$14/80 = 17{,}5\,\%$

Lebensdauer $X > 600\,\text{h}$:
$23/80 = 28{,}8\,\%$

c) *Histogramm:*
Bild A-39

Bild A-39



6) a)

Klasse i	1	2	3	4	5	6
$\tilde{x}_i/\text{cm}^3$	5	15	25	35	45	55
n_i	38	26	17	11	6	2
$f(\tilde{x}_i)$	0,38	0,26	0,17	0,11	0,06	0,02
$F(\tilde{x}_i)$	0,38	0,64	0,81	0,92	0,98	1,00

b) *Histogramm:* Bild A-40

c) Fehlmenge $X > 20\,\text{cm}^3$:
$36/100 = 36\,\%$

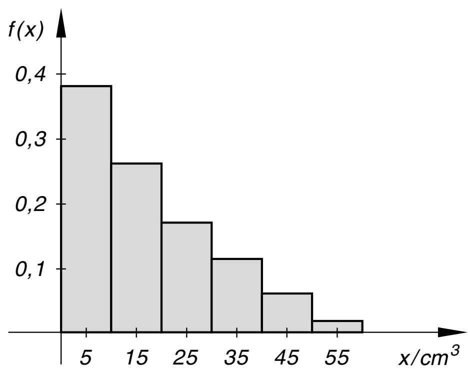


Bild A-40

7) a) *Kleinster* Wert: 9,0 *Größter* Wert: 11,4 Spannweite: 2,4
Unterteilung in 5 Klassen der Breite 0,5 nach Bild A-41:

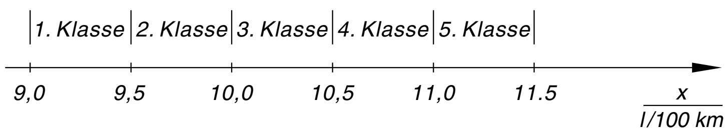


Bild A-41

Klassen Nr. i	Klassengrenzen (in l/100 km	Klassenmitte (in l/100 km)	n_i	h_i
1	9,0 ... 9,5	9,25	4	0,10
2	9,5 ... 10,0	9,75	6	0,15
3	10,0 ... 10,5	10,25	18	0,45
4	10,5 ... 11,0	10,75	10	0,25
5	11,0 ... 11,5	11,25	2	0,05
$\sum$			40	1

Hinweis: Die mehrfach auftretenden Werte 10,0 und 10,5 sind *Klassengrenzen* und wurden daher je zur *Hälfte* den angrenzenden Klassen (Intervallen) zugeschlagen.

b) *Histogramm*: Bild A-42

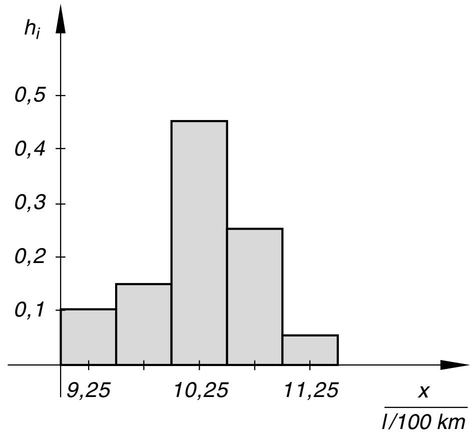


Bild A-42

Abschnitt 2

Hinweis: n = Stichprobenumfang; k = Anzahl der verschiedenen Werte in der Stichprobe

1) $n = 10;\quad k = 6;\quad \bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{1}^{6} n_i x_i = \frac{1}{10}(1 + 2 + 6 + 12 + 5 + 12) = 3{,}8$

$$s^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{1}^{6} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}[1(1-3{,}8)^2 + 1(2-3{,}8)^2 + 2(3-3{,}8)^2 + 3(4-3{,}8)^2 + 1(5-3{,}8)^2 + 2(6-3{,}8)^2] = 2{,}622; \quad s = 1{,}619$$

2) a) $n = 20;\quad k = 6;$

$$\bar{x} = \sum_{1}^{6} x_i \cdot f(x_i) = 1{,}985 + 5{,}97 + 7{,}98 + 12 + 8{,}02 + 4{,}02 = 39{,}975$$

$$s^2 = \frac{20}{20-1}\left(\sum_{1}^{6} x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2\right) = \frac{20}{19}(78{,}8045 + 237{,}606 + 318{,}402 + 480 + 321{,}602 + 161{,}604 - 39{,}975^2) = 0{,}0188; \quad s = 0{,}1372$$

b) $n = 25;\quad k = 7;\quad \bar{x} = \sum_{1}^{7} x_i \cdot f(x_i) = 99{,}96\ \Omega$

$$s^2 = \frac{25}{25-1}\left(\sum_{1}^{7} x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2\right) = \frac{25}{24}(9993{,}88 - 99{,}96^2)\ \Omega^2 = 1{,}957\ \Omega^2$$

$s = 1{,}399\ \Omega$

c) $n = 50;\quad k = 5;\quad \bar{x} = \sum_{1}^{5} x_i \cdot f(x_i) = 10{,}292\ \mu\text{F}$

$$s^2 = \frac{50}{50-1}\left(\sum_{1}^{5} x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2\right) = \frac{50}{49}(105{,}938 - 10{,}292^2)\ (\mu\text{F})^2 = 0{,}013\ (\mu\text{F})^2$$

$s = 0{,}114\ \mu\text{F}$

3) $n = 500; \quad k = 6; \quad \bar{x} = \sum_{1}^{6} x_i \cdot f(x_i) = 3{,}356$

$$s^2 = \frac{500}{500-1}\left(\sum_{1}^{6} x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2\right) = \frac{500}{499}(14{,}328 - 3{,}356^2) = 3{,}0714; \quad s = 1{,}7525$$

4)

i	x_i	$f(x_i)$	$x_i \cdot f(x_i)$	$x_i^2 \cdot f(x_i)$
1	0	0,1	0	0
2	1	0,410	0,410	0,410
3	2	0,365	0,730	1,460
4	3	0,125	0,375	1,125
$\sum$		1	1,515	2,995

$\bar{x} = \sum_{1}^{4} x_i \cdot f(x_i) = 1{,}515$

$$s^2 = \frac{200}{200-1}\left(\sum_{1}^{4} x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2\right) =$$

$$= \frac{200}{199}(2{,}995 - 1{,}515^2) = 0{,}7033$$

$s = 0{,}8386$

5) $n = 80; \quad k = 7; \quad \bar{x} = \sum_{1}^{7} \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 564{,}375\ \text{h}$

$$s^2 = \frac{80}{80-1}\left(\sum_{1}^{7} \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2\right) = \frac{80}{79}(323\,125 - 564{,}375^2)\ \text{h}^2 = 4664{,}161\ \text{h}^2$$

$s = 68{,}295\ \text{h}$

6) $n = 100; \quad k = 6; \quad \bar{x} = \sum_{1}^{6} \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 17{,}7\ \text{cm}^3$

$$s^2 = \frac{100}{100-1}\left(\sum_{1}^{6} \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2\right) = \frac{100}{99}(491 - 17{,}7^2)\ \text{cm}^6 = 179{,}51\ \text{cm}^6$$

$s = 13{,}40\ \text{cm}^3$

7) $\tilde{x}_i$: Klassenmitte $\quad n_i$: Klassenhäufigkeit

$\frac{\tilde{x}_i}{1/100\ \text{km}}$	9,25	9,75	10,25	10,75	11,25
n_i	4	6	18	10	2
$f(\tilde{x}_i)$	0,1	0,15	0,45	0,25	0,05

$n = 40; \quad k = 5; \quad \bar{x} = \sum_{1}^{5} \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 10{,}25\ \text{l}/100\ \text{km}$

$$s^2 = \frac{40}{40-1}\left(\sum_{1}^{5} \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2\right) = \frac{40}{39}(105{,}3125 - 10{,}25^2)\ (\text{l}/100\ \text{km})^2 =$$

$$= 0{,}256\ (\text{l}/100\ \text{km})^2; \quad s = 0{,}506\ \text{l}/100\ \text{km}$$

8) $S'(c) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - c)(-1) = -2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - c) = -2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n c \right)$

$S''(c) = 2n; \quad S'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i - nc = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

$S''(\bar{x}) = 2n > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum

Abschnitt 3

Hinweis: Die benötigten Quantile wurden den Tabellen 1 bis 4 im Anhang (Teil A) entnommen.

1) *Likelihood-Funktion* (mit $z = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$):

$L(\lambda) = f(t_1; \lambda) \cdot f(t_2; \lambda) \cdot \ldots \cdot f(t_n; \lambda) = \lambda^n \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)} = \lambda^n \cdot \mathrm{e}^{-\lambda z}$

$L^*(\lambda) = \ln L(\lambda) = \ln(\lambda^n \cdot \mathrm{e}^{-\lambda z}) = \ln \lambda^n + \ln \mathrm{e}^{-\lambda z} = n \cdot \ln \lambda - \lambda z$

Aus der Bedingung $\frac{dL^*}{d\lambda} = 0$ erhält man den gesuchten *Schätzwert*:

$\frac{dL^*}{d\lambda} = n \cdot \frac{1}{\lambda} - z = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{z} = \frac{n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n} = \frac{1}{\bar{t}}$

$\bar{t}$ ist der *Mittelwert* der Stichprobe.

2) $\bar{t} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} t_i = \frac{1}{8} \cdot 2112\,\text{h} = 264\,\text{h}; \qquad \lambda \approx \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{264\,\text{h}} \approx 0{,}003\,788\,\text{h}^{-1}$

3) $\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{6} x_i = \frac{1}{6} \cdot 888\,\text{h}^{-1} = 148\,\text{h}^{-1}; \qquad \mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = 148\,\text{h}^{-1}$

4) a) σ^2 ist bekannt $(\sigma^2 = 9) \quad \Rightarrow \quad$ Standardnormalverteilung

$P(-c \le U \le c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}975 \rightarrow c = u_{0{,}975} = 1{,}960$ (aus Tab. 2)

$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{1}^{10} x_i = \frac{1}{10} \cdot 1407 = 140{,}7; \qquad \sigma = 3; \qquad n = 10$

Schranke: $k = c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}86$; *Vertrauensintervall:* $138{,}84 \le \mu \le 142{,}56$

b) σ^2 ist unbekannt $\Rightarrow$ t-Verteilung

$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$F(c) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 9} c = t_{(0{,}975;\,9)} = 2{,}262$ (aus Tab. 4)

$\bar{x} = 140{,}7; \quad s^2 = \frac{1}{10 - 1} \cdot \sum_{1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} \cdot 1260{,}1 = 140{,}011; \quad s = 11{,}833$

$n = 10$; Schranke: $k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 8{,}46$; *Vertrauensintervall:* $132{,}24 \le \mu \le 149{,}16$

5) σ^2 ist unbekannt $\Rightarrow$ *t-Verteilung:*

$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$F(c) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 99 \approx 100} c = t_{(0{,}975;\,99)} \approx t_{(0{,}975;\,100)} = 1{,}984$ (aus Tab. 4)

$\bar{x} = 0{,}620\ \text{cm}; \quad s = 0{,}035\ \text{cm}; \quad n = 100; \quad \text{Schranke: } k = c\,\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}007\ \text{cm}$

Vertrauensgrenzen: 0,613 cm bzw. 0,627 cm

Vertrauensintervall: $0{,}613\ \text{cm} \le \mu \le 0{,}627\ \text{cm}$

Hinweis: Da es sich hier um eine *umfangreiche* Stichprobe handelt (die Faustregel $n > 30$ ist erfüllt: $n = 100 > 30$), darf man $\sigma \approx s = 0{,}035\ \text{cm}$ annehmen und die *Standardnormalverteilung* verwenden. Man erhält dann das gleiche Vertrauensintervall.

6) a) *Vertrauensintervall* für den *Mittelwert* μ (σ^2 ist unbekannt, daher t-Verteilung):

$$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0{,}99 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}995 \xrightarrow{f = n-1 = 9} c = t_{(0{,}995;\,9)} = 3{,}250 \qquad \text{(aus Tab. 4)}$$

$\bar{x} = 102; \quad s^2 = 16; \quad s = 4; \quad n = 10; \quad \text{Schranke: } k = c\,\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 4{,}11$

Vertrauensintervall: $97{,}89 \le \mu \le 106{,}11$

b) *Vertrauensintervall* für die *Varianz* σ^2 (Chi-Quadratverteilung, Tabelle 3):

$$P(c_1 \le Z \le c_2) = \gamma = 0{,}99 \quad \Rightarrow$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1 - \gamma) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}99) = 0{,}005 \xrightarrow{f = n-1 = 9} c_1 = z_{(0{,}005;\,9)} = 1{,}73$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2}(1 + \gamma) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}99) = 0{,}995 \xrightarrow{f = n-1 = 9} c_2 = z_{(0{,}995;\,9)} = 23{,}59$$

$s^2 = 16; \quad n = 10$

$$\text{Schranken: } k_1 = \frac{(n-1)\,s^2}{c_2} = 6{,}10; \qquad k_2 = \frac{(n-1)\,s^2}{c_1} = 83{,}24$$

Vertrauensintervall: $6{,}10 \le \sigma^2 \le 83{,}24$

7) a) *Vertrauensintervall* für den *Mittelwert* μ (σ^2 ist unbekannt, daher t-Verteilung):

$$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 7} c = t_{(0{,}975;\,7)} = 2{,}365 \qquad \text{(aus Tab. 4)}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} x_i = \frac{1}{8} \cdot 796\ \text{PS} = 99{,}5\ \text{PS}$$

$$s^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_{1}^{8} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} \cdot 32{,}84\ (\text{PS})^2 = 4{,}6914\ (\text{PS})^2; \qquad s = 2{,}166\ \text{PS}$$

$n = 8; \quad \text{Schranke: } k = c\,\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 1{,}81\ \text{PS}$

Vertrauensintervall: $97{,}69\ \text{PS} \le \mu \le 101{,}31\ \text{PS}$

b) *Vertrauensintervall* für die *Varianz* σ^2 (Chi-Quadratverteilung, Tabelle 3):

$$P(c_1 \le Z \le c_2) = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1 - \gamma) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}95) = 0{,}025 \xrightarrow{f = n-1 = 7} c_1 = z_{(0{,}025;\,7)} = 1{,}69$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2}(1 + \gamma) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}95) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 7} c_2 = z_{(0{,}975;\,7)} = 16{,}01$$

$s^2 = 4{,}6914\ (\text{PS})^2; \quad n = 8$

$$\text{Schranken: } k_1 = \frac{(n-1)\,s^2}{c_2} = 2{,}05\ (\text{PS})^2; \qquad k_2 = \frac{(n-1)\,s^2}{c_1} = 19{,}43\ (\text{PS})^2$$

Vertrauensintervall: $2{,}05\ (\text{PS})^2 \le \sigma^2 \le 19{,}43\ (\text{PS})^2$

8) a) *Vertrauensintervall* für den *Mittelwert* μ (σ^2 ist unbekannt, daher t-Verteilung):

$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$F(c) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 15} c = t_{(0{,}975;\,15)} = 2{,}131$ (aus Tab. 4)

$\bar{x} = 12{,}54\,\text{kN}$; $s = 1{,}02\,\text{kN}$; $n = 16$; Schranke: $k = c\,\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}54\,\text{kN}$

Vertrauensintervall: $12{,}00\,\text{kN} \le \mu \le 13{,}08\,\text{kN}$

b) *Vertrauensintervall* für die *Varianz* σ^2 (Chi-Quadratverteilung, Tabelle 3):

$P(c_1 \le Z \le c_2) = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$$F(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma) = \frac{1}{2}(1-0{,}95) = 0{,}025 \xrightarrow{f = n-1 = 15} c_1 = z_{(0{,}025;\,15)} = 6{,}26$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma) = \frac{1}{2}(1+0{,}95) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 15} c_2 = z_{(0{,}975;\,15)} = 27{,}49$$

$s^2 = 1{,}0404\,(\text{kN})^2$; $n = 16$

Schranken: $k_1 = \dfrac{(n-1)\,s^2}{c_2} = 0{,}568\,(\text{kN})^2$; $\quad k_2 = \dfrac{(n-1)\,s^2}{c_1} = 2{,}493\,(\text{kN})^2$

Vertrauensintervall: $0{,}568\,(\text{kN})^2 \le \sigma^2 \le 2{,}493\,(\text{kN})^2$

9) *t-Verteilung* (σ^2 ist unbekannt): $P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0{,}99 \quad \Rightarrow$

$F(c) = 0{,}995 \xrightarrow{f = n-1 = 19} c = t_{(0{,}995;\,19)} = 2{,}861$ (aus Tab. 4)

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot \sum_{1}^{6} n_i x_i = \frac{1}{20} \cdot 156{,}32\,\text{g/cm}^3 = 7{,}816\,\text{g/cm}^3$$

$$s^2 = \frac{1}{20-1} \cdot \sum_{1}^{6} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{19} \cdot 0{,}007\,080\,\text{g}^2/\text{cm}^6 = 0{,}000\,373\,\text{g}^2/\text{cm}^6$$

$s = 0{,}0193\,\text{g/cm}^3$; $n = 20$; Schranke: $k = c\,\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}012\,\text{g/cm}^3$

Vertrauensintervall: $7{,}804\,\text{g/cm}^3 \le \mu \le 7{,}828\,\text{g/cm}^3$

10) a) $k = 27$; $n = 500$; Schätzwert: $\hat{p} = k/n = 27/500 = 0{,}054$

Die Bedingung (III-138) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$\Delta = n\hat{p}(1-\hat{p}) = 500 \cdot 0{,}054\,(1-0{,}054) = 25{,}542 > 9$

$P(-c \le U \le c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}975 \rightarrow c = u_{0{,}975} = 1{,}960$ (aus Tab. 2)

Schranke: $k = \dfrac{c}{n}\sqrt{\Delta} = 0{,}020$; *Vertrauensintervall:* $0{,}034 \le p \le 0{,}074$

b) $P(-c \le U \le c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0{,}99 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}995 \rightarrow c = u_{0{,}995} = 2{,}576$ (aus Tab. 2)

Schranke: $k = \dfrac{c}{n}\sqrt{\Delta} = 0{,}026$; *Vertrauensintervall:* $0{,}028 \le p \le 0{,}080$

11) $k = 55$; $n = 100$; Schätzwert: $\hat{p} = k/n = 55/100 = 0{,}55$

Die Bedingung (III-138) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$\Delta = n\hat{p}(1-\hat{p}) = 100 \cdot 0{,}55\,(1-0{,}55) = 24{,}75 > 9$

$P(-c \le U \le c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}995 \to c = u_{0,995} = 2{,}576 \qquad$ (aus Tab. 2)

Schranke: $k = \dfrac{c}{n}\sqrt{\Delta} = 0{,}128\,;\qquad$ *Vertrauensintervall:* $0{,}422 \le p \le 0{,}678$

12) $k = 68\,;\quad n = 100\,;\quad$ Schätzwert: $\hat{p} = k/n = 68/100 = 0{,}68$

Die Bedingung (III-138) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 100 \cdot 0{,}68\,(1 - 0{,}68) = 21{,}76 > 9$

$P(-c \le U \le c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}975 \to c = u_{0,975} = 1{,}960 \qquad$ (aus Tab. 2)

Schranke: $k = \dfrac{c}{n}\sqrt{\Delta} = 0{,}091\,;\qquad$ *Vertrauensintervall:* $0{,}589 \le p \le 0{,}771$

13) Wir dürfen wegen der *umfangreichen* Stichprobe $(n = 100)$ davon ausgehen, dass die Masse X *nahezu normalverteilt* ist.

a) *Vertrauensintervall* für den *Mittelwert* μ (σ^2 ist unbekannt, daher t-Verteilung):

$P(-c \le T \le c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$F(c) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 99 \approx 100} c = t_{(0{,}975;\,99)} \approx t_{(0{,}975;\,100)} = 1{,}984 \qquad$ (aus Tab. 4)

$\bar{x} = 5{,}43\text{ g}\,;\quad s = 0{,}30\text{ g}\,;\quad n = 100\,;\quad$ Schranke: $k = c\,\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}060\text{ g}$

Vertrauensintervall: $5{,}370\text{ g} \le \mu \le 5{,}490\text{ g}$

Hinweis: Da es sich hier um eine *umfangreiche* Stichprobe handelt (die Faustregel $n > 30$ ist erfüllt: $n = 100 > 30$), darf man $\sigma^2 \approx s^2 = 0{,}09\text{ g}^2$ annehmen und die *Standardnormalverteilung* verwenden. Man erhält das gleiche Vertrauensintervall.

b) *Vertrauensintervall* für die *Varianz* σ^2 (Chi-Quadrat-Verteilung, Tabelle 3):

$P(c_1 \le Z \le c_2) = \gamma = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$F(c_1) = \dfrac{1}{2}(1 - \gamma) = \dfrac{1}{2}(1 - 0{,}95) = 0{,}025 \xrightarrow{f = n-1 = 99} c_1 = z_{(0{,}025;\,99)} = 73{,}34$

$F(c_2) = \dfrac{1}{2}(1 + \gamma) = \dfrac{1}{2}(1 + 0{,}95) = 0{,}975 \xrightarrow{f = n-1 = 99} c_2 = z_{(0{,}975;\,99)} = 128{,}45$

(interpolierte Werte, Tab. 3); $\quad s^2 = 0{,}09\text{ g}^2\,;\quad n = 100$

Schranken: $k_1 = \dfrac{(n-1)\,s^2}{c_2} = 0{,}069\text{ g}^2\,;\quad k_2 = \dfrac{(n-1)\,s^2}{c_1} = 0{,}121\text{ g}^2$

Vertrauensintervall: $0{,}069\text{ g}^2 \le \sigma^2 \le 0{,}121\text{ g}^2$

c) *Vertrauensintervall* für die *Standardabweichung* σ: $0{,}263\text{ g} \le \sigma \le 0{,}349\text{ g}$

Abschnitt 4

Hinweis: Die benötigten Quantile wurden den Tabellen 1 bis 4 im Anhang (Teil A) entnommen.

1) σ^2 ist *bekannt* $\Rightarrow$ Standardnormalverteilung

$P(-c \le U \le c)_{H_0} = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}995 \to c = u_{0,995} = 2{,}576 \qquad$ (aus Tab. 2)

Annahmebereich: $-2{,}576 \le u \le 2{,}576$

$\bar{x} = 102\,\Omega; \quad \sigma^2 = 9\,\Omega^2; \quad \sigma = 3\,\Omega; \quad \mu_0 = 100\,\Omega; \quad n = 10$

Testwert: $\hat{u} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{(102 - 100)\,\Omega}{(3/\sqrt{10})\,\Omega} = 2{,}108$

Der Testwert liegt *im* Annahmebereich, die Nullhypothese H_0 wird daher *beibehalten* (Bild A-43). Wir können davon ausgehen, dass der Sollwert $\mu_0 = 100\,\Omega$ *eingehalten* wird.

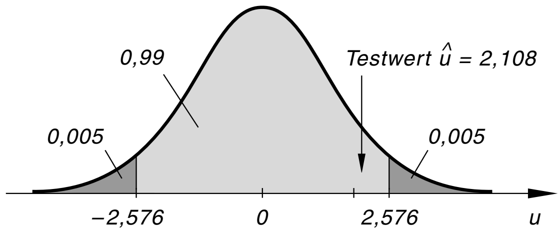


Bild A-43

2) σ^2 ist *bekannt* ($\sigma^2 = 6400\,\text{h}^2$) $\Rightarrow$ Standardnormalverteilung; *Einseitiger* Test (Abgrenzung nach *oben*):

$P(U \le c)_{H_0} = \phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}99 \rightarrow c = u_{0,99} = 2{,}326$ (aus Tab. 2); *Annahmebereich:* $u \le 2{,}326$

$\bar{x} = 1580\,\text{h}; \quad \sigma = 80\,\text{h}; \quad \mu_0 = 1500\,\text{h}; \quad n = 50$

Testwert: $\hat{u} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{(1580 - 1500)\,\text{h}}{(80/\sqrt{50})\,\text{h}} = 7{,}071$

Die Nullhypothese H_0 wird *abgelehnt*, da der Testwert *außerhalb* des Annahmebereichs liegt (Bild A-44). Wir können davon ausgehen, dass die Materialänderung tatsächlich eine *größere* Lebensdauer der Glühlampen bewirkt.

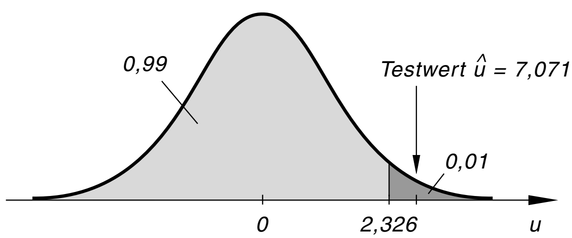


Bild A-44

3) Wir testen die *Nullhypothese*: $H_0 : \mu \ge \mu_0 = 5{,}20\,\text{kN}$ gegen die *Alternativhypothese* $H_1 : \mu < \mu_0 = 5{,}20\,\text{kN}$ (*einseitiger* Test, Abgrenzung nach *unten*; σ^2 ist *unbekannt*, daher t-Verteilung):

$P(T < c)_{H_0} = \alpha = 0{,}05 < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad c < 0$

Wir setzen $c = -k$ mit $k > 0$ und bestimmen die Konstante k aus Bild A-45:

$P(T \le k)_{H_0} = F(k) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$F(k) = 0{,}95 \xrightarrow{f = n-1 = 19} k = t_{(0{,}95;\,19)} = 1{,}729$ (aus Tab. 4) $\Rightarrow \quad c = -k = -1{,}729$

Annahmebereich: $t \ge -1{,}729$

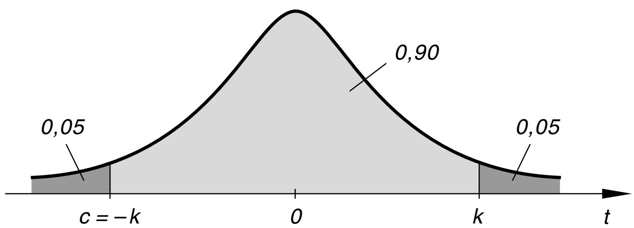


Bild A-45

$\overline{x} = 5{,}02\,\text{kN}$; $\quad s = 0{,}12\,\text{kN}$; $\quad n = 20$; $\quad \mu_0 = 5{,}20\,\text{kN}$

Testwert: $\hat{t} = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{(5{,}02 - 5{,}20)\,\text{kN}}{(0{,}12/\sqrt{20})\,\text{kN}} = -6{,}708$

Die Nullhypothese H_0 wird *abgelehnt*, da der Testwert *außerhalb* des Annahmebereiches liegt (Bild A-46). Die Zweifel an der Richtigkeit der Herstellerangaben sind *berechtigt*, d. h. man kann davon ausgehen, dass die mittlere Reißlast *kleiner* ist als der angegebene Wert $\mu_0 = 5{,}20$ kN.

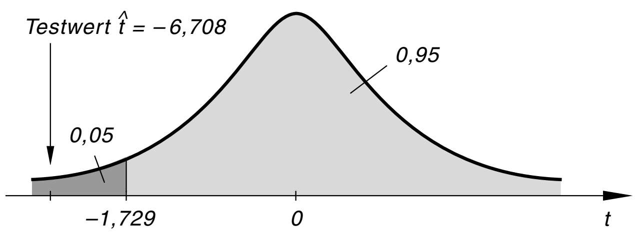


Bild A-46

4) σ^2 ist *unbekannt* $\Rightarrow$ t-Verteilung

$P(-c \le T \le c)_{H_0} = 2 \cdot F(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$

$F(c) = 0{,}995 \xrightarrow{f = n - 1 = 24} c = t_{(0{,}995;\,24)} = 2{,}797 \qquad$ (aus Tab. 4)

Annahmebereich: $-2{,}797 \le t \le 2{,}797$

$\overline{x} = 20{,}5\,\text{mm}$; $\quad s = 1{,}5\,\text{mm}$; $\quad n = 25$; $\quad \mu_0 = 21\,\text{mm}$

Testwert: $\hat{t} = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{(20{,}5 - 21)\,\text{mm}}{(1{,}5/\sqrt{25})\,\text{mm}} = -1{,}667$

Der Testwert liegt *im* Annahmebereich, die Nullhypothese H_0 wird daher *beibehalten* (Bild A-47). Die Abweichung des Stichprobenmittelwertes $\overline{x} = 20{,}5$ mm vom Sollwert $\mu_0 = 21$ mm ist *nicht signifikant*, sondern *zufallsbedingt*.

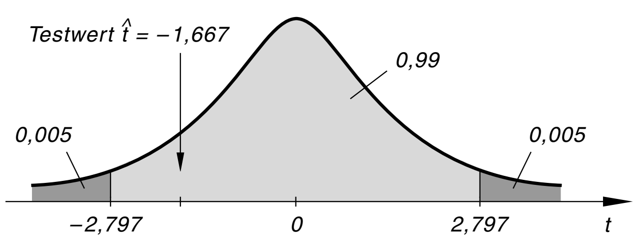


Bild A-47

5) *Nullhypothese:* $H_0 : \mu = \mu_0 = 8{,}2\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$

Alternativhypothese: $H_1 : \mu > \mu_0 = 8{,}2\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$

Einseitiger Test (Abgrenzung nach oben; σ^2 ist *unbekannt*, daher t-Verteilung):

$$P(T \le c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}95 \xrightarrow{f = n - 1 = 35} c = t_{(0{,}95;\,35)} = 1{,}690 \quad \text{(aus Tab. 4, interpoliert)}$$

Annahmebereich: $t \le 1{,}690$

$\bar{x} = 9{,}1\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$; $\quad s = 2{,}3\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$; $\quad n = 36$; $\quad \mu_0 = 8{,}2\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$

$$\textit{Testwert:}\ \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(9{,}1 - 8{,}2)\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}}{(2{,}3/\sqrt{36})\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}} = 2{,}348$$

Der Testwert liegt *außerhalb* des Annahmebereiches, die Nullhypothese wird daher *abgelehnt* (Bild A-48). *Folgerung:* Die Behauptung des Herstellers kann nicht länger aufrecht gehalten werden. Wir können davon ausgehen, dass der tatsächliche mittlere Benzinverbrauch *größer* ist als vom Hersteller angegeben.

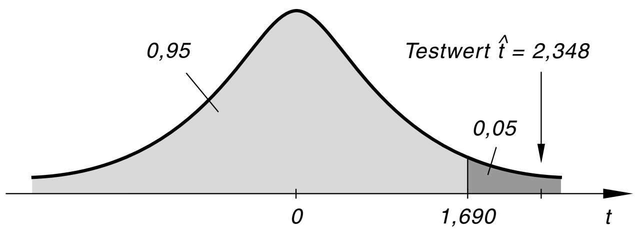


Bild A-48

6) Es handelt sich um *abhängige* Stichproben. Durch *Differenzbildung* erhalten wir die folgende Stichprobe $(z_i = x_i - y_i)$:

i	1	2	3	4	5
$\frac{z_i}{\Omega}$	2,3	3,3	1,9	0,4	2,2

$$\bar{z} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} z_i = \frac{1}{5} \cdot 10{,}1\,\Omega = 2{,}02\,\Omega$$

$$s^2 = \frac{1}{5 - 1} \cdot \sum_{1}^{5} (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{4} \cdot 4{,}388\,\Omega^2 = 1{,}097\,\Omega^2; \qquad s = 1{,}0474\,\Omega$$

Wir führen einen *zweiseitigen* Test für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte μ_1 und μ_2 durch (bei vorausgesetzter *Normalverteilung*; σ^2 ist *unbekannt*, daher t-Verteilung):

Nullhypothese: $H_0 : \mu = \mu_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$; *Alternativhypothese:* $H_1 : \mu \ne 0$

$$P(-c \le T \le c)_{H_0} = 2 \cdot F(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}995 \xrightarrow{f = n - 1 = 4} c = t_{(0{,}995;\,4)} = 4{,}604 \qquad \text{(aus Tab. 4)}$$

Annahmebereich: $-4{,}604 \le t \le 4{,}604$

$\bar{z} = 2{,}02\,\Omega$; $\quad s = 1{,}0474\,\Omega$; $\quad n = 5$; $\quad \mu_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0\,\Omega$

$$\textit{Testwert:}\ \hat{t} = \frac{\bar{z} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(2{,}02 - 0)\,\Omega}{(1{,}0474/\sqrt{5})\,\Omega} = 4{,}312$$

Da der Testwert *im* Annahmebereich liegt, wird die Nullhypothese H_0 *beibehalten* (Bild A-49). Aufgrund der verwendeten Stichprobe und des gewählten Signifikanzniveaus $\alpha = 0{,}01 = 1\,\%$ können wir daher von der *Gleichwertigkeit* der beiden Messmethoden ausgehen.

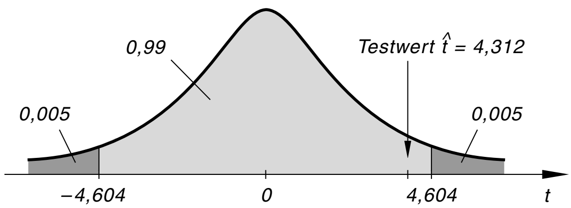


Bild A-49

7) Die Stichproben sind voneinander *unabhängig*. Wir führen einen *einseitigen* Test (Abgrenzung nach *oben*) wie folgt durch:

Nullhypothese: $H_0 : \mu_2 \le \mu_1$; *Alternativhypothese:* $H_1 : \mu_2 > \mu_1$

Es handelt sich wegen $n_1 = 100 > 30$ und $n_2 = 120 > 30$ um *umfangreiche* Stichproben mit $\sigma_1 \approx s_1$ und $\sigma_2 \approx s_2$. Wir dürfen daher die *standardnormalverteilte* Testvariable $U = \dfrac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sigma}$ verwenden:

$$P(U \le c)_{H_0} = \phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0{,}99 \to c = u_{0,99} = 2{,}326 \qquad \text{(aus Tab. 2)}$$

Annahmebereich: $u \le 2{,}326$

$$\bar{x} = 1540\,\text{h}; \quad \bar{y} = 1600\,\text{h}; \quad \sigma_1 \approx s_1 = 142\,\text{h}; \quad \sigma_2 \approx s_2 = 150\,\text{h}$$

$$n_1 = 100; \quad n_2 = 120; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{142^2}{100} + \frac{150^2}{120}}\ \text{h} = 19{,}727\,\text{h}$$

$$\textit{Testwert:}\ \hat{u} = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sigma} = \frac{(1600 - 1540)\,\text{h}}{19{,}727\,\text{h}} = 3{,}042$$

Der Testwert liegt *außerhalb* des Annahmebereiches, die Nullhypothese H_0 wird daher *abgelehnt* (Bild A-50). *Folgerung:* Die im Werk B produzierten Teile haben – wie vermutet – eine *größere* Lebensdauer.

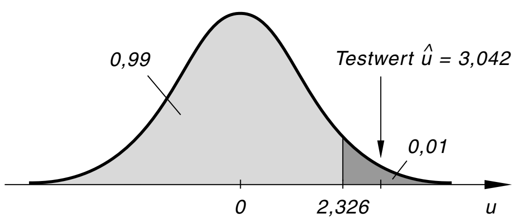


Bild A-50

8) Wir testen die *Nullhypothese* $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ gegen die *Alternativhypothese* $H_1 : \mu_1 \ne \mu_2$ (Differenzentest mit *unabhängigen* Stichproben und *unbekannten* Varianzen; *t*-Verteilung):

$$P(-c \le T \le c)_{H_0} = 2 \cdot F(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}995 \xrightarrow{f = n_1 + n_2 - 2 = 8} c = t_{(0,995;\,8)} = 3{,}355 \qquad \text{(aus Tab. 4)}$$

Annahmebereich: $-3{,}355 \le t \le 3{,}355$

Berechnung der benötigten Mittelwerte und Varianzen $(n_1 = n_2 = 5)$:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2
1	5,98	6,06	35,7604	36,7236
2	6,02	6,08	36,2404	36,9664
3	6,10	6,12	37,2100	37,4544
4	5,82	6,00	33,8724	36,0000
5	6,04	5,94	36,4816	35,2836
$\sum$	29,96	30,20	179,5648	182,4280

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} x_i = \frac{1}{5} \cdot 29{,}96 = 5{,}992$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} y_i = \frac{1}{5} \cdot 30{,}20 = 6{,}04$$

$$s_1^2 = s_x^2 = \frac{1}{5-1}\left(\sum_{1}^{5} x_i^2 - 5\bar{x}^2\right) = \frac{1}{4}(179{,}5648 - 5 \cdot 5{,}992^2) = 0{,}011\,12$$

$$s_2^2 = s_y^2 = \frac{1}{5-1}\left(\sum_{1}^{5} y_i^2 - 5\bar{y}^2\right) = \frac{1}{4}(182{,}4280 - 5 \cdot 6{,}04^2) = 0{,}005$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)\,s_1^2 + (n_2 - 1)\,s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{4 \cdot 0{,}011\,12 + 4 \cdot 0{,}005}{8} = 0{,}008\,06; \qquad s = 0{,}0898$$

Testwert: $$\hat{t} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5}{5 + 5}} \cdot \frac{5{,}992 - 6{,}04}{0{,}0898} = -0{,}845$$

Der Testwert liegt *im* Annahmebereich, die Nullhypothese H_0 wird daher *beibehalten* (Bild A-51). *Folgerung:* Die beiden Stichproben stammen aus *derselben* Grundgesamtheit.

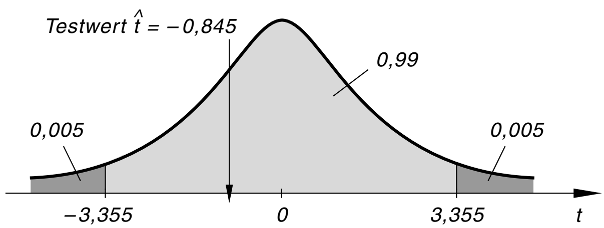


Bild A-51

9) *Einseitiger* Test (Abgrenzung nach *oben*; Chi-Quadratverteilung; Tabelle 3):

$$P(Z \le c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}95 \xrightarrow{f = n - 1 = 11} c = z_{(0{,}95;\,11)} = 19{,}67; \qquad \textit{Annahmebereich:}\ z \le 19{,}67$$

$s = 0{,}4$ mm; $s^2 = 0{,}16\ \text{mm}^2$; $n = 12$; $\sigma_0^2 = 0{,}04\ \text{mm}^2$

Testwert: $$\hat{z} = (n-1)\,\frac{s^2}{\sigma_0^2} = (12 - 1)\,\frac{0{,}16\ \text{mm}^2}{0{,}04\ \text{mm}^2} = 44$$

Der Testwert liegt *außerhalb* des Annahmebereiches, die Nullhypothese H_0 muss daher *abgelehnt* werden (Bild A-52). Die Abweichung ist *signifikant*, die Maschine muss neu eingestellt werden.

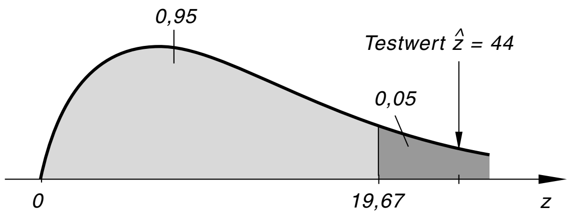


Bild A-52

Für $\alpha = 1\,\%$ erhält man den *Annahmebereich* $z \le 24{,}73$. Die Entscheidung ist *dieselbe*.

10) Die Bedingung (III-242) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$n p_0 (1 - p_0) = 400 \cdot 0{,}03\,(1 - 0{,}03) = 11{,}64 > 9$

Einseitiger Test (Abgrenzung nach *oben*; die Testvariable U ist näherungsweise *standardnormalverteilt*):

$P(U \le c)_{H_0} = \phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}95 \rightarrow c = u_{0{,}95} = 1{,}645 \qquad$ (aus Tab. 2)

Annahmebereich: $u \le 1{,}645$

$k = 20; \qquad n = 400; \qquad \hat{p} = k/n = 20/400 = 0{,}05; \qquad p_0 = 0{,}03$

Testwert: $\hat{u} = \sqrt{\dfrac{n}{p_0\,(1 - p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0) = \sqrt{\dfrac{400}{0{,}03\,(1 - 0{,}03)}} \cdot (0{,}05 - 0{,}03) = 2{,}345$

Folgerung: Die Nullhypothese H_0 wird *abgelehnt*, da der Testwert *außerhalb* des Annahmebereiches liegt (Bild A-53). Die Stichprobe *widerspricht* somit der Behauptung des Herstellers, d. h. wir können davon ausgehen, dass der Ausschussanteil *größer* als 3 % ist.

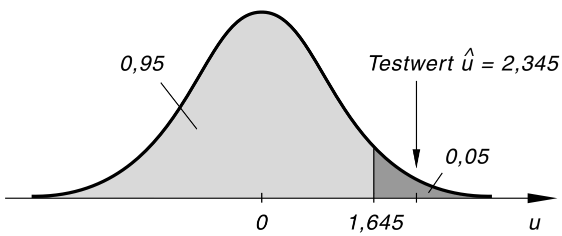


Bild A-53

11) Die Bedingung (III-242) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$n p_0 (1 - p_0) = 200 \cdot 0{,}5\,(1 - 0{,}5) = 50 > 9$

Zweiseitiger Test (die Testvariable U ist näherungsweise *standardnormalverteilt*): Wir testen die *Nullhypothese* $H_0 : p = p_0 = 0{,}5$ gegen die *Alternativhypothese* $H_1 : p \ne p_0 = 0{,}5$.

$P(-c \le U \le c)_{H_0} = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$

$\phi(c) = 0{,}975 \rightarrow c = u_{0{,}975} = 1{,}960 \qquad$ (aus Tab. 2)

Annahmebereich: $-1{,}960 \le u \le 1{,}960$

$k = 88; \qquad n = 200; \qquad \hat{p} = k/n = 88/200 = 0{,}44; \qquad p_0 = 0{,}5$

Testwert: $\hat{u} = \sqrt{\dfrac{n}{p_0\,(1 - p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0) = \sqrt{\dfrac{200}{0{,}5\,(1 - 0{,}5)}} \cdot (0{,}44 - 0{,}5) = -1{,}697$

Folgerung: Die Nullhypothese H_0 wird *beibehalten*, da der Testwert *innerhalb* des Annahmebereiches liegt (Bild A-54). Die Stichprobe steht in *keinem* Widerspruch zu der Annahme, dass der Würfel „*unverfälscht*" ist.

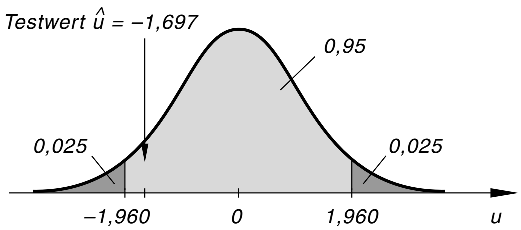


Bild A-54

Abschnitt 5

Hinweis: Die benötigten Quantile wurden den Tabellen 1 bis 4 im Anhang (Teil A) entnommen.

1) $p = p$ (Zahl); *Nullhypothese* H_0: Gleichverteilung $(p = p_0 = 0{,}5)$

Klasse i	n_i	p_i	$n_i^* = n p_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1 (Zahl)	65	0,5	75	− 10	4/3
2 (Wappen)	85	0,5	75	10	4/3
$\sum$	150	1	150	0	8/3

Testwert

$$P(Z = \chi^2 \le c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}95 \xrightarrow{f = k - 1 = 1} c = z_{(0{,}95;\,1)} = 3{,}84 \qquad \text{(aus Tab. 3; } k = 2 \text{ Klassen)}$$

Annahmebereich: $z = \chi^2 \le 3{,}84$

Testwert: $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 8/3 = 2{,}667$

H_0 wird *beibehalten*, da der Testwert *im* Annahmebereich liegt (Bild A-55). Wir können somit bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % „ziemlich sicher" sein, dass die Münze echt, d. h. unverfälscht ist (die verwendete Stichprobe steht zumindest in *keinem* Widerspruch zu dieser Hypothese).

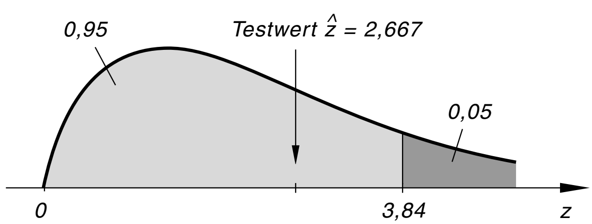


Bild A-55

2) *Nullhypothese* H_0: Gleichverteilung $(p_i = p(i) = 1/6$ für $i = 1, 2, \ldots, 6)$

Klasse i	n_i	p_i	$n_i^* = n p_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	35	1/6	50	− 15	225/50
2	39	1/6	50	− 11	121/50
3	70	1/6	50	20	400/50
4	62	1/6	50	12	144/50
5	56	1/6	50	6	36/50
6	38	1/6	50	− 12	144/50
$\sum$	300	1	300	0	1070/50

Testwert

$P(Z = \chi^2 \le c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \quad \Rightarrow$

$F(c) = 0{,}99 \xrightarrow{f = k - 1 = 5} c = z_{(0{,}99;\,5)} = 15{,}09$ (aus Tab. 3; $k = 6$ Klassen)

Annahmebereich: $z = \chi^2 \le 15{,}09$

Testwert: $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 1070/50 = 21{,}4$

H_0 wird *abgelehnt*, da der Testwert *außerhalb* des Annahmebereiches liegt (Bild A-56). Wir können davon ausgehen, dass der Würfel „verfälscht" ist.

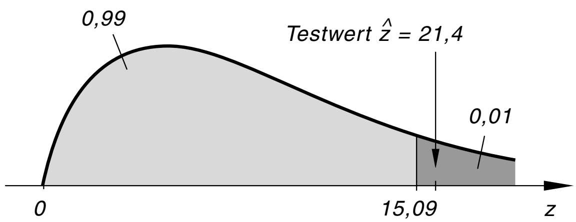


Bild A-56

3) *Nullhypothese* H_0: Poisson-Verteilung $f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$

Schätzwert für den unbekannten Parameter (Mittelwert) μ:

$$\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{1}^{6} n_i x_i = \frac{1}{100} \cdot 145 = 1{,}45$$

Wir bilden $k = 5$ Klassen: $X = 0,\ X = 1,\ X = 2,\ X = 3$ und $X \ge 4$

Berechnung der *theoretischen* Wahrscheinlichkeiten mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \frac{1{,}45^x}{x!} \cdot e^{-1{,}45} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

x_i	0	1	2	3	≥ 4
p_i	$\underbrace{0{,}2346}_{f(0)}$	$\underbrace{0{,}3401}_{f(1)}$	$\underbrace{0{,}2466}_{f(2)}$	$\underbrace{0{,}1192}_{f(3)}$	$\underbrace{0{,}0595}_{1 - \sum_{i=0}^{3} f(i)}$

Klasse i	n_i	p_i	$n_i^* = n p_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	27	0,2346	23,46	3,54	0,5342
2	31	0,3401	34,01	– 3,01	0,2664
3	22	0,2466	24,66	– 2,66	0,2869
4	12	0,1192	11,92	0,08	0,0005
5	8	0,0595	5,95	2,05	0,7063
$\sum$	100	1	100	0	1,7943

Testwert ⟶

$$P(Z = \chi^2 \le c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0{,}95 \xrightarrow{f = k - 1 - r = 3} c = z_{(0{,}95;\,3)} = 7{,}81 \qquad \text{(aus Tab. 3; } k = 5;\ r = 1)$$

Annahmebereich: $z = \chi^2 \le 7{,}81$

Testwert: $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 1{,}7943$

H_0 wird *beibehalten*, da der Testwert *im* Annahmebereich liegt (Bild A-57). Die Zufallsvariable X genügt einer *Poisson-Verteilung* mit dem (geschätzten) Parameter $\mu = 1{,}45$ (zumindest spricht die Stichprobe *nicht* dagegen).

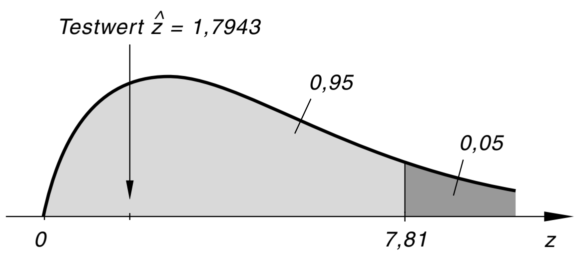


Bild A-57

4) *Nullhypothese* $H_0: F_0(x) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ (Standardnormalverteilung)

Die Parameter μ und σ sind *unbekannt* und werden aus der Stichprobe wie folgt *geschätzt*:

i	$\tilde{x}_i$	n_i	$n_i \tilde{x}_i$	$n_i (\tilde{x}_i - \bar{x})^2$
1	7,75	8	62	8,9888
2	8,25	20	165	6,2720
3	8,75	36	315	0,1296
4	9,25	24	222	4,6464
5	9,75	12	117	10,6032
$\sum$		100	881	30,6400

($\tilde{x}_i, \bar{x}$ in l/100 km)

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{5} n_i \tilde{x}_i = \frac{1}{100} \cdot 881 = 8{,}81 \qquad (\text{in } \ \text{l/100 km})$$

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1}^{5} n_i (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{99} \cdot 30{,}6400 = 0{,}309\,495 \qquad (\text{in } \ (\text{l/100 km})^2)$$

$$\sigma \approx s = 0{,}5563 \qquad (\text{in } \ \text{l/100 km})$$

Somit: $F_0(x) = \phi\left(\frac{x - 8{,}81}{0{,}5563}\right) \qquad (x \ \text{ in } \ \text{l/100 km})$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $p_i \; (i = 1, 2, \ldots, 5)$ mit Hilfe von Tabelle 1:

1. Klasse: $p_1 = P(X < 8) = F_0(8) = \phi\left(\frac{8 - 8{,}81}{0{,}5563}\right) = \phi(-1{,}456) =$

$= 1 - \phi(1{,}456) = 1 - 0{,}9273 = 0{,}0727$

2. Klasse: $p_2 = P(8 \le X < 8{,}5) = F_0(8{,}5) - F_0(8) = \phi\left(\frac{8{,}5 - 8{,}81}{0{,}5563}\right) - \phi\left(\frac{8 - 8{,}81}{0{,}5563}\right) =$

$= \phi(-0{,}557) - \phi(-1{,}456) = 1 - \phi(0{,}557) - [1 - \phi(1{,}456)] =$

$= \phi(1{,}456) - \phi(0{,}557) = 0{,}9273 - 0{,}7113 = 0{,}2160$

3. Klasse: $p_3 = P(8{,}5 \le X < 9) = F_0(9) - F_0(8{,}5) =$

$= \phi\left(\frac{9 - 8{,}81}{0{,}5563}\right) - \phi\left(\frac{8{,}5 - 8{,}81}{0{,}5563}\right) = \phi(0{,}342) - \phi(-0{,}557) =$

$= \phi(0{,}342) - [1 - \phi(0{,}557)] = 0{,}6338 - 1 + 0{,}7113 = 0{,}3451$

4. Klasse: $p_4 = P(9 \le X < 9{,}5) = F_0(9{,}5) - F_0(9) = \phi\left(\frac{9{,}5 - 8{,}81}{0{,}5563}\right) - \phi\left(\frac{9 - 8{,}81}{0{,}5563}\right) =$

$= \phi(1{,}240) - \phi(0{,}342) = 0{,}8925 - 0{,}6338 = 0{,}2587$

5. Klasse: $p_5 = P(9{,}5 \le X \le 10) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) =$

$= 1 - (0{,}0727 + 0{,}2160 + 0{,}3451 + 0{,}2587) = 1 - 0{,}8925 = 0{,}1075$

Klasse i	n_i	p_i	$n_i^* = n p_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	8	0,0727	7,27	0,73	0,0733
2	20	0,2160	21,60	– 1,60	0,1185
3	36	0,3451	34,51	1,49	0,0643
4	24	0,2587	25,87	– 1,87	0,1352
5	12	0,1075	10,75	1,25	0,1453
$\sum$	100	1	100	0	0,5366

Testwert

$$P(Z = \chi^2 \le c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

Anzahl der Klassen: $k = 5$; Anzahl der unbekannten Parameter: $r = 2$

$F(c) = 0{,}99 \xrightarrow{f = k - 1 - r = 2} c = z_{(0{,}99;\,2)} = 9{,}21$ (aus Tab. 3)

Annahmebereich: $z = \chi^2 \le 9{,}21$

Testwert: $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 0{,}5366$

H_0 wird *beibehalten*, da der Testwert *im* Annahmebereich liegt (Bild A-58). Der mittlere Benzinverbrauch X ist eine *normalverteilte* Zufallsgröße mit den (geschätzten) Parametern $\mu = 8{,}81\ \text{l}/100\ \text{km}$ und $\sigma = 0{,}5563\ \text{l}/100\ \text{km}$ (das Stichprobenmaterial gibt *keinen* Anlass, die Hypothese H_0 zu verwerfen).

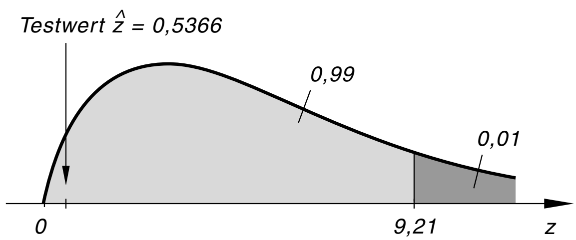


Bild A-58

Abschnitt 6

1) a)

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	2	3	– 1	1	1/6	1/36	– 1/6
2	2	2	– 1	1	– 5/6	25/36	5/6
3	4	4	1	1	7/6	49/36	7/6
4	1	2	– 2	4	– 5/6	25/36	10/6
5	5	4	2	4	7/6	49/36	14/6
6	4	2	1	1	– 5/6	25/36	– 5/6
$\sum$	18	17	0	12	0	174/36	5

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{5} x_i = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3; \qquad \bar{y} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{5} y_i = \frac{1}{6} \cdot 17 = \frac{17}{6}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} \cdot 12 = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad s_x = 1{,}5492$$

$$s_y^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{5} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{174}{36} = 0{,}9667 \quad \Rightarrow \quad s_y = 0{,}9832$$

$$s_{xy} = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{5} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{1}{1{,}5492 \cdot 0{,}9832} = 0{,}6565$$

Streuungsdiagramm („Punktwolke“): Bild A-59

b) Tabelle erstellen wie in Aufgabe 1 a):

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} x_i = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6; \qquad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} y_i = \frac{1}{5} \cdot 66 = 13{,}2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10; \qquad s_x = \sqrt{10}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{1}^{5} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{4} \cdot 122{,}8 = 30{,}7; \qquad s_y = 5{,}5408$$

$$s_{xy} = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{1}^{5} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{4} \cdot (-70) = -17{,}5$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-17{,}5}{\sqrt{10} \cdot 5{,}5408} = -0{,}9988$$

Streuungsdiagramm („Punktwolke"): Bild A-60

Die Punkte liegen nahezu auf einer Geraden $(r \approx -1)$.

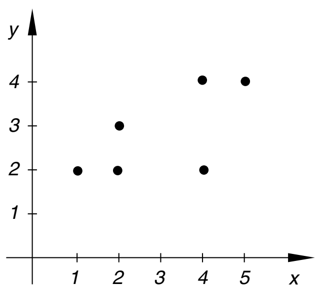


Bild A-59

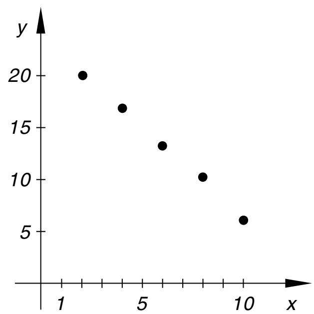


Bild A-60

2) Tabelle erstellen wie in Aufgabe 1 a) (x in cm; y in kg):

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{1}^{10} x_i = \frac{1}{10} \cdot 1721 = 172{,}1; \qquad \bar{y} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{1}^{10} y_i = \frac{1}{10} \cdot 671 = 67{,}1$$

$$s_x^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} \cdot 296{,}9 = 32{,}9889; \qquad s_x = 5{,}7436$$

$$s_y^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{9} \cdot 712{,}9 = 79{,}2111; \qquad s_y = 8{,}9001$$

$$s_{xy} = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{9} \cdot 453{,}9 = 50{,}4333$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{50{,}4333}{5{,}7436 \cdot 8{,}9001} = 0{,}9866$$

Streuungsdiagramm: Bild A-61

3) Tabelle erstellen wie in Aufgabe 1 a) (T in °C; R in Ω):

$$\overline{T} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} T_i = \frac{1}{8} \cdot 370 = 46{,}25; \qquad \overline{R} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} R_i = \frac{1}{8} \cdot 135{,}88 = 16{,}985$$

$$s_T^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (T_i - \overline{T})^2 = \frac{1}{7} \cdot 317{,}5 = 448{,}2143\,; \qquad s_T = 21{,}1711$$

$$s_R^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (R_i - \overline{R})^2 = \frac{1}{7} \cdot 2{,}0286 = 0{,}2898\,; \qquad s_R = 0{,}5383$$

$$s_{TR} = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (T_i - \overline{T})(R_i - \overline{R}) = \frac{1}{7} \cdot 79{,}6 = 11{,}3714$$

$$r = \frac{s_{TR}}{s_T \cdot s_R} = \frac{11{,}3714}{21{,}1711 \cdot 0{,}5383} = 0{,}9978$$

Wegen $r \approx 1$ besteht zwischen R und T ein nahezu *linearer* Zusammenhang.

4)

i	T_i	L_i	$T_i - \overline{T}$	$(T_i - \overline{T})^2$	$L_i - \overline{L}$	$(L_i - \overline{L})^2$	$(T_i - \overline{T})(L_i - \overline{L})$
1	0	70,8	– 50	2 500	– 48	2 304	2 400
2	20	88,4	– 30	900	– 30,4	924,16	912
3	40	104,9	– 10	100	– 13,9	193,21	139
4	60	124,7	10	100	5,9	34,81	59
5	80	148,0	30	900	29,2	852,64	876
6	100	176,0	50	2 500	57,2	3 271,84	2 860
$\sum$	300	712,8	0	7 000	0	7 580,66	7 246

(T in °C; L in g pro 100 g Wasser)

$$\overline{T} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 T_i = \frac{1}{6} \cdot 300 = 50\,; \qquad \overline{L} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 L_i = \frac{1}{6} \cdot 712{,}8 = 118{,}8$$

$$s_T^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (T_i - \overline{T})^2 = \frac{1}{5} \cdot 7000 = 1400\,; \qquad s_T = 37{,}4166$$

$$s_L^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (L_i - \overline{L})^2 = \frac{1}{5} \cdot 7580{,}66 = 1516{,}132\,; \qquad s_L = 38{,}9375$$

$$s_{TL} = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (T_i - \overline{T})(L_i - \overline{L}) = \frac{1}{5} \cdot 7246 = 1449{,}2$$

$$r = \frac{s_{TL}}{s_T \cdot s_L} = \frac{1449{,}2}{37{,}4166 \cdot 38{,}9375} = 0{,}9947$$

Streuungsdiagramm: Bild A-62

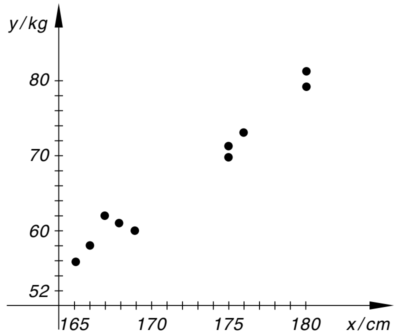


Bild A-61

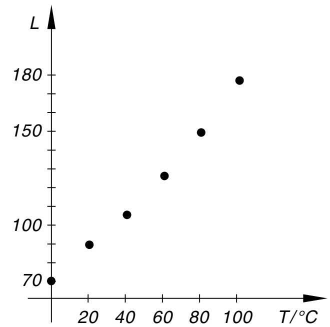


Bild A-62

5) Die *Randverteilungen* (Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X *und* Y) sind jeweils *grau* unterlegt.

a)

$X \backslash Y$	-1	1	$\sum$
-1	$1/4$	$1/4$	$1/2$
1	$1/4$	$1/4$	$1/2$
$\sum$	$1/2$	$1/2$	

$f_1(x)$ (Spalte $\sum$); $f_2(y)$ (Zeile $\sum$)

$$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E(Y) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E(X \cdot Y) = -1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\sigma_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = 0$$

X und Y sind somit *unkorreliert*.

b)

$X \backslash Y$	0	1	$\sum$
0	$1/3$	$4/15$	$3/5$
1	$4/15$	$2/15$	$2/5$
$\sum$	$3/5$	$2/5$	

$f_1(x)$ (Spalte $\sum$); $f_2(y)$ (Zeile $\sum$)

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}; \qquad E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\sigma_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = \frac{10 - 12}{75} = -\frac{2}{75}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}; \qquad \sigma_x = \frac{1}{5}\sqrt{6}$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}; \qquad \sigma_y = \frac{1}{5}\sqrt{6}$$

$$\varrho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{-\frac{2}{75}}{\left(\frac{1}{5}\sqrt{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\sqrt{6}\right)} = \frac{-\frac{2}{75}}{\frac{6}{25}} = -\frac{2}{75} \cdot \frac{25}{6} = -\frac{1}{9}$$

6) Gerade durch die Messpunkte
$P_1 = (0; 3)$ und $P_2 = (1{,}5; 6)$:

$$\frac{y-3}{x-0} = \frac{6-3}{1{,}5-0} = 2$$

$y = 2x + 3$

Die restlichen Messpunkte P_3, P_4 und P_5 liegen ebenfalls auf dieser Geraden:

$y_3 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$y_4 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

$y_5 = 2 \cdot 2{,}5 + 3 = 8$

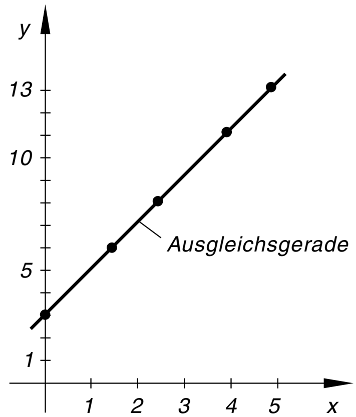


Bild A-63

Alternative: Berechnung des Korrelationskoeffizienten

Tabelle erstellen mit den Spalten $i,\ x_i,\ y_i,\ x_i - \overline{x},\ (x_i - \overline{x})^2,\ y_i - \overline{y},\ (y_i - \overline{y})^2$ und $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$

$$\overline{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 13 = 2{,}6; \qquad \overline{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot 41 = 8{,}2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_1^5 (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 15{,}7 = 3{,}925; \qquad s_x = 1{,}9812$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_1^5 (y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{4} \cdot 62{,}8 = 15{,}7; \qquad s_y = 3{,}9623$$

$$s_{xy} = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_1^5 (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{4} \cdot 31{,}4 = 7{,}85$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{7{,}85}{1{,}9812 \cdot 3{,}9623} = 1$$

Wegen $r = 1$ liegen *sämtliche* Messpunkte auf einer *Geraden* (siehe Bild A-63).

IV Fehler- und Ausgleichsrechnung

Hinweis: Die t-Werte wurden der Tabelle 1 (Seite 672) entnommen.

Abschnitt 3

1) $$\overline{U} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 U_i = \frac{1}{6}\,(80{,}5 + 81{,}2 + 80{,}6 + 80{,}9 + 80{,}8 + 81{,}4)\ \text{V} = 80{,}9\ \text{V}$$

$$s_U^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (U_i - \overline{U})^2 = \frac{1}{5}\,(0{,}16 + 0{,}09 + 0{,}09 + 0 + 0{,}01 + 0{,}25)\ \text{V}^2 = 0{,}12\ \text{V}^2$$

$$s_U = 0{,}35\ \text{V}; \qquad s_{\overline{U}} = \frac{s_U}{\sqrt{6}} = \frac{0{,}35\ \text{V}}{\sqrt{6}} = 0{,}14\ \text{V}$$

2) a) $\overline{R} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} R_i = \frac{1}{8} (115 + 118 + 111 + 112 + 116 + 111 + 114 + 115)\,\Omega = 114\,\Omega$

$$s_R^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_{1}^{8} (R_i - \overline{R})^2 = \frac{1}{7} (1 + 16 + 9 + 4 + 4 + 9 + 0 + 1)\,\Omega^2 = 6{,}286\,\Omega^2$$

$$s_R = 2{,}507\,\Omega\,; \qquad s_{\overline{R}} = \frac{s_R}{\sqrt{8}} = \frac{2{,}507\,\Omega}{\sqrt{8}} = 0{,}886\,\Omega$$

Vertrauensintervalle ($n = 8$; t-Werte aus Tab. 1):

$$\gamma_1 = 95\,\%\,; \quad t = 2{,}37: \; R = \overline{R} \pm t\,s_{\overline{R}} = (114 \pm 2{,}37 \cdot 0{,}886)\,\Omega = (114 \pm 2{,}10)\,\Omega$$

$$\gamma_2 = 99\,\%\,; \quad t = 3{,}50: \; R = \overline{R} \pm t\,s_{\overline{R}} = (114 \pm 3{,}50 \cdot 0{,}886)\,\Omega = (114 \pm 3{,}10)\,\Omega$$

b) $\overline{p} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} p_i = \frac{1}{8} \cdot 8{,}09\text{ bar} = 1{,}012\text{ bar}$

$$s_p^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_{1}^{8} (p_i - \overline{p})^2 = \frac{1}{7} \cdot 0{,}000\,049\,(\text{bar})^2 = 0{,}000\,007\,(\text{bar})^2$$

$$s_p = 0{,}0026\text{ bar}\,; \qquad s_{\overline{p}} = \frac{s_p}{\sqrt{8}} = \frac{0{,}0026\text{ bar}}{\sqrt{8}} = 0{,}0009\text{ bar}$$

Vertrauensintervalle (t-Werte wie in a)):

$$\gamma_1 = 95\,\%: \; p = \overline{p} \pm t\,s_{\overline{p}} = (1{,}012 \pm 2{,}37 \cdot 0{,}0009)\text{ bar} = (1{,}012 \pm 0{,}002)\text{ bar}$$

$$\gamma_2 = 99\,\%: \; p = \overline{p} \pm t\,s_{\overline{p}} = (1{,}012 \pm 3{,}50 \cdot 0{,}0009)\text{ bar} = (1{,}012 \pm 0{,}003)\text{ bar}$$

3) $\overline{g} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{1}^{8} g_i = \frac{1}{8} \cdot 78{,}48\text{ m/s}^2 = 9{,}81\text{ m/s}^2$

$$s_g^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_{1}^{8} (g_i - \overline{g})^2 = \frac{1}{7} \cdot 0{,}0028\text{ m}^2/\text{s}^4 = 0{,}0004\text{ m}^2/\text{s}^4$$

$$s_g = 0{,}02\text{ m/s}^2\,; \qquad s_{\overline{g}} = \frac{s_g}{\sqrt{8}} = \frac{0{,}02\text{ m/s}^2}{\sqrt{8}} = 0{,}007\text{ m/s}^2$$

a) $\gamma_1 = 95\,\%\,; \quad n = 8\,; \quad t = 2{,}37$ (aus Tab. 1)
Messunsicherheit: $\Delta g = t\,s_{\overline{g}} = 2{,}37 \cdot 0{,}007\text{ m/s}^2 = 0{,}017\text{ m/s}^2$
Vertrauensgrenzen: $\overline{g} \pm \Delta g = (9{,}81 \pm 0{,}017)\text{ m/s}^2$
Messergebnis: $g = \overline{g} \pm \Delta g = (9{,}81 \pm 0{,}017)\text{ m/s}^2$

b) $\gamma_2 = 99\,\%\,; \quad n = 8\,; \quad t = 3{,}50$ (aus Tab. 1)
Messunsicherheit: $\Delta g = t\,s_{\overline{g}} = 3{,}50 \cdot 0{,}007\text{ m/s}^2 = 0{,}025\text{ m/s}^2$
Vertrauensgrenzen: $\overline{g} \pm \Delta g = (9{,}81 \pm 0{,}025)\text{ m/s}^2$
Messergebnis: $g = \overline{g} \pm \Delta g = (9{,}81 \pm 0{,}025)\text{ m/s}^2$

4) $s_{\overline{R}} = \frac{s_R}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n \geq \left(\frac{s_R}{s_{\overline{R}}}\right)^2 = \left(\frac{1{,}4\ \Omega}{0{,}2\ \Omega}\right)^2 = 49$

Es sind also *mindestens* 49 Einzelmessungen durchzuführen.

5) Die Masse kann als eine *normalverteilte* Zufallsvariable X mit dem Mittelwert $\mu \approx \overline{m} = 105$ und der Standardabweichung $\sigma \approx s_m = 3$ angesehen werden (beide Werte in g). Wir gehen zur *standardisierten* Zufallsgröße $U = \frac{X - 105}{3}$ über und berechnen zunächst die benötigten Wahrscheinlichkeiten nach Tabelle 1 im Anhang (Teil A).

a) $p_1 = P(103 \leq X \leq 108) = P(-2/3 \leq U \leq 1) = \phi(1) - \phi(-2/3) =$

$= \phi(1) - [1 - \phi(2/3)] = 0{,}8413 - 1 + 0{,}7476 = 0{,}5889 \quad \Rightarrow$

$n p_1 = 58{,}89 \approx 59 \quad \Rightarrow$ Rund 59 Messwerte liegen zwischen 103 g und 108 g.

b) $p_2 = P(X > 110) = 1 - P(X \leq 110) = 1 - P(U \leq 5/3) = 1 - \phi(5/3) =$

$= 1 - 0{,}9522 = 0{,}0478 \quad \Rightarrow \quad n p_2 = 4{,}78 \approx 5 \quad \Rightarrow$

Rund 5 Messwerte liegen oberhalb von 110 g.

6) $n = 20$ Messwerte, darunter $k = 5$ verschiedene

i	$\frac{T_i}{\text{s}}$	n_i	$\frac{n_i T_i}{\text{s}}$	$\frac{T_i - \overline{T}}{\text{s}}$	$\frac{(T_i - \overline{T})^2}{\text{s}^2}$	$\frac{n_i (T_i - \overline{T})^2}{\text{s}^2}$
1	3,8	3	11,4	−0,215	0,046 225	0,138 675
2	3,9	3	11,7	−0,115	0,013 225	0,039 675
3	4,0	6	24,0	−0,015	0,000 225	0,001 350
4	4,1	4	16,4	0,085	0,007 225	0,028 900
5	4,2	4	16,8	0,185	0,034 225	0,136 900
$\sum$		20	80,3			0,345 500

$\overline{T} = \frac{1}{20} \cdot \sum_{1}^{5} n_i T_i = \frac{1}{20} \cdot 80{,}3\ \text{s} = 4{,}015\ \text{s}$

$s_T^2 = \frac{1}{20 - 1} \cdot \sum_{1}^{5} n_i (T_i - \overline{T})^2 = \frac{1}{19} \cdot 0{,}345\,500\ \text{s}^2 = 0{,}0182\ \text{s}^2; \qquad s_T = 0{,}1349\ \text{s}$

$s_{\overline{T}} = \frac{s_T}{\sqrt{20}} = \frac{0{,}1349\ \text{s}}{\sqrt{20}} = 0{,}0302\ \text{s}; \qquad \gamma = 1 - \alpha = 95\,\%; \qquad n = 20;$

$t = 2{,}09$ (aus Tab. 1)

Messunsicherheit: $\Delta T = t \cdot s_{\overline{T}} = 2{,}09 \cdot 0{,}0302\ \text{s} = 0{,}063\ \text{s}$

Messergebnis: $T = \overline{T} \pm \Delta T = (4{,}015 \pm 0{,}063)\ \text{s}$

7) $\gamma = 95\,\%$; $\quad n = 9$; $\quad t = 2{,}31$ (aus Tab. 1); $\quad \bar{x} = 10{,}0$; $\quad s = 1{,}3$

Vertrauensgrenzen: $\bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t\,\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 10{,}0 \pm 2{,}31\,\dfrac{1{,}3}{\sqrt{9}} = 10{,}0 \pm 1{,}00$

Messergebnis: $x = \bar{x} \pm \Delta x = 10{,}0 \pm 1{,}00$

8) $n = 10$; $\quad \bar{x} = \dfrac{1}{10} \cdot \sum\limits_{1}^{10} x_i = \dfrac{1}{10} \cdot 210 = 21$; $\quad \gamma = 95\,\%$; $\quad \sigma = 1{,}2$;

$t = t_\infty = 1{,}96$ (aus Tab. 1; σ ist bekannt)

Messunsicherheit: $\Delta x = t_\infty\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\,\dfrac{1{,}2}{\sqrt{10}} = 0{,}74$

Messergebnis: $x = \bar{x} \pm \Delta x = 21 \pm 0{,}74$

Abschnitt 4

1) $T = 2\pi \cdot m^{1/2} \cdot c^{-1/2}$ ist *ein Potenzprodukt* der unabhängigen Messgrößen m und c. Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 $(k = 2\pi;\ X = m;\ Y = c;\ \alpha = 1/2;\ \beta = -1/2)$:

$$\left|\frac{\Delta T}{\overline{T}}\right| = \sqrt{\left|\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\overline{m}}\right|^2 + \left|-\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta c}{\overline{c}}\right|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1\,\%)^2 + (1\,\%)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\% \approx 0{,}7\,\%$$

Die *prozentuale Messunsicherheit* der Schwingungsdauer T beträgt rund 0,7 %.

2) $m = m(r; h; \varrho) = \pi r^2 h \varrho$

$\overline{m} = \pi\,\overline{r}^2\,\overline{h}\,\overline{\varrho} = \pi\,(17{,}5)^2\,(24{,}0)\,(2{,}5)\,g = 57\,726{,}8\ \text{g} = 57{,}73\ \text{kg}$

m ist ein *Potenzprodukt* der drei unabhängigen Messgrößen r, h und ϱ. Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (die Exponenten lauten der Reihe nach 2, 1 und 1):

$$\left|\frac{\Delta m}{\overline{m}}\right| = \sqrt{\left|2 \cdot \frac{\Delta r}{\overline{r}}\right|^2 + \left|1 \cdot \frac{\Delta h}{\overline{h}}\right|^2 + \left|1 \cdot \frac{\Delta \varrho}{\overline{\varrho}}\right|^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}\,\% = 7\,\%$$

$$\Delta m = \left|\frac{\Delta m}{\overline{m}}\right| \cdot \overline{m} = 0{,}07 \cdot 57{,}73\ \text{kg} = 4{,}04\ \text{kg}$$

Die *absolute Messunsicherheit* der Masse m beträgt 4,04 kg, die *prozentuale* 7 %.

3) $h = h(e; \alpha) = e \cdot \tan\alpha$; $\quad \overline{h} = \overline{e} \cdot \tan\overline{\alpha} = (75{,}2\ \text{m}) \cdot \tan 30° = 43{,}42\ \text{m}$

$$\Delta h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial e} \cdot \Delta e\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha\right)^2} = \sqrt{(\tan\overline{\alpha} \cdot \Delta e)^2 + \left(\frac{\overline{e}}{\cos^2\overline{\alpha}} \cdot \underbrace{\Delta\alpha}_{\text{im Bogenmaß!}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(\tan 30° \cdot 2{,}5)^2 + \left(\frac{75{,}2}{\cos^2 30°} \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2}\ \text{m} = 2{,}27\ \text{m}$$

Messergebnis: $h = \overline{h} \pm \Delta h = (43{,}42 \pm 2{,}27)\ \text{m}$

Prozentuale Messunsicherheit: $\left|\dfrac{\Delta h}{\overline{h}}\right| = \dfrac{2{,}27\ \text{m}}{43{,}42\ \text{m}} = 0{,}052 \approx 5{,}2\,\%$

4) $\overline{T} = 2\pi\sqrt{\overline{L}\,\overline{C}} = 2\pi\sqrt{0{,}2\,\text{H}\cdot 5\cdot 10^{-6}\,\text{F}} = 6{,}28\cdot 10^{-3}\,\text{s} = 6{,}28\,\text{ms}$

$$\left|\frac{\Delta L}{\overline{L}}\right| = \frac{0{,}01\,\text{H}}{0{,}20\,\text{H}} = 0{,}05 = 5\,\%; \qquad \left|\frac{\Delta C}{\overline{C}}\right| = \frac{0{,}2\,\mu\text{F}}{5{,}0\,\mu\text{F}} = 0{,}04 = 4\,\%$$

$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{L}\cdot\sqrt{C} = 2\pi\cdot L^{1/2}\cdot C^{1/2}$ ist ein *Potenzprodukt* der unabhängigen Messgrößen L und C. Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (jeweiliger Exponent $= 1/2$):

$$\left|\frac{\Delta T}{\overline{T}}\right| = \sqrt{\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta L}{\overline{L}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta C}{\overline{C}}\right|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(5\,\%)^2 + (4\,\%)^2} = 3{,}2\,\%$$

Absolute Messunsicherheit: $\Delta T = \left|\frac{\Delta T}{\overline{T}}\right|\cdot\overline{T} = 0{,}032\cdot 6{,}28\,\text{ms} = 0{,}20\,\text{ms}$

Messergebnis: $T = \overline{T}\pm\Delta T = (6{,}28\pm 0{,}20)\,\text{ms}$

5) Das Volumen $V = V(a;b;c) = abc$ ist ein *Potenzprodukt* der drei Messgrößen a, b und c. Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (jeweiliger Exponent $= 1$):

$$\left|\frac{\Delta V}{\overline{V}}\right| = \sqrt{\left|1\cdot\frac{\Delta a}{\overline{a}}\right|^2 + \left|1\cdot\frac{\Delta b}{\overline{b}}\right|^2 + \left|1\cdot\frac{\Delta c}{\overline{c}}\right|^2} = \sqrt{(3\,\%)^2 + (3\,\%)^2 + (3\,\%)^2} = 5{,}2\,\%$$

Die *prozentuale Messunsicherheit* des Quadervolumens V beträgt rund 5,2 %.

6) a) $\overline{R} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{120{,}10\,\text{V}}{3{,}45\,\text{A}} = 34{,}81\,\Omega; \qquad \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}; \qquad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\cdot\Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\cdot\Delta I\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{\overline{I}}\right)^2 + \left(-\frac{\overline{U}\cdot\Delta I}{\overline{I}^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1{,}43}{3{,}45}\right)^2 + \left(-\frac{120{,}10\cdot 0{,}15}{3{,}45^2}\right)^2}\,\Omega = 1{,}57\,\Omega$$

Messergebnis: $R = \overline{R}\pm\Delta R = (34{,}81\pm 1{,}57)\,\Omega$

b) *Prozentuale Messunsicherheit:* $\left|\frac{\Delta R}{\overline{R}}\right| = \frac{1{,}57\,\Omega}{34{,}81\,\Omega} = 0{,}0451 \approx 4{,}5\,\%$

7) $\overline{b} = \frac{1}{10}\cdot\sum_{1}^{10} b_i = \frac{1}{10}\cdot 181\,\text{cm} = 18{,}1\,\text{cm}$

$$s_b^2 = \frac{1}{10-1}\cdot\sum_{1}^{10}(b_i-\overline{b})^2 = \frac{1}{9}\cdot 0{,}86\,\text{cm}^2 = 0{,}096\,\text{cm}^2$$

$$s_b = 0{,}310\,\text{cm}; \qquad \Delta b = \frac{s_b}{\sqrt{10}} = \frac{0{,}310\,\text{cm}}{\sqrt{10}} \approx 0{,}10\,\text{cm}$$

$$\overline{h} = \frac{1}{10}\cdot\sum_{1}^{10} h_i = \frac{1}{10}\cdot 101\,\text{cm} = 10{,}1\,\text{cm}$$

$$s_h^2 = \frac{1}{10-1}\cdot\sum_{1}^{10}(h_i-\overline{h})^2 = \frac{1}{9}\cdot 0{,}32\,\text{cm}^2 = 0{,}036\,\text{cm}^2$$

$$s_h = 0{,}190\,\text{cm}; \qquad \Delta h = \frac{s_h}{\sqrt{10}} = \frac{0{,}190\,\text{cm}}{\sqrt{10}} \approx 0{,}06\,\text{cm}$$

Messergebnisse:

$b = \overline{b} \pm \Delta b = (18{,}1 \pm 0{,}10)\ \text{cm}; \qquad h = \overline{h} \pm \Delta h = (10{,}1 \pm 0{,}06)\ \text{cm}$

$$\overline{W} = \frac{1}{6}\,\overline{b}\,\overline{h}^{2} = \frac{1}{6}\,(18{,}1\ \text{cm})\,(10{,}1\ \text{cm})^{2} = 307{,}73\ \text{cm}^{3}$$

$$\Delta W = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^{2} + \left(\frac{\partial W}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\,\overline{h}^{2} \cdot \Delta b\right)^{2} + \left(\frac{1}{3}\,\overline{b}\,\overline{h} \cdot \Delta h\right)^{2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{6} \cdot 10{,}1^{2} \cdot 0{,}10\right)^{2} + \left(\frac{1}{3} \cdot 18{,}1 \cdot 10{,}1 \cdot 0{,}06\right)^{2}}\ \text{cm}^{3} = 4{,}03\ \text{cm}^{3}$$

Messergebnis: $W = \overline{W} \pm \Delta W = (307{,}73 \pm 4{,}03)\ \text{cm}^{3}$

8) $\overline{T} = 2\pi\sqrt{\overline{L}\,(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)} = 2\pi\sqrt{5 \cdot 10^{-3}\ \text{H}\,(10 + 50) \cdot 10^{-9}\ \text{F}} = 1{,}088 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$

$$T = 2\pi\sqrt{L} \cdot \sqrt{C_1 + C_2}; \qquad \frac{\partial T}{\partial L} = \frac{2\pi}{2\sqrt{L}}\,\sqrt{C_1 + C_2} = \pi\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial C_1} = \frac{\partial T}{\partial C_2} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{2\sqrt{C_1 + C_2}} = \pi\sqrt{\frac{L}{C_1 + C_2}}$$

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial L} \cdot \Delta L\right)^{2} + \left(\frac{\partial T}{\partial C_1} \cdot \Delta C_1\right)^{2} + \left(\frac{\partial T}{\partial C_2} \cdot \Delta C_2\right)^{2}} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{\overline{C}_1 + \overline{C}_2}{\overline{L}}\,(\Delta L)^{2} + \frac{\overline{L}}{\overline{C}_1 + \overline{C}_2}\,[(\Delta C_1)^{2} + (\Delta C_2)^{2}]} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)^{2} \cdot (\Delta L)^{2} + \overline{L}^{2} \cdot [(\Delta C_1)^{2} + (\Delta C_2)^{2}]}{\overline{L}\,(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)}} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{(10 + 50)^{2} \cdot 10^{-18} \cdot (0{,}2)^{2} \cdot 10^{-6} + 5^{2} \cdot 10^{-6}\,(0{,}5^{2} + 2{,}0^{2}) \cdot 10^{-18}}{5 \cdot 10^{-3}\,(10 + 50) \cdot 10^{-9}}}\ \text{s} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{60^{2} \cdot 0{,}2^{2} + 5^{2}\,(0{,}5^{2} + 2{,}0^{2})}{5 \cdot 60}} \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 2{,}9 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 0{,}029 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

Messergebnis: $T = (1{,}088 \pm 0{,}029) \cdot 10^{-4}\ \text{s}$

9) J ist ein *Potenzprodukt* der unabhängigen Messgrößen m und R. Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (mit den Exponenten 1 und 2):

$$\left|\frac{\Delta J}{\overline{J}}\right| = \sqrt{\left|1 \cdot \frac{\Delta m}{\overline{m}}\right|^{2} + \left|2 \cdot \frac{\Delta R}{\overline{R}}\right|^{2}} = \sqrt{(1 \cdot 3\,\%)^{2} + (2 \cdot 2\,\%)^{2}} = 5\,\%$$

Das Massenträgheitsmoment J lässt sich mit einer *Genauigkeit* von 5 % bestimmen.

10) Das Volumen $V = V(a) = a^3$ ist eine *Potenzfunktion* der unabhängigen Messgröße (Kantenlänge) a. Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689:

$$\left|\frac{\Delta V}{\overline{V}}\right| = \sqrt{\left|3 \cdot \frac{\Delta a}{\overline{a}}\right|^2} = 3 \cdot \left|\frac{\Delta a}{\overline{a}}\right| \leq 3\,\% \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\Delta a}{\overline{a}}\right| \leq 1\,\%$$

Die prozentuale Messunsicherheit der Kantenlänge darf *höchstens* 1 % betragen.

11) $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y} = 50 - 40 = 10$

$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} = 0{,}28 \approx 0{,}3$ (nach Tabelle 2, Seite 689)

Messergebnis: $z = 10 \pm 0{,}3$

Prozentuale Messunsicherheit der Größen x, y und z:

$$\left|\frac{\Delta x}{\overline{x}}\right| = \frac{0{,}2}{50} = 0{,}4\,\%\,; \qquad \left|\frac{\Delta y}{\overline{y}}\right| = \frac{0{,}2}{40} = 0{,}5\,\%\,; \qquad \left|\frac{\Delta z}{\overline{z}}\right| = \frac{0{,}3}{10} = 3\,\%$$

Folgerung: Die *prozentuale* Messunsicherheit der Differenzgröße $z = x - y$ ist um rund *eine* Größenordnung (Zehnerpotenz) *größer* als die *prozentualen* Unsicherheiten der unabhängigen Messgrößen!

12) a)

i	$\frac{R_{1i}}{\Omega}$	$\frac{R_{1i} - \overline{R}_1}{\Omega}$	$\frac{(R_{1i} - \overline{R}_1)^2}{\Omega^2}$	$\frac{R_{2i}}{\Omega}$	$\frac{R_{2i} - \overline{R}_2}{\Omega}$	$\frac{(R_{2i} - \overline{R}_2)^2}{\Omega^2}$
1	96,5	− 0,5	0,25	40,1	− 1,4	1,96
2	97,2	0,2	0,04	42,3	0,8	0,64
3	98,6	1,6	2,56	41,5	0	0
4	95,9	− 1,1	1,21	40,7	− 0,8	0,64
5	97,1	0,1	0,01	41,9	0,4	0,16
6	96,7	− 0,3	0,09	42,5	1	1
$\sum$	582,0	0	4,16	249,0	0	4,40

$$\overline{R}_1 = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{6} R_{1i} = \frac{1}{6} \cdot 582{,}0\,\Omega = 97{,}0\,\Omega$$

$$s_{R_1}^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{6} (R_{1i} - \overline{R}_1)^2 = \frac{1}{5} \cdot 4{,}16\,\Omega^2 = 0{,}832\,\Omega^2\,; \quad s_{R_1} = 0{,}912\,\Omega$$

$$\Delta R_1 = \frac{s_{R_1}}{\sqrt{6}} = \frac{0{,}912\,\Omega}{\sqrt{6}} = 0{,}37\,\Omega$$

$$\overline{R}_2 = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{6} R_{2i} = \frac{1}{6} \cdot 249{,}0\,\Omega = 41{,}5\,\Omega$$

$$s_{R_2}^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{1}^{6} (R_{2i} - \overline{R}_2)^2 = \frac{1}{5} \cdot 4{,}40\,\Omega^2 = 0{,}88\,\Omega^2\,; \qquad s_{R_2} = 0{,}938\,\Omega$$

$$\Delta R_2 = \frac{s_{R_2}}{\sqrt{6}} = \frac{0{,}938\,\Omega}{\sqrt{6}} = 0{,}38\,\Omega$$

Messergebnisse:

$R_1 = \overline{R}_1 \pm \Delta R_1 = (97{,}0 \pm 0{,}37)\,\Omega\,; \qquad R_2 = \overline{R}_2 \pm \Delta R_2 = (41{,}5 \pm 0{,}38)\,\Omega$

b) $\overline{R} = \dfrac{\overline{R}_1 \overline{R}_2}{\overline{R}_1 + \overline{R}_2} = \dfrac{(97{,}0\ \Omega)\,(41{,}5\ \Omega)}{(97{,}0 + 41{,}5)\ \Omega} = 29{,}06\ \Omega$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2\,(R_1 + R_2) - 1\,(R_1 R_2)}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\,; \qquad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

(Quotientenregel)

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\overline{R}_2^2 \cdot \Delta R_1}{(\overline{R}_1 + \overline{R}_2)^2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{R}_1^2 \cdot \Delta R_2}{(\overline{R}_1 + \overline{R}_2)^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\overline{R}_2^2 \cdot \Delta R_1)^2 + (\overline{R}_1^2 \cdot \Delta R_2)^2}}{(\overline{R}_1 + \overline{R}_2)^2} = \frac{\sqrt{(41{,}5^2 \cdot 0{,}37)^2 + (97{,}0^2 \cdot 0{,}38)^2}}{(97{,}0 + 41{,}5)^2}\ \Omega = 0{,}19\ \Omega$$

Messergebnis: $R = \overline{R} \pm \Delta R = (29{,}06 \pm 0{,}19)\ \Omega$

Abschnitt 5

1) a) Hinweis: **Musterlösung** zu den Aufgaben 1) bis 5).

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	0	2,10	0	4,41	0
2	1	0,85	1	0,7225	0,85
3	2	– 0,64	4	0,4096	– 1,28
4	3	– 2,20	9	4,84	– 6,60
5	4	– 3,60	16	12,96	– 14,40
$\sum$	10	– 3,49	30	23,3421	– 21,43

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2\,; \qquad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot (-3{,}49) = -0{,}698$$

$$a = \frac{\sum\limits_1^5 x_i y_i - 5\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_1^5 x_i^2 - 5\,\bar{x}^2} = \frac{-21{,}43 - 5 \cdot 2 \cdot (-0{,}698)}{30 - 5 \cdot 2^2} = -1{,}445$$

$$b = \bar{y} - a\,\bar{x} = -0{,}698 - (-1{,}445) \cdot 2 = 2{,}192$$

Ausgleichsgerade: $y = -1{,}445\,x + 2{,}192$ (siehe Bild A-64)

$$s_x^2 = \frac{1}{5 - 1}\left(\sum_1^5 x_i^2 - 5\,\bar{x}^2\right) = \frac{1}{4}\,(30 - 5 \cdot 2^2) = 2{,}5$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5 - 1}\left(\sum_1^5 y_i^2 - 5\,\bar{y}^2\right) = \frac{1}{4}\,(23{,}3421 - 5\,(-0{,}698)^2) = 5{,}226\,52$$

$$r^2 = \frac{a^2\,s_x^2}{s_y^2} = \frac{(-1{,}445)^2 \cdot 2{,}5}{5{,}226\,52} = 0{,}998\,764$$

Unsicherheiten (Standardabweichungen) der beiden Parameter:

$$s_a^2 = \frac{(1 - r^2)\, s_y^2}{(n - 2)\, s_x^2} = \frac{(1 - 0{,}998\,764) \cdot 5{,}226\,52}{(5 - 2) \cdot 2{,}5} = 0{,}000\,861\,; \qquad s_a = 0{,}029$$

$$s_b^2 = \frac{(n - 1)\, s_x^2 + n\,\overline{x}^2}{n} \cdot s_a^2 = \frac{(5 - 1) \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 2^2}{5} \cdot 0{,}000\,861 = 0{,}005\,166$$

$$s_b = 0{,}072$$

Restvarianz und *Unsicherheit* der *y*-Messwerte:

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(n - 1)\,(1 - r^2)\, s_y^2}{n - 2} = \frac{(5 - 1)\,(1 - 0{,}998\,764) \cdot 5{,}226\,52}{5 - 2} = 0{,}008\,613$$

$$s_{\text{Rest}} = 0{,}093$$

b) Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): Tabelle erstellen mit den Spalten $i,\ x_i,\ y_i,\ x_i^2,\ y_i^2$ und $x_i y_i$ $(n = 8)$.

$$\overline{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 x_i = \frac{1}{8} \cdot 26{,}8 = 3{,}35\,; \qquad \overline{y} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 y_i = \frac{1}{8} \cdot 29{,}9 = 3{,}7375$$

$$a = \frac{\sum\limits_1^8 x_i y_i - 8\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_1^8 x_i^2 - 8\,\overline{x}^2} = \frac{115{,}4 - 8 \cdot 3{,}35 \cdot 3{,}7375}{105{,}22 - 8 \cdot 3{,}35^2} = 0{,}986\,723 \approx 0{,}987$$

$$b = \overline{y} - a\,\overline{x} = 3{,}7375 - 0{,}986\,723 \cdot 3{,}35 = 0{,}431\,978 \approx 0{,}432$$

Ausgleichsgerade: $y = 0{,}987\,x + 0{,}432$ (siehe Bild A-65)

$$s_x^2 = \frac{1}{8 - 1} \left(\sum_1^8 x_i^2 - 8\,\overline{x}^2 \right) = \frac{1}{7}\,(105{,}22 - 8 \cdot 3{,}35^2) = 2{,}205\,714$$

$$s_y^2 = \frac{1}{8 - 1} \left(\sum_1^8 y_i^2 - 8\,\overline{y}^2 \right) = \frac{1}{7}\,(127{,}05 - 8 \cdot 3{,}7375^2) = 2{,}185\,536$$

$$r^2 = \frac{a^2\, s_x^2}{s_y^2} = \frac{0{,}986\,723^2 \cdot 2{,}205\,714}{2{,}185\,536} = 0{,}982\,611$$

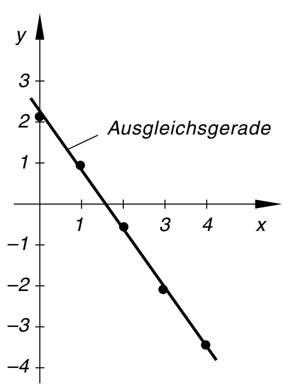


Bild A-64

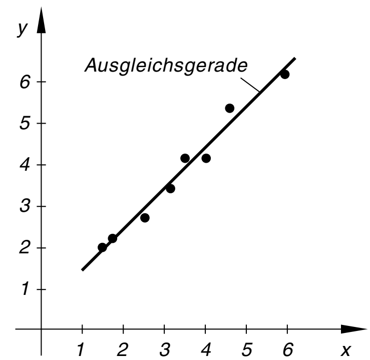


Bild A-65

Unsicherheiten (Standardabweichungen) der beiden Parameter:

$$s_a^2 = \frac{(1 - r^2)\, s_y^2}{(8 - 2)\, s_x^2} = \frac{(1 - 0{,}982\,611) \cdot 2{,}185\,536}{6 \cdot 2{,}205\,714} = 0{,}002\,872\,; \qquad s_a = 0{,}054$$

$$s_b^2 = \frac{(8 - 1)\, s_x^2 + 8\,\bar{x}^2}{8} \cdot s_a^2 = \frac{7 \cdot 2{,}205\,714 + 8 \cdot 3{,}35^2}{8} \cdot 0{,}002\,872 = 0{,}037\,774$$

$$s_b = 0{,}194$$

Restvarianz und *Unsicherheit* der y-Messwerte:

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(8 - 1)\,(1 - r^2)\, s_y^2}{8 - 2} = \frac{7\,(1 - 0{,}982\,611) \cdot 2{,}185\,536}{6} = 0{,}044\,338$$

$$s_{\text{Rest}} = 0{,}211$$

2) Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): Tabelle erstellen mit den Spalten i, x_i, y_i, x_i^2, y_i^2 und $x_i\,y_i$ $(n = 5)$.

a) $$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2\,; \qquad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot (-3{,}8) = -0{,}76$$

$$a = \frac{\sum\limits_1^5 x_i\,y_i - 5\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_1^5 x_i^2 - 5\,\bar{x}^2} = \frac{-73{,}8 - 5 \cdot 2 \cdot (-0{,}76)}{60 - 5 \cdot 2^2} = -1{,}655$$

$$b = \bar{y} - a\,\bar{x} = -0{,}76 - (-1{,}655) \cdot 2 = 2{,}55$$

Ausgleichsgerade: $y = -1{,}655\,x + 2{,}55$ (siehe Bild A-66)

b) $$s_x^2 = \frac{1}{5 - 1}\left(\sum_1^5 x_i^2 - 5\,\bar{x}^2\right) = \frac{1}{4}\,(60 - 5 \cdot 2^2) = 10$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5 - 1}\left(\sum_1^5 y_i^2 - 5\,\bar{y}^2\right) = \frac{1}{4}\,(112{,}5 - 5\,(-0{,}76)^2) = 27{,}403$$

$$r^2 = \frac{a^2\,s_x^2}{s_y^2} = \frac{(-1{,}655)^2 \cdot 10}{27{,}403} = 0{,}999\,535$$

Restvarianz und *Unsicherheit* der y-Messwerte:

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(5 - 1)\,(1 - r^2)\, s_y^2}{5 - 2} = \frac{4\,(1 - 0{,}999\,535) \cdot 27{,}403}{3} = 0{,}016\,990\,; \qquad r_{\text{Rest}} = 0{,}130$$

c) *Schätzwerte:* $y\,(x = -1) \approx 4{,}21\,; \qquad y\,(x = 4{,}5) \approx -4{,}90$

3)

i	x_i	y_i	$x_i^2 \cdot 10^{-4}$	$x_i\,y_i \cdot 10^{-2}$
1	500	5	25	25
2	1 000	8	100	80
3	1 500	12	225	180
4	2 000	17	400	340
5	2 500	24	625	600
6	3 000	31	900	930
7	3 500	36	1225	1260
$\sum$	14 000	133	3500	3415

x in Umdrehungen pro Minute, y in PS

$$\bar{x} = \frac{1}{7} \cdot \sum_1^7 x_i = \frac{1}{7} \cdot 14\,000 = 2000$$

$$\bar{y} = \frac{1}{7} \cdot \sum_1^7 y_i = \frac{1}{7} \cdot 133 = 19$$

a) $a = \dfrac{\sum\limits_{1}^{7} x_i y_i - 7\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{1}^{7} x_i^2 - 7\overline{x}^2} = \dfrac{3415 \cdot 10^2 - 7 \cdot 2000 \cdot 19}{3500 \cdot 10^4 - 7 \cdot 2000^2} = 0{,}010\,786 \approx 0{,}0108$

$b = \overline{y} - a\overline{x} = 19 - 0{,}010\,786 \cdot 2000 = -2{,}572$

Ausgleichsgerade: $y = 0{,}0108\,x - 2{,}572$ (siehe Bild A-67)

b) $y\,(x = 2150) = 20{,}648$; „Erwartete“ Motorleistung $\approx$ 20,65 PS

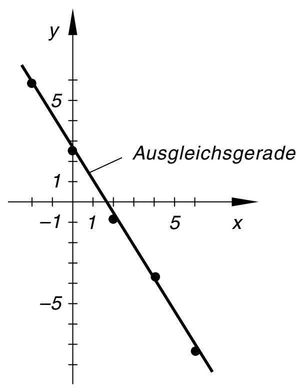


Bild A-66

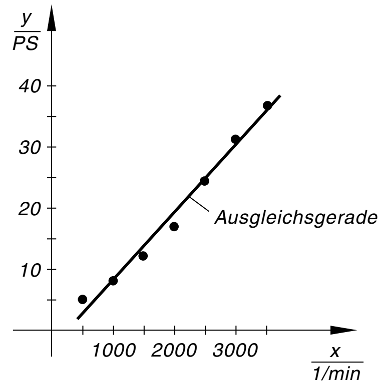


Bild A-67

4) Die $n = 6$ Messpunkte liegen nach „Augenschein“ auf einer *Geraden* (siehe Bild A-68). Bestätigt wird diese Einschätzung durch den Wert des Korrelationskoeffizienten ($r = 0{,}9996 \approx 1$; siehe weiter unten).

Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): *Tabelle* erstellen mit den Spalten i, x_i, y_i, x_i^2, y_i^2 und $x_i y_i$.

$\overline{x} = \dfrac{1}{6} \cdot \sum\limits_{1}^{6} x_i = \dfrac{1}{6} \cdot 15 = 2{,}5;\qquad \overline{y} = \dfrac{1}{6} \cdot \sum\limits_{1}^{6} y_i = \dfrac{1}{6} \cdot 31{,}5 = 5{,}25$

$$r = \frac{\sum\limits_{1}^{6} x_i y_i - 6\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{1}^{6} x_i^2 - 6\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{1}^{6} y_i^2 - 6\overline{y}^2\right)}} = \frac{121{,}95 - 6 \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}25}{\sqrt{(55 - 6 \cdot 2{,}5^2)\,(272{,}095 - 6 \cdot 5{,}25^2)}} =$$

$= 0{,}999\,636 \approx 1$

Linearer Lösungsansatz (Ausgleichsgerade): $y = ax + b$

$$a = \frac{\sum\limits_{1}^{6} x_i y_i - 6\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{1}^{6} x_i^2 - 6\overline{x}^2} = \frac{121{,}95 - 6 \cdot 2{,}5 \cdot 5{,}25}{55 - 6 \cdot 2{,}5^2} = 2{,}468\,571 \approx 2{,}469$$

$b = \overline{y} - a\overline{x} = 5{,}25 - 2{,}468\,571 \cdot 2{,}5 = -0{,}921\,428 \approx -0{,}921$

Lösung: $y = 2{,}469\,x - 0{,}921$ (siehe Bild A-68)

5) Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): *Tabelle* erstellen mit den Spalten i, T_i, L_i, T_i^2, L_i^2 und $T_i L_i$ $(n = 6)$.

$$\overline{T} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{6} T_i = \frac{1}{6} \cdot 300 = 50; \qquad \overline{L} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{1}^{6} L_i = \frac{1}{6} \cdot 712{,}8 = 118{,}8$$

a) $$r = \frac{\sum\limits_{1}^{6} T_i L_i - 6\,\overline{T}\,\overline{L}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{1}^{6} T_i^2 - 6\,\overline{T}^2\right)\left(\sum\limits_{1}^{6} L_i^2 - 6\,\overline{L}^2\right)}} =$$

$$= \frac{42\,904 - 6 \cdot 50 \cdot 118{,}8}{\sqrt{(22\,000 - 6 \cdot 50^2)\,(92\,299{,}92 - 6 \cdot 118{,}8^2)}} = 0{,}994\,649$$

$r \approx 1 \quad \Rightarrow$ Die Messpunkte liegen nahezu auf einer *Geraden* $\quad \Rightarrow \quad$ *Linearer* Lösungsansatz (Ausgleichsgerade): $L = a\,T + b$

$$a = \frac{\sum\limits_{1}^{6} T_i L_i - 6\,\overline{T}\,\overline{L}}{\sum\limits_{1}^{6} T_i^2 - 6\,\overline{T}^2} = \frac{42\,904 - 6 \cdot 50 \cdot 118{,}8}{22\,000 - 6 \cdot 50^2} = 1{,}037\,714 \approx 1{,}0377$$

$$b = \overline{L} - a\,\overline{T} = 118{,}8 - 1{,}037\,714 \cdot 50 = 66{,}9143$$

Lösung: $L = 1{,}0377\,T + 66{,}9143$ (siehe Bild A-69)

b) $L(T = 30\,°\text{C}) \approx 98{,}05$ g pro 100 g Wasser

$L(T = 95\,°\text{C}) \approx 165{,}50$ g pro 100 g Wasser

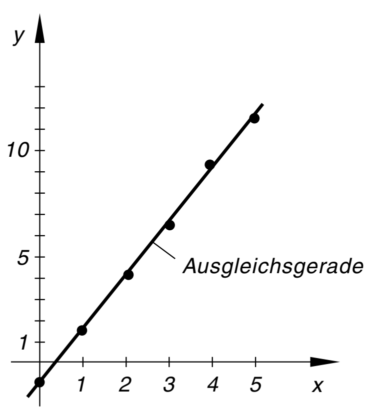


Bild A-68

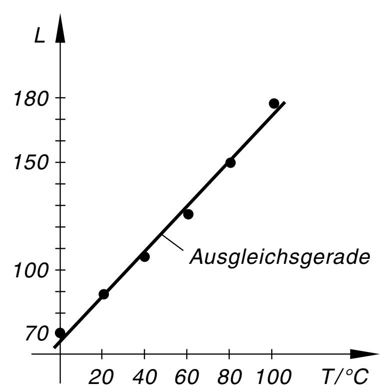


Bild A-69

6) Die $n = 5$ Messpunkte liegen nach „Augenmaß" nahezu auf einer *Parabel* (siehe Bild A-70). Die Parameter des daher gewählten *quadratischen* Lösungsansatzes $y = ax^2 + bx + c$ genügen dabei dem folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3123\,a + 503\,b + 87\,c &= 221 \\ 503\,a + 87\,b + 17\,c &= 33 \\ 87\,a + 17\,b + 5\,c &= 7 \end{aligned}$$

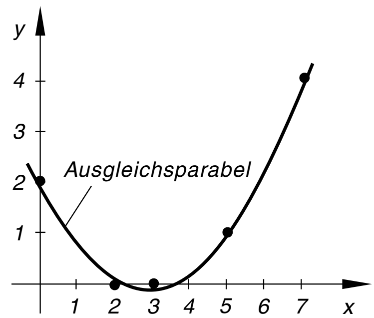


Bild A-70

Lösung (Gaußscher Algorithmus): $a = 0{,}2442$; $b = -1{,}4174$; $c = 1{,}9709$

Ausgleichsparabel (Bild A-70): $y = 0{,}2442\,x^2 - 1{,}4174\,x + 1{,}9709$

Die Koeffizienten der obigen Normalgleichungen (Gleichungen IV-146) wurden mit Hilfe der folgenden Tabelle bestimmt:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0	2	0	0	0	0	0
2	2	0	4	8	16	0	0
3	3	0	9	27	81	0	0
4	5	1	25	125	625	5	25
5	7	4	49	343	2401	28	196
$\sum$	17	7	87	503	3123	33	221

7) Das inhomogene lineare Gleichungssystem für die Kurvenparameter a, b und c lautet:

$$\begin{aligned} 392\,399\,201\,a + 3\,622\,893\,b + 35\,549\,c &= 3\,739\,551{,}3 \\ 3\,622\,893\,a + 35\,549\,b + 387\,c &= 34\,960{,}9 \\ 35\,549\,a + 387\,b + 5\,c &= 352{,}2 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Normalgleichungen (Gleichungen IV-146) wurden anhand der folgenden Tabelle bestimmt (Einheiten der besseren Übersicht wegen weggelassen):

i	v_i	s_i	v_i^2	v_i^3	v_i^4	$v_i s_i$	$v_i^2 s_i$
1	32	16,2	1 024	32 768	1 048 576	518,4	16 588,8
2	50	31,0	2 500	125 000	6 250 000	1 550	77 500
3	80	63,5	6 400	512 000	40 960 000	5 080	406 400
4	100	95,0	10 000	1 000 000	100 000 000	9 500	950 000
5	125	146,5	15 625	1 953 125	244 140 625	18 312,5	2 289 062,5
$\sum$	387	352,2	35 549	3 622 893	392 399 201	34 960,9	3 739 551,3

Lösung: $a = 0{,}00917$

$b = -0{,}05126$

$c = 9{,}23222$

Ausgleichsparabel (Bild A-71):

$s = 0{,}00917\,v^2 - 0{,}05126\,v + 9{,}23222$

(v in km/h, s in m)

Bremsweg bei $v = 90$ km/h: $s \approx 78{,}9$ m

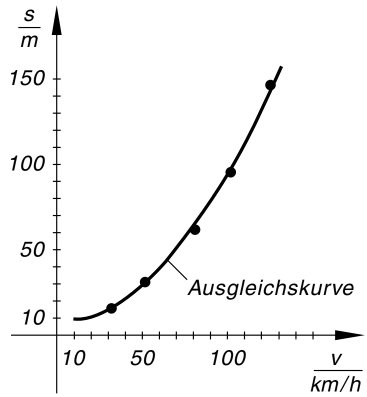


Bild A-71

8) $v = cu + d$

i	$u_i = x_i$	$v_i = \ln y_i$	u_i^2	$u_i v_i$
1	0	1,629 241	0	0
2	1	0,559 616	1	0,559 616
3	2	0,076 961	4	0,153 922
4	3	– 0,342 490	9	– 1,027 471
$\sum$	6	1,923 328	14	– 0,313 933

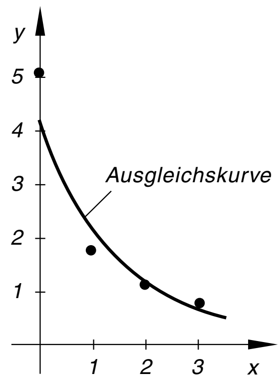


Bild A-72

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{1}^{4} u_i = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1{,}5$$

$$\bar{v} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{1}^{4} v_i = \frac{1}{4} \cdot 1{,}923\,328 = 0{,}480\,832$$

$$c = \frac{\sum\limits_{1}^{4} u_i v_i - 4\,\bar{u}\,\bar{v}}{\sum\limits_{1}^{4} u_i^2 - 4\,\bar{u}^2} = \frac{-0{,}313\,933 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}480\,832}{14 - 4 \cdot 1{,}5^2} = -0{,}639\,785$$

$$d = \bar{v} - c\,\bar{u} = 0{,}480\,832 - (-0{,}639\,785) \cdot 1{,}5 = 1{,}440\,510$$

$\ln a = d \quad \Rightarrow \quad a = e^d = e^{1{,}440\,510} = 4{,}2229; \qquad b = c = -0{,}6398$

Ausgleichskurve: $y = 4{,}2229 \cdot e^{-0{,}6398\,x}$ (siehe Bild A-72)

9) $v = cu + d$

i	$u_i = \ln x_i$	$v_i = \ln y_i$	u_i^2	$u_i v_i$
1	0	0	0	0
2	0,693 147	1,131 402	0,480 453	0,784 228
3	1,098 612	1,722 767	1,206 948	1,892 652
4	1,386 294	2,208 274	1,921 811	3,061 317
5	1,609 438	2,557 227	2,590 291	4,115 698
$\sum$	4,787 491	7,619 670	6,199 503	9,853 895

$$\overline{u} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} u_i = \frac{1}{5} \cdot 4{,}787\,491 = 0{,}957\,498$$

$$\overline{v} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} v_i = \frac{1}{5} \cdot 7{,}619\,670 = 1{,}523\,934$$

$$c = \frac{\sum_{1}^{5} u_i v_i - 5\,\overline{u}\,\overline{v}}{\sum_{1}^{5} u_i^2 - 5\,\overline{u}^2} = \frac{9{,}853\,895 - 5 \cdot 0{,}957\,498 \cdot 1{,}523\,934}{6{,}199\,503 - 5 \cdot 0{,}957\,498^2} = 1{,}583\,467$$

$$d = \overline{v} - c\,\overline{u} = 1{,}523\,934 - 1{,}583\,467 \cdot 0{,}957\,498 = 0{,}007\,768$$

$\ln a = d \quad \Rightarrow \quad a = \mathrm{e}^d = \mathrm{e}^{0{,}007\,768} \approx 1{,}0078\,; \qquad b = c \approx 1{,}5835$

Ausgleichskurve: $y = 1{,}0078 \cdot x^{1{,}5835}$ (siehe Bild A-73)

10) a) $y = \dfrac{a + bx}{x} = \dfrac{a}{x} + b = a \cdot \dfrac{1}{x} + b = au + b$ (Variablentransformation: $u = 1/x$)

i	$u_i = \frac{1}{x_i}$	y_i	u_i^2	$u_i y_i$
1	$-0{,}5$	1	0,25	$-0{,}5$
2	-1	$-0{,}5$	1	0,5
3	1	5,6	1	5,6
4	0,5	3,8	0,25	1,9
5	0,25	3,3	0,0625	0,825
$\sum$	0,25	13,2	2,5625	8,325

$$\overline{u} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} u_i = \frac{1}{5} \cdot 0{,}25 = 0{,}05$$

$$\overline{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{1}^{5} y_i = \frac{1}{5} \cdot 13{,}2 = 2{,}64$$

$$a = \frac{\sum_{1}^{5} u_i y_i - 5\,\overline{u}\,\overline{y}}{\sum_{1}^{5} u_i^2 - 5\,\overline{u}^2} = \frac{8{,}325 - 5 \cdot 0{,}05 \cdot 2{,}64}{2{,}5625 - 5 \cdot 0{,}05^2} = 3{,}005\,882 \approx 3{,}0059$$

$$b = \overline{y} - a\,\overline{u} = 2{,}64 - 3{,}005\,882 \cdot 0{,}05 = 2{,}489\,706 \approx 2{,}4897$$

Ausgleichskurve: $y = \dfrac{3{,}0059 + 2{,}4897\,x}{x}$ (siehe Bild A-74)

b) $y(x = 3) \approx 3{,}49$ c) Verlauf der *Ausgleichskurve*: Bild A-74

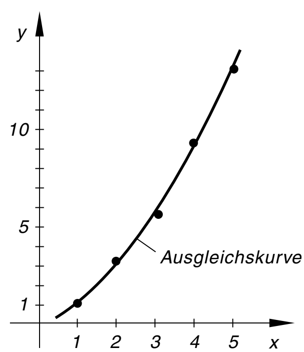


Bild A-73

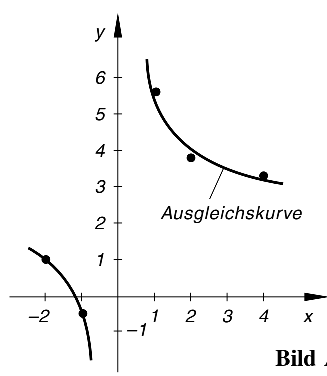


Bild A-74

Literaturhinweise

Formelsammlungen

1. *Bronstein / Semendjajew:* Taschenbuch der Mathematik. Deutsch, Thun—Frankfurt/M.
2. *Papula:* Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Springer Vieweg, Wiesbaden.

Aufgabensammlungen

1. *Minorski:* Aufgabensammlung der Höheren Mathematik. Hanser Verlag—München.
2. *Papula:* Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele. Springer Vieweg, Wiesbaden.
3. *Papula:* Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klausur- und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Vektoranalysis

1. *Schark:* Vektoranalysis für Ingenieurstudenten. Deutsch, Thun—Frankfurt/M.
2. *Spiegel:* Vektoranalysis. Mc Graw-Hill, New York.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

1. *Beyer* u. a.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutsch, Thun—Frankfurt/M.
2. *Blume:* Statistische Methoden für Ingenieure und Naturwissenschaftler. VDI, Düsseldorf.
3. *Bosch:* Elementare Einführung in die angewandte Statistik. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
4. *Bosch:* Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
5. *Fisz:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
6. *Heinhold, Gaede:* Ingenieur-Statistik. Oldenbourg, München.
7. *Henze:* Stochastik für Einsteiger. Springer Spektrum, Wiesbaden.
8. *Krengel:* Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Vieweg + Teuber, Wiesbaden.
9. *Kreyszig:* Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.
10. *Lipschutz:* Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mc Graw-Hill, New York.
11. *Spiegel:* Statistik. Mc Graw-Hill, New York.
12. *Stahel:* Statistische Datenanalyse. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
13. *Weber:* Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure. Teubner, Stuttgart.

Fehler- und Ausgleichsrechnung

1. *Hartwig:* Einführung in die Fehler- und Ausgleichsrechnung. Hanser, München—Wien.
2. *Hänsel:* Grundzüge der Fehlerrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
3. *Ludwig:* Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
4. *Taylor:* Fehleranalyse. Verlag Chemie, Weinheim.

Sachwortverzeichnis

L

M

N

O

P

T

U

V

W