

# Literatur

Jede Literatúrauswahl spiegelt eine gewisse Sicht des Themas wider. Sie wurde hier nach den drei Teilen des Buches zusammengestellt und enthält neben einführenden Lehrbüchern auch spezialisierte Texte und Originalarbeiten, die zu einem weitergehenden Studium einladen.

*Zu Teil I.* Eine ausgezeichnete Darstellung der Anfänge der Graphentheorie ist das Buch von Biggs-Lloyd-Wilson. Das Buch von Goodman gibt eine schöne Einführung in geschlossene Flächen und diskutiert den Jordanschen Kurvensatz. Ringels Buch bietet eine geschlossene Darstellung des Beweises des Heawoodschen Farbensatzes. Grünbaums Buch ist eine sehr lesenswerte Einführung in die Konvexe Geometrie.

N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson: *Graph Theory 1736–1936*. Oxford Univ. Press 1976.

S. E. Goodman: *Beginning Topology*. AMS Publications 2009.

B. Grünbaum: *Convex Polytopes*. Wiley 1967.

G. Ringel: *Map Color Theorem*. Springer 1974.

*Zu Teil II.* Es gibt eine große Anzahl von allgemeinen Lehrbüchern zur Graphentheorie in englischer Sprache, die deutschsprachige Literatur ist spärlicher. Stellvertretend für viele gute Texte seien die Bücher von West bzw. Diestel genannt. Eine sehr lesbare Darstellung über Einbettungsfragen ist das Buch von Mohar-Thomassen. Wer sich für Färbungsprobleme interessiert, dem sei die Sammlung von Jensen-Toft empfohlen. Das Standardwerk zur Matching Theorie ist das Buch von Lovász-Plummer. Eine anregende Zusammenstellung von Resultaten über Hamiltonsche Graphen findet man im Buch von Bermond. Wer sich näher über Ramsey Theorie informieren möchte, sollte das Buch von Graham-Rothschild-Spencer konsultieren. Als Einführung in die Theorie der Matroide seien die Bücher von Aigner bzw. Oxley empfohlen.

M. Aigner: *Combinatorial Theory*. Springer 1997.

J. C. Bermond: Hamiltonian Graphs. In: *Selected Topics in Graph Theory* (Beineke, Wilson Hrsg.). Academic Press 1978.

R. Diestel: *Graphentheorie*, 4. Auflage. Springer 2010.

R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer: *Ramsey Theory*, 2. Auflage. Wiley 1990.

T. R. Jensen, B. Toft: *Graph Coloring Problems*. Wiley 1995.

L. Lovász, M. D. Plummer: *Matching Theory*. AMS Publ., vol. 367, 2009.

B. Mohar, C. Thomassen: *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins Univ. Press 2001.

J. Oxley: *Matroid Theory*. Oxford Univ. Press 1992.

D. West: *Introduction to Graph Theory*, 2. Auflage. Prentice Hall 2001.

Zu Teil III. Ores Buch gibt einen Überblick über das 4-Farben Problem bis Mitte der 1960'er Jahre. Die ersten detaillierten Entladungsalgorithmen sind im Buch von Heesch enthalten. Reduzierbarkeits- und Unvermeidbarkeitsresultate findet man auch in Saaty-Kainen. Und natürlich kann (und sollte) man sich an die Originalarbeiten von Appel-Haken und vor allem von Robertson-Sanders-Seymour-Thomassen wagen. Eine Übersicht über spätere Entwicklungen findet man in der Arbeit von Thomas.

K. Appel, W. Haken: Every planar map is four colorable. *Contemp. Math.* 98 (1989).

H. Heesch: *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem*. Bibliographisches Institut 1969.

O. Ore: *The Four Color Problem*. Academic Press 1967.

N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, R. Thomas: The four-color problem. *J. Combin. Theory B* 70 (1997), 2-44.

T. L. Saaty, P. C. Kainen: *The Four-Color Problem*. McGraw-Hill 1977.

R. Thomas: An update on the four-color theorem. *Notices AMS* 45 (1998), 848-859.

# Symbolverzeichnis

Die häufigsten im Text verwendeten Zeichen sind nach Buchstaben zusammengefasst.

$\hat{A}$	Unterraum aufgespannt von $A$	$\text{cr}(G)$	Kreuzungszahl
$\hat{A}^\perp$	orthogonaler Unterraum	$d(v), d_H(v)$	Grad von $v$
$C_n$	Kreis der Länge $n$	$e(S)$	Euler Charakteristik
$C + D$	Summe zweier Mengen	$\text{ex}(H, p)$	Extremalzahl
$E$	Kantenmenge	$e, f, g, \dots$	Kanten
$F, G, H, \dots$	Länder	$f, g, h, \dots$	Funktionen
$G = (V, E)$	Graph	$\ f\ $	Träger
$G^*$	dualer Graph	$m(G)$	Matching-Zahl
$\overline{G}$	Komplement von $G$	$p$	Eckenzahl
$G^m$	Potenz von $G$	$p(G; \lambda), p(\mathcal{L}; \lambda)$	chromatisches Polynom
$G \setminus A$	Entfernung von $A$	$\text{per}(M)$	Permanente
$G.A$	Restriktion	$q$	Kantenzahl
$G \times A$	Kontraktion	$r$	Länderzahl
$G/e$	Kontraktion durch $e$	$r(A), r(\Gamma)$	Rang
$J(H)$	direkt fortsetzbare Färbungen	$u, v, w, \dots$	Ecken
$K_p$	vollständiger Graph	$v_n$	$n$ -Ecke
$K_{m,n}$	vollständiger bipartiter Graph	$\Gamma$	Kettengruppe
$K = (H, C)$	Konfiguration	$\Gamma^*$	duale Kettengruppe
$L(G)$	Kantengraph	$\Gamma.A$	Restriktion
$N_k$	nicht-orientierbare Fläche	$\Gamma \times A$	Kontraktion
$N(v)$	Nachbarschaft von $v$	$\Delta(G)$	Maximalgrad
$(N; \mathcal{A}),$ $(N; A_1, \dots, A_m)$	Mengensystem	$\alpha(G)$	Unabhängigkeitszahl
$P$	Petersen Graph	$\beta(\mathcal{M})$	Bedeckungszahl
$P_n$	Weg der Länge $n$	$\gamma(G)$	Geschlecht
$\text{PG}_m$	projektiver Raum	$\overline{\gamma}(G)$	nicht-orientierbares Geschlecht
$Q_n$	Würfelgraph	$\delta(G)$	Minimalgrad
$R$	Ländermenge	$\delta f$	Corand
$R(A)$	von $A$ erreichbare Ecken	$\kappa(G)$	Zusammenhangszahl
$R(k, \ell)$	Ramsey Zahl	$\kappa_G(u, v)$	lokale Zusammenhangszahl
$G = (S \cup T, Z)$	bipartiter Graph	$\mu_G(u, v)$	Verbindungszahl
$S_n$	orientierbare Fläche	$\pi(\mathcal{M})$	Packungszahl
$V$	Eckenmenge	$\chi(G), \chi(\mathcal{L})$	chromatische Zahl
$W_n$	Rad	$\chi'(G)$	chromatischer Index
		$\omega(G)$	Clique-Zahl
		$\mathcal{B}$	Basen
$a(G)$	Arborizität	$\mathcal{B}(G)$	Bondmatroid
$b$	Birkhoff Zahl	$\mathcal{J}$	unabhängige Mengen
$c(G)$	Anzahl der Komponenten	$\mathcal{K}$	Kreise
$c_u(G)$	Anzahl der ungeraden Komponenten	$\mathcal{K}_0$	0-Ketten
		$\mathcal{K}_1$	1-Ketten

$\mathcal{M}, \mathcal{M}(S)$	Matroid	$V_q$	Vektorraum aller
$\mathcal{M}^*$	duales Matroid		0,1-Ketten
$\mathcal{M}(\Gamma)$	Matroid einer	$\partial f$	Rand
	Kettengruppe	$\mathcal{C}(G)$	Cozyklengruppe
$\mathcal{M}.A$	Restriktion	$\mathcal{L}; \mathcal{L} = (V, E, R)$	Landkarte
$\mathcal{M} \times A$	Kontraktion	$\mathcal{L}^*$	duale Landkarte
$\mathcal{P}(G)$	Polygonmatroid	$\mathcal{Z}(G)$	Zyklengruppe

# Sachverzeichnis

- 0,1-Matrix, 106
- 0-Kette, 140
- 1-Faktor, 41, 99
- 1-Kette, 140
- 2-Block, 151
  - minimaler, 151
  - tangentialem, 151
- 2-Zellen Einbettung, 67
- 4-Farben Vermutung, 3, 7
  
- abhängige Menge, 135
- Abschluss eines Graphen, 125
- Abstand in einem Graphen, 76
- Anfangsladung, 168
- Arborizität, 115, 140
- Artikulation, 168
- Austauschaxiom, 134
  
- Basis
  - einer Menge, 134
  - eines Matroides, 134
- Baum, 9
- Bedeckungsproblem, 139
- Bedeckungszahl, 139
- Bein, 167
- Beklammerung, 183
- benachbarte
  - Ecken, 4
  - Länder, 7
- Bipartition, 65, 140
- Birkhoff Diamant, 164
- Birkhoff Zahl, 40, 160, 169
- Block
  - einer Kettengruppe, 150
  - eines Graphen, 47
- Block-Graph, 49
- Bond, 61, 136
- Bondmatroid, 137, 140
- Brücke, 8
  
- chromatische Zahl
  - einer Fläche, 21
  - einer Landkarte, 7
  - eines Graphen, 25, 75
- chromatischer Index, 75
  
- chromatisches Polynom, 36, 87
- Clique-Zahl, 83
- Corandoperator, 141
- Cozyklengruppe, 142
- Cozyklenraum, 66, 141
- Cozyklus, 66, 140, 141
  
- Defekt, 102, 103
- Desargues Block, 149
- Diagonale, 106
- Dicke eines Graphen, 73
- disjunkte Wege, 55
- doppelt-stochastische Matrix, 107
- Dualität
  - von Graphen, 25
  - von Landkarten, 24
  
- Ecke, 4
  - große, 165
  - isolierte, 4
  - kleine, 165
- Eckenfärbung, 25
- Endecke, 4
- Endladung, 168
- Entladungsalgorithmus, 168
- erste Nachbarschaft, 177
- Euler Charakteristik, 20
- Euler Formel, 9
- Euler-Poincaré Formel, 20
- Eulerscher Untergraph, 35, 36, 65, 140
- Eulerzug, 33
- Extremalzahl, 128
  
- $f$ -Faktor, 112
- Färbung
  - einer Kettengruppe, 145
  - einer Landkarte, 7
  - eines Graphen, 25, 75
- Fadenproblem, 26
- Faktorisierung, 41
- Fano Block, 152
- Fläche, zweiseitig, 19
- Fundamentallösung, 34
- Fundamentalzyklus, 34

- Gerüst
  - einer Landkarte, 6
  - eines Polytops, 45
- Geschlecht einer Fläche, 19
- Geschlecht eines Graphen
  - nicht-orientierbares, 26, 67
  - orientierbares, 26, 67
- geschlossene Fläche
  - nicht-orientierbare, 19
  - orientierbare, 19
- Goldener Schnitt, 93
- Grad, 8
  - maximaler, 78
  - mimaler, 78
- Gradfolge, 125
- Graph, 4
  - 2-faktorisierbarer, 111
  - bipartiter, 28, 76
  - dualer, 25, 61, 118
  - ebener, 5
  - einbettbarer, 26
  - einfacher, 4
  - Eulerscher, 33
  - fast-Hamiltonscher, 132
  - Hamiltonscher, 43
  - irreduzibler, 159
  - isomorpher, 7
  - kritischer, 84
  - kubischer, 12, 40
  - maximal ebener, 118
  - $n$ -färbbarer, 75
  - $n$ -fach zusammenhängender, 46
  - $n$ -kantenfärbbarer, 75
  - $n$ -kritischer, 84
  - normaler, 180
  - perfekter, 84
  - plättbarer, 5
  - Platonischer, 28
  - polyedrischer, 45, 121
  - $r$ -faktorisierbarer, 41
  - $r$ -regulärer, 40
  - unzusammenhängender, 5
  - vollständig bipartiter, 28, 53, 68
  - vollständiger, 26, 53, 68
  - zusammenhängender, 5
- hängendes 5-Paar, 168
- Hadwiger Vermutung, 85
- Hajós Vermutung, 86
- Hamiltonscher Kreis, 117
- Hamiltonscher Weg, 124
- Heiratssatz, 103
- Ikosaeder Graph, 82
- induzierter Untergraph, 78
- Innere einer Konfiguration, 162
- inzidente
  - Ecken-Kanten, 4
  - Ecken-Länder, 7
  - Kanten, 4
  - Kanten-Länder, 7
- Inzidenzmatrix
  - Ecken-Kanten, 32, 65
  - Kreis-Kanten, 65
  - Länder-Kanten, 32
- Jordansche Kurve, 5
- Jordanscher Kurvensatz, 6
- Kante, 4
  - gerichtete, 69
- Kanten-Zusammenhangszahl, 73
- Kantenfärbung, 13, 75, 80
- Kantengraph, 75
- Kantenmenge, minimale trennende, 61
- Kantenzug, 5
- Kempe-Kette, 11
- Kette, 142
  - elementare, 142
  - orthogonale, 142
- Kettengruppe, 142
  - achromatische, 145
  - chromatische, 145
  - cographische, 145
  - duale, 142
  - graphische, 145
  - irreduzible, 148
  - volle, 148
- Kleinsche Flasche, 24
- Komplement eines Graphen, 84
- Komponente, 5
  - ungerade, 109
- Konfiguration, 12, 162
  - $C$ -reduzierbare, 167
  - $D$ -reduzierbare, 167
  - geographisch gute, 175
  - reduzierbare, 12, 38, 159
- Kontraktion
  - einer Kante, 37, 61
  - einer Kettengruppe, 146
  - eines Graphen, 64, 85, 146
  - eines Matroides, 147
- Koordinatisierungsmatrix, 144
- Kreis
  - eines Graphen, 5
  - eines Matroides, 135
  - Hamiltonscher, 43
  - Länge eines, 5

- trennender, 119, 160
- Kreuzungszahl, 67
- Länge eines Kantenzuges, 5
- Land, 6
  - äußeres, 6
- Landkarte, 6, 7, 20, 67
  - duale, 24
  - irreduzible, 38
  - isomorphe, 7
  - kubische, 12
  - normale, 8
- Lateinisches Quadrat, 108
- Lateinisches Rechteck, 116
- linear unabhängig, 133
- Matching, 99
- Matching-Zahl, 99, 111
- Matroid, 133
  - binäres, 144
  - cographisches, 137
  - duales, 136
  - einer Kettengruppe, 143
  - einfaches, 134
  - graphisches, 134
  - isomorphes, 134
  - lineares, 133
- Medialgraph, 181
- mehrfache Nachbarschaften, 117
- Mehrfachkanten, 4
- Mengensystem, 103
- Minor
  - einer Kettengruppe, 147
  - eines Matroides, 147
- $(m, n)$ -Konfiguration, 176
- $n$ -chromatisch, 7
- $n$ -Ecke, 165
- Obstruktion, 167
- Oktaeder Graph, 82
- Packungsproblem, 139
- Packungszahl, 139
- Perfekte Graphen Vermutung, 84
- Permanente, 106
- Permutationsmatrix, 116
- Petersen Block, 153
- Petersen Graph, 43
- Polygon, 61, 135
- Polygonmatroid, 134, 140
- Polytop, 45
- Potenz eines Graphen, 127
- Prinzip der Inklusion-Exklusion, 89
- Projektiver Raum, 149
- $r$ -Faktor, 41, 99
- Rad, 29
- Ramsey Zahl, 130
- Rand, 35
- Randoperator, 140
- Rang
  - einer Kettengruppe, 142
  - einer Menge, 133
  - eines Matroides, 133
- Reduktor, 167
- Restriktion
  - einer Kante, 37
  - einer Kettengruppe, 145
  - eines Matroides, 146
- Ring, 39
  - Größe eines, 162
- Rotation, 69
- Rotationsschema, 69
- Schlinge
  - eines Graphen, 4
  - eines Matroides, 134
- Schnittecke, 46
- spannender Untergraph, 89
- submodulare Funktion, 137
- Summe von Matroiden, 139
- System verschiedener Repräsentanten, 104
- Tangente, 151
- Tetraeder Graph, 82
- Torus, 18
- Träger
  - einer Kette, 140, 142
  - eines Graphen, 100
- Transversale, 104, 138
  - partielle, 116, 138
- Transversalmatroid, 138
- trennende
  - Eckenmenge, 46, 54
  - Kantenmenge, 61
- Triangulierung, 70, 93
  - einfache, 118
- unabhängige
  - Eckenmenge, 83
  - Menge eines Matroides, 133
- Unabhängigkeitszahl, 83
- unimodale Folge, 91
- Unterteilung
  - einer Kante, 54
  - eines Graphen, 54, 86
- unvermeidbare Menge, 12, 159
- Vektorprodukt, 183
- Verbindungszahl, 55

*W*-Dual, 61  
Würfelgraph, 15  
Wald, 115, 133, 134  
Weg, 5  
Zeichnung eines Graphen, 71

Zusammenhangszahl, 46  
  lokale, 54  
zweite Nachbarschaft, 177  
Zyklengruppe, 142  
Zyklusraum, 66, 140  
Zyklus, 33, 65, 140