Anhang: Mathematische Begriffe und Bezeichnungen

I Mengen

A1 Wie üblich benutzen wir für Mengen M die Schreibweise $x \in M$ und $A \subseteq M$ um die Element-Beziehung bzw. die Teilmengenbeziehung zwischen x und M bzw. A und M darzustellen.

A2 Seien A, B, C Mengen. Wie üblich bezeichne $A \cup B, A \cap B$ und $A \setminus B := \{a \in A \mid \neg(a \in B)\}$ die Vereinigung, den Durchschnitt und das Komplement von A mit B.

A3 Aus der Mengenalgebra sei neben den Distributivgesetzen $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ an folgende Beziehungen erinnert:

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

(ii) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

(iii) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(iv) $(A \setminus B) \setminus A = \emptyset$

A4 $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen $\{0,1,2,\ldots\}$ bzw. der ganzen Zahlen $\{\ldots -2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

II Relationen

A5 Definition Sei M eine Menge. Mit $x, y \in M$ ist (x,y) ein Paar über M. Für $A, B \subseteq M$ sei $A \times B := \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. $\rho \subseteq M \times M$ heißt Relation und wir schreiben $x \rho y$ für $(x,y) \in \rho$.

A6 Definition Sei M eine Menge und seien $\rho, \sigma \subseteq M \times M$ zwei Relationen über M. Wir definieren:

(i) $\rho^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\}$

(ii) $\rho\circ\sigma := \{(x,z) \mid \exists y\in M \quad x\rho y \wedge y\sigma z\}$

(iii) mit $\rho^0 := \{(x,x) \mid x\in M\}$ und $\rho^{i+1} := \rho^i\circ\rho$ $(i=0,1,\dots)$ sei $\rho^+ := \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$ und $\rho^* := \rho^+ \cup \rho^0$.

(iv) für $a\in M$ sei $\rho[a] := \{b\in M \mid a\rho b\}$

A7 Korollar Sind $\rho,\sigma \subseteq M\times M$ Relationen, so gilt:

(i) $\rho = \rho^1$

(ii) $\rho\subseteq\sigma \Rightarrow \rho^*\subseteq\sigma^*$

(iii) $\rho^*\cup\sigma^* \subseteq (\rho\cup\sigma)^*$

(iv) $(\rho^*)^* = \rho^*$

A8 Lemma Seien $\rho,\sigma,\tau,\psi \subseteq M\times M$ Relationen. Dann gilt:

(i) $\rho\subseteq\sigma^* \wedge \tau\subseteq\psi^* \Rightarrow (\rho\cup\tau)^*\subseteq(\sigma\cup\psi)^*$

(ii) $\rho\subseteq\sigma^* \Rightarrow (\rho\cup\sigma)^*\subseteq\sigma^*$

Beweis

(i) $\rho\cup\tau\subseteq\sigma^*\cup\psi^*\subseteq(\sigma\cup\psi)^* \Rightarrow (\rho\cup\tau)^*\subseteq((\sigma\cup\psi)^*)^* = (\sigma\cup\psi)^*$

(ii) $\rho\subseteq\sigma^* \Rightarrow \rho\cup\sigma^*\subseteq\sigma^* \Rightarrow (\rho\cup\sigma^*)^*\subseteq(\sigma^*)^* = \sigma^* \Rightarrow (\rho\cup\sigma)^*\subseteq\sigma^*$ ■

III Abbildungen, Funktionen

A9 Definition Seien A,B Mengen, sei $M\subseteq A$.

(i) $f:A\to B$ bezeichnet eine (totale) Funktion (oder Abbildung) von A nach B .

(ii) Mit $f:A\to B$ sei $f(M) := \{f(a) \mid a\in M\}$.

(iii) Die Abbildung $f|M : M\to B$ ist definiert durch $f|M\,(a) = f(a)$ für alle $a\in M$.

(iv) Die Relation $\{(a,f(a)) \mid a\in A\}$ ist der Graph der Funktion $f:A\to B$.

A10 Definition Sei A eine Menge.

(i) $\underline{id}:A\to A$ mit $\underline{id}(a)=a$ heißt Identitätsfunktion oder Identität

(ii) mit $n,i\in\mathbb{N}$ sei $\underline{pr_i}: \begin{array}{l} A^n \to A \\ (a_1,\dots,a_n) \mapsto a_i \end{array}$

IV Ordnungen

A11 Definition Sei M eine Menge. Eine Relation $\rho \subset M\times M$ heißt Ordnung (oder Halbordnung) $:\Longleftrightarrow \forall a,b\in M$

(i) $a\rho b \Rightarrow \neg(b\rho a)$ (ρ ist irreflexiv)

(ii) $a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$ (ρ ist transitiv)

Ordnungen $\rho\subseteq M\times M$ schreiben wir unabhängig vom Träger M mit dem Symbol "$<$". Sei $a\leq b :\Longleftrightarrow a<b \vee a=b$.

Graphisch stellen wir endliche Ordnungen als Pfeilmengen dar, sodaß ein Pfeil $a \longrightarrow b$ genau dann vorkommt, wenn $a<b \wedge \nexists c \; a<c<b$.

V Graphen

A12 Definition Ein Tupel $G=(H,P)$ heißt (pfeilbeschrifteter, gerichteter) Graph über L $:\Longleftrightarrow$ H und L sind Mengen sodaß $P\subseteq H\times L\times H$. Die Elemente von H,L und P heißen Knoten, Pfeilbeschriftungen bzw. Pfeile.

Die zeichnerische Darstellung von Graphen ist offensichtlich.

A13 Definition Sei $G=(H,P)$ ein Graph über L. Für $i=1,\dots,n$ seien $p_i=(h_i,l_i,h_i')\in P$. $w=p_1\dots p_n$ heißt Weg von G $:\Longleftrightarrow$ für $i=1,\dots,n-1$ gilt: $h_i'=h_{i+1}$. Dann schreiben wir abkürzend auch $w=h_1l_1h_2\dots h_nl_nh_n'$. n ist die Länge von w. Der leere Weg ε hat die Länge 0.

A14 Definition Seien $G_i=(H_i,P_i)$ Graphen über L_i $(i=1,2)$. G_1 heißt α-β-isomorph (kurz: isomorph) zu G_2 $:\Longleftrightarrow$ $\alpha: H_1\to H_2$ und $\beta: L_1\to L_2$ sind bijektive Abbildungen sodaß $(h,l,h')\in P_1 \Longleftrightarrow (\alpha(h),\beta(l),\alpha(h'))\in P_2$.

VI Das Supremum von Zahlenmengen und das Rechnen mit ω

A15 Definition (i) Wir erweitern die kanonische Ordnung $<$ sowie $+$ und $-$ von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}\cup\{\omega\}$ sodaß $\forall n\in\mathbb{N}\; n<\omega$ und $\forall m\in\mathbb{N}\cup\{\omega\}: m+\omega=\omega+m=\omega,\; m-\omega=\omega-m=\omega$

(ii) Für $A\subseteq\mathbb{N}\cup\{\omega\}$ sei $\sup(A) := \begin{cases} a, & \text{falls } a\in A \wedge \forall a'\in A \;\; a'\leq a \\ \omega, & \text{falls } \forall n\in\mathbb{N}\; \exists a\in A \;\; n\leq a \end{cases}$

A16 Korollar Seien $A, B \subseteq \mathbf{N} \cup \{\omega\}$, sodaß mit $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ $a_1 < b_1 \wedge a_2 < b_2 \wedge \ldots$. Dann gilt: $\underline{\sup}(A) \leq \underline{\sup}(B)$.

VI Vektoren und Matrizen

Als Indexmengen für Vektoren und Matrizen verwenden wir nicht Anfangsstücke der natürlichen Zahlen, sondern beliebige endliche Mengen. Als Bildbereich betrachten wir hier nur die ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$.

A17 Definition Sei A eine nichtleere, endliche Menge. Eine Abbildung $v: A \to \mathbf{Z}$ heißt Vektor oder A-Vektor. Für zwei Vektoren $v_1: A \to \mathbf{Z}$ und $v_2: A \to \mathbf{Z}$ definieren wir

(i) ihre Summe $v_1 + v_2$ als den Vektor $v: A \to \mathbf{Z}$ mit $v(a) := v_1(a) + v_2(a)$,

(ii) ihr Produkt $v_1 \cdot v_2$ als die ganze Zahl $\sum_{a \in A} v_1(a) \cdot v_2(a)$

(iii) mit $z \in \mathbf{Z}$ das Skalarprodukt $z \cdot v_1$ als den Vektor $v: A \to \mathbf{Z}$,definiert durch $v(a) := z \cdot v_1(a)$.

A18 Definition Sei A eine Menge

(i) Ein Vektor $v: A \to \{0\}$ heißt Nullvektor und wird mit 0 bezeichnet (sein Urbildbreich A ergibt sich im jeweiligen Zusammenhang).

(ii) Ein Vektor $v: A \to \{0,1\}$ heißt charakteristisch.

Für $A' \subseteq A$ sei
$$c_{A'}: A \to \{0,1\}$$
$$a \mapsto 1, \text{ falls } a \in A'$$
$$\mapsto 0, \text{ sonst}$$

$c_{A'}$ ist der charakteristische Vektor von A' .

(iii) Ein Vektor $v: A \to \mathbf{Z}$ heißt positiv $:\Longleftrightarrow \forall a \in A \;\; v(a) \geq 0$

A19 Definition Seien A und B disjunkte, nichtleere, endliche Mengen.

(i) Eine Abbildung $C: A \times B \to \mathbf{Z}$ heißt Matrix.

(ii) Die Transponierte C' einer Matrix $C: A \times B \to \mathbf{Z}$ ist die Matrix $C': B \times A \to \mathbf{Z}$ mit $C'(b,a) := C(a,b)$.

(iii) Das Produkt einer Matrix $C: A \times B \to \mathbf{Z}$ mit einem Vektor $v: B \to \mathbf{Z}$ liefert den Vektor $C \cdot v: A \to \mathbf{Z}$ mit $C \cdot v(a) := \sum_{b \in B} C(a,b) \cdot v(b)$.

Graphisch werden Vektoren und Matrizen nach dem Schema von Abb.111 als Tabelle dargestellt. Mit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ sei $v: A \to \mathbf{Z}$ ein Vektor und $C: A \times B \to \mathbf{Z}$ eine Matrix. Für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ sei $v_i := v(a_i)$ und $c_{ij} := C(a_i, b_j)$.

	v
a_1	v_1
a_2	v_2
$\vdots$	$\vdots$
a_n	v_n

C	b_1	$\cdots$	b_m
a_1	c_{11}	$\cdots$	c_{1m}
a_2	c_{21}	$\cdots$	c_{2m}
$\vdots$			
a_n	c_{n1}	$\cdots$	c_{nm}

Abb.111 *Graphische Darstellung von Vektoren und Matrizen*

Index

(Unterstrichene Seitenzahlen weisen auf Definitionen hin)

Quellen

[1] C.A. Petri : Kommunikation mit Automaten.-Schriften des Institutes für Instrumentelle Mathematik, Bonn 1962

[2] E. Pless, H. Plünnecke : A Bibliography of Net Theory.-(Second Edition) Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Bonn ISF-Report 80.05 1980

[3] P. Starke : Petrinetze.-Deutscher Verlag der Wissenschaften DDR Berlin 1980

[4] J.-L. Peterson : Petri Net Theory and the Modelling of Systems.-Prentice Hall Inc., Engelwood Cliffs, N.J. 07632 1981

[5] W. Brauer (ed) : Net Theory and Application.-Lecture Notes in Computer Science Vol. 84 1980 Springer Verlag

Das Platzbuchungssystem in Kapitel 6.6 hat K. Lautenbach konstruiert. Einige weitere Beispiele sind den Rundbriefen der Fachgruppe "Petrinetze und verwandte Systemmodelle" der Gesellschaft für Informatik entnommen. Alle anderen Quellen sind in [2] und in den ausführlichen Bibliographien der beiden Lehrbücher [3] und [4] aufgeführt. Das Kursmaterial [5] gibt einen Überblick über Forschungsaktivitäten bis 1979.