

A

Hilfsmittel

A.1 Matrixnormen

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man eine Vektornorm, wenn die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, und es ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = o$.
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \mathbb{C}^n$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Bekannte Beispiele sind:

1. Die Euklidnorm: $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$.
2. Die Einsnorm: $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$.
3. Die Maximumnorm: $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Dabei sind die ersten beiden Beispiele Spezialfälle der so genannten P -Normen:

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}.$$

Mit diesen Normen ausgestattet kann man sich beliebig viele weitere Vektornormen definieren. Ist $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nichtsingulär, so ist $\|\cdot\|_U$ mit

$$\|x\|_U := \|U \cdot x\|$$

ebenfalls eine Vektornorm. Ein wichtiger Spezialfall ist die skalierte Maximumnorm: Ist $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u > o$, so nennt man

$$\|x\|_u := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i|}{u_i}$$

die skalierte Maximumnorm. Setzt man $U := \text{diag}(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n})$, so ist

$$\|x\|_u = \|Ux\|_\infty.$$

Die skalierte Maximumnorm hat mit den P -Normen gemeinsam, dass sie alleamt offensichtlich absolute und monotone Normen sind¹, d.h. für all diese Normen gilt offensichtlich

$$\|x\| = \||x|\| \quad \text{und} \quad |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Nicht jede Vektornorm ist absolut bzw. monoton.

Beispiel A.1.1 Wir betrachten die nichtsinguläre Matrix

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Vektornorm $\|x\| := \|Ux\|_\infty$. Dann gilt für $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|x\| = \|Ux\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 2 \neq 1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \|U \cdot |x|\|_\infty = \||x|\|. \square$$

Jede Vektornorm $\|\cdot\|$ definiert eine Matrixnorm durch

$$\|A\| := \sup_{x \neq o} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Diese Matrixnorm nennt man auch die durch die Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm. Offensichtlich gilt für eine von einer Vektornorm induzierten Matrixnorm

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O, \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

In den folgenden drei Lemmata werden wir für gewisse Matrixnormen jeweils eine konkrete Formel angeben.

Lemma A.1.1 Für die durch die Einsnorm bzw. Maximumnorm induzierte Matrixnorm gilt:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \tag{A.1}$$

bzw.

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \tag{A.2}$$

¹ Man kann sogar zeigen, dass eine Vektornorm genau dann absolut ist, wenn sie monoton ist. Wir wollen auf den Beweis dieser Äquivalenz nicht eingehen und verweisen diesbezüglich auf Abschnitt 3.2 in [60].

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{C}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|A \cdot x\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_1. \end{aligned}$$

Daher gilt für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq o$

$$\frac{\|A \cdot x\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (\text{A.3})$$

Wir werden nun einen Vektor $x \neq o$ angeben, für den in (A.3) Gleichheit gilt. Damit ist dann (A.1) gezeigt. Ist k ein Index mit

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}|,$$

so wählen wir $x = E_{.k}$ und erhalten

$$\|x\|_1 = \|E_{.k}\|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \|A \cdot x\|_1 = \|A_{.k}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Um (A.2) zu zeigen, sei wiederum $x \in \mathbb{C}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|A \cdot x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Daher gilt für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq o$

$$\frac{\|A \cdot x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (\text{A.4})$$

Wir werden nun einen Vektor $x \neq o$ angeben, für den in (A.4) Gleichheit gilt. Damit ist dann (A.2) gezeigt. Ist k ein Index mit

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|,$$

so wählen wir

$$x_j := \begin{cases} \frac{\bar{a}_{kj}}{|a_{kj}|}, & a_{kj} \neq 0, \\ 1, & a_{kj} = 0, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

Dabei bezeichnet hier \bar{a}_{kj} die zu a_{kj} konjugiert komplexe Zahl. Dann ist $|x_j| = 1$ für alle $j = 1, \dots, n$, und wir erhalten $\|x\|_\infty = 1$ sowie

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{kj}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

und

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|,$$

da $a_{kj} \cdot \bar{a}_{kj} = |a_{kj}|^2$ gilt. Somit ist

$$\|A \cdot x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad \square$$

Lemma A.1.2 *Es seien $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_{ind}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm. Ist $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nichtsingulär, so gilt für die durch die Vektornorm $\|\cdot\|_U$ induzierte Matrixnorm:*

$$\|A\|_U = \|UAU^{-1}\|_{ind}.$$

Für die skalierte Maximumnorm gilt speziell: Ist $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u > 0$, so gilt

$$\|A\|_u = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}| \cdot u_j}{u_i}$$

und demnach:

$$\|A\|_u = \| |A| \|_u \quad \text{und} \quad |A| \leq |B| \Rightarrow \|A\|_u \leq \|B\|_u \quad \text{für alle } A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Beweis: Es ist

$$\|A\|_U = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_U}{\|x\|_U} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|UAU^{-1}Ux\|}{\|Ux\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|UAU^{-1}y\|}{\|y\|} = \|UAU^{-1}\|_{ind}.$$

Sei nun $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u > 0$. Für $x \in \mathbb{C}^n$ ist $\|x\|_u = \|Ux\|_\infty$ mit $U := \text{diag}(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n})$. Daher folgt

$$\|A\|_u = \|UAU^{-1}\|_\infty = \left\| \left(\frac{a_{ij} \cdot u_j}{u_i} \right) \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}| \cdot u_j}{u_i}. \quad \square$$

Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so nennt man

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\}$$

den Spektralradius von A . Er spielt bei der Bestimmung von $\|A\|_2$ eine zentrale Rolle, wie wir im folgenden Lemma sehen werden.

Lemma A.1.3 Für die durch die Euklidnorm induzierte Matrixnorm gilt:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}. \quad (\text{A.5})$$

Beweis: Die Matrix $A^H A$ ist hermitesch und wegen

$$x^H A^H A x = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

positiv semidefinit. Somit folgt aus der Linearen Algebra, dass $A^H A$ ausschließlich reelle Eigenwerte $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ besitzt und dass es eine Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt mit $S^H S = E$ und $S^H (A^H A) S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann gilt für $x \in \mathbb{C}^n$ mit $y := S^H x$

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^H Ax = y^H S^H (A^H A) S y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \leq \lambda_n y^H y = \lambda_n x^H x = \lambda_n \|x\|_2^2.$$

Daher gilt für alle $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq o$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\rho(A^H A)}. \quad (\text{A.6})$$

Wir werden nun einen Vektor $x \neq o$ angeben, für den in (A.6) Gleichheit gilt. Damit ist dann (A.5) gezeigt. Wir betrachten einen Eigenvektor u zum Eigenwert λ_n von $A^H A$. Dann ist $u \neq o$ und

$$\|Au\|_2^2 = u^H A^H A u = \lambda_n u^H u = \lambda_n \|u\|_2^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} = \sqrt{\lambda_n}. \quad \square$$

Ist A symmetrisch, so erhält man als Spezialfall

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{(\rho(A))^2} = \rho(A).$$

Es stellt sich die Frage, ob man für andere Matrixnormen auch allgemeine Aussagen in Bezug auf $\rho(A)$ machen kann. Die folgenden beiden Lemmata geben Antworten hierauf.

Lemma A.1.4 Es seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\|\cdot\|$ eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm. Dann gilt $\rho(A) \leq \|A\|$.

Beweis: Es seien λ ein Eigenwert von A und x ein dazugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $x \neq o$ und

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{bzw.} \quad |\lambda| \leq \|A\|.$$

Da λ ein beliebiger Eigenwert von A ist, folgt $\rho(A) \leq \|A\|$. □

Lemma A.1.5 Es seien $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Vektornorm, die eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ induziert, die

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

erfüllt.

Dann folgt

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Sei umgekehrt λ ein Eigenwert von A . Dann existiert ein zugehöriger Eigenvektor $x \neq 0$ und es gilt

$$A^k x = \lambda^k x, \quad x \neq 0. \quad (\text{A.8})$$

Angenommen $|\lambda| \geq 1$. Dann kann wegen (A.8) nicht $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$ gelten. \square

Lemma A.1.7 *Es seien $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $|C| \leq B$. Dann gilt $\rho(C) \leq \rho(B)$.*

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann setzen wir $\sigma := \rho(B)$ sowie

$$B_1 := \frac{1}{\sigma + \varepsilon} B \quad \text{und} \quad C_1 := \frac{1}{\sigma + \varepsilon} C.$$

Hieraus folgen $\rho(B_1) < 1$ und $|C_1|^k \leq B_1^k$ für $k = 1, 2, \dots$. Mit Lemma A.1.6 folgt nun $\lim_{k \rightarrow \infty} B_1^k = O$, woraus dann wiederum $\lim_{k \rightarrow \infty} C_1^k = O$ folgt. Lemma A.1.6 angewandt auf C_1 liefert dann $\rho(C_1) < 1$ und somit $\rho(C) < \sigma + \varepsilon$. Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt dann die Behauptung. \square

Lemma A.1.8 *Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\rho(A) < 1$. Dann existiert $(E - A)^{-1}$ und es gilt*

$$(E - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Beweis: Die Eigenwerte von $E - A$ lauten $1 - \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, wobei λ_i , $i = 1, \dots, n$ die Eigenwerte von A sind. Wegen $\rho(A) < 1$ ist 1 kein Eigenwert von A . Daher ist 0 kein Eigenwert von $E - A$ und $E - A$ ist somit invertierbar. Es ist

$$(E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^k) = E - A^{k+1}$$

bzw.

$$E + A + A^2 + \dots + A^k = (E - A)^{-1} - (E - A)^{-1} A^{k+1}.$$

Wegen $\rho(A) < 1$ folgt dann die Behauptung auf Grund von Lemma A.1.6. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts über Matrixnormen wollen wir noch anmerken, dass nicht jede Matrixnorm, die durch eine absolute bzw. monotone Vektornorm induziert wurde, selbst absolut bzw. monoton sein muss.

Beispiel A.1.2 Wir betrachten die Euklidnorm, die offensichtlich absolut bzw. monoton ist. Nach Lemma A.1.3 gilt für die induzierte Matrixnorm $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$. Für

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

erhält man $\|D\|_2 = \sqrt{2} \neq 2 = \||D|\|_2$. \square

A.2 Fixpunktsatz von Brouwer, Lemma von Farkas

Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, und existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = f(x)$, so nennt man x einen Fixpunkt von f . Ein mathematischer Satz, der Voraussetzungen angibt, unter denen die Existenz eines Fixpunktes garantiert wird, nennt man einen Fixpunktsatz.

Satz A.2.1 (Fixpunktsatz von Brouwer) *Es seien $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : K \rightarrow K$. K sei beschränkt, abgeschlossen sowie konvex und f sei stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt $x^* \in K$.*

Auf einen Beweis wollen wir hier verzichten und verweisen diesbezüglich auf [37]. Dort werden sogar mehrere Beweise geführt. Weitere (andere) Beweise findet man in [8] und [45].

Satz A.2.2 (Satz von Perron, Frobenius) *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $A \geq O$. Dann ist $\rho(A)$ ein Eigenwert von A . Des Weiteren existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq o$, $x \neq o$ mit $Ax = \rho(A)x$.*

Beweis: 1: Fall: Es sei $A > O$. Dann betrachten wir die Menge

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq o, \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$$

und die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j} \cdot Ax, \quad x \in K.$$

K ist nichtleer, abgeschlossen, beschränkt sowie konvex, und wegen $A > O$ ist die Funktion $f(x)$, $x \in K$ wohldefiniert und stetig. Außerdem gilt $f(K) \subseteq K$. Der Fixpunktsatz von Brouwer (Satz A.2.1) garantiert nun die Existenz eines $x^* \in K$ mit $x^* = f(x^*)$. Daher ist

$$Ax^* = \lambda^* x^* \quad \text{mit} \quad \lambda^* := \sum_{j=1}^n (Ax^*)_j. \quad (\text{A.9})$$

Wegen $A > O$ und $x^* \in K$ folgt außerdem $Ax^* > o$, was dann wegen (A.9) zunächst $\lambda^* > 0$ und dann $x^* > o$ impliziert. Für die Matrix $D := \text{diag}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ gilt dann wegen Lemma A.1.4 und Lemma A.1.2 (falls man als Vektornorm die Maximumnorm zu Grunde legt)

$$\rho(A) \leq \|A\|_{D^{-1}} = \|D^{-1}AD\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax^*)_i}{x_i^*} = \lambda^*.$$

Mit $\lambda^* \leq \rho(A)$ folgt schließlich $\lambda^* = \rho(A)$.

2. Fall: Es sei $A \geq O$. Dann betrachten wir die Matrix $A(t) := A + t \cdot F$, wobei F die Matrix bezeichne, bei der jedes Element 1 ist. Für $t > 0$ ist dann

$A(t) > O$, und es folgt mit dem 1. Fall, dass es einen Vektor $u(t) \in K$, $u(t) > o$ gibt mit

$$A(t)u(t) = \rho(A(t))u(t).$$

Da die Eigenwerte einer Matrix stetig von den Elementen der Matrix abhängen, gilt²

$$A(t) \rightarrow A \quad \text{und} \quad \rho(A(t)) \rightarrow \rho(A)$$

für $t \rightarrow +0$. Des Weiteren ist K abgeschlossen und beschränkt. Daher existiert ein Häufungspunkt $u \in K$ von $u(t)$ für $t \rightarrow +0$. Jeder solche Häufungspunkt u erfüllt dann $u \geq o$, $u \neq o$ und $Au = \rho(A)u$. \square

Lemma A.2.1 *Es seien $A, H, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = H - N$. Weiter seien A und H regulär mit $H^{-1}N \geq O$ sowie $A^{-1}N \geq O$. Dann gilt $\rho(H^{-1}N) < 1$.*

Beweis: Es ist $H^{-1}N \geq O$. Nach dem Satz von Perron, Frobenius (Satz A.2.2) existiert ein Vektor

$$x \geq o, x \neq o \quad \text{mit} \quad H^{-1}Nx = \rho(H^{-1}N)x. \quad (\text{A.10})$$

Außerdem sind A und H regulär. Dann ist

$$A^{-1}N = (H - N)^{-1}N = \left(H(E - H^{-1}N) \right)^{-1}N = (E - H^{-1}N)^{-1}H^{-1}N.$$

Aus (A.10) folgt nun einerseits

$$(E - H^{-1}N)x = (1 - \rho(H^{-1}N))x$$

bzw.

$$(E - H^{-1}N)^{-1}x = \frac{1}{1 - \rho(H^{-1}N)}x.$$

Andererseits folgt aus (A.10) zusammen mit $A^{-1}N \geq O$

$$o \leq A^{-1}Nx = (E - H^{-1}N)^{-1}H^{-1}Nx = \frac{\rho(H^{-1}N)}{1 - \rho(H^{-1}N)}x.$$

Somit gilt $\rho(H^{-1}N) < 1$. \square

Satz A.2.3 (Lemma von Farkas) *Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat*

$$Ax = b, \quad x \geq o \quad (\text{A.11})$$

genau dann eine Lösung, wenn für jedes $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u^T A \geq o^T$ auch $u^T b \geq 0$ folgt.

² Siehe etwa Satz 3.1.2 in [82]. Jedoch wird auch dort auf ein starkes Hilfsmittel aus der Funktionentheorie zurückgegriffen: Der Satz von Rouché.

Beweis: i) Es sei \tilde{x} eine Lösung von (A.11). Dann gilt

$$u^T b = u^T A \tilde{x} \geq 0$$

für alle u mit $u^T A \geq o^T$.

ii) Wir setzen voraus, dass jedes $u \in \mathbb{R}^m$ mit $u^T A \geq o^T$ auch $u^T b \geq 0$ erfüllt, und nehmen an, (A.11) habe keine Lösung. Dann gilt

$$b \notin K := \{y = Ax, x \geq o\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Da K abgeschlossen und nichtleer ist, existiert aus Stetigkeitsgründen ein $m \in K$ mit

$$\|b - m\|_2 = \min_{y \in K} \|b - y\|_2.$$

Es gilt

$$(b - m)^T (y - m) \leq 0 \text{ für alle } y \in K. \quad (\text{A.12})$$

Gäbe es nämlich ein $\tilde{y} \in K$ mit $(b - m)^T (\tilde{y} - m) > 0$, so wäre, da K konvex ist,

$$y(\lambda) := m + \lambda(\tilde{y} - m) \in K \text{ für alle } \lambda \in [0, 1],$$

und es würde gelten

$$\begin{aligned} \|b - y(\lambda)\|_2^2 &= \|b - m\|_2^2 - 2\lambda(b - m)^T (\tilde{y} - m) + \lambda^2 \|\tilde{y} - m\|_2^2 \\ &= \|b - m\|_2^2 + F(\lambda). \end{aligned}$$

Da $F(0) = 0$ und $F'(0) = -2(b - m)^T (\tilde{y} - m) < 0$ ist, gilt für hinreichend kleine $\lambda > 0$

$$F(\lambda) < 0, \quad \|b - y(\lambda)\|_2 < \|b - m\|_2.$$

Dies steht im Widerspruch zur Definition von m . Daher gilt (A.12).

Da $o \in K$ und $2m \in K$, folgt aus (A.12)

$$(b - m)^T m = 0, \quad (b - m)^T y \leq 0 \text{ für alle } y \in K. \quad (\text{A.13})$$

Setzen wir $u := m - b$, so gilt also $u^T y \geq 0$ für alle $y \in K$. Da $A_i \in K$ für alle $i = 1, \dots, n$ ist, gilt speziell

$$u^T A_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

bzw. $u^T A \geq o^T$. Andererseits gilt wegen (A.13)

$$u^T b = b^T u = b^T (m - b) = (b - m)^T (m - b) = -\|u\|_2^2 < 0,$$

denn es ist $u \neq o$ wegen $m \in K$, $b \notin K$. Es gibt also einen Vektor $u \in \mathbb{R}^m$, welcher sowohl $u^T A \geq o^T$ als auch $u^T b < 0$ erfüllt. Dies ist nach Voraussetzung nicht möglich. Daher ist die Annahme falsch und (A.11) lösbar. \square

A.3 Stochastische Differentialgleichungen

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition A.3.1 *Ein stochastischer Prozess ist eine Funktion $X(t, \omega) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt.*

1. Für festes t ist $X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.
Für $X(t, \cdot)$ schreibt man auch X_t .
2. Für festes $\omega \in \Omega$ ist $X(\cdot, \omega) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion im herkömmlichen Sinn. Man spricht auch von der Realisierung $X(\cdot, \omega)$ für $\omega \in \Omega$ bzw. vom Pfad.

Man beachte, dass bei der Definition keinerlei Annahmen über den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ vorausgesetzt werden. Wichtig ist nur, dass alle Zufallsvariablen X_t auf demselben Raum definiert sind.

Beispiel A.3.1 (Der Wiener-Prozess.) Der Wiener-Prozess wird mit W bezeichnet und ist für $t \geq 0$ definiert. Die Definition des Wiener-Prozesses ergibt sich aus der von N. Wiener eingeführten mathematischen Beschreibung der Brownschen Bewegung, die in der Physik die zufällige Bewegung eines auf einer Wasseroberfläche schwimmenden Teilchens beschreibt. Der Wiener Prozess hat folgende Eigenschaften:

1. $W_0 = 0$.
2. Für $0 \leq s < t$ ist $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, insbesondere folgt $W_t \sim N(0, t)$. Dabei bezeichnet $N(0, t - s)$ die Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.
3. Der Prozess hat unabhängige Zuwächse (Änderungen), d.h. für bel. $0 \leq r < s \leq t < u$ sind die Zufallsgrößen $W_s - W_r$ und $W_u - W_t$ unabhängig.
4. W_t ist stetig in t .

Eigenschaft 1. ist lediglich eine Festlegung des Ursprungs des Koordinatensystems. Die Eigenschaft 2. bedeutet, dass die Streuung der Werte der Pfade $W(t, \omega)$ größer wird, wenn t größer wird. Der Mittelwert ist dabei zu jedem Zeitpunkt gleich 0. Die Eigenschaft 3. besagt, dass man aus der Kenntnis eines Teilstückes eines Pfades auf einem Intervall keinerlei Vorhersagen über den Verlauf auf einem anderen Intervall machen kann. Der Pfad kann sich also zu jedem Zeitpunkt mit exakt der gleichen Wahrscheinlichkeit nach oben oder unten bewegen, egal welchen Verlauf er bis zu diesem Zeitpunkt genommen hat. \square

Beispiel A.3.2 (Der Itô-Prozess) Ein Itô-Prozess wird eine Lösung einer so genannten Itô-stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t \quad (\text{A.14})$$

genannt. Dabei ist die obige Schreibweise nur symbolisch für die Integralgleichung

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s, s) dW_s.$$

Das zweite Integral ist ein Itô-Integral über einen Wiener-Prozess W_t , welches wie folgt definiert ist. Sei $F(t, \omega)$ ein stochastischer Prozess, der auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definiert ist wie W . Wähle $N \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Zeiten $\tau_i^{(N)}$, $i = 0, 1, \dots, N$ mit

$$t_0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = t_1$$

mit $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta(N) = 0$, wobei $\delta(N) = \max\{\tau_i^{(N)} - \tau_{i-1}^{(N)} : i = 1, \dots, N\}$. Für jedes $\omega \in \Omega$ wird

$$I^{(N)}(F)(\omega) := \sum_{i=0}^{N-1} F(\tau_i^{(N)}, \omega) \cdot (W(\tau_{i+1}^{(N)}, \omega) - W(\tau_i^{(N)}, \omega))$$

gesetzt und $\int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t$ definiert zu

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t := \lim_{N \rightarrow \infty} I^{(N)}(F)(\omega).$$

Dabei ist der Limes nicht pfadweise zu verstehen, sondern als Zufallsvariable basierend auf dem Begriff der Quadrat-Mittel-Konvergenz, der wie folgt definiert ist. Eine Folge von Zufallsvariablen X_N konvergiert im Quadrat-Mittel-Sinne gegen eine Zufallsvariable X , falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(|X_N - X|^2) = 0$$

gilt. E bezeichnet dabei den Erwartungswert. □

Als zentrales Hilfsmittel bei der Herleitung der Black-Scholes-(Un)gleichung wird die Itô-Formel benutzt, die im folgenden Satz festgehalten ist. Die Formel kann als Kettenregel aufgefasst werden.

Satz A.3.1 (Itô-Formel) X_t sei eine Lösung von (A.14) und $g(x, t)$ sei eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$. Dann ist $Y_t := g(X_t, t)$ eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + a \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial g}{\partial x} dW_t$$

(mit dem gleichen Wiener-Prozess).

Für einen Beweis von Satz A.3.1 und für eine tiefere Einführung in den Itô-Kalkül verweisen wir auf das Buch [27] von T. Deck.

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1.2.1: Betrachtet wird $LCP(q, M)$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

1. Fall: $z = o$. Dann gilt $w = q = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} \not\geq o$. Dieser Fall führt auf keine Lösung.
2. Fall: $w = o$. Dann betrachten wir das Tableau:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & q \\ \hline -2 & -7 & -4 \\ -6 & -5 & -5 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & q \\ \hline 2 & 7 & 4 \\ 0 & 16 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Es folgt $z_2 = \frac{7}{16}$ und damit dann $z_1 = \frac{15}{32}$. Somit ist

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $LCP(q, M)$.

3. Fall: $w_1 = 0, z_2 = 0$. Dann betrachten wir das Tableau:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & w_2 & q \\ \hline -2 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & -5 \\ \hline \end{array}$$

Es folgt $z_1 = 2$ und damit dann $w_2 = 7$. Somit ist

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine zweite Lösung von $LCP(q, M)$.

4. Fall: $z_1 = 0, w_2 = 0$. Wir betrachten das Tableau:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline w_1 & z_2 & q \\ \hline 1 & -7 & -4 \\ 0 & -5 & -5 \\ \hline \end{array}$$

Es folgt $z_2 = 1$ und damit dann $w_1 = 3$. Somit ist

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine dritte Lösung von $LCP(q, M)$.

Aufgabe 1.2.2: Betrachtet wird $LCP(q, M)$ mit

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

1. Fall: $z = o$. Dann gilt $w = q = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{pmatrix} \not\geq o$. Dieser Fall führt auf keine Lösung.

2. Fall: $w = o$. Dann betrachten wir das Tableau:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & q \\ \hline 1 & -1 & -2\varepsilon \\ 5 & -5 & -6\varepsilon \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & z_2 & q \\ \hline 1 & -1 & -2\varepsilon \\ 0 & 0 & 4\varepsilon \\ \hline \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

3. Fall: $w_1 = 0, z_2 = 0$. Dann betrachten wir das Tableau:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline z_1 & w_2 & q \\ \hline 1 & 0 & -2\varepsilon \\ 5 & 1 & -6\varepsilon \\ \hline \end{array}$$

Es folgt $z_1 = -2\varepsilon$ und damit dann $w_2 = 4\varepsilon$. Somit führt dieser Fall auf keine Lösung.

4. Fall: $z_1 = 0, w_2 = 0$. Wir betrachten das Tableau:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline w_1 & z_2 & q \\ \hline 1 & -1 & -2\varepsilon \\ 0 & -5 & -6\varepsilon \\ \hline \end{array}$$

Es folgt $z_2 = \frac{6}{5}\varepsilon$ und damit dann $w_1 = -\frac{4}{5}\varepsilon$. Somit führt dieser Fall auf keine Lösung.

Aufgabe 1.2.3: Betrachtet wird $LCP(q, M)$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Fall: $z = o$. Dann gilt $w = q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \not\geq o$. Dieser Fall führt auf keine Lösung.

2. Fall: $w = o$. Dann gilt

$$z = -M^{-1} \cdot q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $LCP(q, M)$.

3. Fall: $w_1 = 0, z_2 = 0$. Also betrachte das Tableau:

z_1	w_2	q
-1	0	-1
-1	1	0

Es folgt $z_1 = 1$ und damit dann $w_2 = 1$. Somit ist

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $LCP(q, M)$.

4. Fall: $z_1 = 0, w_2 = 0$. Also betrachte das Tableau:

w_1	z_2	q
1	-2	-1
0	0	0

Dieses lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Wir können $z_2 = t$ mit $t \geq 0$ wählen. Daraus folgt dann

$$w_1 = -1 + 2t \stackrel{!}{\geq} 0.$$

Somit ist für jedes $t \geq \frac{1}{2}$

$$w = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $LCP(q, M)$.

Aufgabe 1.2.4:

```

program basisvariablenfelder;
use mv_ari;
function zweihoch(n:integer):integer;
begin
if n=0 then zweihoch:=1
           else zweihoch:=2*zweihoch(n-1);
end;

procedure haupt(n,k:integer);
var Y           : rmatrix[1..k,1..n];
    i,j,spalte,ende : integer;
begin
Y[1,1]:=1; Y[2,1]:=-1;

spalte:=1; ende:=2;

```

```

while spalte < n do
begin {while}
    spalte:=spalte+1;

    {bisherige Daten uebertragen}
    for i:= ende+1 to 2*ende do
    for j:= 1 to spalte -1 do Y[i,j]:=Y[i-ende,j];

    {letzte Spalte auffuellen}
    for i:= 1 to ende do Y[i,spalte]:=1;
    for i:= ende +1 to 2*ende do Y[i,spalte]:=-1;

    ende := 2*ende;

end{while};

for i:= 1 to k do begin
    write(' ');
    for j:= 1 to n do if Y[i,j]=1 then write('w',j,' ')
                        else write('z',j,' ');
    writeln(')');
end;
end;

var n,k : integer;

begin
writeln('Geben Sie die Dimension ein !');
read(n);
k:=zweihoch(n);
haupt(n,k);
end.

```

Aufgabe 2.4.1: Es ist $w \geq 0$, $z \geq 0$ und

$$q + Mz = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w.$$

Zuletzt gilt $w^T z = 0$. Somit lösen w und z das LCP.

Für den Lemke-Algorithmus ergibt sich allerdings

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(0)}$
1	0	0	0	0	2	-1	3
0	1	0	-1	-1	-1	-1	-2
0	0	1	2	-3	0	-1	-3

Es ist $q_3^{(0)} = \min_{1 \leq i \leq 3} q_i^{(0)}$. Somit ist $t = 3$ und das erste Pivotelement lautet $a_{37}^{(0)}$.

Nach einem Gauß-Jordan-Schritt erhält man

BVF ₁	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(1)}$	$q_i^{(1)}/a_{ij_0}^{(1)} : a_{ij_0}^{(1)} > 0$
$'w_1'$	1	0	-1	-2	3	2	0	6	3
$'w_2'$	0	1	-1	-3	2	-1	0	1	-
$'z_0'$	0	0	-1	-2	3	0	1	3	-

Es ist $q_t^{(1)} > 0$. $'w_3'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3 + 3 = 6$. Als Pivotzeilenindex ergibt sich $i_0 = 1$. Somit ist das zweite Pivotelement $a_{16}^{(1)}$. Nach einem Gauß-Jordan-Schritt erhält man

BVF ₂	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(2)}$
$'z_3'$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	1	0	3
$'w_2'$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	-4	$\frac{7}{2}$	0	0	4
$'z_0'$	0	0	-1	-2	3	0	1	3

Es ist $q_t^{(2)} > 0$. $'w_1'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3 + 1 = 4$. Für diese Pivotzeile gilt jedoch

$$A_{\cdot j_0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} < o.$$

Daher endet der Lemke-Algorithmus durch Ray-Termination.

Aufgabe 2.4.2: Es ist $w \geq o, z \geq o$ und

$$q + Mz = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = o = w.$$

Wegen $w^T z = 0$ lösen w, z das LCP.

Der Lemke-Algorithmus liefert allerdings

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(0)}$
1	0	0	-2	-3	-1	-1	-5
0	1	0	2	0	-3	-1	1
0	0	1	-4	2	-1	-1	-9

Es ist $q_3^{(0)} = \min_{1 \leq i \leq 3} q_i^{(0)}$. Somit ist $t = 3$ und das erste Pivotelement lautet $a_{37}^{(0)}$.

Nach einem Gauß-Jordan-Schritt erhält man

BVF ₁	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(1)}$	$q_i^{(1)}/a_{ij_0}^{(1)} : a_{ij_0}^{(1)} > 0$
' w_1 '	1	0	-1	2	-5	0	0	4	-
' w_2 '	0	1	-1	6	-2	-2	0	10	-
' z_0 '	0	0	-1	4	-2	1	1	9	9

Es ist $q_t^{(1)} > 0$. ' w_3 ' hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3 + 3 = 6$. Als Pivotzeilenindex ergibt sich $i_0 = 3$. Somit wird ' z_0 ' das Basisvariablenfeld verlassen. Nach einem Gauß-Jordan-Schritt erhält man

BVF ₂	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(2)}$
' w_1 '	1	0	*	*	*	0	*	4
' w_2 '	0	1	*	*	*	0	*	28
' z_3 '	0	0	*	*	*	1	*	9

Somit bilden

$$w = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $LCP(q, M)$.

Aufgabe 2.4.3: Wir betrachten das $LCP(q, M)$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Lemke-Algorithmus beginnt mit

w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(0)}$
1	0	0	-1	-2	0	-1	-1
0	1	0	0	-1	-2	-1	-1
0	0	1	-2	0	-1	-1	-1

Es ist $\min_{1 \leq i \leq 3} q_i^{(0)}$ nicht eindeutig bestimmt. Wie in der Aufgabenstellung erwünscht, wählen wir den kleinsten Index. Somit ist $t = 1$ und $a_{17}^{(0)}$ wird Pivotelement. Nach einem Gauß-Jordan-Schritt erhält man

BVF ₁	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(1)}$	$q_i^{(1)}/a_{ij_0}^{(1)} : a_{ij_0}^{(1)} > 0$
' z_0'	-1	0	0	1	2	0	1	1	1
' w_2'	-1	1	0	1	-2	0	0	0	0
' w_3'	-1	0	1	-1	2	-1	0	0	-

Es ist $q_t^{(1)} > 0$. ' w_1' ' hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3 + 1 = 4$. Der Pivotzeilenindex ist durch (2.12) eindeutig definiert. Es ist $i_0 = 2$. Somit wird $a_{24}^{(1)}$ Pivotelement und nach einem Gauß-Jordan-Schritt erhält man

BVF ₂	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(2)}$	$q_i^{(2)}/a_{ij_0}^{(2)} : a_{ij_0}^{(2)} > 0$
' z_0'	0	-1	0	0	1	2	1	1	1
' z_1'	-1	1	0	1	-2	0	0	0	0
' w_3'	-2	1	1	0	3	-3	0	0	0

Es ist $q_t^{(2)} > 0$. ' w_2' ' hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3 + 2 = 5$. Diesmal ist der Pivotzeilenindex nicht eindeutig durch (2.12) bestimmt. Wie in der Aufgabenstellung erwünscht, wählen wir den kleinsten Index, der (2.12) erfüllt. Somit ist $i_0 = 2$ und es wird $a_{25}^{(2)}$ Pivotelement. Nach einem Gauß-Jordan-Schritt erhält man

BVF ₃	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(3)}$	$q_i^{(3)}/a_{ij_0}^{(3)} : a_{ij_0}^{(3)} > 0$
' z_0'	1	-2	0	-1	0	4	1	1	1
' z_2'	-1	1	0	1	1	-2	0	0	-
' w_3'	1	-2	1	-3	0	3	0	0	0

Es ist $q_t^{(3)} > 0$. $'z_1'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 1$. Der Pivotzeilenindex ist durch (2.12) eindeutig definiert. Es ist $i_0 = 3$. Somit wird $a_{31}^{(3)}$ Pivotelement und nach einem Gauß–Jordan-Schritt erhält man

BVF ₄	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(4)}$	$q_i^{(4)}/a_{ij_0}^{(4)} : a_{ij_0}^{(4)} > 0$
$'z_0'$	0	0	-1	2	0	1	1	1	1
$'z_2'$	0	-1	1	-2	1	1	0	0	0
$'w_1'$	1	-2	1	-3	0	3	0	0	0

Es ist $q_t^{(4)} > 0$. $'w_3'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3 + 3 = 6$. Wiederum ist der Pivotzeilenindex nicht eindeutig durch (2.12) bestimmt. Wie in der Aufgabenstellung erwünscht, wählen wir den kleinsten Index, der (2.12) erfüllt. Somit ist $i_0 = 2$ und es wird $a_{26}^{(4)}$ Pivotelement. Nach einem Gauß–Jordan-Schritt erhält man

BVF ₅	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(5)}$	$q_i^{(5)}/a_{ij_0}^{(5)} : a_{ij_0}^{(5)} > 0$
$'z_0'$	0	1	-2	4	-1	0	1	1	1
$'z_3'$	0	-1	1	-2	1	1	0	0	–
$'w_1'$	1	1	-2	3	-3	0	0	0	0

Es ist $q_t^{(5)} > 0$. $'z_2'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 2$. Der Pivotzeilenindex ist durch (2.12) eindeutig definiert. Es ist $i_0 = 3$. Somit wird $a_{32}^{(5)}$ Pivotelement und nach einem Gauß–Jordan-Schritt erhält man

BVF ₆	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(6)}$	$q_i^{(6)}/a_{ij_0}^{(6)} : a_{ij_0}^{(6)} > 0$
$'z_0'$	-1	0	0	1	2	0	1	1	1
$'z_3'$	1	0	-1	1	-2	1	0	0	0
$'w_2'$	1	1	-2	3	-3	0	0	0	0

Es ist $q_t^{(6)} > 0$. $'w_1'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3 + 1 = 4$. Wiederum ist der Pivotzeilenindex nicht eindeutig durch (2.12) bestimmt. Wie in der Aufgabenstellung erwünscht, wählen wir den kleinsten Index, der (2.12) erfüllt. Somit ist $i_0 = 2$ und es wird $a_{24}^{(6)}$ Pivotelement.

Nach einem Gauß–Jordan-Schritt erhält man

BVF ₇	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(7)}$	$q_i^{(7)} / a_{i j_0}^{(7)} : a_{i j_0}^{(7)} > 0$
$'z_0'$	-2	0	1	0	4	-1	1	1	1
$'z_1'$	1	0	-1	1	-2	1	0	0	–
$'w_2'$	-2	1	1	0	3	-3	0	0	0

Es ist $q_t^{(7)} > 0$. $'z_3'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Somit wird $j_0 = 3$. Der Pivotzeilenindex ist durch (2.12) eindeutig definiert. Es ist $i_0 = 3$. Somit wird $a_{33}^{(7)}$ Pivotelement und nach einem Gauß–Jordan-Schritt erhält man

BVF ₈	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$q^{(8)}$	$q_i^{(8)} / a_{i j_0}^{(8)} : a_{i j_0}^{(8)} > 0$
$'z_0'$	0	-1	0	0	1	2	1	1	1
$'z_1'$	-1	1	0	1	1	-2	0	0	0
$'w_3'$	-2	1	1	0	3	-3	0	0	0

Es ist also $BVF_2 = BVF_8$, und die Basisvariablenfelder wiederholen sich ab jetzt. Es gilt

$$BVF_{k+6} = BVF_k, \quad k \geq 2.$$

Es kommt zu einem Zyklus und der Lemke-Algorithmus terminiert somit nicht.

Aufgabe 2.4.4: Es sei $q_t = \min_{1 \leq i \leq m+n} q_i$. Wegen $q \not\geq o$ gilt dann $q_t < 0$, wobei t nicht eindeutig definiert zu sein braucht.

1. Fall: $t \in \{1, \dots, m\}$. Dann erhält man aus dem Tableau

$$(A^{(0)} | q^{(0)}) = \left(E_{.1} \cdots E_{.m+n} \begin{array}{cc} O & -A \\ -B & O \end{array} -e \middle| q^{(0)} \right)$$

nach einem Gauß–Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{t m+n+1}^{(0)}$ das Tableau

$$\left(E_{.1} \cdots E_{.t-1} -e E_{.t+1} \cdots E_{.m+n} \begin{array}{cc} O & * \\ -B & * \end{array} E_{.t} \middle| q^{(1)} \right)$$

und das Basisvariablenfeld

$$BVF_1 = ('w_1', \dots, 'w_{t-1}', 'z_0', 'w_{t+1}', \dots, 'w_{m+n}').$$

Wegen $t \in \{1, \dots, m\}$ wird eine Spalte aus der Blockmatrix $\begin{pmatrix} O \\ -B \end{pmatrix}$ Pivotspalte. Wegen $B \geq O$ endet der Lemke-Algorithmus in Ray-Termination.

2. Fall: $t \in \{m+1, \dots, m+n\}$. Dann erhält man aus dem Tableau

$$(A^{(0)} | q^{(0)}) = \left(E_{.1} \cdots E_{.m+n} \begin{array}{c} O \quad -A \\ -B \quad O \end{array} -e \middle| q^{(0)} \right)$$

nach einem Gauß-Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{tm+n+1}^{(0)}$ das Tableau

$$\left(E_{.1} \cdots E_{.t-1} -e \quad E_{.t+1} \cdots E_{.m+n} \begin{array}{c} * \quad -A \\ * \quad O \end{array} E_{.t} \middle| q^{(1)} \right)$$

und das Basisvariablenfeld

$$\text{BVF}_1 = ('w_1', \dots, 'w_{t-1}', 'z_0', 'w_{t+1}', \dots, 'w_{m+n}').$$

Wegen $t \in \{m+1, \dots, m+n\}$ wird eine Spalte aus der Blockmatrix $\begin{pmatrix} -A \\ O \end{pmatrix}$ Pivotspalte. Wegen $A \geq O$ endet der Lemke-Algorithmus durch Ray-Termination.

Aufgabe 2.4.5: Mit

$$\text{BVF}_1 = ('w_1', \dots, 'w_{t-1}', 'z_0', 'w_{t+1}', \dots, 'w_n')$$

wird $'z_t' \in \text{BVF}_2$ gelten. Für $'z_t'$ wird ein $'w_i'$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq t$ das Basisvariablenfeld BVF_1 verlassen müssen. Dann wird $'z_i' \in \text{BVF}_3$ gelten. Somit gilt $\text{BVF}_1 \neq \text{BVF}_3$.

Aufgabe 2.5.1:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 150px; height: 100px;"> <thead> <tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>b</th><th>E</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>2</td><td>-1</td><td>2</td><td>1 0 0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>0 1 0</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>0 0 1</td></tr> </tbody> </table>	x_1	x_2	x_3	b	E	0	2	-1	2	1 0 0	1	2	0	4	0 1 0	2	1	4	5	0 0 1	\rightsquigarrow	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 150px; height: 100px;"> <thead> <tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th></th><th></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>2</td><td>-1</td><td>2</td><td>1 0 0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>0 1 0</td></tr> <tr><td>0</td><td>-3</td><td>4</td><td>-3</td><td>0 -2 1</td></tr> </tbody> </table>	x_1	x_2	x_3			0	2	-1	2	1 0 0	1	2	0	4	0 1 0	0	-3	4	-3	0 -2 1
x_1	x_2	x_3	b	E																																						
0	2	-1	2	1 0 0																																						
1	2	0	4	0 1 0																																						
2	1	4	5	0 0 1																																						
x_1	x_2	x_3																																								
0	2	-1	2	1 0 0																																						
1	2	0	4	0 1 0																																						
0	-3	4	-3	0 -2 1																																						
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 150px; height: 100px;"> <thead> <tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th></th><th></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{5}{3}$</td><td>0</td><td>1 $-\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>$\frac{8}{3}$</td><td>2</td><td>0 $-\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>$-\frac{4}{3}$</td><td>1</td><td>0 $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$</td></tr> </tbody> </table>	x_1	x_2	x_3			0	0	$\frac{5}{3}$	0	1 $-\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{8}{3}$	2	0 $-\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$	1	0 $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	\rightsquigarrow	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 150px; height: 100px;"> <thead> <tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th></th><th></th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1 $\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$ $\frac{2}{5}$</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0 $-\frac{8}{5}$ $\frac{9}{5}$ $-\frac{2}{5}$</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0 $\frac{4}{5}$ $-\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$</td></tr> </tbody> </table>	x_1	x_2	x_3			0	0	1	0	1 $\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$ $\frac{2}{5}$	1	0	0	2	0 $-\frac{8}{5}$ $\frac{9}{5}$ $-\frac{2}{5}$	0	1	0	1	0 $\frac{4}{5}$ $-\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$
x_1	x_2	x_3																																								
0	0	$\frac{5}{3}$	0	1 $-\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$																																						
1	0	$\frac{8}{3}$	2	0 $-\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$																																						
0	1	$-\frac{4}{3}$	1	0 $\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$																																						
x_1	x_2	x_3																																								
0	0	1	0	1 $\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$ $\frac{2}{5}$																																						
1	0	0	2	0 $-\frac{8}{5}$ $\frac{9}{5}$ $-\frac{2}{5}$																																						
0	1	0	1	0 $\frac{4}{5}$ $-\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$																																						

Somit ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 & 9 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.6.1: Wir betrachten $LCP(q, M)$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $q \not\geq o$ und $\min\{q_1, q_2\} = \min\{-1\} = -1$. Der erste Pivotzeilenindex lautet $t = 1$. Wir erhalten

$$(A^{(1)} | q^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

nach einem Gauß–Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{15}^{(0)}$. Von jetzt an betrachten wir die erweiterten Tableaus. Als erstes erweitertes Tableau erhalten wir

BVF ₁	w_1	w_2	z_1	z_2	z_0	$(q^{(1)} : (B^{(1)})^{-1})$
' z_0 '	-1	0	2	1	1	1 : 1 0
' w_2 '	-1	1	2	0	0	1 : 0 1

' w_1 ' hat das Basisvariablenfeld verlassen. Daher ist $j_0 = 2 + 1 = 3$ der neue Pivotspaltenindex. Die Indizes, für die in (2.12) das Minimum angenommen werden, lauten $J = \{1, 2\}$. Es ist $t = 1 \in J$. Daher wählen wir $i_0 = 1$. Nach einem Gauß–Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{13}^{(1)}$ erhält man

BVF ₂	w_1	w_2	z_1	z_2	z_0	
' z_1 '	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ 0
' w_2 '	0	1	0	-1	-1	0 : -1 1

Man erhält, dass

$$w = o \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$LCP(q, M)$ lösen.

Aufgabe 2.6.2: Wir betrachten $LCP(q, M)$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $q \not\geq o$ und $\min\{q_1, q_2, q_3\} = \min\{-1\} = -1$. Der erste Pivotzeilenindex lautet $t = 1$. Wir erhalten

$$(A^{(1)} | q^{(1)}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

nach einem Gauß–Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{17}^{(0)}$. Das Basisvariablenfeld lautet $\text{BVF}_1 = (z_0', w_2', w_3')$. Von jetzt an betrachten wir die erweiterten Tableaus. Als erstes erweitertes Tableau erhalten wir

BVF ₁	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$(q^{(1)} \dot{:} (B^{(1)})^{-1})$
$'z_0'$	-1	0	0	2	0	0	1	$1 \dot{:} 1 \quad 0 \quad 0$
$'w_2'$	-1	1	0	5	-1	0	0	$2 \dot{:} 0 \quad 1 \quad 0$
$'w_3'$	-1	0	1	5	1	-2	0	$2 \dot{:} 0 \quad 0 \quad 1$

$'w_1'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Daher ist $j_0 = 3 + 1 = 4$ der neue Pivotspaltenindex. Die Indizes, für die in (2.12) das Minimum angenommen werden, sind vereinigt in $J = \{2, 3\}$. Es ist $t = 1 \notin J$ und das lexikographische Minimum von

$$V := \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist der zweite Zeilenvektor. Daher ist $i_0 = 3$. Nach einem Gauß–Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{34}^{(1)}$ erhält man

BVF ₂	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$(q^{(2)} \dot{:} (B^{(2)})^{-1})$
$'z_0'$	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{5} \dot{:} 1 \quad 0 \quad -\frac{2}{5}$
$'w_2'$	0	1	-1	0	-2	2	0	$0 \dot{:} 0 \quad 1 \quad -1$
$'z_1'$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5} \dot{:} 0 \quad 0 \quad \frac{1}{5}$

$'w_3'$ hat das Basisvariablenfeld verlassen. Daher ist $j_0 = 3 + 3 = 6$ der neue Pivotspaltenindex. Mit (2.12) erhält man $i_0 = 2$.

Nach einem Gauß–Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{26}^{(2)}$ erhält man

BVF ₃	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$(q^{(3)} \dot{:} (B^{(3)})^{-1})$
' z_0'	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	0	1	$\frac{1}{5} \dot{:} 1 \quad -\frac{2}{5} \quad 0$
' z_3'	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	0	$0 \dot{:} 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$
' z_1'	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{5} \dot{:} 0 \quad \frac{1}{5} \quad 0$

' w_2' hat das Basisvariablenfeld verlassen. Daher ist $j_0 = 3 + 2 = 5$ der neue Pivotspaltenindex. Da in der Pivotspalte lediglich $a_{15}^{(3)} > 0$ gilt, ist $i_0 = 1$. Nach einem Gauß–Jordan-Schritt mit Pivotelement $a_{15}^{(3)}$ wird ' z_0' das Basisvariablenfeld verlassen und der Algorithmus ist zu Ende. Man erhält

BVF ₄	w_1	w_2	w_3	z_1	z_2	z_3	z_0	$(q^{(4)} \dot{:} (B^{(4)})^{-1})$
' z_2'	-6	-1	0	0	1	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2} \dot{:} \frac{5}{2} \quad -1 \quad 0$
' z_3'	-6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2} \dot{:} \frac{5}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$
' z_1'	$-\frac{7}{5}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \dot{:} \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0$

Man erhält, dass

$$w = o \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$LCP(q, M)$ lösen.

Aufgabe 2.6.3: Es ist $(B^{(1)})^{-1} = E$,

$$(B^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^{(3)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

$$(B^{(4)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad (B^{(5)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.1.1: Es sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq o$. Da M eine P-Matrix ist, existiert nach Satz 3.1.1 ein Index $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$x_{i_0} (M \cdot x)_{i_0} > 0.$$

Es ist

$$x_{i_0}((E - D + DM) \cdot x)_{i_0} = (1 - d_{i_0}) \cdot x_{i_0}^2 + d_{i_0} x_{i_0} (M \cdot x)_{i_0}.$$

Für $d_{i_0} = 0$ ist

$$(1 - d_{i_0}) \cdot x_{i_0}^2 + d_{i_0} x_{i_0} (M \cdot x)_{i_0} = x_{i_0}^2 > 0,$$

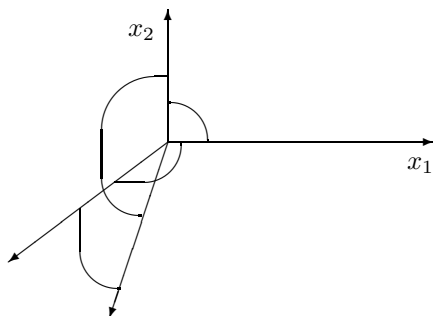
da wegen $x_{i_0} (M \cdot x)_{i_0} > 0$ insbesondere $x_{i_0} \neq 0$ gelten muss.

Für $d_{i_0} \in (0, 1]$ erhält man dann

$$\underbrace{(1 - d_{i_0}) \cdot x_{i_0}^2}_{\geq 0} + \underbrace{d_{i_0} x_{i_0} (M \cdot x)_{i_0}}_{> 0} > 0.$$

Wiederum mit Satz 3.1.1 folgt, dass dann $E - D + DM$ eine P-Matrix ist.

Aufgabe 3.1.2: Man erhält die folgende Abbildung:



Das bedeutet:

a) Die vier komplementären Kegel überdecken den \mathbb{R}^2 . Daher ist $LCP(q, M)$ für jedes $q \in \mathbb{R}^2$ lösbar.

b) $q = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ liegt in der Schnittmenge von genau drei komplementären Kegeln. Daher hat $LCP(q, M)$ genau drei Lösungen.

Aufgabe 3.1.3: Induktionsanfang: $i = 1$. Es bezeichne

$$s := \sum_{j=1}^n 2^j.$$

Dann ist

$$s = 2s - s = \sum_{j=1}^n 2^{j+1} - \sum_{j=1}^n 2^j = 2^{n+1} - 2.$$

Somit ist $2^{n+1} - \sum_{j=1}^n 2^j = 2^1$.

Induktionsschluss: $i \rightsquigarrow i + 1$.

$$2^{n+1} - \sum_{j=i+1}^n 2^j = 2^{n+1} - \sum_{j=i}^n 2^j + 2^i = 2^i + 2^i = 2 \cdot 2^i = 2^{i+1}.$$

Setzt man $\mu := 2^{n+1} - \lambda$, so folgt

$$q + \mu \cdot e = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^n 2^j \\ \vdots \\ -\sum_{j=i}^n 2^j \\ \vdots \\ -\sum_{j=n}^n 2^j \end{pmatrix} + (2^{n+1} - \lambda) \cdot e = \begin{pmatrix} 2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ 2^n \end{pmatrix} - \lambda \cdot e = p - \lambda \cdot e.$$

Aufgabe 3.1.4: Das Basisvariablenfeld, welches zur eindeutigen Lösung gehört, wird in Satz 3.1.6 rekursiv in Abb. 3.4 bestimmt. Es lautet

$$\left({}'w_1', \dots, {}'w_{n-1}', {}'z_n' \right).$$

Wir betrachten somit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 0 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 \\ \vdots \\ -2^n - 2^{n-1} \\ -2^n \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $x_n = 2^n$ und für $i \in \{n-1, \dots, 1\}$

$$x_i = -\sum_{j=i}^n 2^j + 2x_n = 2^{n+1} - \sum_{j=i}^n 2^j = 2^i.$$

Siehe Aufgabe 3.1.3. Es bilden dann

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ 2^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix}$$

die eindeutige Lösung von $LCP(q, M)$.

Aufgabe 3.1.5: Wir setzen $\tilde{A} := A + A^T$. Dann gilt

$$x^T \tilde{A} x = x^T A x + x^T A^T x = x^T A x + (A x)^T x = 2x^T A x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. D.h. A ist genau dann positiv definit, wenn \tilde{A} positiv definit ist. Da \tilde{A} symmetrisch ist, reicht es, die drei führenden Hauptminoren von \tilde{A} zu betrachten.

Es ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det(4) = 4 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 31 > 0, \quad \det \tilde{A} = 68 > 0.$$

Aufgabe 3.1.6: a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so existiert ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq o$ mit $Ax = \lambda x$. Da $x \neq o$ und A eine P-Matrix ist, gilt nach Satz 3.1.1

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i(A \cdot x)_i > 0$$

bzw.

$$\max_{1 \leq i \leq n} \lambda x_i^2 > 0.$$

Somit ist $\lambda > 0$.

b) A ist eine P-Matrix, da $a_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, 3$, $\det A = 70$,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -17 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Für die Eigenwerte ergibt sich

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 70 \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit dem Hinweis und Polynomdivision erhält man

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 70 = (\lambda - 5)(\lambda^2 + 2\lambda + 14).$$

Außer $\lambda_1 = 5$ sind also auch noch $\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{13}i$ zwei Eigenwerte von A . Letztere haben einen negativen Realteil.

Aufgabe 3.1.7: Ohne Einschränkung sei A eine untere Dreiecksmatrix. Somit ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$u_1 := \frac{1}{|a_{11}|}$$

und dann rekursiv für $i = 2, \dots, n$

$$u_i := \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot u_j + 1 \right) / |a_{ii}|.$$

Dann ist (3.29) erfüllt und A eine H-Matrix.

Aufgabe 3.3.1: Da M eine P-Matrix ist, existiert M^{-1} und $LCP(q, M)$ hat nach Satz 3.1.2 genau eine Lösung für jedes $q \in \mathbb{R}^n$. Ist z die Lösung von $LCP(q, M)$, so gilt $z \geq o$ und

$$q_i + m_{ii}z_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \underbrace{m_{ij}z_j}_{\leq 0} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

D.h. aus $q_i < 0$ folgt $z_i > 0$ bzw.

$$q < o \Rightarrow z > o \Rightarrow q + Mz = o.$$

Dies bedeutet

$$q < o \Rightarrow o < z = -M^{-1}q.$$

Es sei nun $M^{-1} = (\beta_{ij})$. Angenommen es gelte $M^{-1} \not\geq O$. Dann existieren $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit $\beta_{i_0 j_0} < 0$. Dann setzen wir für $j = 1, \dots, n$

$$q_j := \begin{cases} -1 & \text{falls } j \neq j_0, \\ \frac{1}{\beta_{i_0 j_0}} \left(1 + \sum_{j=1, j \neq j_0}^n |\beta_{i_0 j}| \right) & \text{falls } j = j_0. \end{cases}$$

Somit ist $q < o$ und die Lösung von $LCP(q, M)$ lautet $w = o, z = -M^{-1}q$ mit $z > o$. Allerdings gilt für die i_0 -te Komponente

$$\begin{aligned} 0 < z_{i_0} &= - \sum_{j=1}^n \beta_{i_0 j} \cdot q_j = -\beta_{i_0 j_0} q_{j_0} + \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \beta_{i_0 j} \\ &= -(1 + \sum_{j=1, j \neq j_0}^n |\beta_{i_0 j}|) + \sum_{j=1, j \neq j_0}^n \beta_{i_0 j} < 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Daher gilt $M^{-1} \geq O$.

Aufgabe 3.4.1 Da A eine M-Matrix ist, existiert nach Lemma 3.4.1 ein Vektor $u > o$ mit $Au > o$. Wegen $A \leq B$ folgt dann

$$o < Au \leq Bu.$$

Da B eine Z-Matrix ist, folgt wiederum mit Lemma 3.4.1, dass B eine M-Matrix ist.

Aufgabe 3.4.2 Da A eine H-Matrix ist, ist wegen Bemerkung 3.4.1 $\langle A \rangle$ eine M-Matrix. Daher ist $\langle A \rangle^{-1} \geq O$. Mit $D := \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ und $B := D - A$ ist $\langle A \rangle = |D| - |B|$ und $|D|^{-1} \geq O$. Mit den Lemmata A.1.7 und A.2.1 folgt dann

$$\rho(D^{-1}B) \leq \rho(|D|^{-1}|B|) < 1.$$

Mit Lemma A.1.8 folgt dann schließlich

$$\begin{aligned} |A^{-1}| &= |(D - B)^{-1}| = |(E - D^{-1}B)^{-1}D^{-1}| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (D^{-1}B)^k D^{-1} \right| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} (|D|^{-1}|B|)^k \right) |D|^{-1} = (E - |D|^{-1}|B|)^{-1} |D|^{-1} = \langle A \rangle^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4.3 Da u die Lösung von $LCP(\bar{q}, \bar{M})$ ist, gilt insbesondere $u \geq o$. Wir definieren $\mathfrak{S} := \{i : u_i = 0\}$ und damit $\tilde{M} = (\tilde{m}_{ij})$ sowie $\tilde{q} = (\tilde{q}_i)$ durch

$$\tilde{m}_{ij} := \begin{cases} \bar{m}_{ij} & \text{falls } i \notin \mathfrak{S}, \\ 0 & \text{falls } i \in \mathfrak{S} \text{ und } j \neq i, \\ \bar{m}_{ii} & \text{falls } i \in \mathfrak{S} \text{ und } j = i, \end{cases} \quad \tilde{q}_i := \begin{cases} \bar{q}_i & \text{falls } i \notin \mathfrak{S}, \\ 0 & \text{falls } i \in \mathfrak{S}, \end{cases}$$

$i, j = 1, \dots, n$. Für $n = 5$ und $\mathfrak{S} = \{2, 4\}$ ist zum Beispiel

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \bar{m}_{13} & \bar{m}_{14} & \bar{m}_{15} \\ 0 & \bar{m}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{m}_{31} & \bar{m}_{32} & \bar{m}_{33} & \bar{m}_{34} & \bar{m}_{35} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m}_{44} & 0 \\ \bar{m}_{51} & \bar{m}_{52} & \bar{m}_{53} & \bar{m}_{54} & \bar{m}_{55} \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ 0 \\ \bar{q}_3 \\ 0 \\ \bar{q}_5 \end{pmatrix}.$$

Wir werden nun zeigen, dass

$$\tilde{q} + \tilde{M}u = o \leq \tilde{q} + \tilde{M}v$$

gilt.

1. Fall: $i \in \mathfrak{S}$. Dann ist

$$(\tilde{q} + \tilde{M}u)_i = 0 \leq \bar{m}_{ii}v_i = (\tilde{q} + \tilde{M}v)_i.$$

2. Fall: $i \notin \mathfrak{S}$. Dann ist

$$\bar{q}_i + \sum_{j=1}^n \bar{m}_{ij}u_j = 0 \leq \underline{q}_i + \sum_{j=1}^n \underline{m}_{ij}v_j \leq \bar{q}_i + \sum_{j=1}^n \bar{m}_{ij}v_j.$$

Es ist $\bar{M} \leq \tilde{M}$, \bar{M} ist eine M-Matrix und \tilde{M} ist eine Z-Matrix. Nach Aufgabe 3.4.1 ist \tilde{M} dann auch eine M-Matrix. Aus $\tilde{q} + \tilde{M}u \leq \tilde{q} + \tilde{M}v$ folgt dann $u \leq v$.

Aufgabe 4.1.1: Ist (\hat{x}, \hat{y}) ein Nash-Gleichgewicht, so gilt

$$\hat{x}^T A \hat{y} \leq x^T A \hat{y} \quad \text{für alle } x \in S^2$$

und

$$\hat{x}^T B \hat{y} \leq \hat{x}^T B y \quad \text{für alle } y \in S^2.$$

Man erhält für alle $x \in S^2$

$$5\hat{x}_1\hat{y}_1 + 10\hat{x}_2\hat{y}_1 + \hat{x}_2\hat{y}_2 \leq 5x_1\hat{y}_1 + 10x_2\hat{y}_1 + x_2\hat{y}_2$$

bzw.

$$5(\hat{x}_1 - x_1)\hat{y}_1 + 10(\hat{x}_2 - x_2)\hat{y}_1 + (\hat{x}_2 - x_2)\hat{y}_2 \leq 0$$

und somit

$$5(\hat{x}_1 - x_1)\hat{y}_1 + (\hat{x}_2 - x_2)(10\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \leq 0.$$

Wir nehmen an, es sei $\hat{x}_2 \neq 0$. Dann wählen wir $x_1 = 1, x_2 = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 5(\hat{x}_1 - 1)\hat{y}_1 + (10\hat{y}_1 + \hat{y}_2)\hat{x}_2 &\geq 5(\hat{x}_1 - 1)\hat{y}_1 + (5\hat{y}_1 + \hat{y}_2)\hat{x}_2 \\ &= 5(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)\hat{y}_1 - 5\hat{y}_1 + \hat{x}_2\hat{y}_2 \\ &= \hat{x}_2\hat{y}_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dabei kann wegen $\hat{y} \neq o$ mindestens ein \geq -Zeichen durch ein $>$ -Zeichen ersetzt werden. Dies führt zu einem Widerspruch. Somit gilt $\hat{x}_2 = 0$ und es folgt $\hat{x}_1 = 1$. Setzen wir dieses Zwischenergebnis ein, so erhält man

$$5\hat{y}_1 + 10\hat{y}_2 \leq 5y_1 + 10y_2 \quad \text{für jedes } y \in S^2$$

bzw.

$$5\hat{y}_2 \leq 5y_2 \quad \text{für jedes } y \in S^2.$$

Hieraus folgt sofort $\hat{y}_2 = 0$ und somit $\hat{y}_1 = 1$. Es existiert somit höchstens ein Nash-Gleichgewicht; und zwar

$$(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{mit} \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 4.1.1 existiert mindestens ein Nash-Gleichgewicht. Somit existiert genau dieses Nash-Gleichgewicht.

Aufgabe 4.1.2: Für jedes $x \in S^m$ gilt

$$x^T A E_{\cdot j_0} = x^T A_{\cdot j_0} = \sum_{i=1}^m x_i a_{ij_0} \geq a_{i_0 j_0} \sum_{i=1}^m x_i = a_{i_0 j_0} = E_{i_0}^T A E_{\cdot j_0}.$$

Für jedes $y \in S^n$ gilt

$$E_{i_0}^T B y = -E_{i_0}^T A y = -A_{i_0} \cdot y = -\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} y_j \geq -a_{i_0 j_0} = E_{i_0}^T B E_{j_0}.$$

Aufgabe 4.1.3: Es ist $A \not\geq O$ und $B \not\geq O$. Daher addieren wir zu jedem Element eine Zahl, damit die Matrizen dann elementweise positiv sind. Gemäß Lemma 4.1.2 hat dies keine Auswirkung auf die Bestimmung eines Nash-Gleichgewichts. Wir haben willkürlich 4 zu jedem Element addiert. Dann haben wir das Anfangstableau

\bar{w}_1	\bar{w}_2	$\bar{\bar{w}}_1$	$\bar{\bar{w}}_2$	\bar{z}_1	\bar{z}_2	$\bar{\bar{z}}_1$	$\bar{\bar{z}}_2$	$q^{(0)}$
1	0	O	O			-9	-4	-1
0	1					-14	-5	-1
	O	1	0	-9	-4		O	-1
		O	1	-14	-5			-1

und das Basisvariablenfeld

$$\text{BVF}_0 = (' \bar{w}_1 ', ' \bar{w}_2 ', ' \bar{\bar{w}}_1 ', ' \bar{\bar{w}}_2 ').$$

Es ist $K = \{1\}$, was dann $t = 1$ bedeutet, und es wird ein Gauß-Jordan-Schritt mit Pivotelement b_{11} durchgeführt. Man erhält

\bar{w}_1	\bar{w}_2	$\bar{\bar{w}}_1$	$\bar{\bar{w}}_2$	\bar{z}_1	\bar{z}_2	$\bar{\bar{z}}_1$	$\bar{\bar{z}}_2$	
1	0					-9	-4	-1
0	1	O	O			-14	-5	-1
	O	$-\frac{1}{9}$	0	1	$\frac{4}{9}$		O	$\frac{1}{9}$
		$-\frac{14}{9}$	1	0	$\frac{11}{9}$			$\frac{5}{9}$

und das Basisvariablenfeld

$$\text{BVF}_{\frac{1}{2}} = (' \bar{w}_1 ', ' \bar{w}_2 ', ' \bar{z}_1 ', ' \bar{\bar{w}}_2 ').$$

Es hat $' \bar{\bar{w}}_1 '$ das Basisvariablenfeld verlassen. Daher wird $4 + 2 + 1 = 7$ die nächste Pivotspalte. Es ist $L = \{1\}$. Somit ist $v = 1$ und es wird ein Gauß-Jordan-Schritt mit Pivotelement a_{11} durchgeführt. Man erhält

\bar{w}_1	\bar{w}_2	$\bar{\bar{w}}_1$	$\bar{\bar{w}}_2$	\bar{z}_1	\bar{z}_2	$\bar{\bar{z}}_1$	$\bar{\bar{z}}_2$	$q^{(1)}$
$-\frac{1}{9}$	0					1	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$
$-\frac{14}{9}$	1	O	O			0	$\frac{11}{9}$	$\frac{5}{9}$
	O	$-\frac{1}{9}$	0	1	$\frac{4}{9}$		O	$\frac{1}{9}$
		$-\frac{14}{9}$	1	0	$\frac{11}{9}$			$\frac{5}{9}$

und das Basisvariablenfeld $BVF_1 = (\overline{z}_1', \overline{w}_2', \overline{z}_1', \overline{w}_2')$. Es hat \overline{w}_1' das Basisvariablenfeld verlassen. Somit erhält man als Lösung des LCP

$$w = \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 4.1.2 ist dann

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{\overline{z}}{e_2^T \overline{z}}, \frac{\overline{z}}{e_2^T \overline{z}} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ein Nash-Gleichgewicht.

Aufgabe 4.1.4: Wir verwenden das folgende in PASCAL-XSC geschriebene Programm. Dabei werden die Ideen aus Abschnitt 1.2 verwendet, alle Lösungen eines LCP zu berechnen.

```

program zwei_loesungen_finden;

use i_ari, mvi_ari, mv_ari, matinv;

function zweihoch(n:integer):integer;
begin
if n=0 then zweihoch:=1
      else zweihoch:=2*zweihoch(n-1);
end;

procedure haupt(n,k,mklein,nklein:integer);
var
  Y                : rmatrix[1..k,1..n];
  i,j,lauf, spalte,ende : integer;
  C,M,R, Einheit   : rmatrix[1..n,1..n];
  q                : rvector[1..n];
  Err              : integer;
  weiter          : boolean;
  x,w,z           : rvector[1..n];
  xdach           : rvector[1..mklein];
  ydach           : rvector[1..nklein];
  A,B             : rmatrix[1..mklein,1..nklein];
  summe           : real;
begin
writeln('Matrixelemente von A zeilenweise eingeben');
for i:= 1 to mklein do
for j:= 1 to nklein do
read(A[i,j]);

```

```

writeln('Matrizelemente von B zeilenweise eingeben');
for i:= 1 to mklein do
for j:= 1 to nklein do
read(B[i,j]);

M:=0;
for i:=1 to mklein do
for j:=mklein +1 to n do M[i,j]:= A[i,j-mklein];

for i:=mklein+1 to n do
for j:=1 to mklein do M[i,j]:= B[j,i-mklein];

Einheit:=id(M);
q:=-1;

Y[1,1]:=1;
Y[2,1]:=-1;

spalte:=1;
ende:=2;
while spalte < n do
begin {while}
    spalte:=spalte+1;

    {bisherige Daten uebertragen}
    for i:= ende+1 to 2*ende do
    for j:= 1 to spalte -1 do Y[i,j]:=Y[i-ende,j];

    {letzte Spalte auffuellen}
    for i:= 1 to ende do Y[i,spalte]:=1;
    for i:= ende +1 to 2*ende do Y[i,spalte]:=-1;

    ende := 2*ende;

end{while};

for i:= 1 to k do
begin
for j:= 1 to n do if Y[i,j]=1 then C[*,j]:=Einheit[*,j]
else C[*,j]:=-M[*,j];
MatInv(C,R,Err);
{wir benutzen das vordefinierte Modul Matinv}
{zur Invertierung einer Matrix}
if Err=0 then

```

```

begin {C ist dann nichtsingulaer}
  x:= R*q;
  w:=0;
  z:=0;
  weiter:=true;
  lauf:=1;
  while weiter and (lauf <= n) do
    if x[lauf]<0 then weiter:=false
      else lauf:=lauf+1;
  if weiter then
    begin
      for j := 1 to n do
        if Y[i,j]=1 then w[j]:=x[j]
          else z[j]:=x[j];
        writeln('Eine Loesung lautet:');
        writeln('w=');
        writeln(w);
        writeln('z=');
        writeln(z);
        summe:=0;
        for j:= 1 to mklein do
          summe:=summe +z[j];
        for j:= 1 to mklein do
          xdach[j]:= z[j]/summe;
          summe:=0;
        for j:= mklein +1  to n do
          summe:=summe +z[j];
        for j:= 1 to nklein do
          ydach[j]:= z[mklein+j]/summe;
          writeln('xdach=');
          writeln(xdach);
          writeln('ydach=');
          writeln(ydach);
        end;
      end;
    end;{for i=...}
  end;

var n,k,mklein,nklein      : integer;
begin
  writeln('Geben Sie m ein !');
  read(mklein);
  writeln('Geben Sie n ein !');
  read(nklein);
  n:=mklein+nklein;

```

```

k:=zweihoch(n);
haupt(n,k,mklein,nklein);
end.

```

Bei Eingabe der Daten

```

4 5
1 2 3 4 3
8 7 8 4 2
8 16 9 4 6
3 7 9 21 2
12 7 5 9 2
3 7 9 11 7
3 1 7 1 2
7 8 3 6 9

```

erhält man innerhalb von zwei Zehntelsekunden:

Eine Loesung lautet:

```

w=
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
4.250000000000000E+000
2.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
6.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
1.000000000000000E+000
z=
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
1.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
2.500000000000000E-001
0.000000000000000E+000
xdach=
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
1.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
ydach=
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000

```

```

0.000000000000000E+000
1.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
Eine Loesung lautet:
w=
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
1.187500000000000E+000
0.000000000000000E+000
0.000000000000000E+000
1.495844875346261E-001
0.000000000000000E+000
4.376731301939059E-001
0.000000000000000E+000
z=
3.878116343490305E-002
7.479224376731303E-002
0.000000000000000E+000
4.432132963988919E-002
8.928571428571452E-003
0.000000000000000E+000
4.464285714285714E-002
0.000000000000000E+000
2.857142857142857E-001
xdach=
2.456140350877193E-001
4.736842105263159E-001
0.000000000000000E+000
2.807017543859649E-001
ydach=
2.631578947368428E-002
0.000000000000000E+000
1.315789473684210E-001
0.000000000000000E+000
8.421052631578947E-001

```

Wir wollen uns noch mit Hilfe von Maple die exakten Werte des zweiten Nash-Gleichgewichts besorgen. An der Näherungslösung erkennt man, dass zur Lösung das Basisvariablenfeld

$$\text{BVF} = (z_1', z_2', w_3', z_4', z_5', w_6', z_7', w_8', z_9')$$

gehört. Das entsprechende lineare Gleichungssystem $Cx = q$ (siehe (1.15)) lautet somit

$$(-M_{.1}| -M_{.2}| E_{.3}| -M_{.4}| -M_{.5}| E_{.6}| -M_{.7}| E_{.8}| -M_{.9}) \cdot x = q.$$

Wir lösen es mit Maple.

```

> restart:
> with(LinearAlgebra):
> C:=<< 0| 0|0| 0|-1|0|-3|0|-3>,
      < 0| 0|0| 0|-8|0|-8|0|-2>,
      < 0| 0|1| 0|-8|0|-9|0|-6>,
      < 0| 0|0| 0|-3|0|-9|0|-2>,
      <-12| -3|0|-7| 0|0| 0|0| 0>,
      < -7| -7|0|-8| 0|1| 0|0| 0>,
      < -5| -9|0|-3| 0|0| 0|0| 0>,
      < -9|-11|0|-6| 0|0| 0|1| 0>,
      < -2| -7|0|-9| 0|0| 0|0| 0>>;
> q:=Vector(1..9,-1):
> x:=LinearSolve(C,q);

```

Man erhält

$$x = \begin{pmatrix} 14/361 \\ 27/361 \\ 19/16 \\ 16/361 \\ 1/112 \\ 54/361 \\ 5/112 \\ 158/361 \\ 2/7 \end{pmatrix}.$$

Die exakten Werte des zweiten Nash-Gleichgewichts lauten somit

$$\hat{x} = \frac{1}{57} \begin{pmatrix} 14 \\ 27 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Wird dieses Nash-Gleichgewicht gespielt, so entstehen für Spieler 1 bzw. Spieler 2 die Kosten

$$\hat{x}^T A \hat{y} = \frac{56}{19} \quad \text{bzw.} \quad \hat{x}^T B \hat{y} = \frac{19}{3}.$$

Wird das erste Nash-Gleichgewicht gespielt, so entstehen für Spieler 1 bzw. Spieler 2 die Kosten

$$\hat{x}^T A \hat{y} = (0010) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \quad \text{bzw.} \quad \hat{x}^T B \hat{y} = (0010) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Wegen

$$\frac{56}{19} < 4 \quad \text{und} \quad \frac{19}{3} > 1$$

verringern sich die Kosten für Spieler 1, falls sich ein Schlichter von der Wahl des ersten Nash-Gleichgewichts auf die Wahl des zweiten Nash-Gleichgewichts umentscheidet. Die Kosten von Spieler 2 hingegen vergrößern sich. Ein Schlichter, der beide Nash-Gleichgewichte kennt, steht vor dem Problem, durch die Auswahl eines Nash-Gleichgewichts einen der beiden Spieler bevorzugen zu müssen.

Aufgabe 4.2.1: Ist x zulässig für (4.42), so gilt nach Lemma 4.2.1

$$c^T x \geq b^T \hat{u} = c^T \hat{x}.$$

Ist u zulässig für (4.43), so gilt ebenfalls nach Lemma 4.2.1

$$b^T u \leq c^T \hat{x} = b^T \hat{u}.$$

\hat{x} und \hat{u} sind daher Lösungen.

Aufgabe 4.3.1: a) Jedes $A \in [A]$ ist regulär, da $\det A = 1$ für jedes $A \in [A]$ gilt. Es ist

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = o.$$

1. Fall: $y = (1, 1)^T$. Dann ist

$$M_y = (A_c - \Delta)^{-1}(A_c + \Delta) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$q_y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung von $LCP(q_y, M_y)$ lautet

$$w_y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = o.$$

Somit ist

$$x_y = w_y - z_y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $y = (-1, 1)^T$. Dann ist

$$\begin{aligned} M_y &= \left(A_c - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(A_c + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$q_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung von $LCP(q_y, M_y)$ lautet

$$w_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = o.$$

Somit ist

$$x_y = w_y - z_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Fall: $y = (1, -1)^T$. Hier ergibt sich wegen

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$q_y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dasselbe x_y wie im 1. Fall.

4. Fall: $y = (-1, -1)^T$. Hier ergibt sich wegen

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$q_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dasselbe x_y wie im 2. Fall. Somit erhält man

$$\{x_y : y \in Y\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\square\Sigma([A], [b]) = \begin{pmatrix} [1, 4] \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nicht positiv definit wegen Beispiel 3.1.8.

Aufgabe 4.4.1 Mit der Substitution $v(x) = u'(x)$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$v' = \mu\sqrt{1+v^2}.$$

Die Methode der Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = \int \mu dx$$

bzw.

$$\operatorname{arsinh} v = \mu x + c, \quad x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R},$$

was dann

$$v(x) = \sinh(\mu x + c), \quad x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$$

bedeutet. Mit $0 = u'(s) = v(s)$ ergibt sich $c = -\mu s$. Somit folgt

$$u(x) = \frac{1}{\mu} \cosh(\mu(x-s)) + d, \quad x \in [0, s], d \in \mathbb{R}.$$

Mit $u(s) = 0$ ergibt sich $d = -\frac{1}{\mu}$. Nun ist noch s mit Hilfe von $u(0) = \alpha$ zu bestimmen. Also betrachten wir

$$\alpha = \frac{1}{\mu} (\cosh(-\mu s) - 1).$$

Es folgt

$$s = \frac{1}{\mu} \operatorname{arcosh}(1 + \mu\alpha) = \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \mu\alpha + \sqrt{(\mu\alpha)^2 + 2\mu\alpha} \right).$$

Daher lautet die Lösung $\{s, u(x)\}$ mit

$$s = \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \mu\alpha + \sqrt{(\mu\alpha)^2 + 2\mu\alpha} \right)$$

und

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \left(\cosh(\mu(x-s)) - 1 \right), & x \in [0, s] \\ 0, & x \in (s, \infty). \end{cases}$$

Aufgabe 4.4.2 Wegen $u''(x) = -1$, $x \in [0, s]$ ist $u'(x)$, $x \in [0, s]$ streng monoton fallend. Mit $u'(s) = 0$ ist dann $u'(x) > 0$, $x \in [0, s)$. Daher ist $u(x)$, $x \in [0, s]$ streng monoton wachsend. Mit $u(s) = 0$ folgt $u(x) < 0$, $x \in [0, s)$. Damit kann $u(0) = \alpha > 0$ nicht erfüllt sein.

Aufgabe 4.4.3 Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung

$$u'' + 4u = 2.$$

Eine partikuläre Lösung lautet $u(x) = \frac{1}{2}$. Um alle Lösungen von

$$u'' + 4u = 0$$

zu bekommen, betrachten wir das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Die Nullstellen $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$ führen auf die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung; nämlich

$$u(x) = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung

$$u(x) = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}.$$

Mit den Vorgaben $u(0) = 1$, $u(s) = 0$ und $u'(s) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 1 &= B + \frac{1}{2} \\ 0 &= A \sin(2s) + B \cos(2s) + \frac{1}{2} \\ 0 &= 2A \cos(2s) - 2B \sin(2s) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \\ 0 &= 2A \sin(2s) + \cos(2s) + 1 \\ A &= \frac{\sin(2s)}{2 \cos(2s)}. \end{aligned}$$

Setzt man die dritte Bedingung in die zweite Bedingung ein, so folgt

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \\ 0 &= \frac{\sin^2(2s)}{\cos(2s)} + \frac{\cos^2(2s)}{\cos(2s)} + 1 = \frac{1}{\cos(2s)} + 1. \end{aligned}$$

Somit gilt $\cos(2s) = -1$, und man erhält $s = s_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$ sowie $A = 0$. Somit ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ das Paar $\{s_k, u(x)\}$ mit

$$s_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

und

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}, & x \in [0, s_k] \\ 0, & x \in (s_k, \infty) \end{cases}$$

eine Lösung.

Symbolverzeichnis

\emptyset	leere Menge
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Menge der reellen $m \times n$ Matrizen
\mathbb{R}^n	Menge der reellen n -dimensionalen Vektoren
A^{-1}	inverse Matrix von A
A^T	transponierte Matrix von A (ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so ist $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$)
A^H	ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, so ist $A^H = (\bar{a}_{ji}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$
$\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$	Diagonalmatrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit Diagonalelementen x_1, \dots, x_n
A_i	i -te Zeile der Matrix A
A_j	j -te Spalte der Matrix A
$(A_1 \dotsc A_2)$	Blockmatrix
E	Einheitsmatrix
E_j	j -te Spalte der Einheitsmatrix (auch j -ter Standard-Basisvektor genannt)
e	Vektor, der in jeder Komponente den Wert 1 besitzt
e_m	Vektor aus \mathbb{R}^m , der in jeder Komponente den Wert 1 besitzt

o	Nullvektor
O	Nullmatrix
$x \in \mathbb{R}^n, x \geq o$	Vektor $x = (x_i)$ aus \mathbb{R}^n mit $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$
$x \in \mathbb{R}^n, x > o$	Vektor $x = (x_i)$ aus \mathbb{R}^n mit $x_i > 0, i = 1, \dots, n$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A \geq O$	Matrix $A = (a_{ij})$ aus $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit $a_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A > O$	Matrix $A = (a_{ij})$ aus $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit $a_{ij} > 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$
$x, y \in \mathbb{R}^n, y = x $	Vektor $y = (y_i)$ aus \mathbb{R}^n mit $y_i = x_i , i = 1, \dots, n$
$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, B = A $	Matrix $B = (b_{ij})$ aus $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit $b_{ij} = a_{ij} , i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$
<i>Konv</i> K	konvexe Hülle der nichtleeren Menge K
$\rho(A)$	Spektralradius von A
IR	Menge der reellen kompakten Intervalle
$w * z$	für $w, z \in \mathbb{R}^n$ ist $w * z := \begin{pmatrix} w_1 \cdot z_1 \\ \vdots \\ w_n \cdot z_n \end{pmatrix}$
$M(J)$	Matrix, die aus M hervorgeht, indem man für alle $i \in J$ von M die i -te Zeile und die i -te Spalte streicht
$\operatorname{sgn} x$	für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{sgn} x$ ein Vektor mit $(\operatorname{sgn} x)_i = 1$ falls $x_i \geq 0$ und $(\operatorname{sgn} x)_i = -1$ falls $x_i < 0$
$LCP(q, M)$	lineares Komplementaritätsproblem definiert durch q und M
CP_τ	zentraler Pfad
$SOL(q, M)$	Lösungsmenge von $LCP(q, M)$
$FEAS$	zulässiger Bereich von $LCP(q, M)$
$N(\alpha)$	Umgebung des zentralen Pfads

Literaturverzeichnis

1. Adelmeyer M, Warmuth E (2003) Finanzmathematik für Einsteiger. Vieweg, Wiesbaden
2. Adler I, Cottle RW, Verma S (2006) Sufficient matrices belong to L. Math Program 106:391-401
3. Alefeld G, Wang Z, Shen Z (2004) Enclosing solutions of linear complementarity problems for H-matrices. Reliab Comput 10:423-435
4. Alefeld G, Schäfer U (2003) Iterative methods for linear complementarity problems with interval data. Computing 70:235-259
5. Alefeld GE, Chen X, Potra FA (1999) Numerical validation of solutions of linear complementarity problems. Numer Math 83:1-23
6. Alefeld G, Mayer G (1995) On the symmetric and unsymmetric solution set of interval systems. SIAM J Matrix Anal Appl 16:1223-1240
7. Alefeld G, Herzberger J (1983) Introduction to interval computations. Academic Press, New York
8. Appell J, Văth M (2005) Elemente der Funktionalanalysis. Vieweg, Wiesbaden
9. Arnold DN (2000) The patriot missile failure.
<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html>
10. Barth W, Nuding E (1974) Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen. Computing 12:117-125
11. Bastian M (1976) Lineare Komplementärprobleme im Operations Research und in der Wirtschaftstheorie. Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan
12. Beeck H (1972) Über Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten. Computing 10:231-244
13. Berman A, Plemmons R (1994) Nonnegative matrices in the mathematical sciences. SIAM Classics in Applied Mathematics, vol. 9
14. Blum E, Oettli W (1975) Mathematische Optimierung. Grundlagen und Verfahren. Springer-Verlag, Berlin
15. Canty MJ (2000) Konfliktlösungen mit Mathematica. Zweipersonenspiele. Springer-Verlag, Berlin
16. Chandrasekaran R (1970) A special case of the complementary pivot problem. Opsearch 7:263-268
17. Chen X, Xiang S (2006) Computation of error bounds for P-matrix linear complementarity problems. Math Program 106:513-525

18. Chu TH (2006) A class of polynomially solvable linear complementarity problems. *Math Program* 107:461-470
19. Collatz L (1981) *Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher, Stuttgart
20. Cottle RW, Dantzig GB (1968) Complementarity pivot theory of mathematical programming. *Linear Algebra Appl* 1:103-125
21. Cottle RW, Pang JS, Stone RE (1992) *The linear complementarity problem*. Academic Press, San Diego
22. Cottle RW, Sacher RS (1977) On the solution of large, structured linear complementarity problems: the tridiagonal case. *Appl Math Optim* 3:321-340
23. Crank J (1984) *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press, Oxford
24. Crank JC, Nicolson P (1947) A real method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conductive type. *Proc Camb Phil Soc* 43:50-67
25. Cryer CW (1971) The solution of a quadratic programming problem using systematic overrelaxation. *SIAM J Control* 9:385-392
26. Dantzig GB (1966): *Lineare Programmierung und Erweiterungen*. Springer-Verlag, Berlin
27. Deck T (2006) *Der Itô-Kalkül. Einführung und Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin
28. Deza A, Nematollahi E, Terlaky T (2008) How good are interior point methods? Klee-Minty cubes tighten iteration-complexity bounds. *Math Program* 113:1-14
29. Du Val P (1940) The unloading problem for plane curves. *Amer J Math* 62:307-311
30. Facchinei F, Pang JS (2003) *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems*. Springer series in operations research
31. Fan K (1958) Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements. *Monatsh Math* 62:219-237
32. Ferris MC, Pang JS (1997) Engineering and economic applications of complementarity problems. *SIAM Rev* 39:669-713
33. Ferris MC, Pang JS, Ralph D, Scholtes S (2004) Proceedings of the 3rd international conference on complementarity problems: Foreword. *Math Program* 101:1-2
34. Fiedler M, Ptak V (1962) On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czechoslovak Mathematical Journal* 12:382-400
35. Fischer A (1992) A special Newton-type optimization method. *Optimization* 24:269-284
36. Fraj AH (2002) *Dynamik und Regelung von Automatikgetrieben*. Dissertation, Technische Universität München, VDI Verlag, Düsseldorf
37. Franklin J (2002) *Methods of mathematical economics. Linear and nonlinear programming, fixed-point theorems*. SIAM Classics in applied mathematics, vol. 37
38. Frommer A (1990) *Lösung linearer Gleichungssysteme auf Parallelrechnern*. Vieweg, Braunschweig
39. Grötschel M (2002) $P = NP?$ *Elem Math* 57:96-102
40. Hammer R, Hocks M, Kulisch U, Ratz D (1993) *Numerical toolbox for verified computing I*. Springer-Verlag, Berlin
41. Hansen E (1992) *Global optimization using interval analysis*. Marcel Dekker, Inc. New York

42. Hansen E (1969) On solving two-point boundary-value problems using interval arithmetic. In: Hansen E (ed) Topics in interval analysis. Clarendon Press, Oxford 74-90
43. Hansen T, Manne AS (1978) Equilibrium and linear complementarity - an economy with institutional constraints on prices. *Equil Disequil Econ Theory Proc Conf Vienna* 227-237
44. Hashimoto K, Kobayashi K, Nakao M (2005) Numerical verification methods for solutions of the free boundary problem. *Numer Funct Anal Optim* 26:523-542
45. Heuser H (1983) *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner, Stuttgart
46. Hinrichsen L (2007) *Zustandsübergänge selbstbremsender Getriebe im Ratterbetrieb*. Dissertation, Universität Kassel
47. Isac G (1992) Complementarity problems. Lecture notes in mathematics, vol. 1528. Springer-Verlag, Berlin
48. Jarre F, Stoer J (2004) *Optimierung*. Springer-Verlag, Berlin
49. Kappel NW, Watson LT (1986) Iterative algorithms for the linear complementarity problem. *Int J Comput Math* 19:273-297
50. Karmarkar N (1984) A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica* 4:373-395
51. Khachiyan LG (1979) A polynomial algorithm in linear programming. *Soviet Math. Doklady* 20:191-194
52. Klatte R, Kulisch U, Wiethoff A, Lawo C, Rauch M (1993) C-XSC. A C^{++} class library for extended scientific computing. Springer-Verlag, Berlin
53. Klatte R, Kulisch U, Neaga M, Ratz D, Ullrich C (1992) PASCAL-XSC-Language references with examples. Springer-Verlag, New York
54. Klee V, Minty GJ (1972) How good is the simplex algorithm? In: Shisha O (ed) *Inequalities*. Academic Press, New York 159-175
55. Kojima M, Megiddo N, Noma T, Yoshise A (1991) A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems. Lecture notes in computer science, vol. 538. Springer-Verlag, New York
56. Kostreva M (1979) Cycling in linear complementarity problems. *Math Program* 16:127-130
57. Krawczyk R (1969) Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken. *Computing* 4:187-201
58. Kulisch U, Lohner R, Facius A (2001) *Perspectives on enclosure methods*. Springer-Verlag, Wien
59. Kwok YK (1998) *Mathematical models of financial derivatives*. Springer finance, Singapore
60. Lancaster P (1969) *Theory of matrices*. Academic Press, New York
61. Lemke CE (1965) Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science* 11:681-689
62. Lemke CE, Howson JT (1964) Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM J Appl Math* 12:413-423
63. Li HB, Huang TZ, Li H (2007) On some subclasses of P-matrices. *Numer. Linear Algebra Appl* 14:391-405
64. Lin Y, Cryer CW (1985) An alternating direction implicit algorithm for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems. *Appl Math Optim* 13:1-17

65. Lüthi HJ (1976) Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie. Lecture notes in economics and mathematical systems, vol. 129. Springer-Verlag, Berlin
66. Mangasarian OL (1996) Dedication [to Richard Warren Cottle]. *Comput Optim Appl* 5:95-96
67. Mangasarian OL (1976) Equivalence of the complementarity problem to a system of nonlinear equations. *SIAM J Appl Math* 31:89-92
68. Mathias R, Pang JS (1990) Error bounds for the linear complementarity problem with a P-matrix. *Linear Algebra Appl* 132:123-136
69. Megiddo N (1988) A note on the complexity of P-matrix LCP and computing an equilibrium. Research Report, IBM Almaden Research Center, San Jose
70. Moore RE (1977) A test for existence of solutions to nonlinear systems. *SIAM J Numer Anal* 14:611-615
71. Moore RE (1966) Interval analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
72. Morris WD (2002) Randomized pivot algorithms for P-matrix linear complementarity problems. *Math Program* 92:285-296
73. Murty KG (1988) Linear complementarity, linear and nonlinear programming. Heldermann Verlag, Berlin
74. Murty KG (1983) Linear programming. John Wiley & Sons, New York
75. Murty KG (1978) Computational complexity of complementarity pivot methods. *Math Program Study* 7:61-73
76. Murty KG (1972) On the number of solutions to the complementarity problem and spanning properties of complementary cones. *Linear Algebra Appl* 5:65-108
77. Nasar S (2002) Genie und Wahnsinn. Das Leben des genialen Mathematikers John Nash. Zum Film 'A Beautiful Mind'. Piper, München
78. Nash J (1951) Non-cooperative games. *Ann Math* 54:286-295
79. Neumaier A (1990) Interval methods for systems of equations. University Press, Cambridge
80. Oosterlee CW (2003) On multigrid for linear complementarity problems with application to american-style options. *Electron Trans Numer Anal* 15:165-185
81. Ortega JM, Rheinboldt WC (2000) Iterative solution of nonlinear equations in several variables. *SIAM Classics in applied mathematics*, vol. 30
82. Ortega JM (1972) Numerical analysis. Academic Press, New York
83. Owen G (1968) Game theory. W. B. Saunders Company, London
84. Pang JS (1990) Newton-methods for B-differentiable equations. *Math Oper Res* 15:311-341
85. Pang JS (1984) Necessary and sufficient conditions for the convergence of iterative methods for the linear complementarity problem. *J Optim Theory Appl* 42:1-17
86. Pang JS (1982) On the convergence of a basic iterative method for the implicit complementarity problem. *J Optim Theory Appl* 37:149-162
87. Pfeiffer F, Glocker C (1996) Multibody dynamics with unilateral contacts. Wiley Series in nonlinear science, New York
88. Pinkus O, Sternlicht B (1961) Theory of hydrodynamic lubrication. McGraw-Hill Book Company, Inc
89. Potra FA (2008) Corrector-predictor methods for monotone linear complementarity problems in a wide neighborhood of the central path. *Math Program* 111:243-272

90. Potra FA, Sheng, R (1997) Predictor-corrector algorithms for solving P_* -matrix LCP from arbitrary positive starting points. *Math Program* 76:223-244
91. Potra FA, Sheng, R (1997) A large-step infeasible-interior-point method for the P_* -matrix LCP. *SIAM J Optim* 7:318-335
92. Poundstone W (1993) *Prisoner's dilemma*. University Press, Oxford
93. Rohn J (1989) *Systems of linear interval equations*. *Linear Algebra Appl* 126:39-78
94. Roßmann T (1998) *Eine Laufmaschine für Rohre*. Dissertation, Technische Universität München, VDI Verlag, Düsseldorf
95. Rump SM (1999) INTLAB – INTerval LABoratory. In: *Developments in reliable computing*. T. Csendes (Editor), Kluwer Academic Publishers:77-104
96. Runge W (1969) Die praktische Anwendung nichtlinearer Optimierungsmodelle. In: *Mathematik und Wirtschaft*. Verlag Die Wirtschaft, Berlin 45-61
97. Rüst LY (2007) *The P-matrix linear complementarity problem. Generalizations and specializations*. Dissertation, ETH Zürich
98. Samelson H, Thrall RM, Wesler O (1958) A partition theorem for Euclidean n -space. *Proc Amer Math Soc* 9:805-807
99. Schäfer U (2007) Wie erklärt man ein Nash-Gleichgewicht? *Elem Math* 62:1-7
100. Schäfer U (2007) On computer-assisted proofs for solutions of linear complementarity problems. *J Comput Appl Math* 199:257-262
101. Schäfer U (2004) Unique solvability of an ordinary free boundary problem. *Rocky Mountain J Math* 34:341-346
102. Schäfer U (2004) On the modulus algorithm for the linear complementarity problem. *Oper Res Lett* 32:350-354
103. Schäfer U (2004) A linear complementarity problem with a P-matrix. *SIAM Rev* 46:189-201
104. Schäfer U (2004) A new subclass of P-matrices. *Linear Algebra Appl* 393:353-364
105. Schäfer U (2003) Accelerated enclosure methods for ordinary free boundary problems. *Reliab Comput* 9:391-403
106. Schäfer U (2001) An enclosure method for free boundary problems based on a linear complementarity problem with interval data. *Numer Funct Anal Optim* 22:991-1011
107. Schlee W (2004) *Einführung in die Spieltheorie*. Vieweg, Wiesbaden
108. Schnurr M (2007) *Steigungen höherer Ordnung zur verifizierten globalen Optimierung*, Dissertation, Universitätsverlag Karlsruhe
109. Schöning U (1992) *Theoretische Informatik - kurzgefasst*. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim
110. Seydel R (2006) *Tools for computational finance*. Springer-Verlag, Third edition, Berlin
111. Sheng R, Potra FA (1997) A quadratically convergent infeasible-interior-point algorithm for LCP with polynomial complexity. *SIAM J Optim* 7:304-317
112. Stoer J, Wechs M (1998) Infeasible-interior-point paths for sufficient linear complementarity problems and their analyticity. *Math. Program.* 83:407-423
113. Thompson RC, Walter WL (1992) An existence theorem for a parabolic free boundary problem. *Differ Integral Equ* 5:43-54
114. Thompson RC, Walter WL (1990) Convergence of the line method approximation for a parabolic free boundary problem. *Differ Integral Equ* 2:335-351

115. Thompson RC (1982) A note on monotonicity properties of a free boundary problem for an ordinary differential equation. *Rocky Mountain J Math* 12:735-739
116. Todd MJ (1986) Polynomial expected behavior of a pivoting algorithm for linear complementarity and linear programming problems. *Math Program* 35:173-192
117. Tomlin J (1978) Robust implementation of Lemke's method for the linear complementarity problem. *Math Program Study* 7:55-60
118. Tsatsomeris M, Li L (2000) A recursive test for P-matrices. *BIT* 40:410-414
119. Stiegelmeyr A (2001) Zur numerischen Berechnung strukturvarianter Mehrkörpersysteme. Dissertation, Technische Universität München, VDI Verlag, Düsseldorf
120. van Bokhoven WMG (1981) Piecewise-linear modelling and analysis. Proefschrift, Eindhoven
121. van Eijndhoven JTJ (1986) Solving the linear complementarity problem in circuit simulation. *SIAM J Control Optim* 24:1050-1062
122. Varga RS (1962) Matrix iterative analysis. Prentice-Hall, New Jersey
123. Väliäho H (1996) P_* -Matrices are just sufficient. *Linear Algebra Appl* 239:103-108
124. Walter W (1972) *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin
125. Wösle M (1997) Dynamik von räumlichen strukturvarianten Starrkörpersystemen. Dissertation, Technische Universität München, VDI Verlag, Düsseldorf
126. Wolfsteiner P (1999) Dynamik von Vibrationsförderern. Dissertation, Technische Universität München, VDI Verlag, Düsseldorf
127. Wright S, Zhang Y (1996) A superquadratic infeasible-interior-point method for linear complementarity problems. *Math Program* 73:269-289
128. Ye Y, Pardalos PM (1991) A class of linear complementarity problems solvable in polynomial time. *Linear Algebra Appl* 152:3-17

Sachverzeichnis

- ε -Näherungslösung von $LCP(q, M)$, 193
- Abbruchkriterium, 168
- absolute Vektornorm, 218
- Aktie, 136
- Algorithmus von Chandrasekaran, 66
- Approximationsfehler, 136
- Arbitrage, 137
- Ausübungspreis, 136

- Basisvariable, 5
- Basisvariablenfeld, 5
- Besteinschließung, 119
- Bitlänge der Eingangsdaten für das LCP, 189
- Black-Scholes-Gleichung, 139
- Black-Scholes-Operator, 140
- Blockmatrix, 259
- Brownsche Bewegung, 138, 227

- column sufficient, 188
- Cramersche Regel, 37

- Damm-Problem, 123
- Derivate, 137
- Diätproblem, 100
- Dividende, 138
- Dividendenfluss, 138
- Drift, 138
- Dualdarstellung, 110
- duales Programm, 99

- early exercise curve, 141
- Einzelschrittverfahren, 150

- entartete Lösung, 3
- erweitertes Tableau, 24
- Existenzsatz von Peano, 132

- Fehlerschranken, 194
- Fixpunktsatz von Brouwer, 81, 201, 224

- Gauß–Seidel-Verfahren, 150
- Gefangenen-Dilemma, 79
- Gesamtschrittverfahren, 150
- Golfkrieg, 110

- H-Matrix, 61, 72
- Hauptminor, 36
 - führender Hauptminor, 60
- Hauptuntermatrix, 36

- induzierte Matrixnorm, 218
- Infimum zweier Vektoren, 158
- Intervall-Steigungsmatrix, 200
- Intervallhülle, 119
- Intervallmatrix, 112
- Intervallvektor, 115
- Itô-Formel, 228
- Itô-Integral, 228
- Itô-stochastische Differentialgleichung, 227

- Jakobi-Verfahren, 150
- Jordan-Normalform, 222

- komplementärer Kegel, 45
- komplementäres Variablenpaar, 5
- Konvertierungsfehler, 110

- konvexes quadratisches Programm, 109
 Kostenmatrix, 75

 Lösung des Programms, 97
 Lösungsmenge beim LCP, 174
 Lemke–Howson-Algorithmus, 86
 Lemke-Algorithmus, 7
 Lemma von Farkas, 64, 99, 120, 225
 lexikographisches Minimum, 26
 lexikopositiv, 23

 M-Matrix, 71
 mathematisches Programm, 97
 monotone Vektornorm, 218

 Nash-Gleichgewicht, 78
 Nichtbasisvariable, 5
 Nobelpreis, 80, 123
 NP-hart, 122
 NP-vollständig, 173
 Nullsummen-Spiel, 82

 optimale Lagerhaltung, 103, 109
 Optimalwert des Programms, 97
 Optionen, 136
 - amerikanische, 136
 - Call-Option, 136
 - europäische, 136
 - Put-Option, 136
 Orthant, 117

 P_{*}-Matrix, 188
 P_{*}(κ)-Matrix, 188
 P-Matrix, 35, 38, 40
 Partition des \mathbb{R}^n , 46
 Pfad, 227
 Pivotschritt, 11
 Polytop, 117
 Portfolio, 136, 138
 positiv definite Matrix, 59
 positiv semidefinite Matrix, 35, 62
 primales Programm, 99
 Punktmatrix, 112

 Ray-Termination, 12, 31
 risikoloser Zinssatz, 139

 row sufficient, 189

 Satz von Bolzano–Weierstraß, 157, 187
 Satz von Perron und Frobenius, 224
 Satz von Stein–Rosenberg, 151
 Satz von Taylor, 136
 schiefsymmetrische Matrizen, 65
 Schlichter, 78
 Seilkurve, 124
 skalierte Maximumnorm, 218
 Spektralradius, 220
 Standard-Basisvektor, 259
 Stefan-Problem, 123
 Steigungsmatrix, 200
 stochastischer Prozess, 227
 Strategie
 - gemischte Strategie, 76
 - reine Strategie, 76
 Strategiepaar, 78
 streng diagonaldominante Matrix, 60
 streng reguläre Intervallmatrix, 113
 sufficient, 189
 Supremum zweier Vektoren, 158

 Umgebung des zentralen Pfads, 175
 Unternehmensforschung, 99
 unzulässige Innere-Punkte-Verfahren, 188

 Vergleichsmatrix, 73
 Verhandlungsspiel, 78
 Verifikationsmethoden, 189
 Verlustmatrix, 75
 Volatilität, 138

 Wiener-Prozess, 227

 Z-Matrix, 35, 65
 zentraler Pfad, 174
 Zielfunktion, 97
 Zufallsvariable, 227
 zulässiger Bereich
 - beim LCP, 174
 - für mathematische Programme, 97
 Zwei-Personen-Spiel, 36, 75