

---

# Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Anhang stellen wir einige technischere Aspekte der Differentialgeometrie zusammen, welche oft nur unzureichend in den Lehrbüchern zu finden sind. Da für die Deformationsquantisierung Multidifferentialoperatoren von entscheidender Bedeutung sind, wollen wir hier insbesondere einen algebraischen Zugang vorstellen, welcher in vielerlei Hinsicht dem schnelleren Zugang aus Definition 5.4.3 überlegen ist.

## A.1 Zerlegungen der Eins

Wir beginnen mit einigen elementaren differentialtopologischen Überlegungen, welche die Rolle des zweiten Abzählbarkeitsaxioms illustrieren. Für eine weitergehende Diskussion sei auf [54] verwiesen.

**Lemma A.1.1.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Dann gibt es abzählbar viele Punkte  $p_n \in M$  mit entsprechenden, um  $p_n$  zentrierten, lokalen Karten  $(U_n, x_n)$ , so daß  $B_2(0)^{\text{cl}} \subseteq x_n(U_n)$  und daß die offenen Bälle  $x_n^{-1}(B_1(0))$  um  $p_n$  ganz  $M$  überdecken.*

*Beweis.* Zunächst wählen wir eine abzählbare Basis  $O_n$  der Topologie von  $M$ , so daß also jede offene Teilmenge eine geeignete Vereinigung dieser  $O_n$  ist. Weiter wählen wir um jeden Punkt  $p \in M$  eine zentrierte Karte  $(U_p, x_p)$  mit der Eigenschaft, daß die abgeschlossene Kugel  $B_2(0)^{\text{cl}}$  noch im Bildbereich  $x_p(U_p)$  der Karte enthalten ist. Sei nun  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es ohne Einschränkung mindestens einen Punkt  $p \in M$  mit  $O_k \subseteq x_p^{-1}(B_1(0))$ : Wäre nämlich  $O_k$  in keiner dieser offenen Kugeln enthalten, so wäre jede Kugel  $x_p^{-1}(B_1(0))$  eine geeignete Vereinigung der übrigen  $O_n$  mit  $n \neq k$  und daher  $M = \bigcup_{n \neq k} O_n$ , da ja die Kugeln  $x_p^{-1}(B_1(0))$  zusammen trivialerweise ganz  $M$  überdecken. Ein solches  $O_k$  könnten wir daher aus der obigen Liste der  $O_n$  streichen. Durch die Wahl der Punkte  $p_k$  erreichen wir also, daß  $O_k \subseteq x_{p_k}^{-1}(B_1(0))$  und somit insgesamt  $\bigcup_k x_{p_k}^{-1}(B_1(0)) = M$ .  $\square$

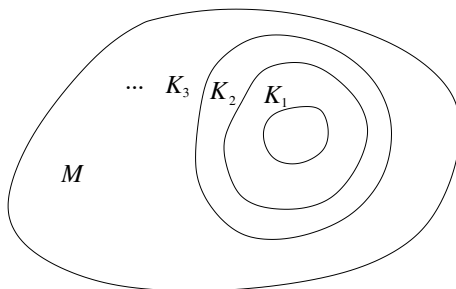
Das folgende Lemma zeigt, daß wir selbst eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit durch kompakte Teilmengen ausschöpfen können, siehe auch Abbildung A.1:

**Lemma A.1.2.** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Folge von Kompakta  $K_n \subseteq M$  mit den Eigenschaften, daß  $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$  für alle  $n$  und  $M = \bigcup_n K_n$ .*

*Beweis.* Wir wählen gemäß Lemma A.1.1 abzählbar viele Punkte  $p_n \in M$  mit den entsprechenden Karten  $(U_n, x_n)$ , so daß  $B_2(0)^{\text{cl}} \subseteq x_n(U_n)$  noch im Bildbereich der Karte enthalten ist und die offenen Kugeln  $x_n^{-1}(B_1(0))$  ganz  $M$  überdecken. Dann überdecken die kompakten Kugeln  $x_n^{-1}(B_{2-\epsilon}(0)^{\text{cl}}) = (x_n^{-1}(B_{2-\epsilon}(0)))^{\text{cl}}$  erst recht ganz  $M$ , sofern  $0 < \epsilon < 1$ . Damit ist

$$K_n = \bigcup_{k=1}^n x_k^{-1} \left( B_{2-\frac{1}{n}}(0) \right)^{\text{cl}}$$

aber eine Folge von Kompakta mit der gewünschten Eigenschaft. □



**Abb. A.1.** Eine ausschöpfende Folge von Kompakta

Die Eigenschaft eines topologischen Raumes, abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen zu sein, nennt man auch  $\sigma$ -Kompaktheit. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind also Dank des zweiten Abzählbarkeitsaxioms immer  $\sigma$ -kompakt. Ist  $M$  selbst kompakt, so werden Lemma A.1.1 und Lemma A.1.2 trivial.

Wir kommen nun zum zentralen Begriff dieses Abschnitts:

**Definition A.1.3 (Zerlegung der Eins).** *Eine Familie  $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  von glatten Funktionen  $\chi_\alpha \in C^\infty(M)$  heißt Zerlegung der Eins der Ordnung  $k \in \mathbb{N}$ , wenn jeder Punkt  $p$  eine offene Umgebung  $U_p$  besitzt, so daß  $\chi_\alpha|_{U_p} = 0$  für alle bis auf höchstens endlich viele  $\alpha \in I$  und*

$$\sum_{\alpha \in I} \chi_\alpha^k = 1 \tag{A.1}$$

gilt. Ist  $\{O_\beta\}_{\beta \in J}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , so heißt eine Zerlegung der Eins  $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  der Überdeckung  $\{O_\beta\}_{\beta \in J}$  untergeordnet, falls es für jedes  $\alpha \in I$  ein  $\beta \in J$  mit

$$\text{supp } \chi_\alpha \subseteq O_\beta \tag{A.2}$$

gibt.

Eine Zerlegung der Eins der Ordnung  $k = 1$  heißt auch einfache Zerlegung der Eins. Manchmal sind jedoch auch Zerlegungen der Eins höherer Ordnung wie etwa quadratische Zerlegungen der Eins von Interesse. Da in der Definition die lokale Endlichkeit der Träger gefordert wird, ist die Gleichung (A.1) auch bei beliebiger Indexmenge unproblematisch. Wir werden gelegentlich mit einigem Notationsmißbrauch die beiden Indexmengen  $I$  und  $J$  identifizieren. Letztlich ist dies insofern auch möglich, da wir zu gegebenem  $\beta$  auf jeden Fall  $\chi_\beta = 0$  mit dazu nehmen können. Umgekehrt können wir verschiedene  $\chi_\alpha$ , deren Träger in einem  $O_\beta$  liegen, aufsummieren, um so genau ein  $\chi_\beta$  zu erhalten.

Um nun zeigen zu können, daß es immer eine untergeordnete Zerlegung der Eins gibt, benötigen wir einige Hilfsfunktionen, welche aus der elementaren Analysis wohlbekannt sind: Die Funktion

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  glatt und es gilt  $0 \leq h(t) \leq 1$ . Die Funktionen

$$g_\epsilon(t) = \frac{h(t)}{h(t) + h(\epsilon - t)} \tag{A.4}$$

sind für alle  $\epsilon > 0$  ebenfalls auf ganz  $\mathbb{R}$  glatt und es gilt  $g_\epsilon(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $g_\epsilon(t) = 1$  für  $t \geq \epsilon$  sowie  $0 \leq g_\epsilon(t) \leq 1$  für alle  $t$ . Schließlich sind die Funktionen  $\varphi_{r,\epsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi_{r,\epsilon}(x) = 1 - g_\epsilon(\|x\| - r) \tag{A.5}$$

ebenfalls glatt für alle  $r, \epsilon > 0$ , wobei  $\|x\|$  die übliche Norm bezeichnet. Es gilt  $0 \leq \varphi_{r,\epsilon}(x) \leq 1$  sowie  $\varphi_{r,\epsilon}(x) = 1$  für  $\|x\| \leq r$  und  $\varphi_{r,\epsilon}(x) = 0$  für  $\|x\| \geq r + \epsilon$ . Der Nachweis dieser Eigenschaften ist elementar.

Mit Hilfe dieser Funktionen können wir nun zeigen, daß es zu jeder offenen Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins gibt:

**Satz A.1.4 (Zerlegung der Eins).** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit, und sei  $\{O_\beta\}_{\beta \in J}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins  $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  der Ordnung  $k$ . Es kann sogar  $\chi_\alpha = \overline{\chi_\alpha}$  mit  $0 \leq \chi_\alpha \leq 1$  sowie  $\chi_\alpha \in C_0^\infty(M)$  und  $I$  abzählbar gewählt werden.*

*Beweis.* Wir konstruieren zunächst einen geeigneten Atlas von  $M$ . Dazu wählen wir eine ausschöpfende Folge  $\cdots \subseteq K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1} \subseteq \cdots$  von Kompakta

gemäß Lemma A.1.2. Dann ist konstruktionsgemäß  $K_{n+1} \setminus \overset{\circ}{K}_n$  eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums  $K_{n+1}$ , also selbst kompakt. Weiter ist  $\overset{\circ}{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$  offen und enthält  $K_{n+1} \setminus \overset{\circ}{K}_n$ . Wir betrachten nun um  $p$  zentrierte Karten  $(U_p, x_p)$  für  $p \in \overset{\circ}{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$  mit der Eigenschaft, daß  $B_2(0)$  noch im Bildbereich der Karte ist, sowie  $U_p \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$  und  $U_p \subseteq O_{\beta_p}$  für ein geeignetes  $\beta_p$ . Offenbar gibt es zu jedem  $p$  eine solche Karte. Da  $K_{n+1} \setminus \overset{\circ}{K}_n$  kompakt ist, überdecken bereits endlich viele  $x_p^{-1}(B_1(0))$  das Kompaktum  $K_{n+1} \setminus \overset{\circ}{K}_n$ . Eine Auswahl dieser endlich vielen Punkte bezeichnen wir mit  $p_{n,1}, \dots, p_{n,m_n}$ . Die zugehörigen Karten seien mit  $(U_{n,1}, x_{n,1}), \dots, (U_{n,m_n}, x_{n,m_n})$  bezeichnet. Die lokal definierte, glatte Funktion

$$\varphi_{n,i}(p) = \varphi_{1,\frac{1}{2}}(x_{n,i}(p))$$

für  $p \in U_{n,i}$  hat ihren Träger in  $x_{n,i}^{-1}(B_{\frac{3}{2}}(0)) \subseteq U_{n,i} \subseteq O_{\beta_{p_{n,i}}}$  und kann daher zu einer globalen Funktion  $\varphi_{n,i} \in C^\infty(M)$  fortgesetzt werden, indem man  $\varphi_{n,i}(p) = 0$  für  $p \in M \setminus U_{n,i}$  setzt. Offenbar gilt  $0 \leq \varphi_{n,i} \leq 1$  und  $\varphi_{n,i}|_{x_{n,i}^{-1}(B_1(0))} = 1$ . Die Gesamtheit aller dieser Funktionen  $\{\varphi_{n,i}\}_{n,i}$  hat nun folgende Eigenschaften: Die Träger sind lokal endlich, da  $\text{supp } \varphi_{n,i} \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$ . Die lokal endliche Summe

$$\varphi = \sum_{n,i} \varphi_{n,i}^k$$

ist überall echt positiv, da  $\varphi_{n,i} \geq 0$  und auf  $x_{n,i}^{-1}(B_1(0))$  konstant 1 ist, diese Kugeln das Kompaktum  $K_{n+1} \setminus \overset{\circ}{K}_n$  überdecken und die  $K_n$  ganz  $M$  ausschöpfen. Daher sieht man leicht, daß die Funktionen

$$\chi_{n,i} = \frac{1}{\sqrt[k]{\varphi}} \varphi_{n,i}$$

die gesuchte Zerlegung der Eins der Ordnung  $k$  liefern, welche  $\{O_\beta\}_{\beta \in J}$  untergeordnet ist. Die zusätzlichen Eigenschaften sind per constructionem gegeben.  $\square$

Wir notieren einige nützliche Folgerungen aus diesem Satz. Das erste Korollar ist eine verschärfte Version des bekannten Urysohn-Lemmas aus der mengentheoretischen Topologie, siehe etwa [270, Kap. 7].

**Korollar A.1.5 ( $C^\infty$ -Urysohn-Lemma).** *Seien  $A_1, A_2 \subseteq M$  zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von  $M$ . Dann gibt es eine Funktion  $\chi \in C^\infty(M)$  mit  $0 \leq \chi \leq 1$  und*

$$\chi|_{A_1} = 1 \quad \text{sowie} \quad \chi|_{A_2} = 0. \tag{A.6}$$

*Entsprechend gibt es disjunkte offene Teilmengen  $U_1, U_2 \subseteq M$  mit  $A_i \subseteq U_i$ . Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit erfüllt also das Trennungsaxiom  $T_4$ .*

*Beweis.* Man betrachte die offene Überdeckung  $\{M \setminus A_1, M \setminus A_2\}$  von  $M$  und wählt eine untergeordnete Zerlegung der Eins  $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $0 \leq \chi_n \leq 1$ . Dann setzt man

$$\chi = \sum_{n \in I} \chi_n,$$

wobei  $I = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{supp } \chi_n \subseteq M \setminus A_2\}$ . Dies liefert die gewünschte Funktion  $\chi$ . Zur Trennung von  $A_1$  und  $A_2$  betrachtet man dann einfach die offenen Teilmengen  $U_1 = \chi^{-1}((\frac{3}{4}, 1])$  und  $U_2 = \chi^{-1}([0, \frac{1}{4}))$ .  $\square$

**Korollar A.1.6 (Lokale Einselemente).** *Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Zu jeder ausschöpfenden Folge  $\dots \subseteq K_n \subseteq K_{n+1} \subseteq \dots$  von Kompakta von  $M$  existieren Funktionen  $\chi_n \in C_0^\infty(M)$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- i.)  $0 \leq \chi_n \leq 1$ ,*
- ii.)  $\text{supp } \chi_n \subseteq K_{n+1}$ ,*
- iii.)  $\chi_n|_{K_n} = 1$ .*

*Beweis.* Zur Konstruktion wende man rekursiv Korollar A.1.5 auf  $A_1 = K_n$  und  $A_2 = M \setminus K_{n+1}$  an.  $\square$

Als eine weitere nichttriviale Anwendung betrachtet man ein reelles Vektorbündel  $\pi : E \rightarrow M$  über  $M$ . Eine Fasermetrik ist eine glatt vom Fußpunkt  $p$  abhängende symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$ , welche für alle  $p \in M$  nichtausgeartet ist. Alternativ können wir eine Fasermetrik als einen glatten Schnitt  $h \in \Gamma^\infty(S^2 E^*)$  auffassen, welcher die Bilinearform durch  $h_p(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  induziert.

**Satz A.1.7.** *Sei  $\pi : E \rightarrow M$  ein reelles Vektorbündel. Dann existiert für  $E$  eine positiv definite Fasermetrik.*

*Beweis.* Wir wählen einen Vektorbündelatlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  für  $E$  und eine untergeordnete Zerlegung der Eins  $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$  mit  $0 \leq \chi_\alpha \leq 1$ . Für  $p \in U_\alpha$  definiert man dann

$$\langle v_p, w_p \rangle_\alpha = \langle \text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha(v_p), \text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha(w_p) \rangle_{\mathbb{R}^k},$$

wobei auf der rechten Seite das kanonische, positiv definite Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^k$  verwendet wird und  $\text{pr}_2 \circ \varphi_\alpha(v_p)$  die Komponenten des Vektors  $v_p$  bezüglich der Bündelkarte  $\varphi_\alpha$  darstellen. Die Faserdimension sei  $k$ . Offenbar ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  auf  $U_\alpha$  glatt vom Fußpunkt abhängig und positiv definit. Dann setzt man

$$\langle v_p, w_p \rangle_p = \sum_{\alpha \in I} \chi_\alpha(p) \langle v_p, w_p \rangle_\alpha,$$

und zeigt leicht, daß dies eine überall positiv definite und glatte Fasermetrik auf  $E$  darstellt.  $\square$

Angewandt auf  $E = TM$  folgt, daß jede Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik besitzt. Man beachte jedoch, daß die positive Definitheit in Satz A.1.7 entscheidend ist: es gibt für die Existenz von Fasermetriken mit anderer Signatur sehr wohl topologische Einschränkungen an das Bündel  $E$ .

*Bemerkung A.1.8.* Für ein komplexes Vektorbündel definiert man analog eine *Hermitesche Fasermetrik* als eine positiv definite, glatt vom Fußpunkt abhängige Sesquilinearform. Den Existenzbeweis kann man dann wörtlich übernehmen.

## A.2 Algebraische Definition von Differentialoperatoren

Um einen systematischen Zugang zur Theorie der Multidifferentialoperatoren in der Differentialgeometrie zu erhalten, betrachten wir zunächst den Spezialfall von Differentialoperatoren, für die wir eine rein algebraische Definition geben können. Im folgenden sei  $\mathbb{k}$  ein Körper der Charakteristik Null. Darüberhinaus sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative und kommutative  $\mathbb{k}$ -Algebra. Die Linksmultiplikation mit  $a \in \mathcal{A}$  bezeichnen wir wie schon zuvor mit  $L_a(b) = ab$ . Besitzt die Algebra  $\mathcal{A}$  kein Einselement, so werden bestimmte der folgenden Aussagen im allgemeinen falsch sein. Eine nützliche Verallgemeinerung von Algebren mit Einselement sind die Algebren mit lokalen Einselementen:

**Definition A.2.1 (Lokale Einselemente).** *Eine assoziative  $\mathbb{k}$ -Algebra besitzt lokale Einselemente  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , falls es für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$  ein  $e_\alpha$  mit*

$$e_\alpha a_i = a_i = a_i e_\alpha \quad (\text{A.7})$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  gibt.

Offenbar besitzt jede Algebra mit Einselement auch lokale Einselemente, nämlich  $\{1\}$ . Namensgebend ist nun folgendes Beispiel aus der Differentialgeometrie:

*Beispiel A.2.2 (Lokale Einselemente).* Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Dann leisten die gemäß Korollar A.1.6 konstruierten Funktionen  $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  das gewünschte für die Algebra  $C^\infty(M)$ .

Wir kommen nun zur (algebraischen) Definition von Differentialoperatoren:

**Definition A.2.3 (Differentialoperatoren).** *Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative und kommutative  $\mathbb{k}$ -Algebra. Die Differentialoperatoren  $\text{DiffOp}^k(\mathcal{A}) \subseteq \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A})$  der Ordnung  $k \in \mathbb{Z}$  definiert man induktiv durch  $\text{DiffOp}^k(\mathcal{A}) = \{0\}$  für  $k < 0$  und*

$$\text{DiffOp}^k(\mathcal{A}) = \left\{ D \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A}) \mid [D, L_a] \in \text{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A}) \text{ für alle } a \in \mathcal{A} \right\} \quad (\text{A.8})$$

für  $k \geq 0$ .

Da die Bedingungen linear sind, ist  $\text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  für alle  $k$  ein Unterraum von  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A})$ : dies sieht man durch eine leichte Induktion nach der Ordnung  $k$ . Wir studieren nun einige allgemeine Eigenschaften von Differentialoperatoren.

**Proposition A.2.4.** *Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative und kommutative  $\mathbb{k}$ -Algebra.*

i.) *Für alle  $k$  gilt*

$$\text{DiffOp}^k(\mathcal{A}) \subseteq \text{DiffOp}^{k+1}(\mathcal{A}) \tag{A.9}$$

womit

$$\text{DiffOp}^\bullet(\mathcal{A}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{DiffOp}^k(\mathcal{A}) \subseteq \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A}) \tag{A.10}$$

ein filtrierter Unterraum ist.

ii.) *Es gilt  $\text{id} \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$  ebenso wie  $L_a \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$  für alle  $a \in \mathcal{A}$ .*

iii.) *Die Differentialoperatoren der Ordnung  $k$  sind auf natürliche Weise ein  $\mathcal{A}$ -Bimodul, wobei man  $a \cdot D \cdot b$  für  $D \in \text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  und  $a, b \in \mathcal{A}$  durch*

$$a \cdot D \cdot b = L_a D L_b \tag{A.11}$$

definiert.

iv.) *Für  $D \in \text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  und  $D' \in \text{DiffOp}^\ell(\mathcal{A})$  gilt*

$$DD' \in \text{DiffOp}^{k+\ell}(\mathcal{A}), \tag{A.12}$$

womit  $\text{DiffOp}^\bullet(\mathcal{A})$  eine filtrierte Unteralgebra von  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A})$  ist.

v.) *Besitzt  $\mathcal{A}$  lokale Einselemente, so ist*

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto L_a \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \tag{A.13}$$

ein injektiver Algebromorphismus. Weiter gilt in diesem Fall für  $D \in \text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  und  $D' \in \text{DiffOp}^\ell(\mathcal{A})$

$$[D, D'] \in \text{DiffOp}^{k+\ell-1}(\mathcal{A}). \tag{A.14}$$

*Beweis.* Für den ersten Teil genügt es,  $k \geq 0$  zu betrachten. Sei daher  $D \in \text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  mit  $k \geq 0$  gegeben. Dann gilt  $[D, L_a] \in \text{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A})$  nach Definition. Ist  $k = 0$ , so bedeutet dies einfach  $[D, L_a] = 0$ . Da aber  $0 \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ , folgt  $D \in \text{DiffOp}^1(\mathcal{A})$ . Für  $k > 0$  folgt  $[D, L_a] \in \text{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A}) \subseteq \text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  durch Induktion nach  $k$ , womit  $D \in \text{DiffOp}^{k+1}(\mathcal{A})$ . Dies zeigt den ersten Teil. Der zweite Teil ist klar, da  $\text{id}$  mit allen Linksmultiplikationen vertauscht und somit  $\text{id} \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ . Da  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, folgt ebenfalls, daß alle Linksmultiplikationen untereinander vertauschen, womit  $L_a \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$  für alle  $a \in \mathcal{A}$ . Für den dritten Teil bemerken wir zunächst, daß (A.11) die kanonische Bimodulstruktur von  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{A})$  ist. Daher ist also nur zu zeigen, daß  $\text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  unter diesen Bimodulmultiplikationen in sich überführt wird. Für  $k < 0$  ist das trivial, für  $k = 0$  vertauscht auch  $a \cdot D \cdot b$  mit allen Linksmultiplikationen, da  $\mathcal{A}$  kommutativ ist. Sei also  $k > 0$ , so gilt

$[a \cdot D \cdot b, L_c] = L_a[D, L_c] L_b$ , da alle Linksmultiplikationen vertauschen. Durch Induktion nach  $k$  ist aber  $L_a[D, L_c] L_b = a \cdot [D, L_c] \cdot b \in \text{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A})$ , womit  $a \cdot D \cdot b \in \text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  folgt, was den dritten Teil zeigt. Für den vierten Teil können wir wieder  $k, \ell \geq 0$  annehmen. Wir führen einen Induktionsbeweis nach  $k + \ell$ . Ist  $k = 0 = \ell$ , so vertauscht sowohl  $D$  als auch  $D'$  mit allen Linksmultiplikationen. Damit gilt aber auch  $[DD', L_a] = 0$ , was den Induktionsanfang  $DD' \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$  zeigt. Ist  $k + \ell > 0$ , so gilt nach Induktionsannahme  $[DD', L_a] = D[D', L_a] + [D, L_a]D' \in \text{DiffOp}^{k+\ell-1}(\mathcal{A})$ , da  $[D, L_a] \in \text{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A})$  und  $[D', L_a] \in \text{DiffOp}^{\ell-1}(\mathcal{A})$ . Damit folgt aber  $DD' \in \text{DiffOp}^{k+\ell}(\mathcal{A})$  wie gewünscht. Nun habe  $\mathcal{A}$  lokale Einselemente. Dann ist die Injektivität von  $a \mapsto L_a$  aber klar, da  $L_a(e_\alpha) = a$  für ein geeignetes lokales Einselement. Für die zweite Aussage betrachten wir zunächst  $k = 0 = \ell$  und  $a \in \mathcal{A}$  sowie  $e_\alpha$  mit  $e_\alpha a = a = ae_\alpha$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} [D, D'](a) &= DD'(L_a(e_\alpha)) - D'D(L_{e_\alpha}(a)) \\ &= D(aD'(e_\alpha)) - D'(e_\alpha D(a)) \\ &= D(a)D'(e_\alpha) - D'(e_\alpha)D(a) = 0, \end{aligned}$$

womit  $\text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$  eine kommutative Algebra ist. Sei nun  $k + \ell > 0$ , dann gilt induktiv  $[[D, D'], L_a] = [[D, L_a], D'] + [D, [D', L_a]] \in \text{DiffOp}^{k+\ell-2}(\mathcal{A})$ . Damit folgt aber auch der fünfte Teil.  $\square$

Im folgenden schreiben wir für die Bimodulstruktur auch einfach  $aDb$ . Weiter beachte man, daß (A.14) ohne die Existenz lokaler Einselemente im allgemeinen falsch ist: Die Algebra mit trivialer Multiplikation  $ab = 0$  bietet ein Gegenbeispiel, da hier  $\text{DiffOp}^0(\mathcal{A}) = \text{End}_k(\mathcal{A})$  keineswegs kommutativ zu sein braucht.

Der Fall der Differentialoperatoren erster Ordnung verdient besondere Aufmerksamkeit. Zunächst ist klar, daß jede Derivation von  $\mathcal{A}$  ein Differentialoperator erster Ordnung ist, denn für  $D \in \text{Der}(\mathcal{A})$  gilt nach der Leibniz-Regel

$$[D, L_a](b) = D(ab) - aD(b) = L_{D(a)}(b), \quad (\text{A.15})$$

womit  $D \in \text{DiffOp}^1(\mathcal{A})$  gezeigt ist, da  $L_{D(a)} \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ . Besitzt nun  $\mathcal{A}$  lokale Einselemente, so läßt sich  $\text{DiffOp}^1(\mathcal{A})$  folgendermaßen zerlegen:

**Proposition A.2.5.** *Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative und kommutative  $\mathbb{k}$ -Algebra mit lokalen Einselementen. Dann gilt kanonisch*

$$\text{DiffOp}^1(\mathcal{A}) = \text{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \oplus \text{Der}(\mathcal{A}), \quad (\text{A.16})$$

wobei  $D \in \text{DiffOp}^1(\mathcal{A})$  in  $D = D_0 + d$  mit

$$d(a) = D(a) - D(e_\alpha)a \quad \text{und} \quad D_0(a) = L_{D(e_\alpha)}(a) \quad (\text{A.17})$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$  zerlegt wird. Hier ist  $e_\alpha$  ein lokales Einselement mit  $e_\alpha a = a$  und  $e_\alpha D(a) = D(a)$ .



*Beweis.* Zunächst ist zu zeigen, daß die Definition von  $D_0$  und  $d$  tatsächlich wohl-definiert ist. Seien also  $e_\alpha$  und  $e_\beta$  lokale Einselemente mit  $e_\alpha a = a = e_\beta a$  sowie  $e_\alpha D(a) = D(a) = e_\beta D(a)$ . Es ist klar, daß  $D(a) - D(e_\alpha)a = [D, L_a](e_\alpha)$  und ebenso für  $e_\beta$ . Wir wählen nun ein  $e_\gamma$  mit  $e_\alpha e_\gamma = e_\alpha$  sowie  $e_\beta e_\gamma = e_\beta$ . Da  $[D, L_a]$  ein Differentialoperator nullter Ordnung ist, gilt

$$[D, L_a](e_\alpha) = [D, L_a](L_{e_\alpha} e_\gamma) = L_{e_\alpha} [D, L_a](e_\gamma) = D(a) - aD(e_\gamma)$$

und genauso  $[D, L_a](e_\beta) = D(a) - aD(e_\gamma)$ . Dies zeigt aber, daß  $d$  und  $D_0 = D - d$  nicht von der Wahl des lokalen Einselements abhängen und daher wohl-definiert sind. Es bleibt zu zeigen, daß  $d$  eine Derivation und  $D_0 \in \text{DiffOp}^0(\mathcal{A})$  ist. Letzteres ist klar, denn für  $a, b \in \mathcal{A}$  betrachten wir ein geeignetes lokales Einselement, womit  $D_0(L_a b) = L_{D(e_\alpha)}(L_a b) = L_a L_{D(e_\alpha)}(b) = L_a D_0(b)$ . Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} d(ab) &= D(ab) - D(e_\alpha)ab \\ &= [D, L_a](e_\alpha b) + aD(b) - aD(e_\alpha)b \\ &= L_b [D, L_a](e_\alpha) + ad(b) \\ &= bd(a) + ad(b), \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, daß  $d$  eine Derivation ist. □

Da alle drei Vektorräume in (A.16) bezüglich des Kommutators Lie-Algebren sind, was man aus dem fünften Teil von Proposition A.2.4 leicht sieht, ist (A.16) für Algebren mit lokalen Einselementen eine semidirekte Summe

$$\text{DiffOp}^1(\mathcal{A}) = \text{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \rtimes \text{Der}(\mathcal{A}) \tag{A.18}$$

von Lie-Algebren. Nach (A.14) wirkt die Lie-Algebra  $\text{DiffOp}^1(\mathcal{A})$  und damit auch die Lie-Unteralgebra  $\text{Der}(\mathcal{A})$  auf  $\text{DiffOp}^k(\mathcal{A})$  für jedes  $k$ .

Darüberhinaus ist die direkte Summe in (A.16) auch mit der  $\mathcal{A}$ -Linksmodulstruktur der drei Vektorräume verträglich, da für eine Derivation  $D$  auch  $aD$  eine Derivation ist. Hier geht die Kommutativität von  $\mathcal{A}$  erneut ein. Mit der  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodulstruktur ist (A.16) jedoch nicht länger verträglich, da  $D \circ L_a$  im allgemeinen keine Derivation mehr ist.

*Bemerkung A.2.6.* Besitzt  $\mathcal{A}$  sogar ein Einselement  $\mathbb{1}$ , so gilt

$$\text{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \tag{A.19}$$

und

$$\text{DiffOp}^1 \cong \mathcal{A} \oplus \text{Der}(\mathcal{A}), \tag{A.20}$$

wobei die Identifikation in (A.19) über  $a \mapsto L_a$  mit Inversem  $D \mapsto D(\mathbb{1})$  gegeben ist.

Für die höheren Differentialoperatoren existieren keine einfachen Zerlegungen analog zu denen in  $\text{DiffOp}^1(\mathcal{A})$ .

### A.3 Differentialoperatoren der Algebra $C^\infty(M)$

Wir betrachten nun den Fall  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ . Da die glatten Funktionen eine Algebra mit Einselement sind, sind die Resultate von Abschnitt A.2 uneingeschränkt gültig, insbesondere gilt

$$\text{DiffOp}^0(C^\infty(M)) \cong C^\infty(M). \tag{A.21}$$

Wir wollen als erstes zeigen, daß sich Differentialoperatoren immer auf offene Teilmengen einschränken lassen. Dies ist der tatsächlich nichttriviale Schritt bei der Charakterisierung von Differentialoperatoren von  $C^\infty(M)$  und keineswegs selbstverständlich. Wir benötigen zunächst einige vorbereitende Resultate:

**Lemma A.3.1.** *Sei  $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  eine lineare Abbildung. Gibt es dann eine offene Überdeckung  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$  von  $M$  und Differentialoperatoren  $\{D_\alpha\}_{\alpha \in I}$  der Ordnung  $k$ , so daß*

$$D(f) \Big|_{O_\alpha} = D_\alpha(f) \Big|_{O_\alpha} \tag{A.22}$$

für alle  $\alpha \in I$  und  $f \in C^\infty(M)$ , dann gilt  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $k = 0$ , womit  $D_\alpha = L_{g_\alpha}$  mit  $g_\alpha \in C^\infty(M)$  für alle  $\alpha$ . Sind dann  $f, h \in C^\infty(M)$ , so gilt

$$\begin{aligned} D(L_h f) \Big|_{O_\alpha} &= D_\alpha(L_h f) \Big|_{O_\alpha} = h \Big|_{O_\alpha} g_\alpha \Big|_{O_\alpha} f \Big|_{O_\alpha} = (L_h D_\alpha(f)) \Big|_{O_\alpha} \\ &= (L_h D(f)) \Big|_{O_\alpha}. \end{aligned}$$

Da die  $O_\alpha$  aber ganz  $M$  überdecken, folgt  $[D, L_h] = 0$  und somit  $D \in \text{DiffOp}^0(C^\infty(M))$ . Sei also  $k \geq 1$ , dann gilt

$$\begin{aligned} [D, L_h](f) \Big|_{O_\alpha} &= D(hf) \Big|_{O_\alpha} - h \Big|_{O_\alpha} D(f) \Big|_{O_\alpha} = D_\alpha(hf) \Big|_{O_\alpha} - h \Big|_{O_\alpha} D_\alpha(f) \Big|_{O_\alpha} \\ &= [D_\alpha, L_h](f) \Big|_{O_\alpha} \end{aligned}$$

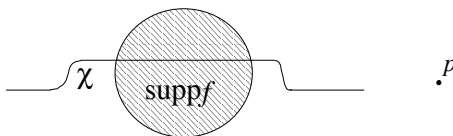
Da  $[D_\alpha, L_h] \in \text{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$  können wir induktiv über  $k$  folgern, daß  $[D, L_h] \in \text{DiffOp}^{k-1}(A)$ . Damit ist aber  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ , womit der Beweis erbracht ist.  $\square$

Der entscheidende Punkt im Beweis ist offensichtlich die Verträglichkeit von Produktbildung von glatten Funktionen mit der Einschränkung glatter Funktionen auf offene Teilmengen. Das nächste Lemma zeigt, daß Differentialoperatoren immer *lokal* sind:

**Lemma A.3.2.** *Ist  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ , so gilt*

$$\text{supp } D(f) \subseteq \text{supp } f \tag{A.23}$$

für alle  $f \in C^\infty(M)$ .



**Abb. A.2.** Die Abschneidefunktion  $\chi$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $f \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp } f \neq M$  und  $p \in M \setminus \text{supp } f$  gegeben. Daher gibt es nach Korollar A.1.5 eine Funktion  $\chi \in C^\infty(M)$  mit  $\chi|_{\text{supp } f} = 1$  und  $\chi(p) = 0$ , siehe Abbildung A.2. Da (A.23) für  $k = 0$  trivialerweise erfüllt ist, beweisen wir (A.23) durch Induktion nach  $k$ . Es gilt

$$D(f)|_p = D(\chi f)|_p = [D, L_\chi](f)|_p + (L_\chi D(f))|_p = 0,$$

da  $[D, L_\chi] \in \text{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$  nach Induktionsannahme lokal ist und  $\chi(p) = 0$ . Damit folgt (A.23) durch Induktion.  $\square$

Wir kommen nun zur angekündigten Einschränkungbarkeit. Da sich eine Funktion  $f \in C^\infty(U)$  auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq M$  im allgemeinen nicht zu einer Funktion  $F \in C^\infty(M)$  fortsetzen läßt, können wir die Einschränkung  $D_U$  von  $D$  auf  $C^\infty(U)$  nicht durch  $D_U(f) = D(F)|_U$  definieren. Trotzdem gilt folgende Proposition:

**Proposition A.3.3 (Einschränkbarkeit lokaler Operatoren).** *Sei  $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  eine lokale lineare Abbildung. Dann gibt es zu jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq M$  eine eindeutig bestimmte lokale lineare Abbildung  $D_U : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  derart, daß  $D_M = D$  und für offenes  $V \subseteq U$*

$$D_U(f)|_V = D_V(f|_V) \tag{A.24}$$

für alle  $f \in C^\infty(U)$ . Ist  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$  sogar ein Differentialoperator, so folgt  $D_U \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(U))$  für alle offenen Teilmengen  $U \subseteq M$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien solche Abbildungen  $D_U$  und  $\tilde{D}_U$  für jedes offene  $U \subseteq M$  gegeben. Dann betrachten wir eine offene Teilmenge  $V \subseteq U$  mit  $V^{\text{cl}} \subseteq U$  und eine Abschneidefunktion  $\chi \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp } \chi \subseteq U$  und  $\chi|_{V^{\text{cl}}} = 1$ . Sei nun  $f \in C^\infty(U)$ , dann gilt

$$\tilde{D}_U(f)|_V = \tilde{D}_V(f|_V) = \tilde{D}_V((\chi f)|_V) = \tilde{D}_M(\chi f)|_V = D(\chi f)|_V$$

und genauso für  $D_U$ . Damit stimmen die Funktionen  $D_U(f)$  und  $\tilde{D}_U(f)$  auf allen derartigen  $V \subseteq U$  überein. Da letztere aber ganz  $U$  überdecken, folgt die Eindeutigkeit.

Wir zeigen nun die Existenz. Sei also  $U \subseteq M$  offen und  $O \subseteq U$  eine offene Teilmenge mit  $O^{\text{cl}} \subseteq U$ . Weiter sei  $\chi$  wieder eine Abschneidefunktion wie oben. Dann definieren wir

$$D_U(f)|_O = D(\chi f)|_O \tag{*}$$

für  $f \in C^\infty(U)$ . Da  $\chi f \in C^\infty(M)$  als globale glatte Funktion wohl-definiert ist, müssen wir nun zeigen, daß die rechte Seite von (\*) nicht von der Wahl von  $O$  und  $\chi$  abhängt. Sei also  $\tilde{O}$  und  $\tilde{\chi}$  eine weitere Wahl. Dann gilt

$$\text{supp } D((\chi - \tilde{\chi})f) \subseteq \text{supp}((\chi - \tilde{\chi})f) \subseteq M \setminus (O \cap \tilde{O}),$$

da  $\chi - \tilde{\chi}$  auf der offenen Teilmenge  $O \cap \tilde{O}$  verschwindet. Damit folgt aber  $D(\chi f)|_{O \cap \tilde{O}} = D(\tilde{\chi} f)|_{O \cap \tilde{O}}$ . Dies zeigt, daß (\*) tatsächlich eine auf ganz  $U$  wohl-definierte und offensichtlich auch glatte Funktion  $D_U(f)$  liefert. Wir behaupten nun, daß die so konstruierten Abbildungen die Eigenschaft (A.24) besitzen. Zunächst ist klar, daß  $D_M = D$ , da wir in diesem Fall  $O = M$  und  $\chi = 1$  wählen können. Sei also  $V \subseteq U$  eine offene Teilmenge und  $O \subseteq V$  mit  $O^{\text{cl}} \subseteq V$  und  $\chi \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp } \chi \subseteq V$  und  $\chi|_{O^{\text{cl}}} = 1$ . Sei nun  $f \in C^\infty(U)$ . Dann stimmen die kanonischen Fortsetzungen von  $f|_V \chi$  und  $f \chi$  zu glatten Funktionen auf  $M$  überein und entsprechend gilt

$$D_V(f|_V)|_O = D(f|_V \chi)|_O = D(\chi f)|_O = D_U(f)|_O.$$

Da wiederum derartige  $O$  ganz  $V$  überdecken, folgt (A.24).

Sei nun  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ . Ist  $k = 0$ , so ist  $D = L_g$  mit einer Funktion  $g \in C^\infty(M)$ , womit  $D_U = L_{g|_U}$  sofort folgt. Daher ist jedes  $D_U$  ebenfalls ein Differentialoperator nullter Ordnung. Sei also  $k \geq 1$  und  $f, g \in C^\infty(U)$ . Dann gilt mit  $O$  und  $\chi$  wie oben, daß auch  $O$  und  $\chi^2$  eine gültige Wahl ist, womit

$$\begin{aligned} D_U(L_g f)|_O - L_g D_U(f)|_O &= D(\chi^2 g f)|_O - g|_O D(\chi f)|_O \\ &= [D, L_{\chi g}](\chi f)|_O + (\chi g)|_O D(\chi f)|_O - g|_O D(\chi f)|_O \\ &= [D, L_{\chi g}](\chi f)|_O, \end{aligned}$$

da  $\chi g|_O = g|_O$ . Da  $[D, L_{\chi g}] \in \text{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$ , folgt  $[D_U, L_g](f)|_O = [D, L_{\chi g}]_U(f)|_O$ . Induktiv können wir  $[D, L_{\chi g}]_U \in \text{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(U))$  folgern. Nach Lemma A.3.1 ist dann aber auch  $[D_U, L_g] \in \text{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(U))$ , da die offenen Teilmengen  $O$  ganz  $U$  überdecken. Damit folgt aber  $D_U \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(U))$ .  $\square$

*Bemerkung A.3.4.* Es folgt insbesondere, daß ein lokaler Operator  $D$  nicht nur eindeutige Einschränkungen  $D_U$  auf offene Mengen besitzt, sondern seinerseits aus den Einschränkungen  $D_{U_\alpha}$  für eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  rekonstruiert werden kann. Damit sind lokale Operatoren und insbesondere Differentialoperatoren bereits dadurch bestimmt, was ihre Einschränkungen auf lokale Karten eines Atlanten sind.

Wir können also nun die lokalen Formen von Differentialoperatoren in lokalen Koordinaten bestimmen. Der folgenden Satz zeigt, daß Differentialoperatoren lokal genau die gewünschte Form besitzen:

**Satz A.3.5 (Lokale Form von Differentialoperatoren).** Sei  $(U, x)$  eine lokale Karte von  $M$  und  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte lokale Funktionen  $D_U^{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(U)$  für  $r = 0, \dots, k$ , welche in den Indizes  $i_1, \dots, i_r$  symmetrisch sind, so daß

$$D_U = \sum_{r=0}^k \frac{1}{r!} D_U^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial^r}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}. \tag{A.25}$$

Für  $r = k$  sind die Funktionen  $D_U^{i_1 \dots i_k}$  die lokalen Koeffizientenfunktionen eines globalen Tensorfeldes  $\sigma_k(D) \in \Gamma^\infty(S^k TM)$ , also

$$\sigma_k(D) \Big|_U = \frac{1}{k!} D_U^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \vee \dots \vee \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}. \tag{A.26}$$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz erneut durch Induktion nach  $k$ , da offenbar der Fall  $k = 0$  trivialerweise richtig ist. Sei also  $k \geq 1$ . Dann betrachten wir zunächst den Spezialfall, daß der Bildbereich der Karte konvex ist, also mit  $x, y$  auch  $tx + (1 - t)y$  im Bildbereich der Karte liegt, sofern  $t \in [0, 1]$ . Sei nun  $x_0$  fest gewählt, dann gilt (Hadamards Trick) für alle  $x$  in  $U$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx + (1 - t)x_0) dt \\ &= f(x_0) + \int_0^1 (x^i - x_0^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx + (1 - t)x_0) dt \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) g_i(x) \end{aligned}$$

mit glatten Funktionen  $g_i \in C^\infty(U)$ . Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r g_i}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}(x_0) &= \int_0^1 \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r} \partial x^i}(tx + (1 - t)x_0) t^r dt \Big|_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{r+1} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r} \partial x^i}(x_0). \end{aligned} \tag{*}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} D_U f &= D_U \left( f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) g_i \right) \\ &= f(x_0) D_U(1) + \sum_{i=1}^n \left[ D_U, \mathbb{L}_{x^i - x_0^i} \right] (g_i) + (x^i - x_0^i) D_U(g_i) \\ &= f(x_0) D_U(1) + \sum_{i=1}^n \left[ D_U, \mathbb{L}_{x^i} \right] (g_i) + (x^i - x_0^i) D_U(g_i), \end{aligned}$$

wobei wir hier mit  $x^i$  die  $i$ -te *Koordinatenfunktion* bezeichnen und mit  $x_0^i$  die *konstante* Funktion mit Funktionswert gleich der  $i$ -ten Koordinate des Punktes  $x_0$ . Die Linksmultiplikation  $L_{x_0^i}$  vertauscht offenbar mit  $D_U$ , da  $D_U$  linear ist. Nun ist  $[D_U, L_{x^i}]$  ein Differentialoperator der Ordnung  $k - 1$ , womit es nach Induktionsannahme also Funktionen  $D_U^{i_1 \dots i_r}$  mit  $r = 0, \dots, k - 1$  und

$$[D_U, L_{x^i}] = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{r!} D_U^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial^r}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}$$

gibt. Daher folgt bei  $x = x_0$  mit (\*) und  $(x^i - x_0^i)|_{x=x_0} = 0$

$$D_U f|_{x_0} = f(x_0) D_U(1)|_{x_0} + \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{(r+1)!} D_U^{i_1 \dots i_r}(x_0) \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r} \partial x^i}(x_0).$$

Da der Punkt  $x_0$  aber beliebig war, folgt die Behauptung, da die Eindeutigkeit trivialerweise folgt, indem man  $D_U$  auf geeigneten Polynomen auswertet. Ist der Bildbereich der Karte nicht konvex, so zerlegt man ihn zunächst in kleine überlappende konvexe offene Teilmengen, wo wir die obige Form finden. Ein Vergleich auf den Schnittmengen zeigt aber aufgrund der Eindeutigkeit, daß die Koeffizientenfunktionen sogar auf ganz  $U$  definiert sind, womit auch in diesem Fall die lokale Form (A.25) folgt. Dies zeigt den ersten Teil. Die zweite Behauptung folgt aber leicht aus dem Transformationsverhalten von partiellen Ableitungen unter Koordinatenwechsel und wurde bereits in Lemma 5.4.4 diskutiert. Das Tensorfeld  $\sigma_k(D)$  ist gerade das *führende Symbol* aus Lemma 5.4.4. □

Ist umgekehrt ein Operator  $D$  gegeben, der in einem Atlas lokal die Form (A.25) besitzt, so ist  $D$  ein Differentialoperator. Dies zeigt folgende Proposition, womit schließlich die Äquivalenz der Definition 5.4.3 mit der algebraischen Definition A.2.3 für  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  gezeigt ist.

**Proposition A.3.6.** *Sei  $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  eine lineare Abbildung und  $k \geq 0$ . Gibt es dann einen Atlas, so daß für jede lokale Karte  $(U, x)$  in diesem Atlas Funktionen  $D_U^{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(U)$  für  $r = 0, \dots, k$  mit der Eigenschaft*

$$Df|_U = \sum_{r=0}^k \frac{1}{r!} D_U^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial^r f|_U}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \tag{A.27}$$

*existieren, so ist  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ .*

*Beweis.* Wir zeigen diese Behauptung erneut durch Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  gilt offenbar  $(Df)|_U = D_U^0(f|_U)$ , womit sich  $D_U^0$  als unabhängig von der Karte  $U$  erweist und eine global definierte glatte Funktion  $D_U^0 = D(1)$  darstellt. Damit ist aber  $D = L_{D(1)} \in \text{DiffOp}^0(C^\infty(M))$ . Für  $k \geq 1$  sieht man mit Hilfe der Leibniz-Regel leicht, daß  $([D, L_g]f)|_U$  wieder von der Form (A.27) ist, jedoch höchstens  $k - 1$  partielle Ableitungen von  $f$  enthält. Daher folgt die Behauptung durch Induktion. □

Zur weiteren Illustration betrachten wir als nächstes die Differentialoperatoren der Algebra  $C_0^\infty(M)$ . Aus der Lokalität von Differentialoperatoren  $D \in \text{DiffOp}^\bullet(C^\infty(M))$  gemäß Lemma A.3.2 folgt sofort, daß  $D(f) \in C_0^\infty(M)$ , falls  $f \in C_0^\infty(M)$ . Daher lassen sich Differentialoperatoren auf  $C_0^\infty(M)$  einschränken. Da  $C_0^\infty(M)$  eine Unteralgebra ist, folgt sofort, daß die Einschränkung von  $D \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$  auf  $C_0^\infty(M)$  ebenfalls ein Differentialoperator der Ordnung  $k$  der Algebra  $C_0^\infty(M)$  liefert. Die nächste Proposition zeigt nun, daß diese Zuordnung bijektiv ist:

**Proposition A.3.7.** *Sei  $D \in \text{DiffOp}^k(C_0^\infty(M))$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Differentialoperator  $\hat{D} \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ , so daß*

$$D = \hat{D}|_{C_0^\infty(M)}. \tag{A.28}$$

*Beweis.* Ein Differentialoperator  $\hat{D} \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$  ist durch seine Werte auf  $C_0^\infty(M)$  offenbar bereits eindeutig bestimmt: dies folgt sofort aus der lokalen Form sowie der Tatsache, daß es zu festem  $k$  und  $p \in M$  immer eine Funktion  $f$  mit kompaktem Träger gibt, deren Taylor-Entwicklung in einer lokalen Karte um  $p$  bis zur Ordnung  $k$  eine beliebig vorgegebene ist. Das Borel-Lemma ist hierzu nicht nötig, der Beweis ist elementar, da  $k$  endlich ist. Damit läßt sich aber die Form der Koeffizienten von  $\hat{D}$  bei  $p$  eindeutig bestimmen.

Sei also  $D$  vorgegeben, dann ist  $D$  lokal, was man analog zu Lemma A.3.2 zeigt. Wir definieren  $\hat{D}$  folgendermaßen. Sei  $O \subseteq M$  eine offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß  $O^{\text{cl}}$  und  $\chi \in C_0^\infty(M)$  mit der Eigenschaft  $\chi|_{O^{\text{cl}}} = 1$ . Die Existenz einer solchen Funktion  $\chi$  zu gegebenem  $O$  läßt sich durch eine einfache Verschärfung von Korollar A.1.5 zeigen, indem man  $O^{\text{cl}}$  durch endlich viele offene Mengen  $U_1, \dots, U_n$  überdeckt, derart, daß  $U_i^{\text{cl}}$  selbst kompakt ist. Dann betrachtet man  $A_1 = O^{\text{cl}}$  und  $A_2 = M \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$  und wählt  $\chi$  gemäß Korollar A.1.5. Offenbar ist dann  $\text{supp } \chi$  kompakt. Mit diesen Wahlen definieren wir für  $f \in C^\infty(M)$

$$\hat{D}(f)|_O = D(\chi f)|_O. \tag{*}$$

Da  $\chi f \in C_0^\infty(M)$ , können wir  $D$  tatsächlich anwenden. Ist nun  $\tilde{O}$ ,  $\tilde{\chi}$  eine alternative Wahl, so gilt aufgrund der Lokalität von  $D$  die Beziehung  $\text{supp}(D((\chi - \tilde{\chi})f)) \subseteq \text{supp}((\chi - \tilde{\chi})f) \subseteq M \setminus (O \cap \tilde{O})$ , da  $\chi - \tilde{\chi}$  auf der offenen Teilmenge  $O \cap \tilde{O}$  verschwindet. Damit folgt aber  $D(\chi f)|_{O \cap \tilde{O}} = D(\tilde{\chi} f)|_{O \cap \tilde{O}}$ , womit (\*) eine wohl-definierte lineare Abbildung  $\hat{D} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  ist.

Seien nun  $f, g \in C^\infty(M)$ , dann gilt für  $k = 0$  und  $O$ ,  $\chi$  wie oben

$$\hat{D}(gf)|_O = D(\chi^2 gf)|_O = D(L_{\chi g} \chi f)|_O = L_{\chi g} D(\chi f)|_O = g|_O \hat{D}(f)|_O,$$

da auch  $\chi^2|_{O^{\text{cl}}} = 1$ . Damit vertauscht  $\hat{D}$  aber mit  $L_g$ , da die offenen Teilmengen  $O$  ganz  $M$  überdecken. Also folgt  $\hat{D} \in \text{DiffOp}^0(C^\infty(M))$ . Sei nun  $k \geq 1$ , dann gilt

$$\begin{aligned}
 \left( \hat{D}(gf) - g\hat{D}(f) \right) \Big|_O &= D(\chi^2 gf) \Big|_O - g \Big|_O D(\chi f) \Big|_O \\
 &= D(L_{\chi g} \chi f) \Big|_O - (\chi g) \Big|_O D(\chi f) \Big|_O \\
 &= (D(L_{\chi g} \chi f) - L_{\chi g} D(\chi f)) \Big|_O \\
 &= \left( [\widehat{D}, \widehat{L_{\chi g}}](f) \right) \Big|_O.
 \end{aligned}$$

Da  $[D, L_{\chi g}] \in \text{DiffOp}^{k-1}(C_0^\infty(M))$  gilt, folgt durch Induktion nach  $k$ , daß  $[\hat{D}, L_g]$  auf  $O$  mit einem Differentialoperator der Ordnung  $k-1$  übereinstimmt. Nach Lemma A.3.1 folgt, daß  $[\hat{D}, L_g] \in \text{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$  und somit  $\hat{D} \in \text{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ . Es bleibt zu zeigen, daß die Einschränkung von  $\hat{D}$  auf Funktionen mit kompaktem Träger wieder den Differentialoperator  $D$  liefert. Dies folgt aber sofort aus der Existenz lokaler Einselemente gemäß Beispiel A.2.2.  $\square$

Diese Proposition zeigt also, daß die Differentialoperatoren von  $C^\infty(M)$  und  $C_0^\infty(M)$  letztlich die selben sind. Aus diesem Grunde schreiben wir auch gelegentlich

$$\text{DiffOp}^\bullet(M) = \text{DiffOp}^\bullet(C^\infty(M)) = \text{DiffOp}^\bullet(C_0^\infty(M)). \tag{A.29}$$

Wir können nun noch einige Konsequenzen der lokalen Charakterisierung von Differentialoperatoren geben. Insbesondere liefert Satz A.3.5 nun einen Beweis von Satz 2.1.26:

**Korollar A.3.8.** *Für die Differentialoperatoren erster Ordnung gilt:*

- i.)  $\sigma_1(D) = 0$  genau dann, wenn  $D \in \text{DiffOp}^0(M)$ .
- ii.)  $\sigma_1 : \text{Der}(C^\infty(M)) = \text{Der}(C_0^\infty(M)) \longrightarrow \Gamma^\infty(TM)$  ist eine kanonische lineare Bijektion mit der inversen Abbildung

$$\mathcal{L} : \Gamma^\infty(TM) \ni X \mapsto \mathcal{L}_X \in \text{Der}(C^\infty(M)). \tag{A.30}$$

*Beweis.* Zunächst gilt  $\text{DiffOp}^1(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \oplus \text{Der}(\mathcal{A})$  nach (A.20). Die lokale Formel für  $\sigma_1(D)$  zeigt aber sofort den ersten Teil, womit  $\sigma_1 \Big|_{\text{Der}(C^\infty(M))}$  injektiv ist. Da die Surjektivität trivial ist, folgt der zweite Teil.  $\square$

## A.4 Algebraische Definition von Multidifferentialoperatoren

Multidifferentialoperatoren verallgemeinern Differentialoperatoren in zweierlei Hinsicht: zum einen wollen wir mehr als nur ein Argument zulassen, wie dies beispielsweise für die Hochschild-Koketten eines Sternprodukts notwendig ist. Zum anderen wollen wir die Gelegenheit nutzen, um auch andere „Objekte“ als nur Algebraelemente zu „differenzieren“. Geometrisch sind wir hierbei



insbesondere an Schnitten von Vektorbündeln interessiert, um Aussagen wie „die äußere Ableitung von  $k$ -Formen zu  $(k + 1)$ -Formen ist ein Differentialoperator erster Ordnung“ treffen zu können. Der algebraische Rahmen wird nun durch folgende Definition festgelegt.

Wir betrachten eine assoziative und kommutative Algebra  $\mathcal{A}$  über einem Körper  $\mathbb{k}$  der Charakteristik Null, welche typischerweise ein Einselement oder zumindest lokale Einselemente besitzen soll. Weiter betrachten wir  $\mathcal{A}$ -Moduln  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$  und  $\mathcal{F}$ , welche immer eine zugrundeliegende  $\mathbb{k}$ -Vektorraumstruktur besitzen mögen, die mit der  $\mathcal{A}$ -Modulstruktur verträglich ist. Da  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, können wir jeden Linksmodul auch als Rechtsmodul und umgekehrt auffassen. Zudem können wir jeden Modul entsprechend auch als  $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ -Bimodul auffassen, was wir gelegentlich stillschweigend tun werden.

Ein  $N$ -Differentialoperator (kurz: Multidifferentialoperator) mit Argumenten in  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$  und Werten in  $\mathcal{F}$  wird dann eine  $\mathbb{k}$ -multilineare Abbildung

$$D : \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{F} \tag{A.31}$$

mit noch näher zu spezifizierenden Eigenschaften sein. Insbesondere wollen wir die Differentiationsordnung in jedem einzelnen Argument zählen können, womit sich folgende Multiindexschreibweise anbietet: Wir betrachten  $K = (k_1, \dots, k_N), L = (\ell_1, \dots, \ell_N) \in \mathbb{Z}^N$ . Dann definieren wir  $K \leq L$ , wenn  $k_i \leq \ell_i$  für alle  $i = 1, \dots, N$ . Weiter bezeichnen wir mit  $e_i \in \mathbb{Z}^N$  die kanonischen Basisvektoren, also den Multiindex mit 1 an  $i$ -ter Stelle und 0 sonst. Addition und Subtraktion von Multiindizes werden wie immer komponentenweise erklärt. Für  $K \geq 0$  definiert man weiter  $|K| = k_1 + \dots + k_N$ . Die  $\mathbb{k}$ -multilinearen Abbildungen  $D$  wie in (A.31) werden wir auf die übliche Weise mit den  $\mathbb{k}$ -linearen Abbildungen  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F})$  identifizieren, wobei  $\otimes$  immer für  $\otimes_{\mathbb{k}}$  steht. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathbb{L}_a^{(i)} : \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_N \tag{A.32}$$

die Linksmultiplikation (im Sinne der Modulstruktur von  $\mathcal{E}_i$ ) mit dem Algebreelement  $a \in \mathcal{A}$  im  $i$ -ten Tensorfaktor  $\mathcal{E}_i$ . Auf elementaren Tensoren gilt also

$$\mathbb{L}_a^{(i)}(s_1 \otimes \dots \otimes s_N) = s_1 \otimes \dots \otimes s_{i-1} \otimes as_i \otimes s_{i+1} \otimes \dots \otimes s_N, \tag{A.33}$$

wobei  $s_j \in \mathcal{E}_j$  für  $j = 1, \dots, N$ . Die Linksmultiplikation von Elementen in  $\mathcal{F}$  mit  $a \in \mathcal{A}$  bezeichnen wir einfach mit  $\mathbb{L}_a$ . Die folgende Definition ist nun die naheliegende Verallgemeinerung von Definition A.2.3:

**Definition A.4.1 (Multidifferentialoperatoren).** *Seien  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$  und  $\mathcal{F}$  Moduln über einer assoziativen und kommutativen  $\mathbb{k}$ -Algebra  $\mathcal{A}$ . Dann definiert man die Multidifferentialoperatoren  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  mit Argumenten in  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$  und Werten in  $\mathcal{F}$  der Ordnung  $K \in \mathbb{Z}^N$  induktiv durch*

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) = \{0\}, \tag{A.34}$$

falls es ein  $k_i < 0$  in  $K$  gibt, und

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) = \left\{ D \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F}) \mid \forall a \in \mathcal{A} \forall i : L_a \circ D - D \circ L_a^{(i)} \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K-e_i}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \right\}, \tag{A.35}$$

falls  $K \geq 0$ .

Da die Bedingungen jeweils linear sind, zeigt eine einfache Induktion nach  $|K|$ , daß die Multidifferentialoperatoren der Ordnung  $K$  ein Untervektorraum von  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F})$  sind.

Da wir  $\mathcal{A}$  in natürlicher Weise als  $\mathcal{A}$ -Modul auffassen können, indem wir die Algebrenmultiplikation als Modulmultiplikation deuten, liefert Definition A.4.1 eine Verallgemeinerung von Definition A.2.3:

*Bemerkung A.4.2.* Es gilt für alle  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{A}; \mathcal{A}) = \text{DiffOp}^k(\mathcal{A}). \tag{A.36}$$

Die folgende Proposition zeigt nun, daß auch die Multidifferentialoperatoren filtriert sind und sich mit Elementen aus  $\mathcal{A}$  multiplizieren lassen. Man beachte jedoch, daß es nicht mehr nur eine Rechtsmodulstruktur gibt, wie in Proposition A.2.4, sondern  $N$  im allgemeinen verschiedene, da wir jedes Argument mit Elementen aus  $\mathcal{A}$  multiplizieren können:

**Proposition A.4.3.** *Seien  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$  und  $\mathcal{F}$  Moduln über  $\mathcal{A}$ . Dann gilt:*

i.) Für  $K \leq L$  gilt

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \subseteq \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^L(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}), \tag{A.37}$$

womit

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) = \bigcup_{K \geq 0} \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \tag{A.38}$$

ein filtrierter Unterraum von  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F})$  ist.

ii.)  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  wird durch die Definition

$$a \cdot D = L_a \circ D \tag{A.39}$$

zu einem  $\mathcal{A}$ -Linksmodul. Weiter liefert

$$D \cdot^{(i)} a = D \circ L_a^{(i)} \tag{A.40}$$

eine  $\mathcal{A}$ -Rechtsmodulstruktur, welche mit allen anderen  $\cdot^{(j)}$  sowie mit (A.39) vertauscht. Im allgemeinen gilt  $D \cdot^{(i)} a \neq D \cdot^{(j)} a$  für  $i \neq j$ .

*Beweis.* Für den ersten Teil dürfen wir  $K \geq 0$  annehmen, da die Aussage sonst trivial ist. Wir wollen zunächst

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \subseteq \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K+e_i}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \quad (*)$$

zeigen, wobei  $i = 1, \dots, N$ . Der allgemeine Fall (A.37) folgt daraus durch sukzessives Anwenden von (\*). Sei also  $K = 0$  und  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  gegeben, womit also  $L_a \circ D - D \circ L_a^{(j)} = 0$  für alle  $j = 1, \dots, N$  gilt. Daher gilt aber auch  $L_a \circ D - D \circ L_a^{(j)} \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{e_i - e_j}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  für alle  $j = 1, \dots, N$ , womit  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{e_i}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  folgt. Dies zeigt (\*) für  $K = 0$ . Wir nehmen nun an, daß (\*) für alle  $K \geq 0$  mit  $|K| = 0, \dots, \kappa - 1$  gültig ist und wollen induktiv auf  $K$  mit  $|K| = \kappa$  schließen. Sei also  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  gegeben. Dann gilt  $L_a \circ D - D \circ L_a^{(j)} \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K - e_j}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  und  $|K - e_j| = \kappa - 1$ , so daß nach Induktionsannahme  $L_a \circ D - D \circ L_a^{(j)} \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K+e_i - e_j}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ . Dies impliziert aber  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K+e_i}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ , womit (\*) induktiv folgt und der erste Teil gezeigt ist. Den zweiten Teil zeigen wir ebenfalls durch Induktion nach  $\kappa = |K|$ , wobei wir wieder  $K \geq 0$  annehmen dürfen. Für  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  gilt

$$L_b \circ (L_a \circ D) - (L_a \circ D) \circ L_b^{(j)} = L_{ba} \circ D - L_{ab} \circ D = 0$$

ebenso wie

$$L_b \circ (D \circ L_a^{(i)}) - (D \circ L_a^{(i)}) \circ L_b^{(j)} = L_{ba} \circ D - L_{ab} \circ D = 0,$$

da  $\mathcal{A}$  kommutativ ist. Damit ist sowohl  $L_a \circ D$  als auch  $D \circ L_a^{(i)}$  für alle  $i = 1, \dots, N$  wieder ein Differentialoperator der Ordnung 0. Sei also die Behauptung für alle  $K \geq 0$  mit  $|K| = 0, \dots, \kappa - 1$  richtig, und sei  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  mit  $|K| = \kappa$  gegeben. Dann ist

$$L_b \circ (L_a \circ D) - (L_a \circ D) \circ L_b^{(j)} = L_a \circ (L_b \circ D - D \circ L_b^{(j)})$$

ein Element in  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K - e_j}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ , und

$$L_b \circ (D \circ L_a^{(i)}) - (D \circ L_a^{(i)}) \circ L_b^{(j)} = (L_b \circ D - D \circ L_b^{(j)}) \circ L_a^{(i)}$$

ist in  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K - e_j}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ , da nach  $|K - e_j| = \kappa - 1$  die Induktionsannahme verwendet werden kann. Damit folgt aber auch der zweite Teil durch Induktion, da es klar ist, daß es sich um Modulstrukturen handelt.  $\square$

Die Verkettung von Multidifferentialoperatoren liefert wieder Multidifferentialoperatoren, womit auch hier eine Verallgemeinerung von Proposition A.2.4 erreicht ist. Die genaue Bestimmung der resultierenden Ordnung ist jedoch etwas komplizierter:

**Proposition A.4.4.** *Seien  $\mathcal{E}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_{N_1}^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_1^{(M)}, \dots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_M$  und  $\mathcal{G}$  Moduln über  $\mathcal{A}$ . Sind*

$$D_i \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K_i} \left( \mathcal{E}_1^{(i)}, \dots, \mathcal{E}_{N_i}^{(i)}; \mathcal{F}_i \right) \tag{A.41}$$

und

$$D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^L(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_M; \mathcal{G}) \tag{A.42}$$

gegeben, so gilt

$$D \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M) \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1, \dots, K_M+L_M)} \left( \mathcal{E}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G} \right), \tag{A.43}$$

wobei  $L_i = (\ell_i, \dots, \ell_i) \in \mathbb{N}_0^{N_i}$  für alle  $i = 1, \dots, M$ .

*Beweis.* Offenbar ist die Aussage nur wieder für  $K_1, \dots, K_M, L \geq 0$  von Interesse, womit wir zunächst den Fall  $K_1 = \dots = K_M = L = 0$  betrachten. In diesem Fall ist aber leicht zu sehen, daß  $D \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M)$  mit jeder Linksmultiplikation  $L_a$  in der richtigen Weise vertauscht, womit (A.43) gilt. Nun betrachten wir  $\kappa = |K_1| + \dots + |K_M| + |L|$  und zeigen (A.43) durch Induktion nach  $\kappa$ . Mit  $L_a^{(i)(j)}$  bezeichnen wir die Linksmultiplikation im  $\mathcal{E}_j^{(i)}$ -Argument, wobei  $i = 1, \dots, M$  und  $j = 1, \dots, N_i$  gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} & L_a \circ D \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M) - D \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M) \circ L_a^{(i)(j)} \\ &= \left( L_a \circ D - D \circ L_a^{(i)} \right) \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M) \\ &+ D \circ \left( D_1 \otimes \dots \otimes \left( L_a \circ D_i - D_i \circ L_a^{(j)} \right) \otimes \dots \otimes D_M \right). \end{aligned}$$

Da  $L_a \circ D - D \circ L_a^{(i)} \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{L-e_i}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_M; \mathcal{G})$  und  $L_a \circ D_i - D_i \circ L_a^{(j)} \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K_i-e_j}(\mathcal{E}_1^{(i)}, \dots, \mathcal{E}_{N_i}^{(i)}; \mathcal{F}_i)$ , folgt durch Induktion, daß  $\left( L_a \circ D - D \circ L_a^{(i)} \right) \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M)$  in  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1, \dots, K_i+L'_i, \dots, K_M+L_M)} \left( \mathcal{E}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G} \right)$  mit  $L'_i = (\ell_i - 1, \dots, \ell_i - 1)$  ist. Ebenso folgt induktiv, daß die Abbildung  $D \circ \left( D_1 \otimes \dots \otimes \left( L_a \circ D_i - D_i \circ L_a^{(j)} \right) \otimes \dots \otimes D_M \right)$  einen Multidifferentialoperator in  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1, \dots, K_i-e_j+L_i, \dots, K_M+L_M)} \left( \mathcal{E}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G} \right)$  liefert. Da aber  $(K_1 + L_1, \dots, K_i + L'_i, \dots, K_M + L_M) \leq (K_1 + L_1, \dots, K_i - e_j + L_i, \dots, K_M + L_M)$  gilt, folgt mit der Filtrationseigenschaft (A.37), daß insgesamt  $L_a \circ D \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M) - D \circ (D_1 \otimes \dots \otimes D_M) \circ L_a^{(i)(j)}$  ein Element in  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1, \dots, K_i-e_j+L_i, \dots, K_M+L_M)} \left( \mathcal{E}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G} \right)$  für alle  $i$  und  $j$  ist, womit (A.43) folgt.  $\square$

Wir diskutieren nun einige Konsequenzen der Propositionen A.4.3 und A.4.4. Häufig betrachten wir die Situation von Differentialoperatoren auf einem festen Modul  $\mathcal{E}$ . Diese bezeichnen wir dann einfach mit

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{E}) = \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{E}; \mathcal{E}), \tag{A.44}$$

und setzen entsprechend

$$\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathcal{E}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^k(\mathcal{E}) \subseteq \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E}). \tag{A.45}$$

Wir erhalten somit unmittelbar folgende Verallgemeinerung von Proposition A.2.4:

**Korollar A.4.5.** *Sei  $\mathcal{E}$  ein  $\mathcal{A}$ -Modul. Dann ist  $\text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{\bullet}(\mathcal{E})$  eine filtrierte Unteralgebra von  $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E})$  mit Einselement  $\mathbb{1} = \text{id}_{\mathcal{E}}$ . Es gilt  $L_a \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{E})$ . Ist der Modul nichtausgeartet, so ist  $a \mapsto L_a$  ein injektiver Algebromorphismus  $\mathcal{A} \longrightarrow \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^0(\mathcal{E})$ .*

Hier heißt ein  $\mathcal{A}$ -Modul *nichtausgeartet*, wenn  $a \cdot s = 0$  für alle  $a \in \mathcal{A}$  impliziert, daß  $s = 0$  gilt. Für Algebren mit Einselement treffen wir die (durchaus vernünftige) Vereinbarung, daß wir nur Moduln  $\mathcal{E}$  mit der Eigenschaft  $\mathbb{1} \cdot s = s$  betrachten, also  $L_{\mathbb{1}} = \text{id}_{\mathcal{E}}$ . Diese sind dann immer nichtausgeartet.

Ein triviales, wenn auch wichtiges Beispiel für einen Bidifferentialoperator ist die Modulmultiplikation selbst:

*Beispiel A.4.6.* Sei  $\mathcal{E}$  ein Modul über  $\mathcal{A}$ , dann ist die Modulmultiplikation  $\mu_{\mathcal{E}} : \mathcal{A} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$$\mu_{\mathcal{E}}(a, s) = a \cdot s \tag{A.46}$$

ein Bidifferentialoperator der Ordnung 0 in beiden Argumenten

$$\mu_{\mathcal{E}} \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(0,0)}(\mathcal{A}, \mathcal{E}; \mathcal{E}). \tag{A.47}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Kommutativität von  $\mathcal{A}$ . Insbesondere ist die Algebromultiplikation  $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$  ein Bidifferentialoperator nullter Ordnung auf  $\mathcal{A}$ .

Als letzte Konstruktion betrachten wir das Einsetzen von Modulelementen in einen Multidifferentialoperator. Sei  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  gegeben und  $s \in \mathcal{E}_{\ell}$  fest gewählt. Dann definiert man die multilineare Abbildung  $i_{\ell}(s)D : \mathcal{E}_1 \times \dots \overset{\ell}{\wedge} \dots \times \mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{F}$  mit  $N - 1$  Argumenten durch

$$(i_{\ell}(s)D)(s_1, \dots, s_{\ell-1}, s_{\ell+1}, \dots, s_N) = D(s_1, \dots, s_{\ell-1}, s, s_{\ell+1}, \dots, s_N), \tag{A.48}$$

wobei  $s_i \in \mathcal{E}_i$  für  $i \in \{1, \dots, \ell - 1, \ell + 1, \dots, N\}$ . Die Abbildung  $D \mapsto i_{\ell}(s)D$  ist offenbar linear und es gilt

$$L_a \circ i_{\ell}(s) = i_{\ell}(s) \circ L_a \tag{A.49}$$

sowie

$$i_\ell(s) \circ L_a^{(i)} = \begin{cases} L_a^{(i)} \circ i_\ell(s) & i < \ell \\ i_\ell(as) & i = \ell \\ L_a^{(i-1)} \circ i_\ell(s) & i > \ell \end{cases} \tag{A.50}$$

für alle  $a \in \mathcal{A}$ . Schließlich gilt  $i_\ell(\alpha s + \beta t) = \alpha i_\ell(s) + \beta i_\ell(t)$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  und  $s, t \in \mathcal{E}_\ell$ . Die Einsetzungen an verschiedenen Stellen vertauschen.

Folgende Proposition zeigt, daß  $i_\ell(s)D$  wieder ein Multidifferentialoperator ist, was man mit dem üblichen Induktionsbeweis über die totale Ordnung  $|K|$  leicht zeigt. Wir verzichten daher auf einen Beweis:

**Proposition A.4.7.** *Sei  $D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$  und  $s \in \mathcal{E}_\ell$ . Dann gilt*

$$i_\ell(s)D \in \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{\hat{K}}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{\ell-1}, \mathcal{E}_{\ell+1}, \dots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}), \tag{A.51}$$

wobei  $\hat{K} = (k_1, \dots, k_{\ell-1}, k_{\ell+1}, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}^{N-1}$ .

Das einfache Beispiel A.4.6 sowie Proposition A.4.7 besitzen eine interessante und nichttriviale Anwendung, welche unsere Überlegungen zur differentiellen Hochschild-Kohomologie aus Abschnitt 6.2.5 für beliebige kommutative Algebren verallgemeinert:

**Satz A.4.8 (Differenzielle Hochschild-Kohomologie).** *Sei  $\mathcal{A}$  eine assoziative und kommutative  $\mathbb{k}$ -Algebra mit Einselement  $\mathbb{1}$ .*

*i.) Der differentielle Hochschild-Komplex*

$$C_{\text{diff}}^\bullet(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} C_{\text{diff}}^k(\mathcal{A}) \subseteq C^\bullet(\mathcal{A}) \tag{A.52}$$

mit

$$C_{\text{diff}}^k(\mathcal{A}) = \text{DiffOp}_{\mathcal{A}}^\bullet(\underbrace{\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}}_{k\text{-mal}}; \mathcal{A}) \tag{A.53}$$

*ist bezüglich des Gerstenhaber-Produkts  $\circ$ , der Gerstenhaber-Klammer  $[\cdot, \cdot]$ , des cup-Produkts  $\cup$  und des Hochschild-Differentials  $\delta$  abgeschlossen.*

*Damit ist  $C_{\text{diff}}^\bullet(\mathcal{A})$  insbesondere ein Unterkomplex von  $C^\bullet(\mathcal{A})$ .*

*ii.) Die differentielle Hochschild-Kohomologie*

$$\text{HH}_{\text{diff}}^\bullet(\mathcal{A}) = \frac{\ker\left(\delta|_{C_{\text{diff}}^\bullet(\mathcal{A})}\right)}{\text{im}\left(\delta|_{C_{\text{diff}}^{\bullet-1}(\mathcal{A})}\right)} \tag{A.54}$$

*wird auf natürliche Weise mit der Gerstenhaber-Klammer und dem cup-Produkt zu einer Gerstenhaber-Algebra.*

*iii.) Es gilt kanonisch*

$$\text{HH}_{\text{diff}}^0(\mathcal{A}) = \text{HH}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \tag{A.55}$$

und

$$\text{HH}_{\text{diff}}^1(\mathcal{A}) = \text{HH}^1(\mathcal{A}) = \text{Der}(\mathcal{A}). \tag{A.56}$$

*Beweis.* Da die Gerstenhaber-Produkte  $\circ_i$  aus Linearkombinationen von „Ineinandersteckungen“ gebildet werden, folgt der erste Teil unmittelbar aus den Propositionen A.4.4 und A.4.7 sowie Beispiel A.4.6 zusammen mit der Tatsache, daß  $\circ, [\cdot, \cdot], \cup, \delta$  auf die elementaren Operationen  $\circ_i$  zurückgeführt werden können. Der zweite Teil folgt analog zu Satz 6.2.18, da der Beweis ebenfalls rein kombinatorischer Natur ist und nur die elementaren Operationen  $\circ_i$  verwendet. Der dritte Teil ist schließlich eine einfache Konsequenz aus Bemerkung A.2.6 und der Annahme, daß  $\mathcal{A}$  kommutativ ist, womit alle Derivationen äußere sind.  $\square$

## A.5 Multidifferentialoperatoren auf Schnitten von Vektorbündeln

Wir wollen nun die algebraischen Resultate zu Multidifferentialoperatoren in die Differentialgeometrie übertragen. Hierbei stellt sich zunächst die Frage, welche Moduln man betrachten möchte. Auch wenn es nicht der einzige interessante Fall ist, werden wir uns auf die Schnitte  $\Gamma^\infty(E)$  von Vektorbündeln  $E \rightarrow M$  beschränken. Diese stellen eine große Klasse von Moduln über  $C^\infty(M)$  dar, wie wir in Abschnitt 2.2 gesehen haben.

Seien also  $\pi_j : E_j \rightarrow M$  mit  $j = 1, \dots, N$  und  $\pi_F : F \rightarrow M$  Vektorbündel über  $M$ , welche entweder reell oder komplex sein mögen, je nach dem, ob wir reell- oder komplexwertige Funktionen  $C^\infty(M)$  betrachten. Um die Notation nicht unnötig zu erschweren, schreiben wir für  $K \in \mathbb{Z}^N$  kurz

$$\text{DiffOp}_M^K(E_1, \dots, E_N; F) = \text{DiffOp}_{C^\infty(M)}^K(\Gamma^\infty(E_1), \dots, \Gamma^\infty(E_N); \Gamma^\infty(F)). \tag{A.57}$$

Als erstes Ergebnis erhalten wir die Lokalität und Lokalisierbarkeit von Multidifferentialoperatoren. Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq M$  können Schnitte  $s \in \Gamma^\infty(E)$  eingeschränkt werden und liefern Schnitte  $s|_U \in \Gamma^\infty(E|_U)$ . Man beachte jedoch, daß typischerweise *nicht* jeder Schnitt von  $E|_U$  eine solche Einschränkung ist: ein gegebener Schnitt  $s \in \Gamma^\infty(E|_U)$  kann im allgemeinen *nicht* zu einem Schnitt von  $E$  fortgesetzt werden. Diese Problematik haben wir für Funktionen ja bereits gesehen.

**Satz A.5.1 (Lokalität von Multidifferentialoperatoren).** *Seien  $E_j \rightarrow M$  mit  $j = 1, \dots, N$  und  $F \rightarrow M$  Vektorbündel über  $M$ .*

*i.) Sei  $D : \Gamma^\infty(E_1) \times \dots \times \Gamma^\infty(E_N) \rightarrow \Gamma^\infty(F)$  eine multilineare Abbildung. Ist  $D$  lokal im Sinne, daß*

$$\text{supp } D(s_1, \dots, s_N) \subseteq \text{supp } s_1 \cap \dots \cap \text{supp } s_N \tag{A.58}$$

*für alle  $s_j \in \Gamma^\infty(E_j)$  mit  $j = 1, \dots, N$ , so gibt es für jede offene Teilmenge  $U \subseteq M$  eindeutig bestimmte multilineare Abbildungen  $D_U : \Gamma^\infty(E_1|_U) \times \dots \times \Gamma^\infty(E_N|_U) \rightarrow \Gamma^\infty(F|_U)$  mit  $D_M = D$  und*

$$D_U(s_1, \dots, s_N)|_V = D_V(s_1|_V, \dots, s_N|_V) \tag{A.59}$$

für alle offenen Teilmengen  $V \subseteq U$  und  $s_j \in \Gamma^\infty(E_j|_U)$ .

- ii.) Ist  $D \in \text{DiffOp}_M^K(E_1, \dots, E_N; F)$ , so ist  $D$  lokal.
- iii.)  $D \in \text{DiffOp}_M^0(E_1, \dots, E_N; F)$  läßt sich kanonisch als ein Tensorfeld in  $\Gamma^\infty(E_1^* \otimes \dots \otimes E_N^* \otimes F)$  auffassen.
- iv.) Ist  $D \in \text{DiffOp}_M^K(E_1, \dots, E_N; F)$ , so gilt für alle offenen Teilmengen  $U$

$$D_U \in \text{DiffOp}_U^K(E_1|_U, \dots, E_N|_U; F|_U). \tag{A.60}$$

*Beweis.* Der erste Teil folgt im wesentlichen dem Beweis von Proposition A.3.3. Die Eindeutigkeit läßt sich wieder wie in Proposition A.3.3 mit Hilfe einer Abschneidefunktion zeigen: Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq M$  und  $s_j \in \Gamma^\infty(E_j|_U)$  betrachten wir eine offene Teilmenge  $O \subseteq U$  mit  $O^{\text{cl}} \subseteq U$  und eine Abschneidefunktion  $\chi \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp } \chi \subseteq U$  und  $\chi|_{O^{\text{cl}}} = 1$ . Dann definiert man

$$D_U(s_1, \dots, s_N)|_O = D(\chi s_1, \dots, \chi s_N)|_O.$$

Ist  $\tilde{O}$  und  $\tilde{\chi}$  eine andere Wahl, so gilt  $(\chi - \tilde{\chi})|_{O \cap \tilde{O}} = 0$ , womit aufgrund der Lokalität und Multilinearität

$$\begin{aligned} D(\chi s_1, \dots, \chi s_N)|_{O \cap \tilde{O}} &= D(\chi s_1, \dots, \chi s_{N-1}, \tilde{\chi} s_N)|_{O \cap \tilde{O}} \\ &= \dots = D(\tilde{\chi} s_1, \dots, \tilde{\chi} s_N)|_{O \cap \tilde{O}} \end{aligned}$$

folgt, was die Wohl-Definiertheit von  $D_U$  liefert. Analog zeigt man auch, daß die Eigenschaft (A.59) gilt. Seien nun für den zweiten Teil  $s_j \in \Gamma^\infty(E_j)$  mit  $j = 1, \dots, N$  vorgegeben und  $p \notin \text{supp } s_{j_0}$ . Dann wählt man  $\chi \in C^\infty(M)$  mit  $\chi|_{\text{supp } s_{j_0}} = 1$  und  $\chi(p) = 0$  und findet für  $D \in \text{DiffOp}_M^0(E_1, \dots, E_N; F)$ , daß

$$D(s_1, \dots, s_N)(p) = D(s_1, \dots, \chi s_{j_0}, \dots, s_N)(p) = \chi(p)D(s_1, \dots, s_N)(p) = 0,$$

womit (A.58) für  $K = 0$  folgt. Danach läuft die Induktion über  $|K|$  wie in Lemma A.3.2. Im dritten Teil geht es also darum, den Beweis von Satz 2.2.24 nachzuholen, da die Multidifferentialoperatoren  $\text{DiffOp}_M^0(E_1, \dots, E_N; F)$  nullter Ordnung gerade die  $C^\infty(M)$ -multilinearen Abbildungen sind. Seien dazu  $v_j \in E_j|_p$  vorgegeben. Dann definieren wir

$$\tilde{D}_p(v_1, \dots, v_N) = D(s_1, \dots, s_N)(p),$$

wobei wir Schnitte  $s_j \in \Gamma^\infty(E_j)$  mit  $s_j(p) = v_j$  wählen, was immer möglich ist, wie man mit Hilfe einer lokalen Trivialisierung und einer entsprechenden Abschneidefunktion leicht einsieht. Wir müssen nun zeigen, daß  $\tilde{D}_p$  wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Schnitte  $s_j$  sondern nur von den Werten  $v_j = s_j(p)$  bei  $p$  abhängt. Da  $D$  multilinear ist, genügt es, zu zeigen, daß mit  $v_j = 0$  auch  $\tilde{D}_p(v_1, \dots, v_N)$  verschwindet. Sei also  $s_j(p) = 0$  für ein  $j$ . Man kann nun um  $p$  eine Bündelkarte mit lokalen Basisschnitten  $e_{j,\alpha} \in$



$\Gamma^\infty(E_j|_U)$  wählen, so daß  $s_j|_U = s_j^\alpha e_{j,\alpha}$  mit eindeutig bestimmten Funktionen  $s_j^\alpha \in C^\infty(U)$  gilt. Insbesondere folgt mit  $s_j(p) = 0$  auch  $s_j^\alpha(p) = 0$  für alle  $\alpha$ . Wir wählen nun eine glatte Funktion  $\chi \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp } \chi \subseteq U$  und  $\chi(p) = 1$ . Dann sind die Funktionen  $\chi s_j^\alpha$  auf ganz  $M$  als glatte Funktionen definiert, und entsprechend ist auch  $\chi e_{j,\alpha} \in \Gamma^\infty(E_j)$  global definiert und glatt. Weiter gilt  $\chi^2 s_j = (\chi s_j^\alpha)(\chi e_{j,\alpha})$ . Mit der  $C^\infty(M)$ -Multilinearität gilt nun

$$\begin{aligned} D(s_1, \dots, s_N)(p) &= \chi^2(p)D(s_1, \dots, s_N)(p) \\ &= D(s_1, \dots, \chi^2 s_j, \dots, s_N)(p) \\ &= D(s_1, \dots, (\chi s_j^\alpha)(\chi e_{j,\alpha}), \dots, s_N)(p) \\ &= (\chi s_j^\alpha)(p)D(s_1, \dots, (\chi e_{j,\alpha}), \dots, s_N)(p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt aber, daß  $\tilde{D}$  tatsächlich ein wohl-definiertes Tensorfeld vom angegebenen Typ ist. Für  $K = 0$  ist der vierte Teil klar, da die Einschränkung von  $D$  durch die entsprechende Einschränkung des Tensorfeldes  $\tilde{D}$  gegeben ist und daher wieder von der Ordnung 0 ist. Der Beweis für  $K \geq 0$  folgt nun wörtlich dem von Proposition A.3.3, wobei wir nun einen Induktionsbeweis über  $|K|$  führen.  $\square$

Wir wollen nun wieder die lokale Gestalt von Multidifferentialoperatoren bestimmen. Hierzu müssen wir aber, anders als im Fall von (Multi-) Differentialoperatoren auf Funktionen, auch lokale Darstellungen der Schnitte wählen, da auf intrinsische Weise *keine* partielle Ableitung eines Schnittes wohl-definiert ist: man kann nur die Koeffizientenfunktionen bezüglich lokaler Basisschnitte partiell in Koordinatenrichtung differenzieren. Abgesehen von diesem neuen Aspekt verläuft der Beweis des folgenden Satzes analog zu dem von Satz A.3.5.

**Satz A.5.2 (Lokale Form von Multidifferentialoperatoren).** *Sei  $D \in \text{DiffOp}_M^K(E_1, \dots, E_N; F)$ . Sei weiter eine lokale Karte  $(U, x)$  von  $M$  gegeben sowie lokale, auf  $U$  definierte Basisschnitte  $\{e_{j,\alpha}\}_\alpha$  von  $E_j$  für  $j = 1, \dots, N$  mit den zugehörigen dualen lokalen Basisschnitten  $\{e_j^\alpha\}_\alpha$  von  $E_j^*$ .*

*i.) Dann gibt es eindeutig bestimmte lokale Schnitte  $D_{U \alpha_1, \dots, \alpha_N}^{R I_1, \dots, I_N} \in \Gamma^\infty(F|_U)$ , welche in jeder Indexgruppe  $I_j = (i_1^{(j)}, \dots, i_{r_j}^{(j)})$  total symmetrisch sind, so daß*

$$\begin{aligned} D_U(s_1, \dots, s_N) &= \sum_{0 \leq R \leq K} \frac{1}{R!} \sum_{I_1, \dots, I_N} D_{U \alpha_1, \dots, \alpha_N}^{R I_1, \dots, I_N} \frac{\partial^{r_1} s_1^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1^{(1)}} \dots \partial x^{i_{r_1}^{(1)}}} \dots \frac{\partial^{r_N} s_N^{\alpha_N}}{\partial x^{i_1^{(N)}} \dots \partial x^{i_{r_N}^{(N)}}} \end{aligned} \tag{A.61}$$

für alle lokalen Schnitte  $s_j \in \Gamma^\infty(E_j|_U)$ , wobei  $s_j = s_j^\alpha e_{j,\alpha}$  die lokale Basisdarstellung der  $s_j$  bezeichnet.

ii.) Für  $R = K$  definieren die lokalen Schnitte  $D_U^{K I_1, \dots, I_N}_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$  ein globales Tensorfeld, das führende Symbol

$$\sigma_K(D) \in \Gamma^\infty (S^{k_1} TM \otimes \dots \otimes S^{k_N} TM \otimes E_1^* \otimes \dots \otimes E_N^* \otimes F) \quad (\text{A.62})$$

durch

$$\sigma_K(D)|_U = \frac{1}{K!} \partial_{I_1} \otimes \dots \otimes \partial_{I_N} \otimes e_1^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_N^{\alpha_N} \otimes D_U^{K I_1, \dots, I_N}_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}, \quad (\text{A.63})$$

wobei über alle auftretenden Koordinaten- und Basisindizes summiert wird und

$$\partial_{I_j} = \frac{\partial}{\partial x^{i_1^{(j)}}} \vee \dots \vee \frac{\partial}{\partial x^{i_{k_j}^{(j)}}}. \quad (\text{A.64})$$

*Beweis.* Für  $K = 0$  ist dies gerade die lokale Darstellung des Tensorfeldes aus Satz A.5.1, so daß wir  $K \geq 0$  annehmen können. Auch wenn die Buchhaltung etwas schwieriger geworden ist, folgt der Beweis doch im wesentlichen dem von Satz A.3.5. Ohne Einschränkung betrachten wir wieder zunächst einen konvexen Bildbereich  $x(U)$  der Karte. Weiter wählen wir  $x_0$  fest und schreiben die Koeffizientenfunktionen in der Form

$$s_j^\alpha(x) = s_j^\alpha(x_0) + (x^i - x_0^i) g_{j,i}^\alpha(x)$$

mit  $g_{j,i}^\alpha \in C^\infty(U)$  für alle  $j = 1, \dots, N$ , so daß

$$\frac{\partial^r g_{j,i}^\alpha}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}(x_0) = \frac{1}{r+1} \frac{\partial^{r+1} s_j^\alpha}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r} \partial x^i}(x_0), \quad (*)$$

was nach Hadamards Trick gelingt. Mit der üblichen Induktionsannahme für die Induktion nach  $|K|$  sind die Operatoren

$$S_j^i = D_U \circ \mathbb{L}_{x^i - x_0^i}^{(j)} - \mathbb{L}_{x^i - x_0^i} \circ D_U = D_U \circ \mathbb{L}_{x^i}^{(j)} - \mathbb{L}_{x^i} \circ D_U$$

von der gewünschten Form. Man beachte, daß die Linksmultiplikation mit der Konstanten  $x_0^i$  mit  $D$  vertauscht, während die Linksmultiplikation mit der Koordinatenfunktion  $x^i$  dies natürlich im allgemeinen nicht tut. Es gilt also

$$\begin{aligned} & S_j^i(s_1, \dots, s_N) \\ &= \sum_{0 \leq R \leq K - e_j} \frac{1}{R!} \sum_{I_1, \dots, I_N} S_j^{iR I_1, \dots, I_N}_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \frac{\partial^{r_1} s_1^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1^{(1)}} \dots \partial x^{i_{r_1}^{(1)}}} \dots \frac{\partial^{r_N} s_N^{\alpha_N}}{\partial x^{i_1^{(N)}} \dots \partial x^{i_{r_N}^{(N)}}} \end{aligned}$$

mit entsprechenden lokalen Schnitten  $S_j^{iR I_1, \dots, I_N}_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \in \Gamma^\infty(F|_U)$ . Wir berechnen nun  $D_U(s_1, \dots, s_N)$  am Punkte  $x = x_0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} D_U(s_1, \dots, s_N)(x_0) &= D_U((s_1^\alpha(x_0) + g_{1,i}^\alpha(x^i - x_0^i)) e_{1,\alpha}, s_2, \dots, s_N)(x_0) \\ &= s_1^\alpha(x_0) D(e_{1,\alpha}, s_2, \dots, s_N)(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left( D_U \circ \mathbb{L}_{x^i}^{(1)} - \mathbb{L}_{x^i-x_0^i}^{(1)} \circ D_U \right) (g_{1,i}^\alpha e_{1,\alpha}, s_2, \dots, s_N)(x_0) \\
 &+ \left( \mathbb{L}_{x^i-x_0^i} \circ D_U \right) (g_{1,i}^\alpha e_{1,\alpha}, s_2, \dots, s_N)(x_0) \\
 &= s_1^\alpha(x_0) D_U(e_{1,\alpha}, s_2, \dots, s_N)(x_0) \\
 &+ S_1^i(g_{1,i}^\alpha e_{1,\alpha}, s_2, \dots, s_N)(x_0),
 \end{aligned}$$

da  $x^i - x_0^i$  bei  $x = x_0$  verschwindet. Iterativ erhält man also

$$\begin{aligned}
 D_U(s_1, \dots, s_N)(x_0) &= \sum_{j=1}^N s_1^{\alpha_1}(x_0) \cdots s_{j-1}^{\alpha_{j-1}}(x_0) \\
 &\quad \times S_j^i(e_{1,\alpha_1}, \dots, e_{j-1,\alpha_{j-1}}, g_{ji}^{\alpha_j} e_{j,\alpha_j}, s_{j+1}, \dots, s_N)(x_0) \\
 &+ s_1^{\alpha_1}(x_0) \cdots s_N^{\alpha_N}(x_0) D_U(e_{1,\alpha_1}, \dots, e_{N,\alpha_N})(x_0).
 \end{aligned}$$

Einsetzen der lokalen Form der  $S_j^i$  und Berücksichtigung von (\*) liefert dann die gewünschte Form des Operators  $D_U$  am Punkt  $x_0$ . Da aber die  $S_j^i$  nicht von der Wahl des Punktes  $x_0$  abhängen, gilt die Darstellung für alle  $x_0 \in U$ , womit der Beweis von (A.61) erbracht ist. Das zeigt den ersten Teil durch Induktion nach  $|K|$ . Der zweite besteht im Nachrechnen, daß sich die Koeffizientenfunktionen für  $R = K$  tatsächlich auf die gewünschte Weise transformieren: Mit Lemma 5.4.4 sowie dem bekannten Transformationsverhalten der Koeffizientenfunktionen  $s^\alpha$  unter Wechsel der Basisschnitte  $e_\alpha$  ist dies aber eine einfache Rechnung.  $\square$

*Bemerkung A.5.3.* Analog zu Proposition A.3.6 erhält man auch die „Umkehrung“ dieses Satzes: eine Abbildung  $D$ , welche in einem Atlas bezüglich einer Wahl von lokalen Basisschnitten lokal durch (A.61) beschrieben werden kann, ist ein Multidifferentialoperator der entsprechenden Ordnung. Der Beweis verläuft hier, abgesehen vom etwas größeren buchhalterischen Aufwand, analog zu Proposition A.3.6, so daß wir auf eine detaillierte Ausführung verzichten.

Wir kommen zum Abschluß nun zu einigen Beispielen, welche an verschiedenen Stellen bereits zur Anwendung kamen:

*Beispiel A.5.4 (Äußere Ableitung).* Die äußere Ableitung  $d : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$  ist ein Differentialoperator erster Ordnung. Dies folgt unmittelbar aus der Leibniz-Regel

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha \tag{A.65}$$

für  $f \in C^\infty(M)$  und  $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$ . Damit ist letztlich auch die Vorgehensweise im Beweis von Satz 2.3.14 gerechtfertigt,  $d$  in lokalen Koordinaten zu bestimmen. Ebenso sind die Operatoren  $\partial$  und  $\bar{\partial}$  auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit Differentialoperatoren der Ordnung 1.

*Beispiel A.5.5 (Schouten-Nijenhuis-Klammer).* Mit Hilfe der Leibniz-Regel zeigt man analog, daß die Schouten-Nijenhuis-Klammer ein Bidifferentialoperator der Ordnung  $(1, 1)$  ist, also

$$[\cdot, \cdot] \in \text{DiffOp}_M^{(1,1)}(\Lambda^\bullet TM, \Lambda^\bullet TM; \Lambda^\bullet TM). \tag{A.66}$$

Insbesondere ist die Lie-Klammer von Vektorfeldern ein Bidifferentialoperator der Ordnung  $(1, 1)$ .

*Beispiel A.5.6 (Kovariante Ableitung und Krümmung).* Ist  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel, so ist eine kovariante Ableitung  $\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$  ein Bidifferentialoperator der Ordnung  $(0, 1)$ , also in unserer Notation

$$\nabla \in \text{DiffOp}_M^{(0,1)}(TM, E; E). \tag{A.67}$$

Dies folgt wieder unmittelbar aus der Funktionenlinearität im ersten und der Leibniz-Regel im zweiten Argument gemäß Definition 2.2.25. Entsprechend liefert Satz A.5.2 die Rechtfertigung dafür, daß  $\nabla$  auf lokalen Basisschnitten ausgewertet werden darf und so durch die lokalen Zusammenhangsformen festgelegt wird.

Interessant ist nun der Krümmungstensor  $R(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]}s$ , welcher durch naives Abzählen der Differentiationsordnungen gemäß Proposition A.4.4 sowie mit Beispiel A.5.5 ein Tridifferentialoperator  $R \in \text{DiffOp}_M^{(1,1,2)}(TM, TM, E; E)$  ist. Hier sieht man, daß beim Bilden geeigneter Linearkombinationen der tatsächliche Differentiationsgrad niedriger ausfallen kann, als Proposition A.4.4 dies zunächst liefert: Es gilt ja aufgrund der jeweiligen Leibniz-Regeln für  $\nabla$  und die Lie-Klammer, daß  $R$  *tensoriell* in jedem Argument, also ein Tridifferentialoperator der Ordnung  $(0, 0, 0)$  ist.

Die Potenzen der symmetrisierten kovarianten Ableitung  $D$  wie in Definition 5.4.1 liefern für  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  schließlich Differentialoperatoren

$$D^k \in \text{DiffOp}_M^k(S^\ell T^*M; S^{\ell+k} T^*M). \tag{A.68}$$

*Beispiel A.5.7 (Poisson-Klammer und Jacobiator).* Schließlich zeigt man erneut unter Verwendung der Leibniz-Regel, daß die Poisson-Klammer ein Bidifferentialoperator der Ordnung  $(1, 1)$  ist. Für ein beliebiges Bivektorfeld  $\pi$  ist dann der Jacobiator  $J_\pi$  gemäß (4.6) ein Tridifferentialoperator der Ordnung  $(1, 1, 1)$ , was ebenfalls aus der Leibniz-Regel für  $J_\pi$  folgt.

---

# Kommentiertes Literaturverzeichnis

## Literatur zu Kapitel 1

- 1.1 HONERKAMP, J., RÖMER, H.: *Klassische Theoretische Physik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.  
Schönes Lehrbuch zur theoretischen Physik, insbesondere Kapitel 2 und 3 als Hintergrundwissen zur klassischen Mechanik.

## Literatur zu Kapitel 2

- 2.1 BRÖCKER, T., JÄNICH, K.: *Einführung in die Differentialtopologie*, Band 143 in *Heidelberger Taschenbücher*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990. Korrigierter Nachdruck.  
Hier finden sich weiterführende differentialtopologische Resultate mit detaillierten Beweisen.
- 2.2 JÄNICH, K.: *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 4. Auflage, 2003.  
Sehr schöne und pädagogische Einführung in die Differentialgeometrie, insbesondere weitere Details zur Integrationstheorie.
- 2.3 LANG, S.: *Fundamentals of Differential Geometry*, Band 191 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.  
Einer der Klassiker. Sehr viel Hintergrundinformation, insbesondere auch zur Riemannschen Geometrie.
- 2.4 MICHOR, P.: *Topics in Differential Geometry*. Schrödinger Institute, Wien, 2001, erhältlich auf der homepage [www.mat.univie.ac.at/~michor/](http://www.mat.univie.ac.at/~michor/).  
Dieses Skriptum war an vielen Stellen Vorlage und Inspiration. Uneingeschränkt empfehlenswert.
- 2.5 QUERENBURG, B. v.: *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 2001.

Sehr ausführliche Darstellung der mengentheoretischen Topologie, zum Nachschlagen einzelner Begriffe.

- 2.6 WELLS, R. O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Band 65 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1980.

Weiterführende Resultate zu komplexen Mannigfaltigkeiten und Kähler-Geometrie.

### Literatur zu Kapitel 3

- 3.1 ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E.: *Foundations of Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 2. Auflage, 1985.

Sicherlich nach wie vor das Standardwerk in der geometrischen Mechanik. Sehr umfangreich und auch nicht ganz einfach.

- 3.2 ARNOL'D, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Band 60 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.

Einer der Klassiker zur klassischen Mechanik, insbesondere auch weiterführenden Resultate zur Dynamik und Störungstheorie.

- 3.3 DUISTERMAAT, J. J., KOLK, J. A. C.: *Lie Groups*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

Sehr moderne Darstellung der Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Wirkungen, allerdings kein Anfängerbuch.

- 3.4 GUILLEMIN, V., STERNBERG, S.: *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1984.

Ebenfalls ein Klassiker. Bietet insbesondere auch Anwendungen der symplektischen Geometrie jenseits der klassischen Mechanik.

- 3.5 HALL, B. C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Band 222 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.

Schöne Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Darstellungstheorie, bezieht sich hauptsächlich auf Matrix-Lie-Gruppen.

- 3.6 MARSDEN, J. E., RATIU, T. S.: *Einführung in die Mechanik und Symmetrie*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 2000.

Schöne Darstellung der geometrischen Mechanik mit vielen weiterführenden Beispielen.

- 3.7 MEINRENKEN, E.: *Symplectic Geometry*. Department of Mathematics, University of Toronto, 2000. Vorlesungsskriptum, erhältlich auf der homepage [www.math.toronto.edu/~mein/](http://www.math.toronto.edu/~mein/).

Weiterführende Resultate zur symplektischen Geometrie. Zum Teil sehr elegante Beweise, aber nicht ganz einfach.

- 3.8 ORTEGA, J.-P., RATIU, T. S.: *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*, Band 222 in *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 2004.

Weiterführende Literatur zur Phasenraumreduktion, kein Anfängerbuch.

## Literatur zu Kapitel 4

- 4.1 CANNAS DA SILVA, A., WEINSTEIN, A.: *Geometric Models for Noncommutative Algebras. Berkeley Mathematics Lecture Notes*. AMS, 1999.  
Verschiedene Aspekte der Poisson-Geometrie und auch der Lie-Algebroidtheorie werden im Lichte der nichtkommutativen Geometrie diskutiert. Enthält auch eine kurze Einführung in die Deformationsquantisierung.
- 4.2 DUFOUR, J.-P., ZUNG, N. T.: *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Band 242 in *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, New York, 2005.  
Fachmonographie zur Poisson-Geometrie mit Schwerpunkt auf den verschiedenen Normalformen.
- 4.3 MACKENZIE, K. C. H.: *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Band 213 in *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.  
Grundlegendes zur Theorie der Lie-Gruppoide und Lie-Algebroiden.
- 4.4 VAISMAN, I.: *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994.  
Der Klassiker zur Poisson-Geometrie, enthält auch kurze Bemerkungen zur Deformationsquantisierung.

## Literatur zu Kapitel 5

- 5.1 BATES, S., WEINSTEIN, A.: *Lectures on the Geometry of Quantization*. Berkeley Mathematics Lecture Notes 8, Berkeley, 1995.  
Diverse geometrische Aspekte zur Quantisierung ausgehend von der WKB-Entwicklung.
- 5.2 DIRAC, P. A. M.: *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.  
Einer der Klassiker zur Quantisierungstheorie in Gegenwart von *constraints*.
- 5.3 LANDSMAN, N. P.: *Mathematical Topics between Classical and Quantum Mechanics. Springer Monographs in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.  
Sehr detaillierte und schöne Diskussion des Quantisierungsproblems, insbesondere der funktionalanalytischen Aspekte. Setzt einiges an Kenntnissen zu Operatoralgebren voraus.
- 5.4 THIRRING, W.: *Quantum Mathematical Physics. Atoms, Molecules and Large Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2002.  
Grundlagen der Quantentheorie mit Schwerpunkt auf den funktionalanalytischen Aspekten.
- 5.5 WOODHOUSE, N. M. J.: *Geometric Quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.  
Ein Standardwerk zur geometrischen Quantisierung.

## Literatur zu Kapitel 6

- 6.1 BAYEN, F., FLATO, M., FRØNSDAL, C., LICHNEROWICZ, A., STERNHEIMER, D.: *Deformation Theory and Quantization*. Ann. Phys. **111** (1978), 61–151.  
Die grundlegenden Definitionen und erste Resultate zu Sternprodukten. Schon aus historischen Gründen sollte dieser Artikel gelesen werden.
- 6.2 FEDOSOV, B. V.: *Deformation Quantization and Index Theory*. Akademie Verlag, Berlin, 1996.  
Die Konstruktion von Fedosov sowie der Beweis seines Index-Theorems, setzt allerdings einiges voraus.
- 6.3 WEINSTEIN, A.: *Deformation Quantization*. Astérisque **227** (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.  
Schöner, wenn auch etwas älterer Übersichtsartikel.

## Literatur zu Kapitel 7

- 7.1 BRATTELI, O., ROBINSON, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I:  $C^*$ - and  $W^*$ -Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1987.  
Grundlagen der Theorie der Operatoralgebren mit Anwendungen in der Quantentheorie, zum Nachschlagen.
- 7.2 SCHMÜDGEN, K.: *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*, Band 37 in *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990.  
Fachmonographie zu Algebren von unbeschränkten Operatoren, bietet Hintergrundwissen und Motivation für die Darstellungstheorie. Kein Anfängerbuch.
- 7.3 WALDMANN, S.: *States and Representation Theory in Deformation Quantization*. Rev. Math. Phys. **17** (2005), 15–75.  
Ein Übersichtsartikel zur Darstellungstheorie mit Schwerpunkt Morita-Theorie.



---

## Literaturverzeichnis

1. ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E.: *Foundations of Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 2. Auflage, 1985.
2. AGARWAL, G. S., WOLF, E.: *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics. I. Mapping Theorems and Ordering of Functions of Noncommuting Operators*. Phys. Rev. D **2.10** (1970), 2161–2186.
3. AGARWAL, G. S., WOLF, E.: *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics II*. Phys. Rev. D **2** (1970), 2187–2205.
4. AGARWAL, G. S., WOLF, E.: *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics III*. Phys. Rev. D **2.10** (1970), 2206–2225.
5. AHARONOV, Y., BOHM, D.: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Phys. Rev. **115.3** (1959), 485–491.
6. AIZENMAN, M., GALLAVOTTI, G., GOLDSTEIN, S., LEBOWITZ, J. L.: *Stability and Equilibrium States of Infinite Classical Systems*. Commun. Math. Phys. **48** (1976), 1–14.
7. ALI, S. T., ENGLIŠ, M.: *Quantization Methods; A guide for Physicists and Analysts*. Rev. Math. Phys. **17.4** (2005), 391–490.
8. ARNAL, D., CAHEN, M., GUTT, S.:  *$\star$ -exponential and holomorphic discrete series*. Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **41.2** (1989), 207–227.
9. ARNAL, D., CORTET, J. C., MOLIN, P., PINCZON, G.: *Covariance and Geometrical Invariance in  $\star$ -Quantization*. J. Math. Phys. **24.2** (1983), 276–283.
10. ARNAL, D., MANCHON, D., MASMOUDI, M.: *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*. Pacific. J. Math. **203** (2002), 23–66.
11. ARNOLD, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Band 60 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.
12. BARGMANN, V.: *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform, Part I*. Comm. Pure Appl. Math **14** (1961), 187–214.
13. BARGMANN, V.: *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform, Part II. A Family of Related Function Spaces Application to Distribution Theory*. Comm. Pure Appl. Math **20** (1967), 1–101.

14. BASART, H., FLATO, M., LICHNEROWICZ, A., STERNHEIMER, D.: *Deformation Theory applied to Quantization and Statistical Mechanics*. Lett. Math. Phys. **8** (1984), 483–494.
15. BASART, H., LICHNEROWICZ, A.: *Conformal Symplectic Geometry, Deformations, Rigidity and Geometrical (KMS) Conditions*. Lett. Math. Phys. **10** (1985), 167–177.
16. BATES, S., WEINSTEIN, A.: *Lectures on the Geometry of Quantization*. Berkeley Mathematics Lecture Notes 8, Berkeley, 1995.
17. BAYEN, F., FLATO, M., FRØNSDAL, C., LICHNEROWICZ, A., STERNHEIMER, D.: *Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics*. Lett. Math. Phys. **1** (1977), 521–530.
18. BAYEN, F., FLATO, M., FRØNSDAL, C., LICHNEROWICZ, A., STERNHEIMER, D.: *Deformation Theory and Quantization*. Ann. Phys. **111** (1978), 61–151.
19. BECHER, F.: *Sternprodukte auf Kotangentenbündeln*. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik, Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2006. <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~flo/>.
20. BEISER, S.: *Eine konvergente Algebra für das Wick-Sternprodukt und kohärente Zustände in der Deformationsquantisierung*. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik, Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2005.
21. BEISER, S., RÖMER, H., WALDMANN, S.: *Convergence of the Wick Star Product*. Commun. Math. Phys. **272** (2007), 25–52.
22. BEREZIN, F. A.: *General Concept of Quantization*. Commun. Math. Phys. **40** (1975), 153–174.
23. BEREZIN, F. A.: *Quantization*. Math. USSR Izvestija **8.5** (1975), 1109–1165.
24. BEREZIN, F. A.: *Quantization in Complex Symmetric Spaces*. Math. USSR Izvestija **9.2** (1975), 341–379.
25. BEREZIN, F. A., MARINOV, M. S.: *Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics*. Ann. Phys. **104** (1977), 336–362.
26. BERTELSON, M., BIELIAVSKY, P., GUTT, S.: *Parametrizing Equivalence Classes of Invariant Star Products*. Lett. Math. Phys. **46** (1998), 339–345.
27. BERTELSON, M., CAHEN, M., GUTT, S.: *Equivalence of Star Products*. Class. Quant. Grav. **14** (1997), A93–A107.
28. BIELIAVSKY, P.: *Strict Quantization of Solvable Symmetric Spaces*. J. of Symplectic Geometry **1.2** (2002), 269–320.
29. BIELIAVSKY, P., BONNEAU, P.: *On the geometry of the characteristic class of a star product on a symplectic manifold*. Rev. Math. Phys. **15** (2003), 199–215.
30. BIELIAVSKY, P., BORDEMANN, M., GUTT, S., WALDMANN, S.: *Traces for star products on the dual of a Lie algebra*. Rev. Math. Phys. **15.5** (2003), 425–445.
31. BIELIAVSKY, P., CAHEN, M., GUTT, S., RAWNSLEY, J., SCHACHHÖFER, L.: *Symplectic Connections*. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **3.3** (2006), 375–420.
32. BLANCHARD, P., BRÜNING, E.: *Distributionen und Hilbertraumoperatoren*. Springer-Verlag, Wien, New York, 1993.
33. BORDEMANN, M.: *Private communication*, 1996. Discussions on the Fedosov construction.
34. BORDEMANN, M.: *A star-product for associative algebras and the BFfLS-Drinfel'd formula*. Private note, 1996.

35. BORDEMANN, M.: *(Bi)Modules, morphismes et réduction des star-produits : le cas symplectique, feuilletages et obstructions*. Preprint **math.QA/0403334** (2004), 135 Seiten.
36. BORDEMANN, M.: *Die Groenewold-van Hove-Eigenschaft von Paaren von Lie-Algebren*, 2004. Private communication.
37. BORDEMANN, M.: *Deformation Quantization. A mini lecture*, 2005. Lecture Notes for the the 2005 Summer School on Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory, Villa de Leyva, Colombia. <http://matematicas.uniandes.edu.co/summer2005/>.
38. BORDEMANN, M., BRISCHLE, M., EMMRICH, C., WALDMANN, S.: *Phase Space Reduction for Star Products: An Explicit Construction for  $\mathbb{C}P^n$* . Lett. Math. Phys. **36** (1996), 357–371.
39. BORDEMANN, M., BRISCHLE, M., EMMRICH, C., WALDMANN, S.: *Subalgebras with converging star products in deformation quantization: An algebraic construction for  $\mathbb{C}P^n$* . J. Math. Phys. **37** (1996), 6311–6323.
40. BORDEMANN, M., GINOT, G., HALBOUT, G., HERBIG, H.-C., WALDMANN, S.: *Formalité  $G_\infty$  adaptee et star-représentations sur des sous-variétés coïsotropes*. Preprint **math.QA/0504276** (2005), 56 Seiten.
41. BORDEMANN, M., MEINRENKEN, E., SCHLICHENMAIER, M.: *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and  $gl(N)$ ,  $N \rightarrow \infty$  limit*. Commun. Math. Phys. **165** (1994), 281–296.
42. BORDEMANN, M., NEUMAIER, N., PFLAUM, M. J., WALDMANN, S.: *On representations of star product algebras over cotangent spaces on Hermitian line bundles*. J. Funct. Anal. **199** (2003), 1–47.
43. BORDEMANN, M., NEUMAIER, N., WALDMANN, S.: *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles I: Weyl and Standard Ordering with Differential Operator Representation*. Commun. Math. Phys. **198** (1998), 363–396.
44. BORDEMANN, M., NEUMAIER, N., WALDMANN, S.: *Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles II: GNS representations, the WKB expansion, traces, and applications*. J. Geom. Phys. **29** (1999), 199–234.
45. BORDEMANN, M., NOWAK, C. J., SCHIRMER, J.: *Existence of Poisson structures*. Unpublished note of an afternoon discussion in Freiburg, 1995.
46. BORDEMANN, M., RÖMER, H., WALDMANN, S.: *A Remark on Formal KMS States in Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **45** (1998), 49–61.
47. BORDEMANN, M., RÖMER, H., WALDMANN, S.: *KMS States and Star Product Quantization*. Rep. Math. Phys. **44** (1999), 45–52.
48. BORDEMANN, M., WALDMANN, S.: *A Fedosov Star Product of Wick Type for Kähler Manifolds*. Lett. Math. Phys. **41** (1997), 243–253.
49. BORDEMANN, M., WALDMANN, S.: *Formal GNS Construction and WKB Expansion in Deformation Quantization*. In: STERNHEIMER, D., RAWNSLEY, J., GUTT, S. (HRSG.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry*. [294], 315–319.
50. BORDEMANN, M., WALDMANN, S.: *Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization*. Commun. Math. Phys. **195** (1998), 549–583.
51. BOURBAKI, N.: *Lie Groups and Lie Algebras*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
52. BRATTELI, O., ROBINSON, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I:  $C^*$ - and  $W^*$ -Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1987.

53. BRATTELI, O., ROBINSON, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1997.
54. BRÖCKER, T., JÄNICH, K.: *Einführung in die Differentialtopologie*, Band 143 in *Heidelberger Taschenbücher*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990. Korrigierter Nachdruck.
55. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.: *On Positive Deformations of  $*$ -Algebras*. In: DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*. [96], 69–80.
56. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.:  *$*$ -Ideals and Formal Morita Equivalence of  $*$ -Algebras*. *Int. J. Math.* **12.5** (2001), 555–577.
57. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.: *Algebraic Rieffel Induction, Formal Morita Equivalence and Applications to Deformation Quantization*. *J. Geom. Phys.* **37** (2001), 307–364.
58. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.: *The characteristic classes of Morita equivalent star products on symplectic manifolds*. *Commun. Math. Phys.* **228** (2002), 103–121.
59. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.: *Bimodule deformations, Picard groups and contravariant connections*. *K-Theory* **31** (2004), 1–37.
60. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.: *Completely positive inner products and strong Morita equivalence*. *Pacific J. Math.* **222** (2005), 201–236.
61. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.: *Hermitian star products are completely positive deformations*. *Lett. Math. Phys.* **72** (2005), 143–152.
62. BURSZTYN, H., WALDMANN, S.: *Induction of Representations in Deformation Quantization*. In: MAEDA, Y., TOSE, N., MIYAZAKI, N., WATAMURA, S., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Noncommutative Geometry and Physics*, 65–76. World Scientific, Singapore, 2005. Proceedings of the CEO International Workshop.
63. BURSZTYN, H., WEINSTEIN, A.: *Poisson geometry and Morita equivalence*. In: GUTT, S., RAWNSLEY, J., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Poisson Geometry, Deformation Quantisation and Group Representations*. [157], 1–78.
64. CAHEN, M., GUTT, S.: *Invariant  $*$ -Product of Holomorphic Functions on the Hyperbolic Hermitian Spaces*. *Lett. Math. Phys.* **5** (1981), 219–228.
65. CAHEN, M., GUTT, S.: *Regular  $*$  Representations of Lie Algebras*. *Lett. Math. Phys.* **6** (1982), 395–404.
66. CAHEN, M., GUTT, S.: *Discrete spectrum of the hydrogen atom: an illustration of deformation theory methods and problems*. *J. Geom. Phys.* **1.2** (1984), 65–83.
67. CAHEN, M., GUTT, S., DEWILDE, M.: *Local Cohomology of the Algebra of  $C^\infty$  Functions on a Connected Manifold*. *Lett. Math. Phys.* **4** (1980), 157–167.
68. CAHEN, M., GUTT, S., RAWNSLEY, J.: *Quantization of Kähler Manifolds I: Geometric Interpretation of Berezin's Quantization*. *J. Geom. Phys.* **7** (1990), 45–62.
69. CAHEN, M., GUTT, S., RAWNSLEY, J.: *Quantization of Kähler Manifolds. II*. *Trans. Am. Math. Soc.* **337.1** (1993), 73–98.
70. CAHEN, M., GUTT, S., RAWNSLEY, J.: *Quantization of Kähler Manifolds. III*. *Lett. Math. Phys.* **30** (1994), 291–305.
71. CAHEN, M., GUTT, S., RAWNSLEY, J.: *Quantization of Kähler Manifolds. IV*. *Lett. Math. Phys.* **34** (1995), 159–168.
72. CANNAS DA SILVA, A.: *Lectures on Symplectic Geometry*, Band 1764 in *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.

73. CANNAS DA SILVA, A., WEINSTEIN, A.: *Geometric Models for Noncommutative Algebras. Berkeley Mathematics Lecture Notes*. AMS, 1999.
74. CATTANEO, A., FELDER, G.: *A Path Integral Approach to the Kontsevich Quantization Formula*. *Commun. Math. Phys.* **212** (2000), 591–611.
75. CATTANEO, A. S.: *Formality and Star Products*. In: GUTT, S., RAWNSLEY, J., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Poisson Geometry, Deformation Quantisation and Group Representations*. [157], 79–144. Lecture Notes taken by D. Indelicato.
76. CATTANEO, A. S., FELDER, G.: *Coisotropic Submanifolds in Poisson Geometry and Branes in the Poisson Sigma Model*. *Lett. Math. Phys.* **69** (2004), 157–175.
77. CATTANEO, A. S., FELDER, G.: *Relative formality theorem and quantisation of coisotropic submanifolds*. Preprint **math.QA/0501540** (2005), 31 Seiten.
78. CATTANEO, A. S., FELDER, G., TOMASSINI, L.: *Fedosov connections on jet bundles and deformation quantization*. In: HALBOUT, G. (HRSG.): *Deformation quantization*. [162], 191–202.
79. CATTANEO, A. S., FELDER, G., TOMASSINI, L.: *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*. *Duke Math. J.* **115.2** (2002), 329–352.
80. CHAMBERS, R. G.: *Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux*. *Phys. Rev. Lett.* **5.1** (1960), 3–5.
81. CHARI, V., PRESSLEY, A.: *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
82. CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C.: *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 2. Auflage, 1982.
83. CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C.: *Analysis, Manifolds and Physics. Part II: 92 Applications*. North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 2. Auflage, 1989.
84. CONNES, A.: *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, New York, London, 1994.
85. CONNES, A., FLATO, M., STERNHEIMER, D.: *Closed Star Products and Cyclic Cohomology*. *Lett. Math. Phys.* **24** (1992), 1–12.
86. CRAINIC, M., FERNANDES, R. L.: *Integrability of Poisson brackets*. *J. Differential Geom.* **66** (2004), 71–137.
87. CUSHMAN, R. H., BATES, L. M.: *Global aspects of classical integrable systems*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1997.
88. DAVIDSON, K. R.: *C\*-Algebras by Example*, Band 6 in *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.
89. DELIGNE, P.: *Déformations de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et DeWilde, Lecomte*. *Sel. Math. New Series* **1.4** (1995), 667–697.
90. DEWILDE, M., LECOMTE, P. B. A.: *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds*. *Lett. Math. Phys.* **7** (1983), 487–496.
91. DEWILDE, M., LECOMTE, P. B. A.: *Star-Products on Cotangent Bundles*. *Lett. Math. Phys.* **7** (1983), 235–241.
92. DEWILDE, M., LECOMTE, P. B. A.: *Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of a Symplectic Manifold and Star-Products. Existence, Equivalence, Derivations*. In: HAZEWINKEL, M., GERSTENHABER, M. (HRSG.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*. [165], 897–960.

93. DEWITT, B.: *Supermanifolds. Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, second. Auflage, 1992.
94. DIRAC, P. A. M.: *The Theory of Magnetic Poles*. Phys. Rev. **74.7** (1948), 817–830.
95. DIRAC, P. A. M.: *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
96. DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries. Mathematical Physics Studies Nr. 22*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
97. DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries. Mathematical Physics Studies Nr. 21*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
98. DITO, G., STERNHEIMER, D.: *Deformation quantization: genesis, developments and metamorphoses*. In: HALBOUT, G. (HRSG.): *Deformation quantization*. [162], 9–54.
99. DIXMIER, J.:  *$C^*$ -Algebras*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Translated from the French by Francis Jellet, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15.
100. DO CARMO, M. P.: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992.
101. DOLGUSHEV, V. A.: *Covariant and equivariant formality theorems*. Adv. Math. **191** (2005), 147–177.
102. DOLGUSHEV, V. A.: *A Proof of Tsygan's Formality Conjecture for an Arbitrary Smooth Manifold*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2005. math.QA/0504420.
103. DOLGUSHEV, V. A., LYAKHOVICH, S. L., SHARAPOV, A. A.: *Wick Quantization of a Symplectic Manifold*. Nuc. Phys. B **102&103** (2001), 144–149.
104. DOLGUSHEV, V. A., LYAKHOVICH, S. L., SHARAPOV, A. A.: *Wick type deformation quantization of Fedosov manifolds*. Nuc. Phys. B **606** (2001), 647–672.
105. DONIN, J.: *Classification of polarized deformation quantizations*. J. Geom. Phys. **48** (2003), 546–579.
106. DUBOIS-VIOLETTE, M., KRIEGL, A., MAEDA, Y., MICHOR, P.: *Smooth  $*$ -Algebras*. In: MAEDA, Y., WATAMURA, S. (HRSG.): *Noncommutative Geometry and String Theory*, Band 144 in *Prog. Theo. Phys. Suppl.*, 54–78. Yukawa Institute for Theoretical Physics, 2001. Proceedings of the International Workshop on Noncommutative Geometry and String Theory.
107. DUFOUR, J.-P., ZUNG, N. T.: *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Band 242 in *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, New York, 2005.
108. DUISTERMAAT, J. J., KOLK, J. A. C.: *Lie Groups*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
109. ECKEL, R.: *Eine geometrische Formulierung von Supermannigfaltigkeiten, deren Super-Poisson-Klammern und Sternprodukten*. Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1996.
110. EMMRICH, C., RÖMER, H.: *Multicomponent Wentzel-Kramers-Brillouin Approximation on arbitrary Symplectic Manifolds: A Star Product Approach*. J. Math. Phys. **39.7** (1998), 3530–3546.
111. EMMRICH, C., WEINSTEIN, A.: *The Differential Geometry of Fedosov's Quantization*. In: BRYLINSKI, J.-L., BRYLINSKI, R., GUILLEMIN, V., KAC, V. (HRSG.): *Lie Theory and Geometry, in Honor of B. Kostant*, 217–239. Birkhäuser, Boston, Basel, 1994.

112. EMMRICH, C., WEINSTEIN, A.: *Geometry of the Transport Equation in Multi-component WKB Approximations*. Comm. Math. Phys. **176** (1996), 701–711.
113. EVENS, S., LU, J.-H., WEINSTEIN, A.: *Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50.200** (1999), 417–436.
114. FEDOSOV, B., SCHULZE, B.-W., TARKHANOV, N.: *On the index theorem for symplectic orbifolds*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54.5** (2004), 1601–1639, xvi, xxii.
115. FEDOSOV, B. V.: *Formal Quantization*. Some Topics of Modern Mathematics and their Applications to Problems of Mathematical Physics (1985), 129–136. Moscow.
116. FEDOSOV, B. V.: *Quantization and the Index*. Sov. Phys. Dokl. **31.11** (1986), 877–878.
117. FEDOSOV, B. V.: *Index Theorem in the Algebra of Quantum Observables*. Sov. Phys. Dokl. **34.4** (1989), 319–321.
118. FEDOSOV, B. V.: *Reduction and Eigenstates in Deformation Quantization*. In: DEMUTH, M., SCHROHE, E., SCHULZE, B.-W. (HRSG.): *Pseudo-differential Calculus and Mathematical Physics*, Band 5 in *Advances in Partial Differential Equations*, 277–297. Akademie Verlag, Berlin, 1994.
119. FEDOSOV, B. V.: *A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization*. J. Diff. Geom. **40** (1994), 213–238.
120. FEDOSOV, B. V.: *Trace Density in Deformation Quantization*. In: DEMUTH, M., SCHROHE, E., SCHULZE, B.-W. (HRSG.): *Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization*, Band 8 in *Advances in Partial Differential Equations*, 319–333. Akademie Verlag, Berlin, 1995.
121. FEDOSOV, B. V.: *Deformation Quantization and Index Theory*. Akademie Verlag, Berlin, 1996.
122. FEDOSOV, B. V.: *Non-Abelian Reduction in Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **43** (1998), 137–154.
123. FEDOSOV, B. V.: *On G-trace and G-index in deformation quantization*. In: DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*. [97], 157–176.
124. FEDOSOV, B. V.: *On G-Trace and G-Index in Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **52** (2000), 29–49.
125. FEDOSOV, B. V.: *On the trace density in deformation quantization*. In: HALBOUT, G. (HRSG.): *Deformation quantization*. [162], 67–83.
126. FELDER, G., SHOIKHET, B.: *Deformation Quantization with Traces*. Lett. Math. Phys. **53** (2000), 75–86.
127. FISCHER, G.: *Lineare Algebra*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 11. Auflage, 1997.
128. FORGER, M., PAUFLER, C., RÖMER, H.: *A general construction of Poisson brackets on exact multisymplectic manifolds*. Rep. Math. Phys. **51.2-3** (2003), 187–195.
129. FORGER, M., PAUFLER, C., RÖMER, H.: *The Poisson bracket for Poisson forms in multisymplectic field theory*. Rev. Math. Phys. **15.7** (2003), 705–743.
130. FORGER, M., RÖMER, H.: *A Poisson bracket on multisymplectic phase space*. Rep. Math. Phys. **48** (2001), 211–218.
131. GALLAVOTTI, G., PULVIRENTI, M.: *Classical KMS Condition and Tomita-Takesaki Theory*. Commun. Math. Phys. **46** (1976), 1–9.
132. GALLAVOTTI, G., VERBOVEN, E.: *On the Classical KMS Boundary Condition*. Nuovo Cimento **28** (1975), 274–286.

133. GALLO, S., HULIN, D., LAFONTAINE, J.: *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1990.
134. GERSTENHABER, M.: *Cohomology Structure of an associative Ring*. Ann. Math. **78** (1963), 267–288.
135. GERSTENHABER, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras*. Ann. Math. **79** (1964), 59–103.
136. GERSTENHABER, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras II*. Ann. Math. **84** (1966), 1–19.
137. GERSTENHABER, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras III*. Ann. Math. **88** (1968), 1–34.
138. GERSTENHABER, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras IV*. Ann. Math. **99** (1974), 257–276.
139. GERSTENHABER, M., SCHACK, S. D.: *Algebraic Cohomology and Deformation Theory*. In: HAZEWINKEL, M., GERSTENHABER, M. (HRSG.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*. [165], 13–264.
140. GOLDSTEIN, H.: *Klassische Mechanik*. AULA-Verlag, Wiesbaden, 11. Auflage, 1991.
141. GORBUNOV, I. V., LYAKHOVICH, S. L., SHARAPOV, A. A.: *Wick quantization of cotangent bundles over Riemannian manifolds*. J. Geom. Phys. **53** (2005), 98–121.
142. GOTAY, M. J.: *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations. II. Space + time decomposition*. Differential Geom. Appl. **1.4** (1991), 375–390.
143. GOTAY, M. J., TUYNMAN, G. M.:  *$R^{2n}$  is a universal symplectic manifold for reduction*. Lett. Math. Phys. **18.1** (1989), 55–59.
144. GRABOWSKI, J.: *Isomorphisms of algebras of smooth functions revisited*. Arch. Math. (Basel) **85.2** (2005), 190–196.
145. GREUB, W.: *Multilinear Algebra*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 1978.
146. GRIFFITH, P., HARRIS, J.: *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1978.
147. GRIGIS, A., SJÖSTRAND, J.: *Microlocal Analysis for Differential Operators*, Band 196 in *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
148. GROENEWOLD, H. J.: *On the principles of elementary quantum mechanics*. Physica **12** (1946), 405–460.
149. GUILLEMIN, V., STERNBERG, S.: *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1984.
150. GUTT, S.: *Equivalence of Deformations and Associated \*-Products*. Lett. Math. Phys. **3** (1979), 297–309.
151. GUTT, S.: *An Explicit \*-Product on the Cotangent Bundle of a Lie Group*. Lett. Math. Phys. **7** (1983), 249–258.
152. GUTT, S.: *On Some Second Hochschild Cohomology Spaces for Algebras of Functions on a Manifold*. Lett. Math. Phys. **39** (1997), 157–162.
153. GUTT, S.: *Variations on deformation quantization*. In: DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*. [97], 217–254.
154. GUTT, S., RAWNSLEY, J.: *Equivalence of star products on a symplectic manifold; an introduction to Deligne's Čech cohomology classes*. J. Geom. Phys. **29** (1999), 347–392.



155. GUTT, S., RAWNSLEY, J.: *Traces for star products on symplectic manifolds*. J. Geom. Phys. **42** (2002), 12–18.
156. GUTT, S., RAWNSLEY, J.: *Natural Star Products on Symplectic Manifolds and Quantum Moment Maps*. Lett. Math. Phys. **66** (2003), 123–139.
157. GUTT, S., RAWNSLEY, J., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Poisson Geometry, Deformation Quantisation and Group Representations*, Band 323 in *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
158. HAAG, R.: *Local Quantum Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1993.
159. HAAG, R., HUGENHOLTZ, N. M., WINNINK, M.: *On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics*. Commun. Math. Phys. **5** (1967), 215–236.
160. HAAG, R., KASTLER, D., TRYCH-POHLMAYER, E. B.: *Stability and Equilibrium States*. Commun. Math. Phys. **33** (1974), 173–193.
161. HAAG, R., TRYCH-POHLMAYER, E. B.: *Stability Properties of Equilibrium States*. Commun. Math. Phys. **56** (1977), 213–224.
162. HALBOUT, G. (HRSG.): *Deformation Quantization*, Band 1 in *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
163. HALL, B. C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Band 222 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
164. HANSEN, F.: *Quantum Mechanics in Phase Space*. Rep. Math. Phys. **19** (1984), 361–381.
165. HAZEWINKEL, M., GERSTENHABER, M. (HRSG.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1988.
166. HELGASON, S.: *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000. Reprint of the 1962 edition.
167. HENNEAUX, M., TEITELBOIM, C.: *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, New Jersey, 1992.
168. HESS, H.: *Symplectic connections in geometric quantization and factor orderings*. Dissertation, Fachbereich Physik, Freie Universität, Berlin, 1981.
169. HIRSCH, M. W.: *Differential Topology*, Band 33 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
170. HOCHSCHILD, G., KOSTANT, B., ROSENBERG, A.: *Differential Forms on regular affine Algebras*. Trans. Am. Math. Soc. **102** (1962), 383–408.
171. HONERKAMP, J., RÖMER, H.: *Klassische Theoretische Physik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.
172. HÖRMANDER, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Band 274 in *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
173. HÖRMANDER, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1990.
174. HUEBSCHMANN, J.: *Poisson cohomology and quantization*. J. Reine Angew. Math. **408** (1990), 57–113.
175. HUEBSCHMANN, J.: *Lie-Rinehart algebras, Gerstenhaber algebras, and Batalin-Vilkovisky algebras*. Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 425–440.

176. HUMPHREYS, J. E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Band 9 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997. Seventh corrected printing.
177. HUYBRECHTS, D.: *Complex Geometry: an Introduction*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 2005.
178. JACOBSON, N.: *Basic Algebra I*. Freeman and Company, New York, 2. Auflage, 1985.
179. JÄNICH, K.: *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 4. Auflage, 1994.
180. JÄNICH, K.: *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 4. Auflage, 2003.
181. KADISON, R. V., RINGROSE, J. R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory*, Band 15 in *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1997.
182. KADISON, R. V., RINGROSE, J. R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume II: Advanced Theory*, Band 16 in *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1997.
183. KAMMERER, J. B.: *Analysis of the Moyal product in a flat space*. J. Math. Phys. **27** (1986), 529–535.
184. KARABEGOV, A. V.: *Deformation Quantization with Separation of Variables on a Kähler Manifold*. Commun. Math. Phys. **180** (1996), 745–755.
185. KARABEGOV, A. V.: *On deformation quantization on a Kählerian manifold that is related to the Berezin quantization. (Russian)*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. **30** (1996), 87–89.
186. KARABEGOV, A. V.: *Berezin's quantization on flag manifolds and spherical modules*. Trans. Amer. Math. Soc. **350.4** (1998), 1467–1479.
187. KARABEGOV, A. V.: *Cohomological Classification of Deformation Quantizations with Separation of Variables*. Lett. Math. Phys. **43** (1998), 347–357.
188. KARABEGOV, A. V.: *On the Canonical Normalization of a Trace Density of Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **45** (1998), 217–228.
189. KARABEGOV, A. V.: *Pseudo-Kähler Quantization on Flag Manifolds*. Commun. Math. Phys. **200** (1999), 355–379.
190. KARABEGOV, A. V.: *On Fedosov's approach to Deformation Quantization with Separation of Variables*. In: DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*. [96].
191. KARABEGOV, A. V., SCHLICHENMAIER, M.: *Almost-Kähler Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **57** (2001), 135–148.
192. KARABEGOV, A. V., SCHLICHENMAIER, M.: *Identification of Berezin-Toeplitz deformation quantization*. J. reine angew. Math. **540** (2001), 49–76.
193. KARASEV, M.: *Formulas for noncommutative products of functions in terms of membranes and strings. I*. Russian J. Math. Phys. **2.4** (1994), 445–462 (1995).
194. KARASEV, M. V., MASLOV, V. P.: *Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization*, Band 119 in *Translation of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1993.
195. KARASEV, M. V., OSBORN, T. A.: *Symplectic areas, quantization, and dynamics in electromagnetic fields*. J. Math. Phys. **43** (2002), 756–788.
196. KARASEV, M. V., OSBORN, T. A.: *Quantum Magnetic Algebra and Magnetic Curvature*. J. Phys. A **37** (2004), 2345–2363.
197. KARASEV, M. V., OSBORN, T. A.: *Cotangent bundle quantization: Entangling of metric and magnetic field*. J. Phys. A **38** (2005), 8549–8578.

198. KASSEL, C.: *Quantum Groups*, Band 155 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.
199. KELLEY, J. L.: *General Topology*. *Graduate Texts in Mathematics* Nr. **27**. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1955.
200. KIRILLOV, A. A.: *Elements of the theory of representations*, Band 220 in *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the Russian by Edwin Hewitt.
201. KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.: *Foundations of Differential Geometry II*. *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics* Nr. **15**. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1969.
202. KOLÁŘ, I., MICHOR, P. W., SLOVÁK, J.: *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
203. KONTSEVICH, M.: *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I*. Preprint **q-alg/9709040** (September 1997).
204. KONTSEVICH, M.: *Formality Conjecture*. In: STERNHEIMER, D., RAWNSLEY, J., GUTT, S. (HRSG.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry*. [294], 139–156.
205. KONTSEVICH, M.: *Operads and Motives in Deformation Quantization*. *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), 35–72.
206. KONTSEVICH, M.: *Deformation Quantization of Poisson manifolds*. *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), 157–216.
207. KOSMANN-SCHWARZBACH, Y.: *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids*. *Acta Appl. Math.* **41.1-3** (1995), 153–165. Geometric and algebraic structures in differential equations.
208. KOSMANN-SCHWARZBACH, Y.: *Les Théorèmes de Noether*. *Histoire des Mathématiques*. Édition de l'École Polytechniques, Paris, 2004.
209. KOSMANN-SCHWARZBACH, Y.: *Quasi, twisted, and all that... in Poisson geometry and Lie algebroid theory*. In: MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. (HRSG.): *The breadth of symplectic and Poisson geometry*, Band 232 in *Progress in Mathematics*, 363–389. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2005. Festschrift in honor of Alan Weinstein.
210. KOSTANT, B.: *Quantization and Unitary Representation. Part I: Prequantization*. In: TAAM, C. T. (HRSG.): *Lectures in Modern Analysis and Application*, Band 170 in *Lecture Notes in Mathematics*, 87–208. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
211. KOSTANT, B.: *Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization*. In: BLEULER, K., REETZ, A. (HRSG.): *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975)*, Band 570 in *Lecture Notes in Mathematics*, 177–306. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Proceedings of the Symposium held at the University of Bonn, July 1–4, 1975.
212. KOSZUL, J. L.: *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*. *Astérisque* **1985** (1985), 257–271.
213. KUBO, R.: *Statistical-mechanical theory of irreversible processes, I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems*. *J. Phys. Soc. Japan* **12** (1957), 570–586.
214. LANCE, E. C.: *Hilbert  $C^*$ -modules. A Toolkit for Operator algebraists*, Band 210 in *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

215. LANDI, G.: *An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries. Lecture Notes in Physics* Nr. **m51**. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1997.
216. LANDSMAN, N. P.: *Mathematical Topics between Classical and Quantum Mechanics. Springer Monographs in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
217. LANDSMAN, N. P.: *Between Classical and Quantum*. Preprint **quant-ph/0506082** (2005), 100 Seiten. Erscheint in Elsevier's Handbook of the Philosophy of Science, Volume 2: Philosophy of Physics, edited by J. Earman and J. Butterfield.
218. LANDSMAN, N. P.: *When champions meet: rethinking the Bohr-Einstein debate*. Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys. **37** (2006), 212–242.
219. LANG, S.: *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 3. Auflage, 1997.
220. LANG, S.: *Fundamentals of Differential Geometry*, Band 191 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
221. LIBERMANN, P., MARLE, C.-M.: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*. Reidel, Dordrecht, 1987.
222. LICHNERIWICZ, A.: *Les Varietes de Poisson et leurs Algebres de Lie Associees*. J. Diff. Geom. **12** (1977), 253–300.
223. LICHNEROWICZ, A.: *Existence and Equivalence of Twisted Products on a Symplectic Manifold*. Lett. Math. Phys. **3** (1979), 495–502.
224. MACKENZIE, K. C. H.: *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Band 213 in *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.
225. MACKENZIE, K. C. H., XU, P.: *Lie bialgebroids and Poisson groupoids*. Duke Math. J. **73.2** (1994), 415–452.
226. MADORE, J.: *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications. London Mathematical Society Lecture Note Series* Nr. **257**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2. Auflage, 1999.
227. MAILLARD, J.-M.: *On the twisted convolution product and the Weyl transformation of tempered distributions*. J. Geom. Phys. **3.2** (1986), 230–261.
228. MAJID, S.: *Foundations of Quantum Group Theory*. Cambridge University Press, 1995.
229. MANCHON, D.: *Une remarque sur l'exponentielle étoile*. In: *Rencontres Mathématiques de Glanon 1997*, VIII1–VIII3. Association Mathématique de Glanon, 1997.
230. MARSDEN, J. E., PATRICK, G. W., SHKOLLER, S.: *Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs*. Comm. Math. Phys. **199.2** (1998), 351–395.
231. MARSDEN, J. E., RATIU, T. S.: *Einführung in die Mechanik und Symmetrie*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 2000.
232. MARSDEN, J. E., WEINSTEIN, A.: *Some comments on the history, theory, and applications of symplectic reduction*. In: LANDSMAN, N. P., PFLAUM, M., SCHLICHENMAIER, M. (HRSG.): *Quantization of singular symplectic quotients*. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2001.
233. MARTIN, P. C., SCHWINGER, J.: *Theory of many-particle systems, I*. Phys. Rev. **115** (1959), 1342–1373.

234. MEINRENKEN, E.: *Symplectic Geometry*. Department of Mathematics, University of Toronto, 2000. Vorlesungsskriptum. [www.math.toronto.edu/~mein/](http://www.math.toronto.edu/~mein/).
235. MICHOR, P.: *Topics in Differential Geometry*. Schrödinger Institute, Wien, 2001. Vorlesungsskriptum. [www.mat.univie.ac.at/~michor/](http://www.mat.univie.ac.at/~michor/).
236. MILNOR, J. W., STASHEFF, J. D.: *Characteristic Classes*, Band 76 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
237. MITTELSTAEDT, P.: *Philosophische Probleme der modernen Physik*. BI-Hochschultaschenbücher Nr. 50. B. I.-Verlag, Mannheim, Wien, Zürich, 7. Auflage, 1989.
238. MOERDIJK, I., MRČUN, J.: *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*. Cambridge studies in advanced mathematics Nr. 91. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
239. MORENO, C.: *\*-Products on Some Kähler Manifolds*. Lett. Math. Phys. **11** (1986), 361–372.
240. MORENO, C.: *Invariant Star Products and Representations of Compact Semi-simple Lie Groups*. Lett. Math. Phys. **12** (1986), 217–229.
241. MORENO, C.: *Geodesic Symmetries and Invariant Star Products on Kähler Symmetric Spaces*. Lett. Math. Phys. **13** (1987), 245–257.
242. MORENO, C., ORTEGA-NAVARRO, P.: *\*-Products on  $D^1(\mathbb{C})$ ,  $S^2$  and Related Spectral Analysis*. Lett. Math. Phys. **7** (1983), 181–193.
243. MORENO, C., ORTEGA-NAVARRO, P.: *Deformation of the Algebra of Functions on Hermitian Symmetric Spaces Resulting from Quantization*. Ann. Inst. Henri Poincaré **38** (1983), 215–241.
244. MOSER, J.: *On the Volume Elements on a Manifold*. Trans. Am. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.
245. MRČUN, J.: *On isomorphisms of algebras of smooth functions*. Proc. Amer. Math. Soc. **133**.10 (2005), 3109–3113 (electronic).
246. MÜLLER-BAHNS, M. F., NEUMAIER, N.: *Some remarks on  $\mathfrak{g}$ -invariant Fedosov star products and quantum momentum mappings*. J. Geom. Phys. **50** (2004), 257–272.
247. NADAUD, F.: *On Continuous and Differential Hochschild Cohomology*. Lett. Math. Phys. **47** (1999), 85–95.
248. NAKAHARA, M.: *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia, 1990.
249. NEROSLAVSKI, O. M., VLASSOV, A. T.: *Sur les Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique*. C. R. Acad. Sc. Paris I **292** (1981), 71–73.
250. NEST, R., TSYGAN, B.: *Algebraic Index Theorem*. Commun. Math. Phys. **172** (1995), 223–262.
251. NEST, R., TSYGAN, B.: *Algebraic Index Theorem for Families*. Adv. Math. **113** (1995), 151–205.
252. NEUMAIER, N.: *Sternprodukte auf Kotangentenbündeln und Ordnungsvorschriften*. Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1998. <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~nine/>.
253. NEUMAIER, N.: *Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung*. Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2001. <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~nine/>.
254. NEUMAIER, N.: *Local  $\nu$ -Euler Derivations and Deligne's Characteristic Class of Fedosov Star Products and Star Products of Special Type*. Commun. Math. Phys. **230** (2002), 271–288.

255. NEUMAIER, N.: *Universality of Fedosov's Construction for Star Products of Wick Type on Pseudo-Kähler Manifolds*. Rep. Math. Phys. **52** (2003), 43–80.
256. NOWAK, C. J.: *Über Sternprodukte auf nichtregulären Poissonmannigfaltigkeiten*. Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1997.
257. OMORI, H., MAEDA, Y., YOSHIOKA, A.: *Weyl Manifolds and Deformation Quantization*. Adv. Math. **85** (1991), 224–255.
258. OMORI, H., MAEDA, Y., YOSHIOKA, A.: *Existence of a Closed Star Product*. Lett. Math. Phys. **26** (1992), 285–294.
259. ORTEGA, J.-P., RATIU, T. S.: *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction, Band 222 in Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, 2004.
260. PAUFLER, C., RÖMER, H.: *De Donder-Weyl equations and multisymplectic geometry*. Rep. Math. Phys. **49.2-3** (2002), 325–334.
261. PAUFLER, C., RÖMER, H.: *Geometry of Hamiltonian  $n$ -vector fields in multisymplectic field theory*. J. Geom. Phys. **44.1** (2002), 52–69.
262. PEETRE, J.: *Une Caractérisation abstraite des opérateurs différentiels*. Math. Skand. **7** (1959), 211–218.
263. PEETRE, J.: *Réctification a l'article «Une Caractérisation abstraite des opérateurs différentiels»*. Math. Skand. **8** (1960), 116–120.
264. PFLAUM, M. J.: *A Deformation-Theoretical Approach to Weyl Quantization on Riemannian Manifolds*. Lett. Math. Phys. **45** (1998), 277–294.
265. PFLAUM, M. J.: *The normal symbol on Riemannian manifolds*. New York J. Math. **4** (1998), 97–125.
266. PFLAUM, M. J.: *On Continuous Hochschild Homology and Cohomology Groups*. Lett. Math. Phys. **44** (1998), 43–51.
267. PFLAUM, M. J.: *A deformation-theoretic approach to normal order quantization*. Russ. J. Math. Phys. **7** (2000), 82–113.
268. PITTNAUER, F.: *Vorlesung über Asymptotische Reihen. Lecture Notes in Mathematics Nr. 301*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
269. PUSZ, W., WORONOWICZ, S. L.: *Passive States and KMS States for General Quantum Systems*. Commun. Math. Phys. **58** (1978), 273–290.
270. QUERENBURG, B. v.: *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 2001.
271. RADKO, O.: *A classification of topologically stable Poisson structures on a compact oriented surface*. J. Symplectic Geom. **1** (2002), 523–542.
272. REED, M., SIMON, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, New York, San Fransisco, London, 1972.
273. RIEFFEL, M. A.: *Deformation quantization for actions of  $\mathbb{R}^d$* . Mem. Amer. Math. Soc. **106.506** (1993), 93 Seiten.
274. RINEHART, G.: *Differential forms on general commutative algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 195–222.
275. RÖMER, H.: *Klassische Mechanik und Dynamische Systeme*. Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität, 1995. Vorlesungsskriptum. [idfix.physik.uni-freiburg.de/~aufgabe/](http://idfix.physik.uni-freiburg.de/~aufgabe/).
276. RÖMER, H.: *Theoretical Optics. An Introduction*. Wiley-VCH, Berlin, 1. Auflage, 2004.
277. RÖMER, H., FILK, T.: *Statistische Mechanik. Konzepte der Theoretischen Physik*. VCH Verlagsgesellschaft mbH., Weinheim, 1994.
278. RÖMER, H., FORGER, M.: *Elementare Feldtheorie*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1993.

279. RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 3. Auflage, 1987.
280. RUDIN, W.: *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 2. Auflage, 1991.
281. RUIZ, J. M.: *The Basic Theory of Power Series*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1993.
282. SAFAROV, Y.: *Pseudodifferential operators and linear connections*. Proc. London Math. Soc. **74** (1997), 379–416.
283. SAKAI, S.: *C\*-Algebras and W\*-Algebras*, Band 60 in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
284. SCHALLER, P., STROBL, T.: *Poisson structure induced (topological) field theories*. Mod. Phys. Lett. A **9.33**, 3129–3136.
285. SCHLICHENMAIER, M.: *Berezin-Toeplitz quantization of compact Kähler manifolds*. In: STRASBURGER, A., ALI, S., ANTOINE, J.-P., GAZEAU, J.-P., ODZIJEWICZ, A. (HRSG.): *Quantization, Coherent States and Poisson Structures, Proc. XIV'th Workshop on Geometric Methods in Physics Białowieża, 1995*, 101–115. Polish Scientific Publisher PWN, Warsaw, 1998.
286. SCHLICHENMAIER, M.: *Deformation quantization of compact Kähler manifolds by Berezin-Toeplitz quantization*. In: DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*. [96], 289–306.
287. SCHLICHENMAIER, M.: *Berezin-Toeplitz quantization and Berezin symbols for arbitrary compact Kähler manifolds*. In: SCHLICHENMAIER, M., STRASBURGER, A., ALI, S., ODZIJEWICZ, A. (HRSG.): *Coherent States, Quantization and Gravity, Białowieża 1998*, 45–56. Warsaw University Press, Warsaw, 2001.
288. SCHMÜDGEN, K.: *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*, Band 37 in *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990.
289. SCHOTTENLOHER, M.: *Geometrie und Symmetrie in der Physik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
290. SEXL, R., URBANTKE, H. K.: *Gravitation und Kosmologie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 3. Auflage, 1987.
291. SEXL, R. U., URBANTKE, H. K.: *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer-Verlag, Wien, New York, 3. Auflage, 1992.
292. SNIATYCKI, J.: *Dirac brackets in geometric dynamics*. Ann. Inst. Henri Poincaré **XX** (1974), 365–372.
293. SOURIAU, J.-M.: *Structure des systèmes dynamiques. Maîtrises de mathématiques*. Dunod, Paris, 1970.
294. STERNHEIMER, D., RAWNSLEY, J., GUTT, S. (HRSG.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry. Mathematical Physics Studies Nr. 20*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1997.
295. STRAUMANN, N.: *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*, Band 150 in *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1988.
296. SUBIN, M. A.: *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2001.
297. TAKESAKI, M.: *Disjointness of the KMS-States of Different Temperatures*. Commun. Math. Phys. **17** (1970), 33–41.

298. TAMARKIN, D., TSYGAN, B.: *Cyclic Formality and Index Theorems*. Lett. Math. Phys. **56** (2001), 85–97.
299. TAMARKIN, D. E.: *Formality of Chain Operad of Little Discs*. Lett. Math. Phys. **66** (2003), 65–72.
300. THE, Y.-K.: *Zum Spektrum und Sternexponential in der Deformationsquantisierung*. Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, November 2000.
301. THIRRING, W.: *Klassische Dynamische Systeme*, Band 1 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik*. Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1988.
302. THIRRING, W.: *Klassische Feldtheorie*, Band 2 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik*. Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1990.
303. THIRRING, W.: *Quantenmechanik von Atomen und Molekülen*, Band 3 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik*. Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1994.
304. THIRRING, W.: *Quantum Mathematical Physics. Atoms, Molecules and Large Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2002.
305. UNDERHILL, J.: *Quantization on a manifold with connection*. J. Math. Phys. **19.9** (1978), 1932–1935.
306. VAISMAN, I.: *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994.
307. VAN HOVE, L.: *Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations*. Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique (Classe des Sci.) **XXVI** (1951), 61–102.
308. VON NEUMANN, J.: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 2. Auflage, 1996.
309. WALDMANN, S.: *Ein Sternprodukt für den komplex projektiven Raum und die Fedosov-Konstruktion für Kähler-Mannigfaltigkeiten*. Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1995. 97 Seiten. <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/>.
310. WALDMANN, S.: *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen*. Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1999. 190 Seiten. <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/>.
311. WALDMANN, S.: *Locality in GNS Representations of Deformation Quantization*. Commun. Math. Phys. **210** (2000), 467–495.
312. WALDMANN, S.: *A Remark on the Deformation of GNS Representations of \*-Algebras*. Rep. Math. Phys. **48** (2001), 389–396.
313. WALDMANN, S.: *On the representation theory of deformation quantization*. In: HALBOUT, G. (HRSG.): *Deformation quantization*. [162], 107–133.
314. WALDMANN, S.: *The Picard Groupoid in Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **69** (2004), 223–235.
315. WALDMANN, S.: *States and Representation Theory in Deformation Quantization*. Rev. Math. Phys. **17** (2005), 15–75.
316. WARNER, F. W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Band 94 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1983.
317. WEINSTEIN, A.: *Lectures on Symplectic Manifolds*. Providence, Rhode Island, 1977. Expository lectures from the CBMS regional conference held at the University of North Carolina, March 8–12, 1976.



318. WEINSTEIN, A.: *The Local Structure of Poisson Manifolds*. J. Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.
319. WEINSTEIN, A.: *Traces and triangles in symmetric symplectic spaces*. Contemp. Math. **179** (1994), 261–270.
320. WEINSTEIN, A.: *Deformation Quantization*. Astérisque .227 (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
321. WEINSTEIN, A.: *The modular automorphism group of a Poisson manifold*. J. Geom. Phys. **23** (1997), 379–394.
322. WEINSTEIN, A.: *Poisson geometry*. Diff. Geom. Appl. **9** (1998), 213–238.
323. WEINSTEIN, A.: *Commuting vector fields with compact support*, 2006. Private communication during the Poisson 2006 conference.
324. WEINSTEIN, A., XU, P.: *Hochschild cohomology and characteristic classes for star-products*. In: KHOVANSKIĬ, A., VARCHENKO, A., VASSILIEV, V. (HRSG.): *Geometry of differential equations. Dedicated to V. I. Arnold on the occasion of his 60th birthday*, 177–194. American Mathematical Society, Providence, 1998.
325. WELLS, R. O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Band 65 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1980.
326. WIDOM, H.: *Families of Pseudodifferential Operators*. In: GOHBERG, I., KAC, M. (HRSG.): *Topics in Functional Analysis*, 345–395. Academic Press, New York, 1978.
327. WIDOM, H.: *A Complete Symbolic Calculus for Pseudodifferential Operators*. Bull. Sc. Math. **104** (1980), 19–63.
328. WOODHOUSE, N. M. J.: *Geometric Quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
329. XU, P.: *Fedosov \*-Products and Quantum Momentum Maps*. Commun. Math. Phys. **197** (1998), 167–197.
330. YANO, K., ISHIHARA, S.: *Tangent and Cotangent Bundles*, Band 16 in *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

---

# Sachverzeichnis

- Abbildung
  - adjungierbare 492
  - antisymplektische 191
  - differenzierbare 33
  - eigentliche 162
  - fast-holomorphe 138
  - holomorphe 139
  - kontrahierende 391
  - positive 499
  - vollständig positive 499, 546
- abgeleitete Klammer 213
- Äquivalenztransformation 380, 403, 408
- äußere Ableitung 77, 243
  - als Differentialoperator 577
  - kovariante 454
- äußere Algebra 92
- affiner Raum 33
- Aharonov-Bohm-Effekt 431, 531
- Algebra 27, 43
  - der Differentialformen 75
  - der Differentialoperatoren 299
  - differentiell gradierte 240, 252
  - $\mathbb{Z}$ -gradierte 79
- Algebraelement
  - algebraisch positives 497
  - Hermitesches 494
  - isometrisches 494
  - normales 494
  - positives 497
  - unitäres 494
- \*-Algebra 18, 284, 286, 493
- Allgemeine Relativitätstheorie 131
- Anker 238, 246
  - injektiver 239
- Annihilatorbündel 53, 276
- Anti-Wick-Ordnung 305
- Anti-Wick-Sternprodukt 311
- Antiderivation 56
- Antistandardordnung 302
  - auf Kotangentenbündeln 352
- Archimedische Ordnung 488
- Assoziativitätsbedingung 314, 354, 375, 397, 402
- asymptotische Entwicklung 331, 355, 373
  - Laurent 332
  - Newton-Puiseux 332
- asymptotische Positivität 487
- Atlas 31
  - Darboux 118, 516
  - differenzierbarer 31
  - holomorpher 139
  - maximaler 31
- Ausartungsraum 490
- \*-Automorphismus 20, 429
- Bahn 156, 169
  - koadjungierte 274
  - Tangentialraum 171
- Bahnenraum 158
- Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe 408
- Banachscher Fixpunktsatz 10, 391, 463
- Bargmann-Fock-Darstellung 305
  - formale 526, 543
- Bargmann-Fock-Raum 303, 304, 357

- formaler 526, 541
- Betragsfunktion 488
- Bianchi-Identität 102, 103, 458
- Bimodul 476
- Blätterung 228
  - einer Poisson-Mannigfaltigkeit 229
  - eines Lie-Algebroids 239
- Blatt 227
  - symplektisches 231, 236
- Boltzmann-Konstante 19
- Borel-Lemma 260, 332, 372, 448
- Borel-Maß 19, 496, 502
- Bündel von Lie-Algebren 238
- Bündelkarte 46
  
- Cartan-Formel 79
  - für Multivektorfelder 84
- Casimir-Funktion 218, 220, 231, 252
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 139
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung
  - für inneres Produkt 491
  - für positives Funktional 495
- Charakteristik Null 488
- charakteristische Klasse 385, 473
- Chevalley-Eilenberg-Differential 179, 243
- Christoffel-Symbole 103, 138, 195, 342
- constraints* 188
- cup*-Produkt 400, 401
  
- Darboux-Basis 28, 220
- Darboux-Koordinaten 118, 148, 252, 380
- Darboux-Theorem 113, 116, 232
  - lineares 24, 28, 220
- Darstellung
  - adjungierte 183, 203
  - anti-Wick-geordnete 305
  - antistandardgeordnete 302
  - einer Lie-Algebra 74, 175, 294
  - einer Lie-Gruppe 156
  - Irreduzibilität 294
  - $\kappa$ -geordnete 302, 307, 309, 529
    - Integralformel 326
  - $\bar{\kappa}$ -geordnete 306
  - koadjungierte 183, 185, 203
  - Kommutante 294
  - Weyl-geordnete 301
  - Wick-geordnete 305
- \*-Darstellung 518
  - Kern 547
  - Kommutante 521
  - nichtausgeartete 519
  - orthogonale direkte Summe 521
  - stark nichtausgeartete 519
  - treue 519
  - unitäre Äquivalenz 519
  - zyklische 519
- Darstellungstheorie 519, 537, 549
- Deformation *siehe* formale Deformation
  - Poisson-Tensor *siehe* Poisson-Deformation
- $\delta$ -Funktional 210, 496
  - Gel'fand-Ideal 525
  - GNS-Darstellung 526
  - Positivität 501
- deRham Differential *siehe* äußere Ableitung
- deRham-Kohomologie 80, 219, 247, 253
  - erste integrale 430
  - komplexe 142
  - zweite 270
- Derivation 27, 43, 74, 558
  - äußere 27, 399
  - innere 27, 285, 399
  - Kommutator 44
  - lokal innere 425
  - lokale 424
  - quasiinnere 424, 430, 452
  - Sternprodukt 423
    - äußere 424
    - innere 424
    - symplektisches 428
- \*-Derivation 424
- Dichte 64
  - 0-Dichte 65
  - 1-Dichte *siehe* Dichte
  - $\alpha$ -Dichte 63
    - positive 64
    - reelle 64
    - positive 66, 492, 497, 503
- Dichtematrix 285, 437, 498, 507, 545
- Diffeomorphismus 31, 35
  - formaler 262, 265, 386, 408

- symplektischer *siehe* Symplektomorphismus
- Differential 76, 240, 248, 252
- Differentialform 75
  - Einsetzderivation 76
  - exakte 80, 142
  - geschlossene 80, 142
  - kovariant konstante 103
  - Lie-Ableitung 76
  - polynomiale 100, 447
  - $\wedge$ -Produkt 76
  - pull-back 76
  - vom Typ  $(r, s)$  143
- Differentialoperatoren 340, 494
  - algebraische Definition 342, 556
  - auf Modul 571
  - Bimodulstruktur 557
  - Einschränkung 561
  - erster Ordnung 566
  - Filtration 557
  - führendes Symbol 340, 564
  - lokale Form 563
  - Lokalität 560
- differenzierbare Mannigfaltigkeit 32
- differenzierbare Struktur 31
- Distribution 225
  - einer Poisson-Mannigfaltigkeit 227
  - glatte 225
  - integrable 227
  - involutive 227, 239
  - reguläre 225, 239
  - singuläre 225, 239
- Divergenz 14, 91, 99, 278
- Dolbeault-Komplex 145
- Dolbeault-Operator 145
  - als Differentialoperator 577
- Drehimpuls 24, 126, 204
- Dreiecksungleichung 488
- Dynamik 10, *siehe* Zeitentwicklung
  - klassische 284
  - quantenmechanische 285
- Eichfreiheitsgrade 22, 282
- Eichpotential 61
- Einparametergruppe
  - formale 262
  - glatte 152
  - unitäre 285, 535
  - von Automorphismen 434
- von \*-Automorphismen 286
- von Diffeomorphismen 11, 43
- von Poisson-Automorphismen 112, 284
- von Poisson-\*-Automorphismen 21
- von Poisson-Diffeomorphismen 215
- von Symplektomorphismen 112
- Einsetzderivation 56
  - antisymmetrische 57
  - für Multivektorfelder 84
  - symmetrische 57
- Einsetzung 394, 571
- Einsform
  - integrale 430
  - kanonische 119
  - linksinvariante 154
- Endomorphismenbündel 52
  - eines Geradenbündels 72
- Energie 134
  - kinetische 130, 338
  - potentielle 132
  - Quantisierung 353
- Energieerhaltung 21, 112, 216, 277
- Erhaltungsgröße 12, 21, 113, 177, 216, 218
- Erwartungswert 18, 284, 285, 373, 496, 523
- Erzeugungsoperator 151, 303, 304
- Euler-Lagrange-Gleichungen 135, 196
- Euler-Vektorfeld 57, 58, 98, 120, 196, 366, 447
- Exponentialabbildung 153, 201, 343
  - eines Sprays 196
- Fasableitung 132
- Fasermetrik 555
  - Hermiteische 556
- Fasertranslation 127
  - symplektische 128
- fast-komplexe Struktur 138
  - integrable 140
  - kanonische 139
  - kompatible 146, 192
  - lineare 192
- Fedosov-Derivation 462
  - Homotopie 465
- Fedosov-Klasse 473
- Fedosov-Konstruktion
  - antisymmetrischer Grad 447

- auf Kähler-Mannigfaltigkeiten 469
- auf Kotangentenbündeln 469
- faserweises Weyl-Moyal-Sternprodukt 449
- faserweises Wick-Sternprodukt 469
- formale Weyl-Algebra 449
- formales Weyl-Algebra-Bündel 452
- $\lambda$ -Grad 447
- symmetrischer Grad 447
- totaler Grad 447
- Zentrum 451
- Fedosov-Sternprodukt 467
  - Äquivalenz 470
  - Hermitesches 468
  - natürliches 467
- Fedosov-Taylor-Reihe 466
- Feynman-Graphen 383
- Fixpunkt 156, 391
- Fluß 10, 43, 74, 115
  - geodätischer 196
  - Hamiltonscher 20, 22, 108
  - vollständiger 11, 43
  - volumenerhaltender 14
- Flußlinie 10, 23
- formale Deformation
  - Äquivalenz 387, 403
  - Äquivalenzklassen 403
  - assoziative 387, 402, 408
  - eines positiven Funktional 513
  - Hermitesche 512, 537
  - mit kommutierenden Derivationen 411
  - triviale 387
  - von  $*$ -Darstellungen 542
- formale Laurent-Reihen 489, 544
- formale Potenzreihen 259
  - in  $\hbar$  372
  - positive 487
- formale Taylor-Reihe 261, 448
- Formalitätstheorem 383, 386, 418, 444
- Fourier-Transformation 316
- Fréchet-Algebra 317, 318, 326
- Fréchet- $*$ -Algebra 327
- Fréchet-Poisson-Algebra 317, 322
- Fréchet-Raum 34, 316, 321, 332
- Frobenius-Theorem 228, 356
- Funktion
  - glatte 34
  - holomorphe 146
  - polynomiale 57, 58, 120, 300
- Funktionenkeim 35, 76
- Galilei-Gruppe 388
- Gaußsches Maß 303, 357
- Gel'fand-Ideal 522
- Geodäte 137, 197
- Geodätengleichung 137
- geometrische Reihe 269
- geordneter Ring 488
- Geradenbündel 47, 70, 72
  - kanonisches 199
- Gerstenhaber-Algebra 82, 122, 212, 240, 401, 417
  - der Multivektorfelder 83, 252, 265
- Gerstenhaber-Klammer 397, 401, 407
- Gerstenhaber-Produkt 397
- Geschwindigkeitsphasenraum 130
- Gibbs-Funktional 507
- Gleichung zweiter Ordnung 134, 135, 196
- GNS-Darstellung 523
  - Eindeutigkeit 524
- GNS-Konstruktion 524
  - indefinite 549
- Gradient 99, 363
- Graph 277
- Grassmann-Algebra 55, 75, 92
- Groenewold-van Hove-Eigenschaft 294
- Groenewold-van Hove-Theorem 294, 429
- Gruppenwirkung *siehe* Wirkung
- Hadamards Trick 563, 576
- Halbdichte 88
- Halbnorm 34, 316
- Hamilton-Funktion 9, 20, 108, 215, 284, 433
  - $G$ -invariante 177, 189
  - hyperreguläre 137
  - Quantisierung 353
- Hamilton-Operator 285, 354
- Hamiltonsche Bewegungsgleichungen 9, 21, 112, 433
- Hamiltonsche Mechanik 9, 130
- Hamiltonsches System 9, 108
- harmonischer Oszillator 23, 190, 501
- Hauptfaserbündel 168
- Heisenberg-Gleichung 433, 535

- Hellinger-Toeplitz-Theorem 493
- Heß-Trick 454, 482
- Hesse-Matrix 14
- Hilbert-Basis 304
- Hilbert-Raum 284, 324
  - intrinsischer 88
- Hochschild-Differential 398, 407
- Hochschild-Kohomologie 398, 407, 417
  - differentielle 414, 572
  - dritte 404
  - erste 399
  - Gerstenhaber-Algebra 401
  - Hermitesche 544
  - lokale 414
  - mit Werten in Bimodul 476
  - n.c.-differentielle 414
  - nullte 399
  - stetige 414
  - zweite 404
- Hochschild-Kokette
  - Antisymmetrisierung 414
  - differentielle 413
  - lokale 413
  - n.c.-differentielle 413
  - stetige 413
- Hochschild-Komplex 393, 398, 407
  - differentieller 413, 572
  - lokaler 413
  - Maurer-Cartan-Element 408
  - n.c.-differentieller 413
  - stetiger 413
- Hochschild-Kostant-Rosenberg-
  - Abbildung 415
- Hochschild-Kostant-Rosenberg-
  - Theorem 417, 470
- Hörmander-Symbole 320
  - auf Kotangentenbündeln 354
- Homöomorphismus 29
- homogener Raum 168
- Homogenitätsoperator 353, 439
- Homotopie 99, 449
- Hopf-Faserung 190
- Horizontalbündel 365
- horizontaler Lift 365, 469
- Horizontalraum 365
- Ideal
  - abgeschlossenes 548
  - minimales 548
- Immersion 41, 95, 227, 230
- Impuls 126
- Impulsabbildung 177
  - ad\*-äquivalente 183, 184, 235
  - Ad\*-äquivalente 184, 185, 187, 189
  - Existenz 179
  - kanonische 178
  - Quantisierung 383
  - universelle 126, 178
- Impulsniveaufläche 185, 189
- Impulsoperator 292, 316
- Impulsphasenraum 130
- Indextheorem 420, 443
- infinitesimaler Erzeuger 171
- inneres Produkt
  - indefinites 549
  - nichtausgeartetes 490
  - positiv definites 490
  - positiv semidefinites 490
- Integralkurve 10, 42, 113
- Integralmannigfaltigkeit 227
- Integration
  - von Dichten 87
  - von Formen 89
- Intertwiner 519, 524
- \*-Involution 18, 283, 284, 493
- Isotropiegruppe 156, 161, 169, 185, 187
- Jacobi-Identität 20, 44, 112, 248, 271
- Jacobiator 211
  - als Tridifferentialoperator 578
- Kähler-Mannigfaltigkeit 148, 198
  - zweidimensionale 362
- Kähler-Zusammenhang 148, 150, 198
  - Christoffel-Symbole 150, 198
  - Krümmungstensor 150, 198
- KAM-Theorem 388
- kanonische Quantisierung 292
- kanonische Transformation *siehe*
  - Symplektomorphismus
- kanonische Vertauschungsregeln 293
- kanonische Zweiform 120
- $\kappa$ -Ordnung 302
  - asymptotische Entwicklung 334
  - auf Kotangentenbündeln 352
  - Integralformel 319, 322
- $\tilde{\kappa}$ -Ordnung 306
- Karte 30

- Darboux 118, 120
- Kartenwechsel 31
  - holomorpher 139
  - Jacobi-Determinante 87
  - Jacobi-Matrix 87
- Kategorie
  - der \*-Algebren 493
  - der \*-Darstellungen 519
  - der Lie-Algebren 155, 202
  - der Lie-Gruppen 155, 202
  - der Mannigfaltigkeiten 41
  - der Poisson-Algebren 233
  - der Poisson-\*-Algebren 233
  - der Prä-Hilbert-Räume 493
  - der stark nichtausgearteten \*-Darstellungen 520
- Kepler-System 23
- Kettenregel 39
- klassischer Limes 288, 306, 314, 405, 538
  - als \*-Homomorphismus 538
  - Bargmann-Fock-Darstellung 543
  - Bargmann-Fock-Raum 541
  - einer GNS-Darstellung 542
  - eines Funktionals 514
  - KMS-Darstellung 544
  - Schrödinger-Darstellung 543
  - von \*-Darstellungen 541
  - von Observablen 514, 538
  - von Prä-Hilbert-Räumen 539
- klassischer Limesfunktorkor 540
- KMS-Bedingung 507
  - dynamische 508
  - formale 508
  - klassische 509
  - statische 508
- KMS-Darstellung 532
  - Kommutante 532
- KMS-Funktional 507, 544
  - dynamisches 535, 536
  - formales 508
    - Existenz und Eindeutigkeit 511
  - GNS-Konstruktion 532
- Kodimension 96
- Kommutator 27, 287
- komplex-projektiver Raum 190, 206
- komplexe Struktur 140
- Konfigurationsraum 9, 118, 300
- Konjugation 183
- Konnektor 364
- konvexe Kombination 287, 497
- konvexer Kegel 497, 498
- Koordinaten 30
  - holomorphe 148, 303
  - kanonische 118
  - orthonormale 148
- Korrespondenzprinzip 290, 314, 375, 405
- Kotangentenbündel 52, 72, 118, 178, 300
- Kotangentiaallift 123
- kovariante Ableitung 60, *siehe* Zusammenhang
  - als Bidifferentialoperator 578
  - für  $\alpha$ -Dichtenbündel 70
  - symmetrisierte 339
    - als Differentialoperator 578
  - symplektische 454
  - torsionsfreie 62
- Kovarianzmatrix 496
  - Positivität 499
- kräftefreie Bewegung 137
- Krümmungstensor 61
  - für  $\alpha$ -Dichtenbündel 70
- Krümmungszweiformen 61
- Lagrange-Einsform 134
- Lagrange-Funktion 132
  - hyperreguläre 133
- Lagrange-Zweiform 134
- Lagrangesche Mechanik 130
- $\lambda$ -adische Bewertung 389
- $\lambda$ -adische Metrik 389
- $\lambda$ -Euler-Derivation 439
- Laplace-Operator 305, 350, 353, 362
- Legendre-Transformation 136
- Leibniz-Regel 20, 44, 82, 111, 211, 238, 315, 401, 577
- Lenz-Runge-Vektor 24
- Levi-Civita-Zusammenhang 195, 338
  - unimodular 349
- Lie-Ableitung 44, 74, 243
  - in Richtung eines Multivektorfeldes 85
    - von  $\alpha$ -Dichten 90
- Lie-Algebra 23, 44, 83, 222, 243
  - differentiell gradierte 406
  - Kohomologie 406

- einer assoziativen Algebra 27
- einer Lie-Gruppe 152, 200
- Morphismus 23
- symplektische 15, 24
- unimodulare 257, 279
- vollkommene 179
- von Vektorfeldern 44
- Lie-Algebrakohomologie 181, 247
- Lie-Algebrawirkung 174
- Lie-Algebroid 238
  - Bahnen 239
  - Differential 240
  - einer Poisson-Mannigfaltigkeit 248
  - einer Wirkung 277
  - Gerstenhaber-Klammer 240
- Lie-Algebroidkohomologie 246
- Lie-Algebroidmorphismus 244, 246
- Lie-Bialgebroid 253
- Lie-Gruppe 152
  - kompakte 162
  - Morphismus 155
- Lie-Ideal 23
- Lie-Klammer 23, 44, 152
  - als Bidifferentialoperator 578
  - von Vektorfeldern 44
- Lies III. Theorem 155
- Linksmultiplikation 152, 556
  - KMS-Darstellung 532
- Linkswirkung 155
- Liouville-Vektorfeld 120, 253, 345, 440
- Liouville-Volumenform 107, 437, 443
- Logarithmusreihe 392
- lokale Einselemente 533, 555, 556
- lokale Trivialisierung 46
- Lorentz-Gruppe 175, 388
- Lorentz-Kraft 130
- Lorentz-Mannigfaltigkeit 131
- Lorentz-Metrik 131
  
- Magnetfeld 129, 431
- magnetischer Monopol 130, 191, 385, 531
- Mannigfaltigkeit 32
  - fast-komplexe 138
  - Kartesische Produkt 33
  - komplexe 139
  - orientierbare 89, 255, 362
  - orientierte 89, 255, 362
  - symplektische 106
- Orientierung 107
- Marsden-Weinstein-Quotient 188
- Marsden-Weinstein-Reduktion 187
- Matrix-Lie-Gruppe 161
- Maurer-Cartan-Element 408
  - Äquivalenz 410
- Maurer-Cartan-Gleichung 408
- Meßwerte
  - klassische 17, 284
  - quantenmechanische 285
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung
    - klassische 284
    - quantenmechanische 285
- Milnor's Exercise 45, 233
- minimale Kopplung 130, 191, 531
- Minuszeichen
  - wichtigstes 14
- Modul 41, 49
  - nichtausgearteter 571
  - torsionsfreier 491
  - über  $\mathbb{k}[[t]]$  260
- modulare Gruppe 535, 536
- modulare Konjugation 534, 536
- modularer Operator 534, 536
- Möbius-Band 48, 70, 101
- Multidifferentialoperatoren
  - algebraische Definition 567
  - Filtration 568
  - führendes Symbol 575
  - lokale Form 575
  - Lokalität 573
  - Modulstruktur 568
  - Ordnung 567
  - Verkettung 570
- Multiindexschreibweise 315
- Multivektorfelder 82, 407
  - Maurer-Cartan-Element 408
- musikalischer Isomorphismus 15, 108, 133, 191, 250
  - formaler 269
- Neumaier-Operator 351, 529
  - Faktorisierung 363
- Newlander-Nirenberg-Theorem 140, 148
- nichtkommutative Geometrie 209, 418
- Nijenhuis-Torsion 140
- Noether-Theorem 178
- Normalkoordinaten 343, 367



- Normalordnung *siehe* Wick-Ordnung  
 Nullschnitt 49  
 Nullteiler 488  
  
 observabel 17  
 Observablenalgebra  
   klassische 17, 235, 283  
   Nichtkommutativität 499  
   quantenmechanische 284, 373, 485  
   Stabilität 388  
 offener Kern 29  
 Operator  
   lokaler 60, 341, 561  
   mit endlichem Rang 493  
   Spurklasse 324, 437  
   stetiger 324  
   vom Rang eins 493  
 Operatoradjunktion 494  
 Operatorspur 437  
 Orbifolds 188  
 Orbit *siehe* Bahn  
 Ordnung 389  
 Ordnungsproblem 293  
 Ordnungsvorschrift 379, 384  
 Orientierbarkeit 89  
 Orientierung 65, 89  
 Orthogonalprojektor 494  
 Ortsoperator 292, 316  
  
 Peetre-Theorem 341, 376, 416  
 Phasenraum 9, 118, 300  
 Phasenraumreduktion 188  
 Phasenübergang 511  
 Plancksche Konstante 285, 291, 374  
 Poincaré-Lemma 81, 100, 384, 449  
 Poisson-Abbildung 21, 191, 233, 235,  
   236, 275, 276  
   vollständige 277  
 Poisson-Algebra 20, 111, 214  
 Poisson-Algebrahomomorphismus  
   233, 235, 237  
 Poisson- $\ast$ -Algebra 20, 283  
 Poisson-Deformation 268  
   äquivalente 259  
   analytische 258  
   der trivialen Poisson-Struktur 268  
   einer symplektischen Poisson-  
   Struktur 270  
   formale 258, 259  
   glatte 258  
   stetige 258  
   triviale 259, 262  
 Poisson-Derivation 284  
 Poisson-Diffeomorphismus 215, 429  
 Poisson-Kategorie 235  
 Poisson-Klammer 283  
   als Bidifferentialoperator 578  
   Hochschild-Kozyklus 405  
   kanonische 20, 317, 322  
   mit kommutierenden Derivationen  
   412  
   symplektische 111, 214  
 Poisson-Kohomologie 219, 252  
   dritte 264  
   einer symplektischen Mannigfaltigkeit  
   253  
   erste 217  
   fundamentale Klasse 253, 440  
   Gerstenhaber-Algebrastruktur 252  
   modulare Klasse 256  
   nullte 218  
   zweite 268  
 Poisson-Mannigfaltigkeit 214, 240, 374  
   unimodulare 256, 444  
   zwei-dimensionale 222  
 Poisson-Quotient 224, 236, 276  
 Poisson-Sigma-Modell 209, 383  
 Poisson-Spur 256, 272, 438, 444, 507,  
   510  
   symplektische 438  
 Poisson-Struktur 214  
   Deformation *siehe* Poisson-  
   Deformation  
   exakte 253, 440  
   formale 259, 265, 386, 408  
   Äquivalenz 262, 266, 268, 386  
   konstante 219  
   lineare 220, 222, 235, 248, 274  
   mit kompaktem Träger 223  
   symplektische 219  
   triviale 214, 218  
 Poisson-Tensor *siehe* Poisson-Struktur  
 Poisson-Unteralgebra 237  
 Poisson-Vektorfeld 215, 252, 427, 434  
   konformes 440  
 Poisson-Wirkung 224  
   freie und eigentliche 224, 236  
 Poisson-Zentrum 218, 298

- Polarisierung 356
- Polarkoordinaten 31
- Polarzerlegung 146, 535
- positive Deformation 515
- positive Matrix 498
- positives Funktional 18, 286, 495
  - Deformation 513
  - klassischer Limes 514
  - treues 505, 523, 532
- Prä-Hilbert-Raum 490, 518
  - orthogonale direkte Summe 491
- Präquantisierung 355
- Pseudo-Riemannsche Metrik 131
- Pseudodifferentialoperator 322, 355
- pull-back 20
  - für Diffeomorphismen 73
  - von  $\alpha$ -Dichten 90
  - von Funktionen 44
  - von kovarianten Tensoren 73
- Punkttransformation 123, 178
- punktweises Produkt 18
- push-forward 74
  
- Quantisierung 288
  - Funktorkomplex 429
  - geometrische 88, 355, 356
  - von Symmetrien 429
- Quotientenbündel 53
- Quotientenkörper 488, 544
- Quotientenmodul 538
- Quotiententopologie 158
  - Hausdorffsche 162
  
- Rang 95
- Rechtsmultiplikation 152
- Rechtswirkung 155
- regulärer Wert 96, 185
- Ricci-Form 199
- Riemannsche Geometrie 131
- Riemannsche Metrik 131, 338
  - Existenz 556
  - linksinvariante 154
- Riemannsche Volumendichte 348, 349, 361
- Riemannsche Volumenform 361
- Rieszscher Darstellungssatz 19, 486
- Ringerweiterung 489
- Rotation 99
  
- Satz vom konstanten Rang 95
- Satz von Liouville 14, 107, 110
- Satz von Palais 174
- Satz von Picard-Lindelöf
  - globale Version 42, 114, 229
  - lokale Version 10
- Satz von Stokes 89
- Schiefgradient 13
- Schnitt 49
  - Anwenden von Homomorphismen 55
  - direkte Summe 55
  - lokaler 49
  - natürliche Paarung 55
  - Tensorprodukt 55
  - zurückgezogener 59
- Schouten-Nijenhuis-Klammer 84, 122, 243, 407
  - als Bidifferentialoperator 578
  - Natürlichkeit 86
- Schrödinger-Darstellung 301, 352, 495
  - formale 529, 543
- Schrödinger-Funktional 504, 528, 543
  - Gel'fand-Ideal 529
  - GNS-Darstellung 529
- Schrödinger-Gleichung 433
- Schursches Lemma 297
- Schwartz-Funktion 315
- semiklassischer Limes 336
- Spektralkalkül 285
- Spektralmaß 285
- Spektralwert 285, 373, 420
- Spektrum
  - bezüglich Sternprodukt 420
  - klassisches 284
  - quantenmechanisches 285
- Sphäre 33, 94
- Spin 289
  - splitting*-Theorem 232, 383
- Spray 196
- Spurfunktional 330, 437, 507, 508, 510
  - Existenz 441
  - Normierung 441
  - positives 505, 506, 531
  - vollständig positives 501
- Stabilisatorgruppe *siehe* Isotropiegruppe
- Stabilität 257, 387
- Standardordnung 299, 300, 345

- auf Kotangentenbündeln 343, 346
- Homogenität 345
- Integralformel 318
- Standgruppe *siehe* Isotropiegruppe
- Stefan-Sussman-Theorem 227
- stereographische Projektion 94
- Sternprodukt 313
  - $A$ -geordnetes 360
  - Äquivalenz 380
  - anti-Wick-geordnetes 311
  - antistandardgeordnetes 307, 309
    - auf Kotangentenbündeln 352
    - Integralformel 327
  - Automorphismus 429
  - differentielles 375
  - Existenz 381–383
  - $\star$ -Exponential 421, 436
  - Exponentialreihe 420
  - formales 374
  - für lineare Poisson-Struktur 383
  - Hermiteches 375
    - vollständige Positivität 515
  - homogenes 378
  - Inverses 419
  - $\kappa$ -geordnetes 307, 309
    - asymptotische Entwicklung 334
    - auf Kotangentenbündeln 352, 529
    - Integralformel 325, 327
  - $\tilde{\kappa}$ -geordnetes 311
  - Klassifikation 384, 386
  - $\star$ -Logarithmus 423, 430
    - globaler 423
  - lokale Äquivalenz 384
  - lokales 375
  - mit Trennung der Variablen 377
  - natürliches 375
  - $\star$ -Potenzen 423
  - Spektrum 420, 436
  - standardgeordnetes 307, 469
    - auf Kotangentenbündeln 352
    - Integralformel 325
  - stark geschlossenes 443
  - vom Anti-Wick-Typ 377
  - vom antistandardgeordneten Typ 377
  - vom standardgeordneten Typ 377
  - vom Vey-Typ *siehe* natürliches
  - vom Weyl-Typ 375
  - vom Wick-Typ 377, 470
- Weyl-geordnetes 307, 309, 312, 503
  - auf Kotangentenbündeln 352, 504, 528
  - Integralformel 325, 328
  - $\ast$ -Involution 310
- Wick-geordnetes 311
- Zentrum 427
- Stone-von Neumann-Theorem 286
- Strukturkonstanten 180, 221
- Submersion 41, 95, 237
  - surjektive 98, 163, 187
- Super-Jacobi-Identität 82, 395
- Super-Leibniz-Regel 82
- Super-Lie-Algebra 82, 395
- Super-Lie-Klammer 82
- Superauswahlregel 231, 519
  - klassische 218
- Superderivation 79
- Superkommutator 79
- Superpositionsprinzip 287, 518
- Symbol 321
  - führendes 340
  - standardgeordnetes 300
- Symbolabbildung 300
- Symbolkalkül
  - globaler 355
  - $\kappa$ -geordneter 322
- Symmetrie 22, 155, 178
  - des Konfigurationsraums 178
  - Quantisierbarkeit 383
- Symmetriegruppe 155
- symmetrische Algebra 56, 58, 92
- symmetrische Gruppe 92
- symplektische Form 106
  - formale 270, 473
  - kanonische 15, 120
- symplektische Gruppe 15, 24
- symplektische Realisierung 237
- Symplektomorphismengruppe 106
- Symplektomorphismus 106, 109, 111, 116, 219
  - linearer 24, 28
- Tangentenbündel 39, 47, 238
  - komplexifiziertes 141
- Tangentialabbildung 39
- Tangentialfunktork 41
- Tangentialraum 36
- Tangentialvektor 36

- Taylor-Entwicklung 367
- Taylor-Koeffizienten 331
- Temperatur 19, 507
- Tensor 92
  - kontravarianter 72
  - kovarianter 72
- Tensoralgebra 55
- Tensorfeld 72
- Tensorprodukt 25
- Tomita-Takesaki-Theorem 536
- Topologie 29
  - Hausdorffsche 34
  - $\lambda$ -adische 390, 489
  - lokal konvexe 34
- topologischer Abschluß 29, 34
- topologischer Raum 29
  - einfach-zusammenhängend 155
  - Hausdorffscher 29, 32, 331
  - kompakter 29
  - $\sigma$ -kompakt 552
  - Trennungssaxiom  $T_4$  554
  - zusammenhängender 29
  - zweites Abzählbarkeitsaxiom 29, 32, 551
- topologischer Vektorraum 34, 331
- Torsion 103, 491, 538
- Torsionstensor 62
- Torus 33
- Träger 34, 341
  - kompakter 34
- Trivialisierung 50
  
- Übergangsmatrix 46
  - Kozyklusidentität 48
- Ultrametrik 390
- Unschärferelation 285, 291, 336, 499
- Unschärferelationen 545
- Untergruppe 158, 161
- Untermannigfaltigkeit 96
  - koisotrope 276
  - Lagrangesch 356
- Unterraum
  - isotroper 28
  - koisotroper 28
  - Lagrangescher 28
  - symplektischer 28
- Untervektorbündel 52, 226
- Urysohn-Lemma 425, 554
  
- Vakuumserwartungswert 524
- Vakuumsvektor 523
- Varianz 18, 284, 496
- Vektorbündel 47
  - Basis 47
  - Bildbündel 52, 226
  - der  $\alpha$ -Dichten 66
  - direkte Summe 51
  - duales 51
  - Faser 46, 47
  - Faserdimension 47
  - Grassmann-Algebra 53
  - Isomorphie 50
  - Kernbündel 52
  - komplexifiziertes 141
  - orientierbares 69
  - Orientierung 69
  - symmetrische Algebra 53
  - Tensorpotenzen 53
  - Tensorprodukt 51
  - Totalraum 47
  - triviales 47, 50, 154
  - trivialisierbares 50
  - von Endomorphismen *siehe*
    - Endomorphismenbündel
    - von Homomorphismen 52
    - Whitney-Summe 51
    - zurückgezogenes 54
- Vektorbündelatlas 47
- Vektorbündelmorphismus 50
- Vektorfeld 12, 41
  - divergenzfreies 14
  - $E$ -wertiges 49
  - fundamentales 171, 204
  - Hamiltonsches 13, 108, 178, 215, 284
  - konform-symplektisches 121, 254
  - Lagrangesches 134
  - linksinvariantes 152
  - lokales 41
  - modulares 256
  - symplektisches 106, 109, 111, 178, 219
  - Träger 60
  - vertikales 127, 192
  - verwandtes 98, 123
  - vom Typ  $(0, 1)$  143
  - zeitabhängiges 113, 115
- Vektorpotential 129, 431
- Vektorzustand 523

- Vernichtungsoperator 151, 303, 304
- Verschränkungsoperator 519
- Verschwindungsideal 276
- Vertikalbündel 365
- vertikaler Lift 126, 346, 469
  - Hamiltonscher 128
  - symplektischer 128
  - von Tensorfeldern 369
- Vervollständigung 446
- Vollständige Symmetrisierung *siehe*
  - Weyl-Symmetrisierung
- Vollständigkeit 34, 390, 391
- Volumenform 76, 222
  - linksinvariante 154
  - symplektische 107
- Wellenfunktion 293
- Weyl-Darstellung 301, 352
- Weyl-Moyal-Sternprodukt 307, 380, 441, 445, 501, 505
- Weyl-Ordnung 301, 495
  - auf Kotangentenbündeln 352
  - Integralformel 320
- Weyl-Relationen 359
- Weyl-Symmetrisierung 301, 306, 359
- Wick-Darstellung 305
- Wick-Ordnung 303, 305
- Wick-Sternprodukt 311, 502, 515, 526
  - Positivität 517
- Wirkung
  - effektive 156
  - eigentliche 162
  - eigentliche und freie 163, 187
  - freie 156
  - geliftete 178
  - stark Hamiltonsche 184, 187, 189
  - symplektische 176
  - transitive 156, 171
  - treue 156
- WKB-Entwicklung 531
- Zeitentwicklung 114, 177, 433, 434, 507, 535
  - Hamiltonsche 20, 108, 112, 216, 218
  - komplexifizierte 508
- Zentrum 298, 399
- Zerlegung der Eins 32, 61, 516, 552
  - quadratische 553
- Zusammenhang 60
  - direkte Summe 62
  - dualer 62
  - für Homomorphismen 62
  - homogener 366
  - Lift 366
  - symplektischer 369, 454, 482
  - Tensorprodukt 62
  - torsionsfreier 103, 455
  - unimodularer 349
  - zurückgezogener 102
- Zusammenhangsabbildung 364
- Zusammenhangseinsformen 60
- zusammenziehbar 30
- Zustand 18, 495
  - gemischter
    - klassisch 18, 283
    - quantenmechanischer 285
  - kohärenter 503, 528
  - reiner
    - klassisch 16, 283
    - quantenmechanischer 284
    - thermodynamischer 19, 507
- Zustandssumme 19, 507
- Zwangsbedingungen 22
- zyklische Kohomologie 418
- zyklischer Vektor 519, 523