A

Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Anhang stellen wir einige technischere Aspekte der Differentialgeometrie zusammen, welche oft nur unzureichend in den Lehrbüchern zu finden sind. Da für die Deformationsquantisierung Multidifferentialoperatoren von entscheidender Bedeutung sind, wollen wir hier insbesondere einen algebraischen Zugang vorstellen, welcher in vielerlei Hinsicht dem schnelleren Zugang aus Definition 5.4.3 überlegen ist.

A.1 Zerlegungen der Eins

Wir beginnen mit einigen elementaren differentialtopologischen Überlegungen, welche die Rolle des zweiten Abzählbarkeitsaxioms illustrieren. Für eine weitergehende Diskussion sei auf [54] verwiesen.

Lemma A.1.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann gibt es abzählbar viele Punkte $p_n \in M$ mit entsprechenden, um p_n zentrierten, lokalen Karten (U_n, x_n), so daß $B_2(0)^{\mathrm{cl}} \subseteq x_n(U_n)$ und daß die offenen Bälle $x_n^{-1}(B_1(0))$ um p_n ganz M überdecken.*

Beweis. Zunächst wählen wir eine abzählbare Basis O_n der Topologie von M, so daß also jede offene Teilmenge eine geeignete Vereinigung dieser O_n ist. Weiter wählen wir um jeden Punkt $p \in M$ eine zentrierte Karte (U_p, x_p) mit der Eigenschaft, daß die abgeschlossene Kugel $B_2(0)^{\mathrm{cl}}$ noch im Bildbereich $x_p(U_p)$ der Karte enthalten ist. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ohne Einschränkung mindestens einen Punkt $p \in M$ mit $O_k \subseteq x_p^{-1}(B_1(0))$: Wäre nämlich O_k in keiner dieser offenen Kugeln enthalten, so wäre jede Kugel $x_p^{-1}(B_1(0))$ eine geeignete Vereinigung der übrigen O_n mit $n \neq k$ und daher $M = \bigcup_{n \neq k} O_n$, da ja die Kugeln $x_p^{-1}(B_1(0))$ zusammen trivialerweise ganz M überdecken. Ein solches O_k könnten wir daher aus der obigen Liste der O_n streichen. Durch die Wahl der Punkte p_k erreichen wir also, daß $O_k \subseteq x_{p_k}^{-1}(B_1(0))$ und somit insgesamt $\bigcup_k x_{p_k}^{-1}(B_1(0)) = M$. $\square$

Das folgende Lemma zeigt, daß wir selbst eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit durch kompakte Teilmengen ausschöpfen können, siehe auch Abbildung A.1:

Lemma A.1.2. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Folge von Kompakta $K_n \subseteq M$ mit den Eigenschaften, daß $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ für alle n und $M = \bigcup_n K_n$.*

Beweis. Wir wählen gemäß Lemma A.1.1 abzählbar viele Punkte $p_n \in M$ mit den entsprechenden Karten (U_n, x_n), so daß $B_2(0)^{\mathrm{cl}} \subseteq x_n(U_n)$ noch im Bildbereich der Karte enthalten ist und die offenen Kugeln $x_n^{-1}(B_1(0))$ ganz M überdecken. Dann überdecken die *kompakten* Kugeln $x_n^{-1}(B_{2-\epsilon}(0)^{\mathrm{cl}}) = (x_n^{-1}(B_{2-\epsilon}(0)))^{\mathrm{cl}}$ erst recht ganz M, sofern $0 < \epsilon < 1$. Damit ist

$$K_n = \bigcup_{k=1}^{n} x_k^{-1} \left(B_{2-\frac{1}{n}}(0)\right)^{\mathrm{cl}}$$

aber eine Folge von Kompakta mit der gewünschten Eigenschaft. □

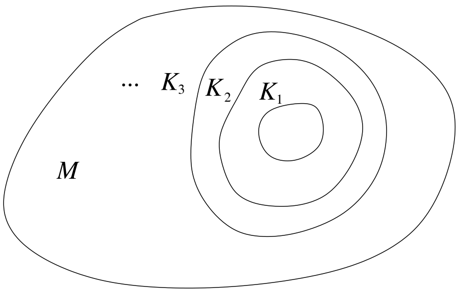

Abb. A.1. Eine ausschöpfende Folge von Kompakta

Die Eigenschaft eines topologischen Raumes, abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen zu sein, nennt man auch *σ-Kompaktheit*. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind also Dank des zweiten Abzählbarkeitsaxioms immer σ-kompakt. Ist M selbst kompakt, so werden Lemma A.1.1 und Lemma A.1.2 trivial.

Wir kommen nun zum zentralen Begriff dieses Abschnitts:

Definition A.1.3 (Zerlegung der Eins). *Eine Familie $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von glatten Funktionen $\chi_\alpha \in C^\infty(M)$ heißt Zerlegung der Eins der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, wenn jeder Punkt p eine offene Umgebung U_p besitzt, so daß $\chi_\alpha\Big|_{U_p} = 0$ für alle bis auf höchstens endlich viele $\alpha \in I$ und*

$$\sum_{\alpha \in I} \chi_\alpha^k = 1 \tag{A.1}$$

gilt. Ist $\{O_\beta\}_{\beta\in J}$ *eine offene Überdeckung von* M*, so heißt eine Zerlegung der Eins* $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *der Überdeckung* $\{O_\beta\}_{\beta\in J}$ *untergeordnet, falls es für jedes* $\alpha \in I$ *ein* $\beta \in J$ *mit*

$$\operatorname{supp}\chi_\alpha \subseteq O_\beta \tag{A.2}$$

gibt.

Eine Zerlegung der Eins der Ordnung $k = 1$ heißt auch einfach Zerlegung der Eins. Manchmal sind jedoch auch Zerlegungen der Eins höherer Ordnung wie etwa quadratische Zerlegungen der Eins von Interesse. Da in der Definition die lokale Endlichkeit der Träger gefordert wird, ist die Gleichung (A.1) auch bei beliebiger Indexmenge unproblematisch. Wir werden gelegentlich mit einigem Notationsmißbrauch die beiden Indexmengen I und J identifizieren. Letztlich ist dies insofern auch möglich, da wir zu gegebenem β auf jeden Fall $\chi_\beta = 0$ mit dazu nehmen können. Umgekehrt können wir verschiedene χ_α, deren Träger in einem O_β liegen, aufsummieren, um so genau ein χ_β zu erhalten.

Um nun zeigen zu können, daß es immer eine untergeordnete Zerlegung der Eins gibt, benötigen wir einige Hilfsfunktionen, welche aus der elementaren Analysis wohlbekannt sind: Die Funktion

$$h(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ glatt und es gilt $0 \leq h(t) \leq 1$. Die Funktionen

$$g_\epsilon(t) = \frac{h(t)}{h(t) + h(\epsilon - t)} \tag{A.4}$$

sind für alle $\epsilon > 0$ ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ glatt und es gilt $g_\epsilon(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $g_\epsilon(t) = 1$ für $t \geq \epsilon$ sowie $0 \leq g_\epsilon(t) \leq 1$ für alle t. Schließlich sind die Funktionen $\varphi_{r,\epsilon} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi_{r,\epsilon}(x) = 1 - g_\epsilon(\|x\| - r) \tag{A.5}$$

ebenfalls glatt für alle $r, \epsilon > 0$, wobei $\|x\|$ die übliche Norm bezeichnet. Es gilt $0 \leq \varphi_{r,\epsilon}(x) \leq 1$ sowie $\varphi_{r,\epsilon}(x) = 1$ für $\|x\| \leq r$ und $\varphi_{r,\epsilon}(x) = 0$ für $\|x\| \geq r + \epsilon$. Der Nachweis dieser Eigenschaften ist elementar.

Mit Hilfe dieser Funktionen können wir nun zeigen, daß es zu jeder offenen Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins gibt:

Satz A.1.4 (Zerlegung der Eins). *Sei* M *eine Mannigfaltigkeit, und sei* $\{O_\beta\}_{\beta\in J}$ *eine offene Überdeckung von* M*. Dann gibt es eine untergeordnete Zerlegung der Eins* $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *der Ordnung* k*. Es kann sogar* $\chi_\alpha = \overline{\chi_\alpha}$ *mit* $0 \leq \chi_\alpha \leq 1$ *sowie* $\chi_\alpha \in C_0^\infty(M)$ *und* I *abzählbar gewählt werden.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst einen geeigneten Atlas von M. Dazu wählen wir eine ausschöpfende Folge $\cdots \subseteq K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1} \subseteq \cdots$ von Kompakta gemäß Lemma A.1.2. Dann ist konstruktionsgemäß $K_{n+1} \setminus \mathring{K}_n$ eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums K_{n+1}, also selbst kompakt. Weiter ist $\mathring{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$ offen und enthält $K_{n+1} \setminus \mathring{K}_n$. Wir betrachten nun um p zentrierte Karten (U_p, x_p) für $p \in \mathring{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$ mit der Eigenschaft, daß $B_2(0)$ noch im Bildbereich der Karte ist, sowie $U_p \subseteq \mathring{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$ und $U_p \subseteq O_{\beta_p}$ für ein geeignetes β_p. Offenbar gibt es zu jedem p eine solche Karte. Da $K_{n+1} \setminus \mathring{K}_n$ kompakt ist, überdecken bereits endlich viele $x_p^{-1}(B_1(0))$ das Kompaktum $K_{n+1} \setminus \mathring{K}_n$. Eine Auswahl dieser endlich vielen Punkte bezeichnen wir mit $p_{n,1}, \ldots, p_{n,m_n}$. Die zugehörigen Karten seien mit $(U_{n,1}, x_{n,1}), \ldots, (U_{n,m_n}, x_{n,m_n})$ bezeichnet. Die lokal definierte, glatte Funktion

$$\varphi_{n,i}(p) = \varphi_{1,\frac{1}{2}}(x_{n,i}(p))$$

für $p \in U_{n,i}$ hat ihren Träger in $x_{n,i}^{-1}(B_{\frac{3}{2}}(0)) \subseteq U_{n,i} \subseteq O_{\beta_{p_{n,i}}}$ und kann daher zu einer globalen Funktion $\varphi_{n,i} \in C^\infty(M)$ fortgesetzt werden, indem man $\varphi_{n,i}(p) = 0$ für $p \in M \setminus U_{n,i}$ setzt. Offenbar gilt $0 \leq \varphi_{n,i} \leq 1$ und $\varphi_{n,i}\big|_{x_{n,i}^{-1}(B_1(0))} = 1$. Die Gesamtheit aller dieser Funktionen $\{\varphi_{n,i}\}_{n,i}$ hat nun folgende Eigenschaften: Die Träger sind lokal endlich, da $\operatorname{supp} \varphi_{n,i} \subseteq \mathring{K}_{n+2} \setminus K_{n-1}$. Die lokal endliche Summe

$$\varphi = \sum_{n,i} \varphi_{n,i}^k$$

ist überall echt positiv, da $\varphi_{n,i} \geq 0$ und auf $x_{n,i}^{-1}(B_1(0))$ konstant 1 ist, diese Kugeln das Kompaktum $K_{n+1} \setminus \mathring{K}_n$ überdecken und die K_n ganz M ausschöpfen. Daher sieht man leicht, daß die Funktionen

$$\chi_{n,i} = \frac{1}{\sqrt[k]{\varphi}} \varphi_{n,i}$$

die gesuchte Zerlegung der Eins der Ordnung k liefern, welche $\{O_\beta\}_{\beta \in J}$ untergeordnet ist. Die zusätzlichen Eigenschaften sind per constructionem gegeben. $\square$

Wir notieren einige nützliche Folgerungen aus diesem Satz. Das erste Korollar ist eine verschärfte Version des bekannten Urysohn-Lemmas aus der mengentheoretischen Topologie, siehe etwa [270, Kap. 7].

Korollar A.1.5 (C^∞-Urysohn-Lemma). *Seien $A_1, A_2 \subseteq M$ zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von M. Dann gibt es eine Funktion $\chi \in C^\infty(M)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$ und*

$$\chi\big|_{A_1} = 1 \quad \textit{sowie} \quad \chi\big|_{A_2} = 0. \tag{A.6}$$

Entsprechend gibt es disjunkte offene Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq M$ mit $A_i \subseteq U_i$. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit erfüllt also das Trennungsaxiom T_4.

Beweis. Man betrachte die offene Überdeckung $\{M \setminus A_1, M \setminus A_2\}$ von M und wählt eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leq \chi_n \leq 1$. Dann setzt man

$$\chi = \sum_{n\in I} \chi_n,$$

wobei $I = \{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{supp}\chi_n \subseteq M \setminus A_2\}$. Dies liefert die gewünschte Funktion χ. Zur Trennung von A_1 und A_2 betrachtet man dann einfach die offenen Teilmengen $U_1 = \chi^{-1}((\frac{3}{4}, 1])$ und $U_2 = \chi^{-1}([0, \frac{1}{4}))$. □

Korollar A.1.6 (Lokale Einselemente). *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Zu jeder ausschöpfenden Folge $\cdots \subseteq K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1} \subseteq \cdots$ von Kompakta von M existieren Funktionen $\chi_n \in C_0^\infty(M)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

i.) $0 \leq \chi_n \leq 1$,
ii.) $\operatorname{supp}\chi_n \subseteq K_{n+1}$,
iii.) $\chi_n\big|_{K_n} = 1$.

Beweis. Zur Konstruktion wende man rekursiv Korollar A.1.5 auf $A_1 = K_n$ und $A_2 = M \setminus \mathring{K}_{n+1}$ an. □

Als eine weitere nichttriviale Anwendung betrachtet man ein reelles Vektorbündel $\pi : E \longrightarrow M$ über M. Eine Fasermetrik ist eine glatt vom Fußpunkt p abhängende symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle_p : E_p \times E_p \longrightarrow \mathbb{R}$, welche für alle $p \in M$ nichtausgeartet ist. Alternativ können wir eine Fasermetrik als einen glatten Schnitt $h \in \Gamma^\infty(\mathrm{S}^2 E^*)$ auffassen, welcher die Bilinearform durch $h_p(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle_p$ induziert.

Satz A.1.7. *Sei $\pi : E \longrightarrow M$ ein reelles Vektorbündel. Dann existiert für E eine positiv definite Fasermetrik.*

Beweis. Wir wählen einen Vektorbündelatlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ für E und eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ mit $0 \leq \chi_\alpha \leq 1$. Für $p \in U_\alpha$ definiert man dann

$$\langle v_p, w_p\rangle_\alpha = \langle \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha(v_p), \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha(w_p)\rangle_{\mathbb{R}^k},$$

wobei auf der rechten Seite das kanonische, positiv definite Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^k$ verwendet wird und $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_\alpha(v_p)$ die Komponenten des Vektors v_p bezüglich der Bündelkarte φ_p darstellen. Die Faserdimension sei k. Offenbar ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ auf U_α glatt vom Fußpunkt abhängig und positiv definit. Dann setzt man

$$\langle v_p, w_p\rangle_p = \sum_{\alpha\in I} \chi_\alpha(p) \langle v_p, w_p\rangle_\alpha,$$

und zeigt leicht, daß dies eine überall positiv definite und glatte Fasermetrik auf E darstellt. □

Angewandt auf $E = TM$ folgt, daß jede Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik besitzt. Man beachte jedoch, daß die positive Definitheit in Satz A.1.7 entscheidend ist: es gibt für die Existenz von Fasermetriken mit anderer Signatur sehr wohl topologische Einschränkungen an das Bündel E.

Bemerkung A.1.8. Für ein komplexes Vektorbündel definiert man analog eine *Hermitesche Fasermetrik* als eine positiv definite, glatt vom Fußpunkt abhängige Sesquilinearform. Den Existenzbeweis kann man dann wörtlich übernehmen.

A.2 Algebraische Definition von Differentialoperatoren

Um einen systematischen Zugang zur Theorie der Multidifferentialoperatoren in der Differentialgeometrie zu erhalten, betrachten wir zunächst den Spezialfall von Differentialoperatoren, für die wir eine rein algebraische Definition geben können. Im folgenden sei $\Bbbk$ ein Körper der Charakteristik Null. Darüberhinaus sei $\mathcal{A}$ eine assoziative und kommutative $\Bbbk$-Algebra. Die Linksmultiplikation mit $a \in \mathcal{A}$ bezeichnen wir wie schon zuvor mit $\mathsf{L}_a(b) = ab$. Besitzt die Algebra $\mathcal{A}$ kein Einselement, so werden bestimmte der folgenden Aussagen im allgemeinen falsch sein. Eine nützliche Verallgemeinerung von Algebren mit Einselement sind die Algebren mit lokalen Einselementen:

Definition A.2.1 (Lokale Einselemente). *Eine assoziative $\Bbbk$-Algebra besitzt lokale Einselemente $\{\mathsf{e}_\alpha\}_{\alpha \in I}$, falls es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ ein e_α mit*

$$\mathsf{e}_\alpha a_i = a_i = a_i \mathsf{e}_\alpha \tag{A.7}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ gibt.

Offenbar besitzt jede Algebra mit Einselement auch lokale Einselemente, nämlich $\{\mathbb{1}\}$. Namensgebend ist nun folgendes Beispiel aus der Differentialgeometrie:

Beispiel A.2.2 (Lokale Einselemente). Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann leisten die gemäß Korollar A.1.6 konstruierten Funktionen $\{\chi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ das gewünschte für die Algebra $C_0^\infty(M)$.

Wir kommen nun zur (algebraischen) Definition von Differentialoperatoren:

Definition A.2.3 (Differentialoperatoren). *Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative und kommutative $\Bbbk$-Algebra. Die Differentialoperatoren* $\mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{End}_\Bbbk(\mathcal{A})$ *der Ordnung $k \in \mathbb{Z}$ definiert man induktiv durch* $\mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A}) = \{0\}$ *für $k < 0$ und*

$$\mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A}) = \left\{ D \in \mathsf{End}_\Bbbk(\mathcal{A}) \;\middle|\; [D, \mathsf{L}_a] \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A}) \textit{ für alle } a \in \mathcal{A} \right\} \tag{A.8}$$

für $k \geq 0$.

Da die Bedingungen linear sind, ist $\mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ für alle k ein Unterraum von $\mathsf{End}_{\Bbbk}(\mathcal{A})$: dies sieht man durch eine leichte Induktion nach der Ordnung k. Wir studieren nun einige allgemeine Eigenschaften von Differentialoperatoren.

Proposition A.2.4. *Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative und kommutative $\Bbbk$-Algebra.*

i.) Für alle k gilt

$$\mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{DiffOp}^{k+1}(\mathcal{A}) \tag{A.9}$$

womit

$$\mathrm{DiffOp}^\bullet(\mathcal{A}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A}) \subseteq \mathsf{End}_{\Bbbk}(\mathcal{A}) \tag{A.10}$$

ein filtrierter Unterraum ist.

ii.) Es gilt $\mathsf{id} \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ ebenso wie $\mathsf{L}_a \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

iii.) Die Differentialoperatoren der Ordnung k sind auf natürliche Weise ein $\mathcal{A}$-Bimodul, wobei man $a \cdot D \cdot b$ für $D \in \mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ und $a, b \in \mathcal{A}$ durch

$$a \cdot D \cdot b = \mathsf{L}_a \, D \, \mathsf{L}_b \tag{A.11}$$

definiert.

iv.) Für $D \in \mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ und $D' \in \mathrm{DiffOp}^\ell(\mathcal{A})$ gilt

$$DD' \in \mathrm{DiffOp}^{k+\ell}(\mathcal{A}), \tag{A.12}$$

womit $\mathrm{DiffOp}^\bullet(\mathcal{A})$ eine filtrierte Unteralgebra von $\mathsf{End}_{\Bbbk}(\mathcal{A})$ ist.

v.) Besitzt $\mathcal{A}$ lokale Einselemente, so ist

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto \mathsf{L}_a \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \tag{A.13}$$

ein injektiver Algebrahomomorphismus. Weiter gilt in diesem Fall für $D \in \mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ und $D' \in \mathrm{DiffOp}^\ell(\mathcal{A})$

$$[D, D'] \in \mathrm{DiffOp}^{k+\ell-1}(\mathcal{A}). \tag{A.14}$$

Beweis. Für den ersten Teil genügt es, $k \geq 0$ zu betrachten. Sei daher $D \in \mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ mit $k \geq 0$ gegeben. Dann gilt $[D, \mathsf{L}_a] \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A})$ nach Definition. Ist $k = 0$, so bedeutet dies einfach $[D, \mathsf{L}_a] = 0$. Da aber $0 \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$, folgt $D \in \mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A})$. Für $k > 0$ folgt $[D, \mathsf{L}_a] \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ durch Induktion nach k, womit $D \in \mathrm{DiffOp}^{k+1}(\mathcal{A})$. Dies zeigt den ersten Teil. Der zweite Teil ist klar, da id mit allen Linksmultiplikationen vertauscht und somit $\mathsf{id} \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$. Da $\mathcal{A}$ kommutativ ist, folgt ebenfalls, daß alle Linksmultiplikationen untereinander vertauschen, womit $\mathsf{L}_a \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Für den dritten Teil bemerken wir zunächst, daß (A.11) die kanonische Bimodulstruktur von $\mathsf{End}_{\Bbbk}(\mathcal{A})$ ist. Daher ist also nur zu zeigen, daß $\mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ unter diesen Bimodulmultiplikationen in sich überführt wird. Für $k < 0$ ist das trivial, für $k = 0$ vertauscht auch $a \cdot D \cdot b$ mit allen Linksmultiplikationen, da $\mathcal{A}$ kommutativ ist. Sei also $k > 0$, so gilt

$[a \cdot D \cdot b, \mathsf{L}_c] = \mathsf{L}_a [D, \mathsf{L}_c] \, \mathsf{L}_b$, da alle Linksmultiplikationen vertauschen. Durch Induktion nach k ist aber $\mathsf{L}_a [D, \mathsf{L}_c] \, \mathsf{L}_b = a \cdot [D, \mathsf{L}_c] \cdot b \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A})$, womit $a \cdot D \cdot b \in \mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ folgt, was den dritten Teil zeigt. Für den vierten Teil können wir wieder $k, \ell \geq 0$ annehmen. Wir führen einen Induktionsbeweis nach $k + \ell$. Ist $k = 0 = \ell$, so vertauscht sowohl D als auch D' mit allen Linksmultiplikationen. Damit gilt aber auch $[DD', \mathsf{L}_a] = 0$, was den Induktionsanfang $DD' \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ zeigt. Ist $k + \ell > 0$, so gilt nach Induktionsannahme $[DD', \mathsf{L}_a] = D[D', \mathsf{L}_a] + [D, \mathsf{L}_a]D' \in \mathrm{DiffOp}^{k+\ell-1}(\mathcal{A})$, da $[D, \mathsf{L}_a] \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A})$ und $[D', \mathsf{L}_a] \in \mathrm{DiffOp}^{\ell-1}(\mathcal{A})$. Damit folgt aber $DD' \in \mathrm{DiffOp}^{k+\ell}(\mathcal{A})$ wie gewünscht. Nun habe $\mathcal{A}$ lokale Einselemente. Dann ist die Injektivität von $a \mapsto \mathsf{L}_a$ aber klar, da $\mathsf{L}_a(\mathsf{e}_\alpha) = a$ für ein geeignetes lokales Einselement. Für die zweite Aussage betrachten wir zunächst $k = 0 = \ell$ und $a \in \mathcal{A}$ sowie e_α mit $\mathsf{e}_\alpha a = a = a\mathsf{e}_\alpha$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
[D, D'](a) &= DD'(\mathsf{L}_a(\mathsf{e}_\alpha)) - D'D(\mathsf{L}_{\mathsf{e}_\alpha}(a)) \\
&= D(aD'(\mathsf{e}_\alpha)) - D'(\mathsf{e}_\alpha D(a)) \\
&= D(a)D'(\mathsf{e}_\alpha) - D'(\mathsf{e}_\alpha)D(a) = 0,
\end{aligned}
$$

womit $\mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ eine kommutative Algebra ist. Sei nun $k + \ell > 0$, dann gilt induktiv $[[D, D'], \mathsf{L}_a] = [[D, \mathsf{L}_a], D'] + [D, [D', \mathsf{L}_a]] \in \mathrm{DiffOp}^{k+\ell-2}(\mathcal{A})$. Damit folgt aber auch der fünfte Teil. □

Im folgenden schreiben wir für die Bimodulstruktur auch einfach aDb. Weiter beachte man, daß (A.14) ohne die Existenz lokaler Einselemente im allgemeinen falsch ist: Die Algebra mit trivialer Multiplikation $ab = 0$ bietet ein Gegenbeispiel, da hier $\mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A}) = \mathsf{End}_{\Bbbk}(\mathcal{A})$ keineswegs kommutativ zu sein braucht.

Der Fall der Differentialoperatoren erster Ordnung verdient besondere Aufmerksamkeit. Zunächst ist klar, daß jede Derivation von $\mathcal{A}$ ein Differentialoperator erster Ordnung ist, denn für $D \in \mathsf{Der}(\mathcal{A})$ gilt nach der Leibniz-Regel

$$
[D, \mathsf{L}_a](b) = D(ab) - aD(b) = \mathsf{L}_{D(a)}(b), \tag{A.15}
$$

womit $D \in \mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A})$ gezeigt ist, da $\mathsf{L}_{D(a)} \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$. Besitzt nun $\mathcal{A}$ lokale Einselemente, so läßt sich $\mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A})$ folgendermaßen zerlegen:

Proposition A.2.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative und kommutative $\Bbbk$-Algebra mit lokalen Einselementen. Dann gilt kanonisch*

$$
\mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A}) = \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \oplus \mathsf{Der}(\mathcal{A}), \tag{A.16}
$$

wobei $D \in \mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A})$ in $D = D_0 + d$ mit

$$
d(a) = D(a) - D(\mathsf{e}_\alpha)a \quad \textit{und} \quad D_0(a) = \mathsf{L}_{D(\mathsf{e}_\alpha)}(a) \tag{A.17}
$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ zerlegt wird. Hier ist e_α ein lokales Einselement mit $\mathsf{e}_\alpha a = a$ und $\mathsf{e}_\alpha D(a) = D(a)$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß die Definition von D_0 und d tatsächlich wohl-definiert ist. Seien also e_α und e_β lokale Einselemente mit $\mathsf{e}_\alpha a = a = \mathsf{e}_\beta a$ sowie $\mathsf{e}_\alpha D(a) = D(a) = \mathsf{e}_\beta D(a)$. Es ist klar, daß $D(a) - D(\mathsf{e}_\alpha)a = [D, \mathsf{L}_a](\mathsf{e}_\alpha)$ und ebenso für e_β. Wir wählen nun ein e_γ mit $\mathsf{e}_\alpha \mathsf{e}_\gamma = \mathsf{e}_\alpha$ sowie $\mathsf{e}_\beta \mathsf{e}_\gamma = \mathsf{e}_\beta$. Da $[D, \mathsf{L}_a]$ ein Differentialoperator nullter Ordnung ist, gilt

$$[D, \mathsf{L}_a](\mathsf{e}_\alpha) = [D, \mathsf{L}_a](\mathsf{L}_{\mathsf{e}_\alpha} \mathsf{e}_\gamma) = \mathsf{L}_{\mathsf{e}_\alpha}[D, \mathsf{L}_a](\mathsf{e}_\gamma) = D(a) - aD(\mathsf{e}_\gamma)$$

und genauso $[D, \mathsf{L}_a](\mathsf{e}_\beta) = D(a) - aD(\mathsf{e}_\gamma)$. Dies zeigt aber, daß d und $D_0 = D - d$ nicht von der Wahl des lokalen Einselements abhängen und daher wohl-definiert sind. Es bleibt zu zeigen, daß d eine Derivation und $D_0 \in \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A})$ ist. Letzteres ist klar, denn für $a, b \in \mathcal{A}$ betrachten wir ein geeignetes lokales Einselement, womit $D_0(\mathsf{L}_a\, b) = \mathsf{L}_{D(\mathsf{e}_\alpha)}(\mathsf{L}_a\, b) = \mathsf{L}_a\, \mathsf{L}_{D(\mathsf{e}_\alpha)}(b) = \mathsf{L}_a\, D_0(b)$. Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} d(ab) &= D(ab) - D(\mathsf{e}_\alpha)ab \\ &= [D, \mathsf{L}_a](\mathsf{e}_\alpha b) + aD(b) - aD(\mathsf{e}_\alpha)b \\ &= \mathsf{L}_b[D, \mathsf{L}_a](\mathsf{e}_\alpha) + ad(b) \\ &= bd(a) + ad(b), \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, daß d eine Derivation ist. □

Da alle drei Vektorräume in (A.16) bezüglich des Kommutators Lie-Algebren sind, was man aus dem fünften Teil von Proposition A.2.4 leicht sieht, ist (A.16) für Algebren mit lokalen Einselementen eine semidirekte Summe

$$\mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A}) = \mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \rtimes \mathsf{Der}(\mathcal{A}) \tag{A.18}$$

von Lie-Algebren. Nach (A.14) wirkt die Lie-Algebra $\mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A})$ und damit auch die Lie-Unteralgebra $\mathsf{Der}(\mathcal{A})$ auf $\mathrm{DiffOp}^k(\mathcal{A})$ für jedes k.

Darüberhinaus ist die direkte Summe in (A.16) auch mit der $\mathcal{A}$-Linksmodulstruktur der drei Vektorräume verträglich, da für eine Derivation D auch aD eine Derivation ist. Hier geht die Kommutativität von $\mathcal{A}$ erneut ein. Mit der $\mathcal{A}$-Rechtsmodulstruktur ist (A.16) jedoch nicht länger verträglich, da $D \circ \mathsf{L}_a$ im allgemeinen keine Derivation mehr ist.

Bemerkung A.2.6. Besitzt $\mathcal{A}$ sogar ein Einselement $\mathbb{1}$, so gilt

$$\mathrm{DiffOp}^0(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \tag{A.19}$$

und

$$\mathrm{DiffOp}^1 \cong \mathcal{A} \oplus \mathsf{Der}(\mathcal{A}), \tag{A.20}$$

wobei die Identifikation in (A.19) über $a \mapsto \mathsf{L}_a$ mit Inversem $D \mapsto D(\mathbb{1})$ gegeben ist.

Für die höheren Differentialoperatoren existieren keine einfachen Zerlegungen analog zu denen in $\mathrm{DiffOp}^1(\mathcal{A})$.

A.3 Differentialoperatoren der Algebra $C^\infty(M)$

Wir betrachten nun den Fall $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. Da die glatten Funktionen eine Algebra mit Einselement sind, sind die Resultate von Abschnitt A.2 uneingeschränkt gültig, insbesondere gilt

$$\operatorname{DiffOp}^0(C^\infty(M)) \cong C^\infty(M). \tag{A.21}$$

Wir wollen als erstes zeigen, daß sich Differentialoperatoren immer auf offene Teilmengen einschränken lassen. Dies ist der tatsächlich nichttriviale Schritt bei der Charakterisierung von Differentialoperatoren von $C^\infty(M)$ und keineswegs selbstverständlich. Wir benötigen zunächst einige vorbereitende Resultate:

Lemma A.3.1. *Sei $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ eine lineare Abbildung. Gibt es dann eine offene Überdeckung $\{O_\alpha\}_{\alpha\in I}$ von M und Differentialoperatoren $\{D_\alpha\}_{\alpha\in I}$ der Ordnung k, so daß*

$$D(f)\Big|_{O_\alpha} = D_\alpha(f)\Big|_{O_\alpha} \tag{A.22}$$

für alle $\alpha \in I$ und $f \in C^\infty(M)$, dann gilt $D \in \operatorname{DiffOp}^k(C^\infty(M))$.

Beweis. Sei zunächst $k = 0$, womit $D_\alpha = \mathsf{L}_{g_\alpha}$ mit $g_\alpha \in C^\infty(M)$ für alle α. Sind dann $f, h \in C^\infty(M)$, so gilt

$$\begin{aligned} D(\mathsf{L}_h f)\big|_{O_\alpha} &= D_\alpha(\mathsf{L}_h f)\big|_{O_\alpha} = h\big|_{O_\alpha} g_\alpha\big|_{O_\alpha} f\big|_{O_\alpha} = (\mathsf{L}_h D_\alpha(f))\big|_{O_\alpha} \\ &= (\mathsf{L}_h D(f))\big|_{O_\alpha}. \end{aligned}$$

Da die O_α aber ganz M überdecken, folgt $[D, \mathsf{L}_h] = 0$ und somit $D \in \operatorname{DiffOp}^0(C^\infty(M))$. Sei also $k \geq 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} [D, \mathsf{L}_h](f)\big|_{O_\alpha} &= D(hf)\big|_{O_\alpha} - h\big|_{O_\alpha} D(f)\big|_{O_\alpha} = D_\alpha(hf)\big|_{O_\alpha} - h\big|_{O_\alpha} D_\alpha(f)\big|_{O_\alpha} \\ &= [D_\alpha, \mathsf{L}_h](f)\big|_{O_\alpha} \end{aligned}$$

Da $[D_\alpha, \mathsf{L}_h] \in \operatorname{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$ können wir induktiv über k folgern, daß $[D, \mathsf{L}_h] \in \operatorname{DiffOp}^{k-1}(\mathcal{A})$. Damit ist aber $D \in \operatorname{DiffOp}^k(C^\infty(M))$, womit der Beweis erbracht ist. ☐

Der entscheidende Punkt im Beweis ist offensichtlich die Verträglichkeit von Produktbildung von glatten Funktionen mit der Einschränkung glatter Funktionen auf offene Teilmengen. Das nächste Lemma zeigt, daß Differentialoperatoren immer *lokal* sind:

Lemma A.3.2. *Ist $D \in \operatorname{DiffOp}^k(C^\infty(M))$, so gilt*

$$\operatorname{supp} D(f) \subseteq \operatorname{supp} f \tag{A.23}$$

für alle $f \in C^\infty(M)$.

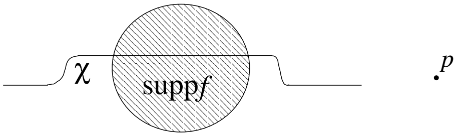

Abb. A.2. Die Abschneidefunktion χ.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp} f \neq M$ und $p \in M \setminus \operatorname{supp} f$ gegeben. Daher gibt es nach Korollar A.1.5 eine Funktion $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\chi\big|_{\operatorname{supp} f} = 1$ und $\chi(p) = 0$, siehe Abbildung A.2. Da (A.23) für $k = 0$ trivialerweise erfüllt ist, beweisen wir (A.23) durch Induktion nach k. Es gilt

$$D(f)\big|_p = D(\chi f)\big|_p = [D, \mathsf{L}_\chi](f)\big|_p + (\mathsf{L}_\chi\, D(f))\big|_p = 0,$$

da $[D, \mathsf{L}_\chi] \in \operatorname{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$ nach Induktionsannahme lokal ist und $\chi(p) = 0$. Damit folgt (A.23) durch Induktion. □

Wir kommen nun zur angekündigten Einschränkbarkeit. Da sich eine Funktion $f \in C^\infty(U)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ im allgemeinen nicht zu einer Funktion $F \in C^\infty(M)$ fortsetzen läßt, können wir die Einschränkung D_U von D auf $C^\infty(U)$ *nicht* durch $D_U(f) = D(F)\big|_U$ definieren. Trotzdem gilt folgende Proposition:

Proposition A.3.3 (Einschränkbarkeit lokaler Operatoren). *Sei $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ eine lokale lineare Abbildung. Dann gibt es zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ eine eindeutig bestimmte lokale lineare Abbildung $D_U : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ derart, daß $D_M = D$ und für offenes $V \subseteq U$*

$$D_U(f)\big|_V = D_V\left(f\big|_V\right) \tag{A.24}$$

für alle $f \in C^\infty(U)$. Ist $D \in \operatorname{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ sogar ein Differentialoperator, so folgt $D_U \in \operatorname{DiffOp}^k(C^\infty(U))$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq M$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien solche Abbildungen D_U und $\tilde{D}_U$ für jedes offene $U \subseteq M$ gegeben. Dann betrachten wir eine offene Teilmenge $V \subseteq U$ mit $V^{\mathrm{cl}} \subseteq U$ und eine Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp} \chi \subseteq U$ und $\chi\big|_{V^{\mathrm{cl}}} = 1$. Sei nun $f \in C^\infty(U)$, dann gilt

$$\tilde{D}_U(f)\big|_V = \tilde{D}_V\left(f\big|_V\right) = \tilde{D}_V\left((\chi f)\big|_V\right) = \tilde{D}_M(\chi f)\big|_V = D(\chi f)\big|_V$$

und genauso für D_U. Damit stimmen die Funktionen $D_U(f)$ und $\tilde{D}_U(f)$ auf *allen* derartigen $V \subseteq U$ überein. Da letztere aber ganz U überdecken, folgt die Eindeutigkeit.

Wir zeigen nun die Existenz. Sei also $U \subseteq M$ offen und $O \subseteq U$ eine offene Teilmenge mit $O^{\mathrm{cl}} \subseteq U$. Weiter sei χ wieder eine Abschneidefunktion wie oben. Dann definieren wir

$$D_U(f)\big|_O = D(\chi f)\big|_O \tag{$*$}$$

für $f \in C^\infty(U)$. Da $\chi f \in C^\infty(M)$ als globale glatte Funktion wohl-definiert ist, müssen wir nun zeigen, daß die rechte Seite von $(*)$ nicht von der Wahl von O und χ abhängt. Sei also $\tilde{O}$ und $\tilde{\chi}$ eine weitere Wahl. Dann gilt

$$\operatorname{supp} D((\chi - \tilde{\chi})f) \subseteq \operatorname{supp}((\chi - \tilde{\chi})f) \subseteq M \setminus (O \cap \tilde{O}),$$

da $\chi - \tilde{\chi}$ auf der offenen Teilmenge $O \cap \tilde{O}$ verschwindet. Damit folgt aber $D(\chi f)\big|_{O\cap\tilde{O}} = D(\tilde{\chi} f)\big|_{O\cap\tilde{O}}$. Dies zeigt, daß $(*)$ tatsächlich eine auf ganz U wohl-definierte und offensichtlich auch glatte Funktion $D_U(f)$ liefert. Wir behaupten nun, daß die so konstruierten Abbildungen die Eigenschaft (A.24) besitzen. Zunächst ist klar, daß $D_M = D$, da wir in diesem Fall $O = M$ und $\chi = 1$ wählen können. Sei also $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge und $O \subseteq V$ mit $O^{\mathrm{cl}} \subseteq V$ und $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}\chi \subseteq V$ und $\chi\big|_{O^{\mathrm{cl}}} = 1$. Sei nun $f \in C^\infty(U)$. Dann stimmen die kanonischen Fortsetzungen von $f\big|_V\chi$ und $f\chi$ zu glatten Funktionen auf M überein und entsprechend gilt

$$D_V\left(f\big|_V\right)\big|_O = D\left(f\big|_V\chi\right)\big|_O = D(\chi f)\big|_O = D_U(f)\big|_O.$$

Da wiederum derartige O ganz V überdecken, folgt (A.24).

Sei nun $D \in \mathrm{DiffOp}^k(C^\infty(M))$. Ist $k = 0$, so ist $D = \mathsf{L}_g$ mit einer Funktion $g \in C^\infty(M)$, womit $D_U = \mathsf{L}_{g|_U}$ sofort folgt. Daher ist jedes D_U ebenfalls ein Differentialoperator nullter Ordnung. Sei also $k \geq 1$ und $f, g \in C^\infty(U)$. Dann gilt mit O und χ wie oben, daß auch O und χ^2 eine gültige Wahl ist, womit

$$\begin{aligned}
D_U(\mathsf{L}_g f)\big|_O - \mathsf{L}_g D_U(f)\big|_O &= D(\chi^2 g f)\big|_O - g\big|_O D(\chi f)\big|_O \\
&= [D, \mathsf{L}_{\chi g}](\chi f)\big|_O + (\chi g)\big|_O D(\chi f)\big|_O - g\big|_O D(\chi f)\big|_O \\
&= [D, \mathsf{L}_{\chi g}](\chi f)\big|_O,
\end{aligned}$$

da $\chi g\big|_O = g\big|_O$. Da $[D, \mathsf{L}_{\chi g}] \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$, folgt $[D_U, \mathsf{L}_g](f)\big|_O = [D, \mathsf{L}_{\chi g}]_U(f)\big|_O$. Induktiv können wir $[D, \mathsf{L}_{\chi g}]_U \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(U))$ folgern. Nach Lemma A.3.1 ist dann aber auch $[D_U, \mathsf{L}_g] \in \mathrm{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(U))$, da die offenen Teilmengen O ganz U überdecken. Damit folgt aber $D_U \in \mathrm{DiffOp}^k(C^\infty(U))$. □

Bemerkung A.3.4. Es folgt insbesondere, daß ein lokaler Operator D nicht nur eindeutige Einschränkungen D_U auf offene Mengen besitzt, sondern seinerseits aus den Einschränkungen D_{U_α} für eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ rekonstruiert werden kann. Damit sind lokale Operatoren und insbesondere Differentialoperatoren bereits dadurch bestimmt, was ihre Einschränkungen auf lokale Karten eines Atlanten sind.

Wir können also nun die lokalen Formen von Differentialoperatoren in lokalen Koordinaten bestimmen. Der folgenden Satz zeigt, daß Differentialoperatoren lokal genau die gewünschte Form besitzen:

Satz A.3.5 (Lokale Form von Differentialoperatoren). *Sei (U, x) eine lokale Karte von M und $D \in \mathrm{DiffOp}^k(C^\infty(M))$. Dann gibt es eindeutig bestimmte lokale Funktionen $D_U^{r\, i_1 \cdots i_r} \in C^\infty(U)$ für $r = 0, \ldots, k$, welche in den Indizes $i_1, \ldots, i_r$ symmetrisch sind, so daß*

$$D_U = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} D_U^{r\, i_1 \cdots i_r} \frac{\partial^r}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r}}. \tag{A.25}$$

Für $r = k$ sind die Funktionen $D_U^{k\, i_1 \cdots i_k}$ die lokalen Koeffizientenfunktionen eines globalen Tensorfeldes $\sigma_k(D) \in \Gamma^\infty(\mathrm{S}^k TM)$, also

$$\sigma_k(D)\Big|_U = \frac{1}{k!} D_U^{k\, i_1 \cdots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \vee \cdots \vee \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}. \tag{A.26}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz erneut durch Induktion nach k, da offenbar der Fall $k = 0$ trivialerweise richtig ist. Sei also $k \geq 1$. Dann betrachten wir zunächst den Spezialfall, daß der Bildbereich der Karte konvex ist, also mit x, y auch $tx + (1-t)y$ im Bildbereich der Karte liegt, sofern $t \in [0, 1]$. Sei nun x_0 fest gewählt, dann gilt (Hadamards Trick) für alle x in U

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx + (1-t)x_0)\mathrm{d}t \\ &= f(x_0) + \int_0^1 (x^i - x_0^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx + (1-t)x_0)\mathrm{d}t \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i) g_i(x) \end{aligned}$$

mit glatten Funktionen $g_i \in C^\infty(U)$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r g_i}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r}}(x_0) &= \int_0^1 \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r} \partial x^i}(tx + (1-t)x_0) t^r \mathrm{d}t\Big|_{x = x_0} \\ &= \frac{1}{r+1} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r} \partial x^i}(x_0). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} D_U f &= D_U \left(f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i) g_i \right) \\ &= f(x_0) D_U(1) + \sum_{i=1}^{n} \left[D_U, \mathsf{L}_{x^i - x_0^i} \right] (g_i) + (x^i - x_0^i) D_U(g_i) \\ &= f(x_0) D_U(1) + \sum_{i=1}^{n} \left[D_U, \mathsf{L}_{x^i} \right] (g_i) + (x^i - x_0^i) D_U(g_i), \end{aligned}$$

wobei wir hier mit x^i die i-te *Koordinatenfunktion* bezeichnen und mit x_0^i die *konstante* Funktion mit Funktionswert gleich der i-ten Koordinate des Punktes x_0. Die Linksmultiplikation $\mathsf{L}_{x_0^i}$ vertauscht offenbar mit D_U, da D_U linear ist. Nun ist $[D_U, \mathsf{L}_{x^i}]$ ein Differentialoperator der Ordnung $k-1$, womit es nach Induktionsannahme also Funktionen ${D_U^r}^{ii_1\cdots i_r}$ mit $r = 0, \ldots, k-1$ und

$$[D_U, \mathsf{L}_{x^i}] = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{r!} {D_U^r}^{ii_1\cdots i_r} \frac{\partial^r}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r}}$$

gibt. Daher folgt bei $x = x_0$ mit $(*)$ und $(x^i - x_0^i)\big|_{x=x_0} = 0$

$$D_U f\big|_{x_0} = f(x_0) D_U(1)\big|_{x_0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{(r+1)!} {D_U^r}^{ii_1\cdots i_r}(x_0) \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r} \partial x^i}(x_0).$$

Da der Punkt x_0 aber beliebig war, folgt die Behauptung, da die Eindeutigkeit trivialerweise folgt, indem man D_U auf geeigneten Polynomen auswertet. Ist der Bildbereich der Karte nicht konvex, so zerlegt man ihn zunächst in kleine überlappende konvexe offene Teilmengen, wo wir die obige Form finden. Ein Vergleich auf den Schnittmengen zeigt aber aufgrund der Eindeutigkeit, daß die Koeffizientenfunktionen sogar auf ganz U definiert sind, womit auch in diesem Fall die lokale Form (A.25) folgt. Dies zeigt den ersten Teil. Die zweite Behauptung folgt aber leicht aus dem Transformationsverhalten von partiellen Ableitungen unter Koordinatenwechsel und wurde bereits in Lemma 5.4.4 diskutiert. Das Tensorfeld $\sigma_k(D)$ ist gerade das *führende Symbol* aus Lemma 5.4.4. □

Ist umgekehrt ein Operator D gegeben, der in einem Atlas lokal die Form (A.25) besitzt, so ist D ein Differentialoperator. Dies zeigt folgende Proposition, womit schließlich die Äquivalenz der Definition 5.4.3 mit der algebraischen Definition A.2.3 für $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ gezeigt ist.

Proposition A.3.6. *Sei $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ eine lineare Abbildung und $k \geq 0$. Gibt es dann einen Atlas, so daß für jede lokale Karte (U, x) in diesem Atlas Funktionen $D_U^{i_1\cdots i_r} \in C^\infty(U)$ für $r = 0, \ldots, k$ mit der Eigenschaft*

$$Df\big|_U = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} D_U^{i_1\cdots i_r} \frac{\partial^r f\big|_U}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r}} \tag{A.27}$$

existieren, so ist $D \in \operatorname{DiffOp}^k(C^\infty(M))$.

Beweis. Wir zeigen diese Behauptung erneut durch Induktion nach k. Für $k = 0$ gilt offenbar $(Df)\big|_U = D_U^0\left(f\big|_U\right)$, womit sich D_U^0 als unabhängig von der Karte U erweist und eine global definierte glatte Funktion $D_U^0 = D(1)$ darstellt. Damit ist aber $D = \mathsf{L}_{D(1)} \in \operatorname{DiffOp}^0(C^\infty(M))$. Für $k \geq 1$ sieht man mit Hilfe der Leibniz-Regel leicht, daß $([D, \mathsf{L}_g] f)\big|_U$ wieder von der Form (A.27) ist, jedoch höchstens $k-1$ partielle Ableitungen von f enthält. Daher folgt die Behauptung durch Induktion. □

Zur weiteren Illustration betrachten wir als nächstes die Differentialoperatoren der Algebra $C_0^\infty(M)$. Aus der Lokalität von Differentialoperatoren $D \in \mathrm{DiffOp}^\bullet(C^\infty(M))$ gemäß Lemma A.3.2 folgt sofort, daß $D(f) \in C_0^\infty(M)$, falls $f \in C_0^\infty(M)$. Daher lassen sich Differentialoperatoren auf $C_0^\infty(M)$ einschränken. Da $C_0^\infty(M)$ eine Unteralgebra ist, folgt sofort, daß die Einschränkung von $D \in \mathrm{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ auf $C_0^\infty(M)$ ebenfalls ein Differentialoperator der Ordnung k der Algebra $C_0^\infty(M)$ liefert. Die nächste Proposition zeigt nun, daß diese Zuordnung bijektiv ist:

Proposition A.3.7. *Sei $D \in \mathrm{DiffOp}^k(C_0^\infty(M))$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Differentialoperator $\hat{D} \in \mathrm{DiffOp}^k(C^\infty(M))$, so daß*

$$D = \hat{D}\big|_{C_0^\infty(M)}. \tag{A.28}$$

Beweis. Ein Differentialoperator $\hat{D} \in \mathrm{DiffOp}^k(C^\infty(M))$ ist durch seine Werte auf $C_0^\infty(M)$ offenbar bereits eindeutig bestimmt: dies folgt sofort aus der lokalen Form sowie der Tatsache, daß es zu festem k und $p \in M$ immer eine Funktion f mit kompaktem Träger gibt, deren Taylor-Entwicklung in einer lokalen Karte um p bis zur Ordnung k eine beliebig vorgegebene ist. Das Borel-Lemma ist hierzu nicht nötig, der Beweis ist elementar, da k endlich ist. Damit läßt sich aber die Form der Koeffizienten von $\hat{D}$ bei p eindeutig bestimmen.

Sei also D vorgegeben, dann ist D lokal, was man analog zu Lemma A.3.2 zeigt. Wir definieren $\hat{D}$ folgendermaßen. Sei $O \subseteq M$ eine offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß O^{cl} und $\chi \in C_0^\infty(M)$ mit der Eigenschaft $\chi\big|_{O^{\mathrm{cl}}} = 1$. Die Existenz einer solchen Funktion χ zu gegebenem O läßt sich durch eine einfache Verschärfung von Korollar A.1.5 zeigen, indem man O^{cl} durch endlich viele offene Mengen $U_1, \ldots, U_n$ überdeckt, derart, daß U_i^{cl} selbst kompakt ist. Dann betrachtet man $A_1 = O^{\mathrm{cl}}$ und $A_2 = M \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ und wählt χ gemäß Korollar A.1.5. Offenbar ist dann $\operatorname{supp}\chi$ kompakt. Mit diesen Wahlen definieren wir für $f \in C^\infty(M)$

$$\hat{D}(f)\big|_O = D(\chi f)\big|_O. \tag{$*$}$$

Da $\chi f \in C_0^\infty(M)$, können wir D tatsächlich anwenden. Ist nun $\tilde{O}$, $\tilde{\chi}$ eine alternative Wahl, so gilt aufgrund der Lokalität von D die Beziehung $\operatorname{supp}(D((\chi - \tilde{\chi})f)) \subseteq \operatorname{supp}((\chi - \tilde{\chi})f) \subseteq M \setminus (O \cap \tilde{O})$, da $\chi - \tilde{\chi}$ auf der offenen Teilmenge $O \cap \tilde{O}$ verschwindet. Damit folgt aber $D(\chi f)\big|_{O\cap\tilde{O}} = D(\tilde{\chi} f)\big|_{O\cap\tilde{O}}$, womit $(*)$ eine wohl-definierte lineare Abbildung $\hat{D} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ ist.

Seien nun $f, g \in C^\infty(M)$, dann gilt für $k = 0$ und O, χ wie oben

$$\hat{D}(gf)\big|_O = D(\chi^2 gf)\big|_O = D(\mathsf{L}_{\chi g}\, \chi f)\big|_O = \mathsf{L}_{\chi g}\, D(\chi f)\big|_O = g\big|_O \hat{D}(f)\big|_O,$$

da auch $\chi^2\big|_{O^{\mathrm{cl}}} = 1$. Damit vertauscht $\hat{D}$ aber mit L_g, da die offenen Teilmengen O ganz M überdecken. Also folgt $\hat{D} \in \mathrm{DiffOp}^0(C^\infty(M))$. Sei nun $k \geq 1$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{D}(gf) - g\hat{D}(f)\right)\Big|_O &= D(\chi^2 gf)\big|_O - g\big|_O D(\chi f)\big|_O \\
&= D(\mathsf{L}_{\chi g}\,\chi f)\big|_O - (\chi g)\big|_O D(\chi f)\big|_O \\
&= \left(D(\mathsf{L}_{\chi g}\,\chi f) - \mathsf{L}_{\chi g}\, D(\chi f)\right)\big|_O \\
&= \left(\widehat{[D, \mathsf{L}_{\chi g}]}(f)\right)\Big|_O .
\end{aligned}
$$

Da $[D, \mathsf{L}_{\chi g}] \in \operatorname{DiffOp}^{k-1}(C_0^\infty(M))$ gilt, folgt durch Induktion nach k, daß $[\hat{D}, \mathsf{L}_g]$ auf O mit einem Differentialoperator der Ordnung $k-1$ übereinstimmt. Nach Lemma A.3.1 folgt, daß $[\hat{D}, \mathsf{L}_g] \in \operatorname{DiffOp}^{k-1}(C^\infty(M))$ und somit $\hat{D} \in \operatorname{DiffOp}^k(C^\infty(M))$. Es bleibt zu zeigen, daß die Einschränkung von $\hat{D}$ auf Funktionen mit kompaktem Träger wieder den Differentialoperator D liefert. Dies folgt aber sofort aus der Existenz lokaler Einselemente gemäß Beispiel A.2.2. □

Diese Proposition zeigt also, daß die Differentialoperatoren von $C^\infty(M)$ und $C_0^\infty(M)$ letztlich die selben sind. Aus diesem Grunde schreiben wir auch gelegentlich

$$
\operatorname{DiffOp}^\bullet(M) = \operatorname{DiffOp}^\bullet(C^\infty(M)) = \operatorname{DiffOp}^\bullet(C_0^\infty(M)). \tag{A.29}
$$

Wir können nun noch einige Konsequenzen der lokalen Charakterisierung von Differentialoperatoren geben. Insbesondere liefert Satz A.3.5 nun einen Beweis von Satz 2.1.26:

Korollar A.3.8. *Für die Differentialoperatoren erster Ordnung gilt:*

i.) $\sigma_1(D) = 0$ *genau dann, wenn* $D \in \operatorname{DiffOp}^0(M)$.
ii.) $\sigma_1 : \mathsf{Der}(C^\infty(M)) = \mathsf{Der}(C_0^\infty(M)) \longrightarrow \Gamma^\infty(TM)$ *ist eine kanonische lineare Bijektion mit der inversen Abbildung*

$$
\mathscr{L} \colon \Gamma^\infty(TM) \ni X \mapsto \mathscr{L}_X \in \mathsf{Der}(C^\infty(M)). \tag{A.30}
$$

Beweis. Zunächst gilt $\operatorname{DiffOp}^1(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \oplus \mathsf{Der}(\mathcal{A})$ nach (A.20). Die lokale Formel für $\sigma_1(D)$ zeigt aber sofort den ersten Teil, womit $\sigma_1\big|_{\mathsf{Der}(C^\infty(M))}$ injektiv ist. Da die Surjektivität trivial ist, folgt der zweite Teil. □

A.4 Algebraische Definition von Multidifferentialoperatoren

Multidifferentialoperatoren verallgemeinern Differentialoperatoren in zweierlei Hinsicht: zum einen wollen wir mehr als nur ein Argument zulassen, wie dies beispielsweise für die Hochschild-Koketten eines Sternprodukts notwendig ist. Zum anderen wollen wir die Gelegenheit nutzen, um auch andere „Objekte“ als nur Algebraelemente zu „differenzieren“. Geometrisch sind wir hierbei insbesondere an Schnitten von Vektorbündeln interessiert, um Aussagen wie „die äußere Ableitung von k-Formen zu $(k+1)$-Formen ist ein Differentialoperator erster Ordnung“ treffen zu können. Der algebraische Rahmen wird nun durch folgende Definition festgelegt.

Wir betrachten eine assoziative und kommutative Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper $\Bbbk$ der Charakteristik Null, welche typischerweise ein Einselement oder zumindest lokale Einselemente besitzen soll. Weiter betrachten wir $\mathcal{A}$-Moduln $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$ und $\mathcal{F}$, welche immer eine zugrundeliegende $\Bbbk$-Vektorraumstruktur besitzen mögen, die mit der $\mathcal{A}$-Modulstruktur verträglich ist. Da $\mathcal{A}$ kommutativ ist, können wir jeden Linksmodul auch als Rechtsmodul und umgekehrt auffassen. Zudem können wir jeden Modul entsprechend auch als $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-Bimodul auffassen, was wir gelegentlich stillschweigend tun werden.

Ein N-Differentialoperator (kurz: Multidifferentialoperator) mit Argumenten in $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$ und Werten in $\mathcal{F}$ wird dann eine $\Bbbk$-multilineare Abbildung

$$D : \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{F} \tag{A.31}$$

mit noch näher zu spezifizierenden Eigenschaften sein. Insbesondere wollen wir die Differentiationsordnung in jedem einzelnen Argument zählen können, womit sich folgende Multiindexschreibweise anbietet: Wir betrachten $K = (k_1, \ldots, k_N), L = (\ell_1, \ldots, \ell_N) \in \mathbb{Z}^N$. Dann definieren wir $K \leq L$, wenn $k_i \leq \ell_i$ für alle $i = 1, \ldots, N$. Weiter bezeichnen wir mit $\mathsf{e}_i \in \mathbb{Z}^N$ die kanonischen Basisvektoren, also den Multiindex mit 1 an i-ter Stelle und 0 sonst. Addition und Subtraktion von Multiindizes werden wie immer komponentenweise erklärt. Für $K \geq 0$ definiert man weiter $|K| = k_1 + \cdots + k_N$. Die $\Bbbk$-multilinearen Abbildungen D wie in (A.31) werden wir auf die übliche Weise mit den $\Bbbk$-linearen Abbildungen $\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F})$ identifizieren, wobei $\otimes$ immer für $\otimes_{\Bbbk}$ steht. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathsf{L}_a^{(i)} : \mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N \tag{A.32}$$

die Linksmultiplikation (im Sinne der Modulstruktur von $\mathcal{E}_i$) mit dem Algebraelement $a \in \mathcal{A}$ im i-ten Tensorfaktor $\mathcal{E}_i$. Auf elementaren Tensoren gilt also

$$\mathsf{L}_a^{(i)}(s_1 \otimes \cdots \otimes s_N) = s_1 \otimes \cdots \otimes s_{i-1} \otimes a s_i \otimes s_{i+1} \otimes \cdots \otimes s_N, \tag{A.33}$$

wobei $s_j \in \mathcal{E}_j$ für $j = 1, \ldots, N$. Die Linksmultiplikation von Elementen in $\mathcal{F}$ mit $a \in \mathcal{A}$ bezeichnen wir einfach mit L_a. Die folgende Definition ist nun die naheliegende Verallgemeinerung von Definition A.2.3:

Definition A.4.1 (Multidifferentialoperatoren). *Seien $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$ und $\mathcal{F}$ Moduln über einer assoziativen und kommutativen $\Bbbk$-Algebra $\mathcal{A}$. Dann definiert man die Multidifferentialoperatoren $\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ mit Argumenten in $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$ und Werten in $\mathcal{F}$ der Ordnung $K \in \mathbb{Z}^N$ induktiv durch*

$$\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) = \{0\}, \tag{A.34}$$

falls es ein $k_i < 0$ *in* K *gibt, und*

$$\begin{aligned} \operatorname{DiffOp}^K_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) = \Big\{ D \in \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F}) \;\Big|\; \\ \forall a \in \mathcal{A}\, \forall i:\ \mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}^{(i)}_a \in \operatorname{DiffOp}^{K - \mathsf{e}_i}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \Big\}, \end{aligned} \tag{A.35}$$

falls $K \geq 0$.

Da die Bedingungen jeweils linear sind, zeigt eine einfache Induktion nach $|K|$, daß die Multidifferentialoperatoren der Ordnung K ein Untervektorraum von $\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F})$ sind.

Da wir $\mathcal{A}$ in natürlicher Weise als $\mathcal{A}$-Modul auffassen können, indem wir die Algebramultiplikation als Modulmultiplikation deuten, liefert Definition A.4.1 eine Verallgemeinerung von Definition A.2.3:

Bemerkung A.4.2. Es gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{DiffOp}^k_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}; \mathcal{A}) = \operatorname{DiffOp}^k(\mathcal{A}). \tag{A.36}$$

Die folgende Proposition zeigt nun, daß auch die Multidifferentialoperatoren filtriert sind und sich mit Elementen aus $\mathcal{A}$ multiplizieren lassen. Man beachte jedoch, daß es nicht mehr nur eine Rechtsmodulstruktur gibt, wie in Proposition A.2.4, sondern N im allgemeinen verschiedene, da wir jedes Argument mit Elementen aus $\mathcal{A}$ multiplizieren können:

Proposition A.4.3. *Seien* $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N$ *und* $\mathcal{F}$ *Moduln über* $\mathcal{A}$. *Dann gilt:*

i.) Für $K \leq L$ *gilt*

$$\operatorname{DiffOp}^K_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \subseteq \operatorname{DiffOp}^L_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}), \tag{A.37}$$

womit

$$\operatorname{DiffOp}^\bullet_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) = \bigcup_{K \geq 0} \operatorname{DiffOp}^K_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \tag{A.38}$$

ein filtrierter Unterraum von $\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\mathcal{E}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_N, \mathcal{F})$ *ist.*

ii.) $\operatorname{DiffOp}^K_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ *wird durch die Definition*

$$a \cdot D = \mathsf{L}_a \circ D \tag{A.39}$$

zu einem $\mathcal{A}$*-Linksmodul. Weiter liefert*

$$D \cdot^{(i)} a = D \circ \mathsf{L}^{(i)}_a \tag{A.40}$$

eine $\mathcal{A}$*-Rechtsmodulstruktur, welche mit allen anderen* $\cdot^{(j)}$ *sowie mit* (A.39) *vertauscht. Im allgemeinen gilt* $D \cdot^{(i)} a \neq D \cdot^{(j)} a$ *für* $i \neq j$.

Beweis. Für den ersten Teil dürfen wir $K \geq 0$ annehmen, da die Aussage sonst trivial ist. Wir wollen zunächst

$$\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \subseteq \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K+\mathsf{e}_i}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}) \tag{$*$}$$

zeigen, wobei $i = 1, \ldots, N$. Der allgemeine Fall (A.37) folgt daraus durch sukzessives Anwenden von $(*)$. Sei also $K = 0$ und $D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{0}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ gegeben, womit also $\mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}_a^{(j)} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, N$ gilt. Daher gilt aber auch $\mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}_a^{(j)} \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{\mathsf{e}_i - \mathsf{e}_j}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ für alle $j = 1, \ldots, N$, womit $D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{\mathsf{e}_i}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ folgt. Dies zeigt $(*)$ für $K = 0$. Wir nehmen nun an, daß $(*)$ für alle $K \geq 0$ mit $|K| = 0, \ldots, \kappa - 1$ gültig ist und wollen induktiv auf K mit $|K| = \kappa$ schließen. Sei also $D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ gegeben. Dann gilt $\mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}_a^{(j)} \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K-\mathsf{e}_j}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ und $|K - \mathsf{e}_j| = \kappa - 1$, so daß nach Induktionsannahme $\mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}_a^{(j)} \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K+\mathsf{e}_i-\mathsf{e}_j}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$. Dies impliziert aber $D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K+\mathsf{e}_i}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$, womit $(*)$ induktiv folgt und der erste Teil gezeigt ist. Den zweiten Teil zeigen wir ebenfalls durch Induktion nach $\kappa = |K|$, wobei wir wieder $K \geq 0$ annehmen dürfen. Für $D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{0}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ gilt

$$\mathsf{L}_b \circ (\mathsf{L}_a \circ D) - (\mathsf{L}_a \circ D) \circ \mathsf{L}_b^{(j)} = \mathsf{L}_{ba} \circ D - \mathsf{L}_{ab} \circ D = 0$$

ebenso wie

$$\mathsf{L}_b \circ (D \circ \mathsf{L}_a^{(i)}) - (D \circ \mathsf{L}_a^{(i)}) \circ \mathsf{L}_b^{(j)} = \mathsf{L}_{ba} \circ D - \mathsf{L}_{ab} \circ D = 0,$$

da $\mathcal{A}$ *kommutativ* ist. Damit ist sowohl $\mathsf{L}_a \circ D$ als auch $D \circ \mathsf{L}_a^{(i)}$ für alle $i = 1, \ldots, N$ wieder ein Differentialoperator der Ordnung 0. Sei also die Behauptung für alle $K \geq 0$ mit $|K| = 0, \ldots, \kappa - 1$ richtig, und sei $D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ mit $|K| = \kappa$ gegeben. Dann ist

$$\mathsf{L}_b \circ (\mathsf{L}_a \circ D) - (\mathsf{L}_a \circ D) \circ \mathsf{L}_b^{(j)} = \mathsf{L}_a \circ (\mathsf{L}_b \circ D - D \circ \mathsf{L}_b^{(j)})$$

ein Element in $\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K-\mathsf{e}_j}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$, und

$$\mathsf{L}_b \circ (D \circ \mathsf{L}_a^{(i)}) - (D \circ \mathsf{L}_a^{(i)}) \circ \mathsf{L}_b^{(j)} = (\mathsf{L}_b \circ D - D \circ \mathsf{L}_b^{(j)}) \circ \mathsf{L}_a^{(i)}$$

ist in $\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K-\mathsf{e}_j}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$, da nach $|K - \mathsf{e}_j| = \kappa - 1$ die Induktionsannahme verwendet werden kann. Damit folgt aber auch der zweite Teil durch Induktion, da es klar ist, daß es sich um Modulstrukturen handelt. □

Die Verkettung von Multidifferentialoperatoren liefert wieder Multidifferentialoperatoren, womit auch hier eine Verallgemeinerung von Proposition A.2.4 erreicht ist. Die genaue Bestimmung der resultierenden Ordnung ist jedoch etwas komplizierter:

Proposition A.4.4. *Seien* $\mathcal{E}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_1}^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}_1^{(M)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_M$ *und* $\mathcal{G}$ *Moduln über* $\mathcal{A}$. *Sind*

$$D_i \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K_i}\left(\mathcal{E}_1^{(i)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_i}^{(i)}; \mathcal{F}_i\right) \tag{A.41}$$

und

$$D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{L}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_M; \mathcal{G}) \tag{A.42}$$

gegeben, so gilt

$$D \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M) \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1,\ldots,K_M+L_M)}\left(\mathcal{E}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G}\right), \tag{A.43}$$

wobei $L_i = (\ell_i, \ldots, \ell_i) \in \mathbb{N}_0^{N_i}$ *für alle* $i = 1, \ldots, M$.

Beweis. Offenbar ist die Aussage nur wieder für $K_1, \ldots, K_M, L \geq 0$ von Interesse, womit wir zunächst den Fall $K_1 = \ldots = K_M = L = 0$ betrachten. In diesem Fall ist aber leicht zu sehen, daß $D \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M)$ mit jeder Linksmultiplikation L_a in der richtigen Weise vertauscht, womit (A.43) gilt. Nun betrachten wir $\kappa = |K_1| + \cdots + |K_M| + |L|$ und zeigen (A.43) durch Induktion nach κ. Mit $\mathsf{L}_a^{(i)(j)}$ bezeichnen wir die Linksmultiplikation im $\mathcal{E}_j^{(i)}$-Argument, wobei $i = 1, \ldots, M$ und $j = 1, \ldots, N_i$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\mathsf{L}_a \circ D \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M) - D \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M) \circ \mathsf{L}_a^{(i)(j)} \\
&= \left(\mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}_a^{(i)}\right) \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M) \\
&\quad + D \circ \left(D_1 \otimes \cdots \otimes \left(\mathsf{L}_a \circ D_i - D_i \circ \mathsf{L}_a^{(j)}\right) \otimes \cdots \otimes D_M\right).
\end{aligned}$$

Da $\mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}_a^{(i)} \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{L-\mathsf{e}_i}(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_M; \mathcal{G})$ und $\mathsf{L}_a \circ D_i - D_i \circ \mathsf{L}_a^{(j)} \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{K_i - \mathsf{e}_j}(\mathcal{E}_1^{(i)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_i}^{(i)}; \mathcal{F}_i)$, folgt durch Induktion, daß $\left(\mathsf{L}_a \circ D - D \circ \mathsf{L}_a^{(i)}\right) \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M)$ in $\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1,\ldots,K_i+L_i',\ldots K_M+L_M)}\left(\mathcal{E}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G}\right)$ mit $L_i' = (\ell_i - 1, \ldots, \ell_i - 1)$ ist. Ebenso folgt induktiv, daß die Abbildung $D \circ \left(D_1 \otimes \cdots \otimes \left(\mathsf{L}_a \circ D_i - D_i \circ \mathsf{L}_a^{(j)}\right) \otimes \cdots \otimes D_M\right)$ einen Multidifferentialoperator in $\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1,\ldots,K_i-\mathsf{e}_j+L_i,\ldots,K_M+L_M)}\left(\mathcal{E}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G}\right)$ liefert. Da aber $(K_1 + L_1, \ldots, K_i + L_i', \ldots, K_M + L_M) \leq (K_1 + L_1, \ldots, K_i - \mathsf{e}_j + L_i, \ldots, K_M + L_M)$ gilt, folgt mit der Filtrationseigenschaft (A.37), daß insgesamt $\mathsf{L}_a \circ D \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M) - D \circ (D_1 \otimes \cdots \otimes D_M) \circ \mathsf{L}_a^{(i)(j)}$ ein Element in $\mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{(K_1+L_1,\ldots,K_i-\mathsf{e}_j+L_i,\ldots,K_M+L_M)}\left(\mathcal{E}_1^{(1)}, \ldots, \mathcal{E}_{N_M}^{(M)}; \mathcal{G}\right)$ für alle i und j ist, womit (A.43) folgt. □

Wir diskutieren nun einige Konsequenzen der Propositionen A.4.3 und A.4.4. Häufig betrachten wir die Situation von Differentialoperatoren auf einem festen Modul $\mathcal{E}$. Diese bezeichnen wir dann einfach mit

$$\operatorname{DiffOp}^k_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) = \operatorname{DiffOp}^k_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}; \mathcal{E}), \tag{A.44}$$

und setzen entsprechend

$$\operatorname{DiffOp}^\bullet_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{DiffOp}^k_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathsf{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E}). \tag{A.45}$$

Wir erhalten somit unmittelbar folgende Verallgemeinerung von Proposition A.2.4:

Korollar A.4.5. *Sei* $\mathcal{E}$ *ein* $\mathcal{A}$*-Modul. Dann ist* $\operatorname{DiffOp}^\bullet_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ *eine filtrierte Unteralgebra von* $\mathsf{End}_{\mathbb{k}}(\mathcal{E})$ *mit Einselement* $\mathbb{1} = \mathsf{id}_{\mathcal{E}}$*. Es gilt* $\mathsf{L}_a \in \operatorname{DiffOp}^0_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$*. Ist der Modul nichtausgeartet, so ist* $a \mapsto \mathsf{L}_a$ *ein injektiver Algebramorphismus* $\mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{DiffOp}^0_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$*.*

Hier heißt ein $\mathcal{A}$-Modul *nichtausgeartet*, wenn $a \cdot s = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$ impliziert, daß $s = 0$ gilt. Für Algebren mit Einselement treffen wir die (durchaus vernünftige) Vereinbarung, daß wir nur Moduln $\mathcal{E}$ mit der Eigenschaft $\mathbb{1} \cdot s = s$ betrachten, also $\mathsf{L}_{\mathbb{1}} = \mathsf{id}_{\mathcal{E}}$. Diese sind dann immer nichtausgeartet.

Ein triviales, wenn auch wichtiges Beispiel für einen Bidifferentialoperator ist die Modulmultiplikation selbst:

Beispiel A.4.6. Sei $\mathcal{E}$ ein Modul über $\mathcal{A}$, dann ist die Modulmultiplikation $\mu_{\mathcal{E}} : \mathcal{A} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$$\mu_{\mathcal{E}}(a, s) = a \cdot s \tag{A.46}$$

ein Bidifferentialoperator der Ordnung 0 in beiden Argumenten

$$\mu_{\mathcal{E}} \in \operatorname{DiffOp}^{(0,0)}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{E}; \mathcal{E}). \tag{A.47}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Kommutativität von $\mathcal{A}$. Insbesondere ist die Algebramultiplikation $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein Bidifferentialoperator nullter Ordnung auf $\mathcal{A}$.

Als letzte Konstruktion betrachten wir das Einsetzen von Modulelementen in einen Multidifferentialoperator. Sei $D \in \operatorname{DiffOp}^K_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ gegeben und $s \in \mathcal{E}_\ell$ fest gewählt. Dann definiert man die multilineare Abbildung $\mathrm{i}_\ell(s)D : \mathcal{E}_1 \times \cdots \overset{\ell}{\wedge} \cdots \times \mathcal{E}_N \longrightarrow \mathcal{F}$ mit $N-1$ Argumenten durch

$$(\mathrm{i}_\ell(s)D)(s_1, \ldots, s_{\ell-1}, s_{\ell+1}, \ldots, s_N) = D(s_1, \ldots, s_{\ell-1}, s, s_{\ell+1}, \ldots, s_N), \tag{A.48}$$

wobei $s_i \in \mathcal{E}_i$ für $i \in \{1, \ldots, \ell-1, \ell+1, \ldots, N\}$. Die Abbildung $D \mapsto \mathrm{i}_\ell(s)D$ ist offenbar linear und es gilt

$$\mathsf{L}_a \circ \mathrm{i}_\ell(s) = \mathrm{i}_\ell(s) \circ \mathsf{L}_a \tag{A.49}$$

sowie

$$\mathrm{i}_\ell(s) \circ \mathsf{L}_a^{(i)} = \begin{cases} \mathsf{L}_a^{(i)} \circ \mathrm{i}_\ell(s) & i < \ell \\ \mathrm{i}_\ell(as) & i = \ell \\ \mathsf{L}_a^{(i-1)} \circ \mathrm{i}_\ell(s) & i > \ell \end{cases} \tag{A.50}$$

für alle $a \in \mathcal{A}$. Schließlich gilt $\mathrm{i}_\ell(\alpha s + \beta t) = \alpha\, \mathrm{i}_\ell(s) + \beta\, \mathrm{i}_\ell(t)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ und $s, t \in \mathcal{E}_\ell$. Die Einsetzungen an verschiedenen Stellen vertauschen.

Folgende Proposition zeigt, daß $\mathrm{i}_\ell(s)D$ wieder ein Multidifferentialoperator ist, was man mit dem üblichen Induktionsbeweis über die totale Ordnung $|K|$ leicht zeigt. Wir verzichten daher auf einen Beweis:

Proposition A.4.7. *Sei $D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^K(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F})$ und $s \in \mathcal{E}_\ell$. Dann gilt*

$$\mathrm{i}_\ell(s)D \in \mathrm{DiffOp}_{\mathcal{A}}^{\hat{K}}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{\ell-1}, \mathcal{E}_{\ell+1}, \ldots, \mathcal{E}_N; \mathcal{F}), \tag{A.51}$$

wobei $\hat{K} = (k_1, \ldots, k_{\ell-1}, k_{\ell+1}, \ldots, k_N) \in \mathbb{Z}^{N-1}$.

Das einfache Beispiel A.4.6 sowie Proposition A.4.7 besitzen eine interessante und nichttriviale Anwendung, welche unsere Überlegungen zur differentiellen Hochschild-Kohomologie aus Abschnitt 6.2.5 für beliebige kommutative Algebren verallgemeinert:

Satz A.4.8 (Differentielle Hochschild-Kohomologie). *Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative und kommutative $\mathbb{k}$-Algebra mit Einselement $\mathbb{1}$.*

i.) Der differentielle Hochschild-Komplex

$$C^\bullet_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} C^k_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A}) \subseteq C^\bullet(\mathcal{A}) \tag{A.52}$$

mit

$$C^k_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A}) = \mathrm{DiffOp}^\bullet_{\mathcal{A}}\big(\underbrace{\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}}_{k\text{-mal}}; \mathcal{A}\big) \tag{A.53}$$

ist bezüglich des Gerstenhaber-Produkts $\circ$, der Gerstenhaber-Klammer $[\cdot, \cdot]$, des cup-Produkts $\cup$ und des Hochschild-Differentials δ abgeschlossen. Damit ist $C^\bullet_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A})$ insbesondere ein Unterkomplex von $C^\bullet(\mathcal{A})$.

ii.) Die differentielle Hochschild-Kohomologie

$$\mathrm{HH}^\bullet_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A}) = \frac{\ker\left(\delta\big|_{C^\bullet_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A})}\right)}{\operatorname{im}\left(\delta\big|_{C^{\bullet-1}_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A})}\right)} \tag{A.54}$$

wird auf natürliche Weise mit der Gerstenhaber-Klammer und dem cup-Produkt zu einer Gerstenhaber-Algebra.

iii.) Es gilt kanonisch

$$\mathrm{HH}^0_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A}) = \mathrm{HH}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \tag{A.55}$$

und

$$\mathrm{HH}^1_{\mathrm{diff}}(\mathcal{A}) = \mathrm{HH}^1(\mathcal{A}) = \mathsf{Der}(\mathcal{A}). \tag{A.56}$$

Beweis. Da die Gerstenhaber-Produkte $\circ_i$ aus Linearkombinationen von „Ineinandersteckungen" gebildet werden, folgt der erste Teil unmittelbar aus den Propositionen A.4.4 und A.4.7 sowie Beispiel A.4.6 zusammen mit der Tatsache, daß $\circ$, $[\cdot,\cdot]$, $\cup$, δ auf die elementaren Operationen $\circ_i$ zurückgeführt werden können. Der zweite Teil folgt analog zu Satz 6.2.18, da der Beweis ebenfalls rein kombinatorischer Natur ist und nur die elementaren Operationen $\circ_i$ verwendet. Der dritte Teil ist schließlich eine einfache Konsequenz aus Bemerkung A.2.6 und der Annahme, daß $\mathcal{A}$ kommutativ ist, womit alle Derivationen äußere sind. □

A.5 Multidifferentialoperatoren auf Schnitten von Vektorbündeln

Wir wollen nun die algebraischen Resultate zu Multidifferentialoperatoren in die Differentialgeometrie übertragen. Hierbei stellt sich zunächst die Frage, welche Moduln man betrachten möchte. Auch wenn es nicht der einzige interessante Fall ist, werden wir uns auf die Schnitte $\Gamma^\infty(E)$ von Vektorbündeln $E \longrightarrow M$ beschränken. Diese stellen eine große Klasse von Moduln über $C^\infty(M)$ dar, wie wir in Abschnitt 2.2 gesehen haben.

Seien also $\pi_j : E_j \longrightarrow M$ mit $j = 1, \ldots, N$ und $\pi_F : F \longrightarrow M$ Vektorbündel über M, welche entweder reell oder komplex sein mögen, je nach dem, ob wir reell- oder komplexwertige Funktionen $C^\infty(M)$ betrachten. Um die Notation nicht unnötig zu erschweren, schreiben wir für $K \in \mathbb{Z}^N$ kurz

$$\mathrm{DiffOp}^K_M(E_1, \ldots, E_N; F) = \mathrm{DiffOp}^K_{C^\infty(M)}\left(\Gamma^\infty(E_1), \ldots, \Gamma^\infty(E_N); \Gamma^\infty(F)\right). \tag{A.57}$$

Als erstes Ergebnis erhalten wir die Lokalität und Lokalisierbarkeit von Multidifferentialoperatoren. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq M$ können Schnitte $s \in \Gamma^\infty(E)$ eingeschränkt werden und liefern Schnitte $s\big|_U \in \Gamma^\infty(E\big|_U)$. Man beachte jedoch, daß typischerweise *nicht* jeder Schnitt von $E\big|_U$ eine solche Einschränkung ist: ein gegebener Schnitt $s \in \Gamma^\infty(E\big|_U)$ kann im allgemeinen *nicht* zu einem Schnitt von E fortgesetzt werden. Diese Problematik haben wir für Funktionen ja bereits gesehen.

Satz A.5.1 (Lokalität von Multidifferentialoperatoren). *Seien $E_j \longrightarrow M$ mit $j = 1, \ldots, N$ und $F \longrightarrow M$ Vektorbündel über M.*

i.) Sei $D : \Gamma^\infty(E_1) \times \cdots \times \Gamma^\infty(E_N) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ eine multilineare Abbildung. Ist D lokal im Sinne, daß

$$\operatorname{supp} D(s_1, \ldots, s_N) \subseteq \operatorname{supp} s_1 \cap \cdots \cap \operatorname{supp} s_N \tag{A.58}$$

für alle $s_j \in \Gamma^\infty(E_j)$ mit $j = 1, \ldots, N$, so gibt es für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ eindeutig bestimmte multilineare Abbildungen $D_U : \Gamma^\infty(E_1\big|_U) \times \cdots \times \Gamma^\infty(E_N\big|_U) \longrightarrow \Gamma^\infty(F\big|_U)$ mit $D_M = D$ und

$$D_U(s_1, \ldots, s_N)\big|_V = D_V(s_1\big|_V, \ldots, s_N\big|_V) \tag{A.59}$$

für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U$ *und* $s_j \in \Gamma^\infty(E_j\big|_U)$.

ii.) Ist $D \in \mathrm{DiffOp}_M^K(E_1, \ldots, E_N; F)$*, so ist* D *lokal.*

iii.) $D \in \mathrm{DiffOp}_M^0(E_1, \ldots, E_N; F)$ *läßt sich kanonisch als ein Tensorfeld in* $\Gamma^\infty(E_1^* \otimes \cdots \otimes E_N^* \otimes F)$ *auffassen.*

iv.) Ist $D \in \mathrm{DiffOp}_M^K(E_1, \ldots, E_N; F)$*, so gilt für alle offenen Teilmengen* U

$$D_U \in \mathrm{DiffOp}_U^K(E_1\big|_U, \ldots, E_N\big|_U; F\big|_U). \tag{A.60}$$

Beweis. Der erste Teil folgt im wesentlichen dem Beweis von Proposition A.3.3. Die Eindeutigkeit läßt sich wieder wie in Proposition A.3.3 mit Hilfe einer Abschneidefunktion zeigen: Für eine offene Teilmenge $U \subseteq M$ und $s_j \in \Gamma^\infty(E_j\big|_U)$ betrachten wir eine offene Teilmenge $O \subseteq U$ mit $O^{\mathrm{cl}} \subseteq U$ und eine Abschneidefunktion $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}\chi \subseteq U$ und $\chi\big|_{O^{\mathrm{cl}}} = 1$. Dann definiert man

$$D_U(s_1, \ldots, s_N)\big|_O = D(\chi s_1, \ldots, \chi s_N)\big|_O.$$

Ist $\tilde{O}$ und $\tilde{\chi}$ eine andere Wahl, so gilt $(\chi - \tilde{\chi})\big|_{O\cap\tilde{O}} = 0$, womit aufgrund der Lokalität und Multilinearität

$$\begin{aligned} D(\chi s_1, \ldots, \chi s_N)\big|_{O\cap\tilde{O}} &= D(\chi s_1, \ldots, \chi s_{N-1}, \tilde{\chi} s_N)\big|_{O\cap\tilde{O}} \\ &= \cdots = D(\tilde{\chi} s_1, \ldots, \tilde{\chi} s_N)\big|_{O\cap\tilde{O}} \end{aligned}$$

folgt, was die Wohl-Definiertheit von D_U liefert. Analog zeigt man auch, daß die Eigenschaft (A.59) gilt. Seien nun für den zweiten Teil $s_j \in \Gamma^\infty(E_j)$ mit $j = 1, \ldots, N$ vorgegeben und $p \notin \operatorname{supp} s_{j_0}$. Dann wählt man $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\chi\big|_{\operatorname{supp} s_{j_0}} = 1$ und $\chi(p) = 0$ und findet für $D \in \mathrm{DiffOp}_M^0(E_1, \ldots, E_N; F)$, daß

$$D(s_1, \ldots s_N)(p) = D(s_1, \ldots, \chi s_{j_0}, \ldots, s_N)(p) = \chi(p) D(s_1, \ldots, s_N)(p) = 0,$$

womit (A.58) für $K = 0$ folgt. Danach läuft die Induktion über $|K|$ wie in Lemma A.3.2. Im dritten Teil geht es also darum, den Beweis von Satz 2.2.24 nachzuholen, da die Multidifferentialoperatoren $\mathrm{DiffOp}_M^0(E_1, \ldots, E_N; F)$ nullter Ordnung gerade die $C^\infty(M)$-multilinearen Abbildungen sind. Seien dazu $v_j \in E_j\big|_p$ vorgegeben. Dann definieren wir

$$\tilde{D}_p(v_1, \ldots, v_N) = D(s_1, \ldots, s_N)(p),$$

wobei wir Schnitte $s_j \in \Gamma^\infty(E_j)$ mit $s_j(p) = v_j$ wählen, was immer möglich ist, wie man mit Hilfe einer lokalen Trivialisierung und einer entsprechenden Abschneidefunktion leicht einsieht. Wir müssen nun zeigen, daß $\tilde{D}_p$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Schnitte s_j sondern nur von den Werten $v_j = s_j(p)$ bei p abhängt. Da D multilinear ist, genügt es, zu zeigen, daß mit $v_j = 0$ auch $\tilde{D}_p(v_1, \ldots, v_N)$ verschwindet. Sei also $s_j(p) = 0$ für ein j. Man kann nun um p eine Bündelkarte mit lokalen Basisschnitten $e_{j,\alpha} \in$

$\Gamma^\infty(E_j\big|_U)$ wählen, so daß $s_j\big|_U = s_j^\alpha e_{j,\alpha}$ mit eindeutig bestimmten Funktionen $s_j^\alpha \in C^\infty(U)$ gilt. Insbesondere folgt mit $s_j(p) = 0$ auch $s_j^\alpha(p) = 0$ für alle α. Wir wählen nun eine glatte Funktion $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}\chi \subseteq U$ und $\chi(p) = 1$. Dann sind die Funktionen χs_j^α auf ganz M als glatte Funktionen definiert, und entsprechend ist auch $\chi e_{j,\alpha} \in \Gamma^\infty(E_j)$ global definiert und glatt. Weiter gilt $\chi^2 s_j = (\chi s_j^\alpha)(\chi e_{j,\alpha})$. Mit der $C^\infty(M)$-Multilinearität gilt nun

$$
\begin{aligned}
D(s_1, \ldots, s_N)(p) &= \chi^2(p) D(s_1, \ldots, s_N)(p) \\
&= D(s_1, \ldots, \chi^2 s_j, \ldots, s_N)(p) \\
&= D(s_1, \ldots, (\chi s_j^\alpha)(\chi e_{j,\alpha}), \ldots, s_N)(p) \\
&= (\chi s_j^\alpha)(p) D(s_1, \ldots, (\chi e_{j,\alpha}), \ldots, s_N)(p) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt aber, daß $\tilde{D}$ tatsächlich ein wohl-definiertes Tensorfeld vom angegebenen Typ ist. Für $K = 0$ ist der vierte Teil klar, da die Einschränkung von D durch die entsprechende Einschränkung des Tensorfeldes $\tilde{D}$ gegeben ist und daher wieder von der Ordnung 0 ist. Der Beweis für $K \geq 0$ folgt nun wörtlich dem von Proposition A.3.3, wobei wir nun einen Induktionsbeweis über $|K|$ führen. □

Wir wollen nun wieder die lokale Gestalt von Multidifferentialoperatoren bestimmen. Hierzu müssen wir aber, anders als im Fall von (Multi-) Differentialoperatoren auf Funktionen, auch lokale Darstellungen der Schnitte wählen, da auf intrinsische Weise *keine* partielle Ableitung eines Schnittes wohl-definiert ist: man kann nur die Koeffizientenfunktionen bezüglich lokaler Basisschnitte partiell in Koordinatenrichtung differenzieren. Abgesehen von diesem neuen Aspekt verläuft der Beweis des folgenden Satzes analog zu dem von Satz A.3.5.

Satz A.5.2 (Lokale Form von Multidifferentialoperatoren). *Sei $D \in \mathrm{DiffOp}_M^K(E_1, \ldots, E_N; F)$. Sei weiter eine lokale Karte (U, x) von M gegeben sowie lokale, auf U definierte Basisschnitte $\{e_{j,\alpha}\}_\alpha$ von E_j für $j = 1, \ldots, N$ mit den zugehörigen dualen lokalen Basisschnitten $\{e_j^\alpha\}_\alpha$ von E_j^*.*

i.) Dann gibt es eindeutig bestimmte lokale Schnitte $D_{U\,\alpha_1,\ldots,\alpha_N}^{R\,I_1,\ldots,I_N} \in \Gamma^\infty\left(F\big|_U\right)$, welche in jeder Indexgruppe $I_j = (i_1^{(j)}, \ldots, i_{r_j}^{(j)})$ total symmetrisch sind, so daß

$$
D_U(s_1, \ldots, s_N) = \sum_{0 \leq R \leq K} \frac{1}{R!} \sum_{I_1, \ldots, I_N} D_{U\,\alpha_1,\ldots,\alpha_N}^{R\,I_1,\ldots,I_N} \frac{\partial^{r_1} s_1^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1^{(1)}} \cdots \partial x^{i_{r_1}^{(1)}}} \cdots \frac{\partial^{r_N} s_N^{\alpha_N}}{\partial x^{i_1^{(N)}} \cdots \partial x^{i_{r_N}^{(N)}}} \tag{A.61}
$$

für alle lokalen Schnitte $s_j \in \Gamma^\infty\left(E_j\big|_U\right)$, wobei $s_j = s_j^\alpha e_{j,\alpha}$ die lokale Basisdarstellung der s_j bezeichnet.

ii.) Für $R = K$ definieren die lokalen Schnitte $D^{K\,I_1,\ldots,I_N}_{U\,\alpha_1,\ldots,\alpha_N}$ ein globales Tensorfeld, das führende Symbol

$$\sigma_K(D) \in \Gamma^\infty\left(\mathrm{S}^{k_1}TM \otimes \cdots \otimes \mathrm{S}^{k_N}TM \otimes E_1^* \otimes \cdots \otimes E_N^* \otimes F\right) \tag{A.62}$$

durch

$$\sigma_K(D)\big|_U = \frac{1}{K!}\partial_{I_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{I_N} \otimes e_1^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_N^{\alpha_N} \otimes D^{K\,I_1,\ldots,I_N}_{U\,\alpha_1,\ldots,\alpha_N}, \tag{A.63}$$

wobei über alle auftretenden Koordinaten- und Basisindizes summiert wird und

$$\partial_{I_j} = \frac{\partial}{\partial x^{i_1^{(j)}}} \vee \cdots \vee \frac{\partial}{\partial x^{i_{k_j}^{(j)}}}. \tag{A.64}$$

Beweis. Für $K = 0$ ist dies gerade die lokale Darstellung des Tensorfeldes aus Satz A.5.1, so daß wir $K \geq 0$ annehmen können. Auch wenn die Buchhaltung etwas schwieriger geworden ist, folgt der Beweis doch im wesentlichen dem von Satz A.3.5. Ohne Einschränkung betrachten wir wieder zunächst einen konvexen Bildbereich $x(U)$ der Karte. Weiter wählen wir x_0 fest und schreiben die Koeffizientenfunktionen in der Form

$$s_j^\alpha(x) = s_j^\alpha(x_0) + (x^i - x_0^i)g_{j,i}^\alpha(x)$$

mit $g_{j,i}^\alpha \in C^\infty(U)$ für alle $j = 1, \ldots, N$, so daß

$$\frac{\partial^r g_{j,i}^\alpha}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r}}(x_0) = \frac{1}{r+1}\frac{\partial^{r+1} s_j^\alpha}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_r}\partial x^i}(x_0), \tag{$*$}$$

was nach Hadamards Trick gelingt. Mit der üblichen Induktionsannahme für die Induktion nach $|K|$ sind die Operatoren

$$S_j^i = D_U \circ \mathsf{L}^{(j)}_{x^i - x_0^i} - \mathsf{L}_{x^i - x_0^i} \circ D_U = D_U \circ \mathsf{L}^{(j)}_{x^i} - \mathsf{L}_{x^i} \circ D_U$$

von der gewünschten Form. Man beachte, daß die Linksmultiplikation mit der *Konstanten* x_0^i mit D vertauscht, während die Linksmultiplikation mit der *Koordinatenfunktion* x^i dies natürlich im allgemeinen nicht tut. Es gilt also

$$\begin{aligned} &S_j^i(s_1, \ldots, s_N) \\ &\quad= \sum_{0 \leq R \leq K - \mathsf{e}_j} \frac{1}{R!} \sum_{I_1,\ldots,I_N} S_j^{iR\,I_1,\ldots,I_N}{}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} \frac{\partial^{r_1} s_1^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1^{(1)}} \cdots \partial x^{i_{r_1}^{(1)}}} \cdots \frac{\partial^{r_N} s_N^{\alpha_N}}{\partial x^{i_1^{(N)}} \cdots \partial x^{i_{r_N}^{(N)}}} \end{aligned}$$

mit entsprechenden lokalen Schnitten $S_j^{iR\,I_1,\ldots,I_N}{}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} \in \Gamma^\infty\left(F\big|_U\right)$. Wir berechnen nun $D_U(s_1, \ldots, s_N)$ am Punkte $x = x_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} D_U(s_1, \ldots, s_N)(x_0) &= D_U\left(\left(s_1^\alpha(x_0) + g_{1,i}^\alpha(x^i - x_0^i)\right)e_{1,\alpha}, s_2, \ldots, s_N\right)(x_0) \\ &= s_1^\alpha(x_0)D(e_{1,\alpha}, s_2, \ldots, s_N)(x_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \left(D_U \circ \mathsf{L}^{(1)}_{x^i} - \mathsf{L}^{(1)}_{x^i - x^i_0} \circ D_U \right) \left(g^{\alpha}_{1,i} e_{1,\alpha}, s_2, \ldots, s_N \right)(x_0) \\
&\quad + \left(\mathsf{L}_{x^i - x^i_0} \circ D_U \right) \left(g^{\alpha}_{1,i} e_{1,\alpha}, s_2, \ldots, s_N \right)(x_0) \\
&= s^{\alpha}_1(x_0) D_U(e_{1,\alpha}, s_2, \ldots, s_N)(x_0) \\
&\quad + S^i_1 \left(g^{\alpha}_{1,i} e_{1,\alpha}, s_2, \ldots, s_N \right)(x_0),
\end{aligned}
$$

da $x^i - x^i_0$ bei $x = x_0$ verschwindet. Iterativ erhält man also

$$
\begin{aligned}
D_U(s_1, \ldots, s_N)(x_0) = \sum_{j=1}^{N} & s^{\alpha_1}_1(x_0) \cdots s^{\alpha_{j-1}}_{j-1}(x_0) \\
& \times S^i_j \left(e_{1,\alpha_1}, \ldots, e_{j-1,\alpha_{j-1}}, g^{\alpha_j}_{ji} e_{j,\alpha_j}, s_{j+1}, \ldots, s_N \right)(x_0) \\
& + s^{\alpha_1}_1(x_0) \cdots s^{\alpha_N}_N(x_0) D_U\left(e_{1,\alpha_1}, \ldots, e_{N,\alpha_N} \right)(x_0).
\end{aligned}
$$

Einsetzen der lokalen Form der S^i_j und Berücksichtigung von $(*)$ liefert dann die gewünschte Form des Operators D_U am Punkt x_0. Da aber die S^i_j nicht von der Wahl des Punktes x_0 abhingen, gilt die Darstellung für alle $x_0 \in U$, womit der Beweis von (A.61) erbracht ist. Das zeigt den ersten Teil durch Induktion nach $|K|$. Der zweite besteht im Nachrechnen, daß sich die Koeffizientenfunktionen für $R = K$ tatsächlich auf die gewünschte Weise transformieren: Mit Lemma 5.4.4 sowie dem bekannten Transformationsverhalten der Koeffizientenfunktionen s^{α} unter Wechsel der Basisschnitte e_{α} ist dies aber eine einfache Rechnung. □

Bemerkung A.5.3. Analog zu Proposition A.3.6 erhält man auch die „Umkehrung“ dieses Satzes: eine Abbildung D, welche in einem Atlas bezüglich einer Wahl von lokalen Basisschnitten lokal durch (A.61) beschrieben werden kann, ist ein Multidifferentialoperator der entsprechenden Ordnung. Der Beweis verläuft hier, abgesehen vom etwas größeren buchhalterischen Aufwand, analog zu Proposition A.3.6, so daß wir auf eine detaillierte Ausführung verzichten.

Wir kommen zum Abschluß nun zu einigen Beispielen, welche an verschiedenen Stellen bereits zur Anwendung kamen:

Beispiel A.5.4 (Äußere Ableitung). Die äußere Ableitung $\mathrm{d} : \Omega^{\bullet}(M) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$ ist ein Differentialoperator erster Ordnung. Dies folgt unmittelbar aus der Leibniz-Regel

$$
\mathrm{d}(f\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\mathrm{d}\alpha \tag{A.65}
$$

für $f \in C^{\infty}(M)$ und $\alpha \in \Omega^{\bullet}(M)$. Damit ist letztlich auch die Vorgehensweise im Beweis von Satz 2.3.14 gerechtfertigt, d in lokalen Koordinaten zu bestimmen. Ebenso sind die Operatoren ∂ und $\overline{\partial}$ auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit Differentialoperatoren der Ordnung 1.

Beispiel A.5.5 (Schouten-Nijenhuis-Klammer). Mit Hilfe der Leibniz-Regel zeigt man analog, daß die Schouten-Nijenhuis-Klammer ein Bidifferentialoperator der Ordnung $(1,1)$ ist, also

$$[\![\cdot,\cdot]\!] \in \mathrm{DiffOp}_M^{(1,1)}\left(\Lambda^\bullet TM, \Lambda^\bullet TM; \Lambda^\bullet TM\right). \tag{A.66}$$

Insbesondere ist die Lie-Klammer von Vektorfeldern ein Bidifferentialoperator der Ordnung $(1,1)$.

Beispiel A.5.6 (Kovariante Ableitung und Krümmung). Ist $E \longrightarrow M$ ein Vektorbündel, so ist eine kovariante Ableitung $\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(E)$ ein Bidifferentialoperator der Ordnung $(0,1)$, also in unserer Notation

$$\nabla \in \mathrm{DiffOp}_M^{(0,1)}(TM, E; E). \tag{A.67}$$

Dies folgt wieder unmittelbar aus der Funktionenlinearität im ersten und der Leibniz-Regel im zweiten Argument gemäß Definition 2.2.25. Entsprechend liefert Satz A.5.2 die Rechtfertigung dafür, daß ∇ auf lokalen Basisschnitten ausgewertet werden darf und so durch die lokalen Zusammenhangseinsformen festgelegt wird.

Interessant ist nun der Krümmungstensor $R(X,Y)s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s$, welcher durch naives Abzählen der Differentiationsordnungen gemäß Proposition A.4.4 sowie mit Beispiel A.5.5 ein Tridifferentialoperator $R \in \mathrm{DiffOp}_M^{(1,1,2)}(TM, TM, E; E)$ ist. Hier sieht man, daß beim Bilden geeigneter Linearkombinationen der tatsächliche Differentiationsgrad niedriger ausfallen kann, als Proposition A.4.4 dies zunächst liefert: Es gilt ja aufgrund der jeweiligen Leibniz-Regeln für ∇ und die Lie-Klammer, daß R *tensoriell* in jedem Argument, also ein Tridifferentialoperator der Ordnung $(0,0,0)$ ist.

Die Potenzen der symmetrisierten kovarianten Ableitung D wie in Definition 5.4.1 liefern für $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ schließlich Differentialoperatoren

$$\mathsf{D}^k \in \mathrm{DiffOp}_M^k(\mathrm{S}^\ell T^*M; \mathrm{S}^{\ell+k}T^*M). \tag{A.68}$$

Beispiel A.5.7 (Poisson-Klammer und Jacobiator). Schließlich zeigt man erneut unter Verwendung der Leibniz-Regel, daß die Poisson-Klammer ein Bidifferentialoperator der Ordnung $(1,1)$ ist. Für ein beliebiges Bivektorfeld π ist dann der Jacobiator J_π gemäß (4.6) ein Tridifferentialoperator der Ordnung $(1,1,1)$, was ebenfalls aus der Leibniz-Regel für J_π folgt.

Kommentiertes Literaturverzeichnis

Literatur zu Kapitel 1

1.1 Honerkamp, J., Römer, H.: *Klassische Theoretische Physik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.
Schönes Lehrbuch zur theoretischen Physik, insbesondere Kapitel 2 und 3 als Hintergrundwissen zur klassischen Mechanik.

Literatur zu Kapitel 2

2.1 Bröcker, T., Jänich, K.: *Einführung in die Differentialtopologie*, Band 143 in *Heidelberger Taschenbücher*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990. Korrigierter Nachdruck.
Hier finden sich weiterführende differentialtopologische Resultate mit detaillierten Beweisen.

2.2 Jänich, K.: *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 4. Auflage, 2003.
Sehr schöne und pädagogische Einführung in die Differentialgeometrie, insbesondere weitere Details zur Integrationstheorie.

2.3 Lang, S.: *Fundamentals of Differential Geometry*, Band 191 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
Einer der Klassiker. Sehr viel Hintergrundinformation, insbesondere auch zur Riemannschen Geometrie.

2.4 Michor, P.: *Topics in Differential Geometry*. Schrödinger Institute, Wien, 2001, erhältlich auf der homepage `www.mat.univie.ac.at/~michor/`.
Dieses Skriptum war an vielen Stellen Vorlage und Inspiration. Uneingeschränkt empfehlenswert.

2.5 Querenburg, B. v.: *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 2001.

Sehr ausführliche Darstellung der mengentheoretischen Topologie, zum Nachschlagen einzelner Begriffe.

2.6 Wells, R. O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Band 65 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1980.
Weiterführende Resultate zu komplexen Mannigfaltigkeiten und Kähler-Geometrie.

Literatur zu Kapitel 3

3.1 Abraham, R., Marsden, J. E.: *Foundations of Mechanics.* Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 2. Auflage, 1985.
Sicherlich nach wie vor das Standardwerk in der geometrischen Mechanik. Sehr umfangreich und auch nicht ganz einfach.

3.2 Arnol'd, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Band 60 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.
Einer der Klassiker zur klassischen Mechanik, insbesondere auch weiterführenden Resultate zur Dynamik und Störungstheorie.

3.3 Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C.: *Lie Groups.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
Sehr moderne Darstellung der Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Wirkungen, allerdings kein Anfängerbuch.

3.4 Guillemin, V., Sternberg, S.: *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1984.
Ebenfalls ein Klassiker. Bietet insbesondere auch Anwendungen der symplektischen Geometrie jenseits der klassischen Mechanik.

3.5 Hall, B. C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Band 222 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
Schöne Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Darstellungstheorie, bezieht sich hauptsächlich auf Matrix-Lie-Gruppen.

3.6 Marsden, J. E., Ratiu, T. S.: *Einführung in die Mechanik und Symmetrie.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 2000.
Schöne Darstellung der geometrischen Mechanik mit vielen weiterführenden Beispielen.

3.7 Meinrenken, E.: *Symplectic Geometry.* Department of Mathematics, University of Toronto, 2000. Vorlesungsskriptum, erhältlich auf der homepage `www.math.toronto.edu/~mein/`.
Weiterführende Resultate zur symplektischen Geometrie. Zum Teil sehr elegante Beweise, aber nicht ganz einfach.

3.8 Ortega, J.-P., Ratiu, T. S.: *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*, Band 222 in *Progress in Mathematics.* Birkhäuser, Boston, 2004.
Weiterführende Literatur zur Phasenraumreduktion, kein Anfängerbuch.

Literatur zu Kapitel 4

4.1 Cannas da Silva, A., Weinstein, A.: *Geometric Models for Noncommutative Algebras. Berkeley Mathematics Lecture Notes.* AMS, 1999.
Verschiedene Aspekte der Poisson-Geometrie und auch der Lie-Algebroidtheorie werden im Lichte der nichtkommutativen Geometrie diskutiert. Enthält auch eine kurze Einführung in die Deformationsquantisierung.

4.2 Dufour, J.-P., Zung, N. T.: *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Band 242 in *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, New York, 2005.
Fachmonographie zur Poisson-Geometrie mit Schwerpunkt auf den verschiedenen Normalformen.

4.3 Mackenzie, K. C. H.: *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Band 213 in *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.
Grundlegendes zur Theorie der Lie-Gruppoide und Lie-Algebroide.

4.4 Vaisman, I.: *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994.
Der Klassiker zur Poisson-Geometrie, enthält auch kurze Bemerkungen zur Deformationsquantisierung.

Literatur zu Kapitel 5

5.1 Bates, S., Weinstein, A.: *Lectures on the Geometry of Quantization.* Berkeley Mathematics Lecture Notes 8, Berkeley, 1995.
Diverse geometrische Aspekte zur Quantisierung ausgehend von der WKB-Entwicklung.

5.2 Dirac, P. A. M.: *Lectures on Quantum Mechanics.* Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
Einer der Klassiker zur Quantisierungstheorie in Gegenwart von *constraints.*

5.3 Landsman, N. P.: *Mathematical Topics between Classical and Quantum Mechanics. Springer Monographs in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
Sehr detaillierte und schöne Diskussion des Quantisierungsproblems, insbesondere der funktionalanalytischen Aspekte. Setzt einiges an Kenntnissen zu Operatoralgebren voraus.

5.4 Thirring, W.: *Quantum Mathematical Physics. Atoms, Molecules and Large Systems.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2002.
Grundlagen der Quantentheorie mit Schwerpunkt auf den funktionalanalytischen Aspekten.

5.5 Woodhouse, N. M. J.: *Geometric Quantization.* Clarendon Press, Oxford, 1992.
Ein Standardwerk zur geometrischen Quantisierung.

Literatur zu Kapitel 6

6.1 Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory and Quantization.* Ann. Phys. **111** (1978), 61–151.
Die grundlegenden Definitionen und erste Resultate zu Sternprodukten. Schon aus historischen Gründen sollte dieser Artikel gelesen werden.

6.2 Fedosov, B. V.: *Deformation Quantization and Index Theory.* Akademie Verlag, Berlin, 1996.
Die Konstruktion von Fedosov sowie der Beweis seines Index-Theorems, setzt allerdings einiges voraus.

6.3 Weinstein, A.: *Deformation Quantization.* Astérisque .227 (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
Schöner, wenn auch etwas älterer Übersichtsartikel.

Literatur zu Kapitel 7

7.1 Bratteli, O., Robinson, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I: C^*- and W^*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1987.
Grundlagen der Theorie der Operatoralgebren mit Anwendungen in der Quantentheorie, zum Nachschlagen.

7.2 Schmüdgen, K.: *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*, Band 37 in *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990.
Fachmonographie zu Algebren von unbeschränkten Operatoren, bietet Hintergrundwissen und Motivation für die Darstellungstheorie. Kein Anfängerbuch.

7.3 Waldmann, S.: *States and Representation Theory in Deformation Quantization.* Rev. Math. Phys. **17** (2005), 15–75.
Ein Übersichtsartikel zur Darstellungstheorie mit Schwerpunkt Morita-Theorie.

Literaturverzeichnis

1. ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E.: *Foundations of Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 2. Auflage, 1985.
2. AGARWAL, G. S., WOLF, E.: *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics. I. Mapping Theorems and Ordering of Functions of Noncommuting Operators*. Phys. Rev. D **2**.10 (1970), 2161–2186.
3. AGARWAL, G. S., WOLF, E.: *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics II*. Phys. Rev. D **2** (1970), 2187–2205.
4. AGARWAL, G. S., WOLF, E.: *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics III*. Phys. Rev. D **2**.10 (1970), 2206–2225.
5. AHARONOV, Y., BOHM, D.: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Phys. Rev. **115**.3 (1959), 485–491.
6. AIZENMAN, M., GALLAVOTTI, G., GOLDSTEIN, S., LEBOWITZ, J. L.: *Stability and Equilibrium States of Infinite Classical Systems*. Commun. Math. Phys. **48** (1976), 1–14.
7. ALI, S. T., ENGLIŠ, M.: *Quantization Methods; A guide for Physicists and Analysts*. Rev. Math. Phys. **17**.4 (2005), 391–490.
8. ARNAL, D., CAHEN, M., GUTT, S.: *$\star$-exponential and holomorphic discrete series*. Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **41**.2 (1989), 207–227.
9. ARNAL, D., CORTET, J. C., MOLIN, P., PINCZON, G.: *Covariance and Geometrical Invariance in $*$-Quantization*. J. Math. Phys. **24**.2 (1983), 276–283.
10. ARNAL, D., MANCHON, D., MASMOUDI, M.: *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*. Pacific. J. Math. **203** (2002), 23–66.
11. ARNOL'D, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Band 60 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.
12. BARGMANN, V.: *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform, Part I*. Comm. Pure Appl. Math **14** (1961), 187–214.
13. BARGMANN, V.: *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform, Part II. A Family of Related Function Spaces Application to Distribution Theory*. Comm. Pure Appl. Math **20** (1967), 1–101.

14. Basart, H., Flato, M., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory applied to Quantization and Statistical Mechanics.* Lett. Math. Phys. **8** (1984), 483–494.
15. Basart, H., Lichnerowicz, A.: *Conformal Symplectic Geometry, Deformations, Rigidity and Geometrical (KMS) Conditions.* Lett. Math. Phys. **10** (1985), 167–177.
16. Bates, S., Weinstein, A.: *Lectures on the Geometry of Quantization.* Berkeley Mathematics Lecture Notes 8, Berkeley, 1995.
17. Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics.* Lett. Math. Phys. **1** (1977), 521–530.
18. Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory and Quantization.* Ann. Phys. **111** (1978), 61–151.
19. Becher, F.: *Sternprodukte auf Kotangentenbündeln.* Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik, Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2006. `http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~flo/`.
20. Beiser, S.: *Eine konvergente Algebra für das Wick-Sternprodukt und kohärente Zustände in der Deformationsquantisierung.* Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik, Physikalisches Institut, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2005.
21. Beiser, S., Römer, H., Waldmann, S.: *Convergence of the Wick Star Product.* Commun. Math. Phys. **272** (2007), 25–52.
22. Berezin, F. A.: *General Concept of Quantization.* Commun. Math. Phys. **40** (1975), 153–174.
23. Berezin, F. A.: *Quantization.* Math. USSR Izvestija **8**.5 (1975), 1109–1165.
24. Berezin, F. A.: *Quantization in Complex Symmetric Spaces.* Math. USSR Izvestija **9**.2 (1975), 341–379.
25. Berezin, F. A., Marinov, M. S.: *Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics.* Ann. Phys. **104** (1977), 336–362.
26. Bertelson, M., Bieliavsky, P., Gutt, S.: *Parametrizing Equivalence Classes of Invariant Star Products.* Lett. Math. Phys. **46** (1998), 339–345.
27. Bertelson, M., Cahen, M., Gutt, S.: *Equivalence of Star Products.* Class. Quant. Grav. **14** (1997), A93–A107.
28. Bieliavsky, P.: *Strict Quantization of Solvable Symmetric Spaces.* J. of Symplectic Geometry **1**.2 (2002), 269–320.
29. Bieliavsky, P., Bonneau, P.: *On the geometry of the characteristic class of a star product on a symplectic manifold.* Rev. Math. Phys. **15** (2003), 199–215.
30. Bieliavsky, P., Bordemann, M., Gutt, S., Waldmann, S.: *Traces for star products on the dual of a Lie algebra.* Rev. Math. Phys. **15**.5 (2003), 425–445.
31. Bieliavsky, P., Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J., Schachhöfer, L.: *Symplectic Connections.* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **3**.3 (2006), 375–420.
32. Blanchard, P., Brüning, E.: *Distribitionen und Hilbertraumoperatoren.* Springer-Verlag, Wien, New York, 1993.
33. Bordemann, M.: *Private communication*, 1996. Discussions on the Fedosov construction.
34. Bordemann, M.: *A star-product for associative algebras and the BFFLS-Drinfel'd formula.* Private note, 1996.

35. Bordemann, M.: *(Bi)Modules, morphismes et réduction des star-produits : le cas symplectique, feuilletages et obstructions.* Preprint **math.QA/0403334** (2004), 135 Seiten.
36. Bordemann, M.: *Die Groenewold-van Hove-Eigenschaft von Paaren von Lie-Algebren*, 2004. Private communication.
37. Bordemann, M.: *Deformation Quantization. A mini lecture*, 2005. Lecture Notes for the the 2005 Summer School on Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory, Villa de Leyva, Colombia. `http://matematicas.uniandes.edu.co/summer2005/`.
38. Bordemann, M., Brischle, M., Emmrich, C., Waldmann, S.: *Phase Space Reduction for Star Products: An Explicit Construction for $\mathbb{C}P^n$.* Lett. Math. Phys. **36** (1996), 357–371.
39. Bordemann, M., Brischle, M., Emmrich, C., Waldmann, S.: *Subalgebras with converging star products in deformation quantization: An algebraic construction for $\mathbb{C}P^n$.* J. Math. Phys. **37** (1996), 6311–6323.
40. Bordemann, M., Ginot, G., Halbout, G., Herbig, H.-C., Waldmann, S.: *Formalité G_∞ adaptee et star-représentations sur des sous-variétés coïsotropes.* Preprint **math.QA/0504276** (2005), 56 Seiten.
41. Bordemann, M., Meinrenken, E., Schlichenmaier, M.: *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $gl(N), N \to \infty$ limit.* Commun. Math. Phys. **165** (1994), 281–296.
42. Bordemann, M., Neumaier, N., Pflaum, M. J., Waldmann, S.: *On representations of star product algebras over cotangent spaces on Hermitian line bundles.* J. Funct. Anal. **199** (2003), 1–47.
43. Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles I: Weyl and Standard Ordering with Differential Operator Representation.* Commun. Math. Phys. **198** (1998), 363–396.
44. Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov star products on cotangent bundles II: GNS representations, the WKB expansion, traces, and applications.* J. Geom. Phys. **29** (1999), 199–234.
45. Bordemann, M., Nowak, C. J., Schirmer, J.: *Existence of Poisson structures.* Unpublished note of an afternoon discussion in Freiburg, 1995.
46. Bordemann, M., Römer, H., Waldmann, S.: *A Remark on Formal KMS States in Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **45** (1998), 49–61.
47. Bordemann, M., Römer, H., Waldmann, S.: *KMS States and Star Product Quantization.* Rep. Math. Phys. **44** (1999), 45–52.
48. Bordemann, M., Waldmann, S.: *A Fedosov Star Product of Wick Type for Kähler Manifolds.* Lett. Math. Phys. **41** (1997), 243–253.
49. Bordemann, M., Waldmann, S.: *Formal GNS Construction and WKB Expansion in Deformation Quantization.* In: Sternheimer, D., Rawnsley, J., Gutt, S. (Hrsg.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry.* [294], 315–319.
50. Bordemann, M., Waldmann, S.: *Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization.* Commun. Math. Phys. **195** (1998), 549–583.
51. Bourbaki, N.: *Lie Groups and Lie Algebras.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989.
52. Bratteli, O., Robinson, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I: C^*- and W^*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1987.

53. Bratteli, O., Robinson, D. W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1997.
54. Bröcker, T., Jänich, K.: *Einführung in die Differentialtopologie*, Band 143 in *Heidelberger Taschenbücher.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990. Korrigierter Nachdruck.
55. Bursztyn, H., Waldmann, S.: *On Positive Deformations of *-Algebras.* In: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries.* [96], 69–80.
56. Bursztyn, H., Waldmann, S.: **-Ideals and Formal Morita Equivalence of *-Algebras.* Int. J. Math. **12**.5 (2001), 555–577.
57. Bursztyn, H., Waldmann, S.: *Algebraic Rieffel Induction, Formal Morita Equivalence and Applications to Deformation Quantization.* J. Geom. Phys. **37** (2001), 307–364.
58. Bursztyn, H., Waldmann, S.: *The characteristic classes of Morita equivalent star products on symplectic manifolds.* Commun. Math. Phys. **228** (2002), 103–121.
59. Bursztyn, H., Waldmann, S.: *Bimodule deformations, Picard groups and contravariant connections.* K-Theory **31** (2004), 1–37.
60. Bursztyn, H., Waldmann, S.: *Completely positive inner products and strong Morita equivalence.* Pacific J. Math. **222** (2005), 201–236.
61. Bursztyn, H., Waldmann, S.: *Hermitian star products are completely positive deformations.* Lett. Math. Phys. **72** (2005), 143–152.
62. Bursztyn, H., Waldmann, S.: *Induction of Representations in Deformation Quantization.* In: Maeda, Y., Tose, N., Miyazaki, N., Watamura, S., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Noncommutative Geometry and Physics*, 65–76. World Scientific, Singapore, 2005. Proceedings of the CEO International Workshop.
63. Bursztyn, H., Weinstein, A.: *Poisson geometry and Morita equivalence.* In: Gutt, S., Rawnsley, J., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Poisson Geometry, Deformation Quantisation and Group Representations.* [157], 1–78.
64. Cahen, M., Gutt, S.: *Invariant $*$-Product of Holomorphic Functions on the Hyperbolic Hermitian Spaces.* Lett. Math. Phys. **5** (1981), 219–228.
65. Cahen, M., Gutt, S.: *Regular $*$ Representations of Lie Algebras.* Lett. Math. Phys. **6** (1982), 395–404.
66. Cahen, M., Gutt, S.: *Discrete spectrum of the hydrogen atom: an illustration of deformation theory methods and problems.* J. Geom. Phys. **1**.2 (1984), 65–83.
67. Cahen, M., Gutt, S., DeWilde, M.: *Local Cohomology of the Algebra of C^∞ Functions on a Connected Manifold.* Lett. Math. Phys. **4** (1980), 157–167.
68. Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J.: *Quantization of Kähler Manifolds I: Geometric Interpretation of Berezin's Quantization.* J. Geom. Phys. **7** (1990), 45–62.
69. Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J.: *Quantization of Kähler Manifolds. II.* Trans. Am. Math. Soc. **337**.1 (1993), 73–98.
70. Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J.: *Quantization of Kähler Manifolds. III.* Lett. Math. Phys. **30** (1994), 291–305.
71. Cahen, M., Gutt, S., Rawnsley, J.: *Quantization of Kähler Manifolds. IV.* Lett. Math. Phys. **34** (1995), 159–168.
72. Cannas da Silva, A.: *Lectures on Symplectic Geometry*, Band 1764 in *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.

73. Cannas da Silva, A., Weinstein, A.: *Geometric Models for Noncommutative Algebras. Berkeley Mathematics Lecture Notes.* AMS, 1999.
74. Cattaneo, A., Felder, G.: *A Path Integral Approach to the Kontsevich Quantization Formula.* Commun. Math. Phys. **212** (2000), 591–611.
75. Cattaneo, A. S.: *Formality and Star Products.* In: Gutt, S., Rawnsley, J., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Poisson Geometry, Deformation Quantisation and Group Representations.* [157], 79–144. Lecture Notes taken by D. Indelicato.
76. Cattaneo, A. S., Felder, G.: *Coisotropic Submanifolds in Poisson Geometry and Branes in the Poisson Sigma Model.* Lett. Math. Phys. **69** (2004), 157–175.
77. Cattaneo, A. S., Felder, G.: *Relative formality theorem and quantisation of coisotropic submanifolds.* Preprint **math.QA/0501540** (2005), 31 Seiten.
78. Cattaneo, A. S., Felder, G., Tomassini, L.: *Fedosov connections on jet bundles and deformation quantization.* In: Halbout, G. (Hrsg.): *Deformation quantization.* [162], 191–202.
79. Cattaneo, A. S., Felder, G., Tomassini, L.: *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds.* Duke Math. J. **115**.2 (2002), 329–352.
80. Chambers, R. G.: *Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux.* Phys. Rev. Lett. **5**.1 (1960), 3–5.
81. Chari, V., Pressley, A.: *A Guide to Quantum Groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
82. Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C.: *Analysis, Manifolds and Physics.* North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 2. Auflage, 1982.
83. Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C.: *Analysis, Manifolds and Physics. Part II: 92 Applications.* North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, 2. Auflage, 1989.
84. Connes, A.: *Noncommutative Geometry.* Academic Press, San Diego, New York, London, 1994.
85. Connes, A., Flato, M., Sternheimer, D.: *Closed Star Products and Cyclic Cohomology.* Lett. Math. Phys. **24** (1992), 1–12.
86. Crainic, M., Fernandes, R. L.: *Integrability of Poisson brackets.* J. Differential Geom. **66** (2004), 71–137.
87. Cushman, R. H., Bates, L. M.: *Global aspects of classical integrable systems.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1997.
88. Davidson, K. R.: *C^*-Algebras by Example*, Band 6 in *Fields Institute Monographs.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.
89. Deligne, P.: *Déformations de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et DeWilde, Lecomte.* Sel. Math. New Series **1**.4 (1995), 667–697.
90. DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487–496.
91. DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Star-Products on Cotangent Bundles.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 235–241.
92. DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of a Symplectic Manifold and Star-Products. Existence, Equivalence, Derivations.* In: Hazewinkel, M., Gerstenhaber, M. (Hrsg.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications.* [165], 897–960.

93. DeWitt, B.: *Supermanifolds. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.* Cambridge University Press, Cambridge, second. Auflage, 1992.
94. Dirac, P. A. M.: *The Theory of Magnetic Poles.* Phys. Rev. **74**.7 (1948), 817–830.
95. Dirac, P. A. M.: *Lectures on Quantum Mechanics.* Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
96. Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries. Mathematical Physics Studies* Nr. **22**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
97. Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries. Mathematical Physics Studies* Nr. **21**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
98. Dito, G., Sternheimer, D.: *Deformation quantization: genesis, developments and metamorphoses.* In: Halbout, G. (Hrsg.): *Deformation quantization.* [162], 9–54.
99. Dixmier, J.: *C^*-Algebras.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15.
100. do Carmo, M. P.: *Riemanniam Geometry.* Birkhäuser, Boston, 1992.
101. Dolgushev, V. A.: *Covariant and equivariant formality theorems.* Adv. Math. **191** (2005), 147–177.
102. Dolgushev, V. A.: *A Proof of Tsygan's Formality Conjecture for an Arbitrary Smooth Manifold.* Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2005. math.QA/0504420.
103. Dolgushev, V. A., Lyakhovich, S. L., Sharapov, A. A.: *Wick Quantization of a Symplectic Manifold.* Nuc. Phys. B **102&103** (2001), 144–149.
104. Dolgushev, V. A., Lyakhovich, S. L., Sharapov, A. A.: *Wick type deformation quantization of Fedosov manifolds.* Nuc. Phys. B **606** (2001), 647–672.
105. Donin, J.: *Classification of polarized deformation quantizations.* J. Geom. Phys. **48** (2003), 546–579.
106. Dubois-Violette, M., Kriegl, A., Maeda, Y., Michor, P.: *Smooth $*$-Algebras.* In: Maeda, Y., Watamura, S. (Hrsg.): *Noncommutative Geometry and String Theory*, Band 144 in *Prog. Theo. Phys. Suppl.*, 54–78. Yukawa Institute for Theoretical Physics, 2001. Proceedings of the International Workshop on Noncommutative Geometry and String Theory.
107. Dufour, J.-P., Zung, N. T.: *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Band 242 in *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, New York, 2005.
108. Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C.: *Lie Groups.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
109. Eckel, R.: *Eine geometrische Formulierung von Supermannigfaltigkeiten, deren Super-Poisson-Klammern und Sternprodukten.* Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1996.
110. Emmrich, C., Römer, H.: *Multicomponent Wentzel-Kramers-Brillouin Approximation on arbitrary Symplectic Manifolds: A Star Product Approach.* J. Math. Phys. **39**.7 (1998), 3530–3546.
111. Emmrich, C., Weinstein, A.: *The Differential Geometry of Fedosov's Quantization.* In: Brylinski, J.-L., Brylinski, R., Guillemin, V., Kac, V. (Hrsg.): *Lie Theory and Geometry, in Honor of B. Kostant*, 217–239. Birkhäuser, Boston, Basel, 1994.

112. Emmrich, C., Weinstein, A.: *Geometry of the Transport Equation in Multicomponent WKB Approximations.* Comm. Math. Phys. **176** (1996), 701–711.
113. Evens, S., Lu, J.-H., Weinstein, A.: *Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50**.200 (1999), 417–436.
114. Fedosov, B., Schulze, B.-W., Tarkhanov, N.: *On the index theorem for symplectic orbifolds.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54**.5 (2004), 1601–1639, xvi, xxii.
115. Fedosov, B. V.: *Formal Quantization.* Some Topics of Modern Mathematics and their Applications to Problems of Mathematical Physics (1985), 129–136. Moscow.
116. Fedosov, B. V.: *Quantization and the Index.* Sov. Phys. Dokl. **31**.11 (1986), 877–878.
117. Fedosov, B. V.: *Index Theorem in the Algebra of Quantum Observables.* Sov. Phys. Dokl. **34**.4 (1989), 319–321.
118. Fedosov, B. V.: *Reduction and Eigenstates in Deformation Quantization.* In: Demuth, M., Schrohe, E., Schulze, B.-W. (Hrsg.): *Pseudo-differential Calculus and Mathematical Physics*, Band 5 in *Advances in Partial Differential Equations*, 277–297. Akademie Verlag, Berlin, 1994.
119. Fedosov, B. V.: *A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization.* J. Diff. Geom. **40** (1994), 213–238.
120. Fedosov, B. V.: *Trace Density in Deformation Quantization.* In: Demuth, M., Schrohe, E., Schulze, B.-W. (Hrsg.): *Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization*, Band 8 in *Advances in Partial Differential Equations*, 319–333. Akademie Verlag, Berlin, 1995.
121. Fedosov, B. V.: *Deformation Quantization and Index Theory.* Akademie Verlag, Berlin, 1996.
122. Fedosov, B. V.: *Non-Abelian Reduction in Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **43** (1998), 137–154.
123. Fedosov, B. V.: *On G-trace and G-index in deformation quantization.* In: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries.* [97], 157–176.
124. Fedosov, B. V.: *On G-Trace and G-Index in Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **52** (2000), 29–49.
125. Fedosov, B. V.: *On the trace density in deformation quantization.* In: Halbout, G. (Hrsg.): *Deformation quantization.* [162], 67–83.
126. Felder, G., Shoikhet, B.: *Deformation Quantization with Traces.* Lett. Math. Phys. **53** (2000), 75–86.
127. Fischer, G.: *Lineare Algebra.* Vieweg Verlag, Wiesbaden, 11. Auflage, 1997.
128. Forger, M., Paufler, C., Römer, H.: *A general construction of Poisson brackets on exact multisymplectic manifolds.* Rep. Math. Phys. **51**.2-3 (2003), 187–195.
129. Forger, M., Paufler, C., Römer, H.: *The Poisson bracket for Poisson forms in multisymplectic field theory.* Rev. Math. Phys. **15**.7 (2003), 705–743.
130. Forger, M., Römer, H.: *A Poisson bracket on multisymplectic phase space.* Rep. Math. Phys. **48** (2001), 211–218.
131. Gallavotti, G., Pulvirenti, M.: *Classical KMS Condition and Tomita-Takesaki Theory.* Commun. Math. Phys. **46** (1976), 1–9.
132. Gallavotti, G., Verboven, E.: *On the Classical KMS Boundary Condition.* Nuovo Cimento **28** (1975), 274–286.

133. Gallo, S., Hulin, D., Lafontaine, J.: *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1990.
134. Gerstenhaber, M.: *Cohomology Structure of an associative Ring.* Ann. Math. **78** (1963), 267–288.
135. Gerstenhaber, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras.* Ann. Math. **79** (1964), 59–103.
136. Gerstenhaber, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras II.* Ann. Math. **84** (1966), 1–19.
137. Gerstenhaber, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras III.* Ann. Math. **88** (1968), 1–34.
138. Gerstenhaber, M.: *On the Deformation of Rings and Algebras IV.* Ann. Math. **99** (1974), 257–276.
139. Gerstenhaber, M., Schack, S. D.: *Algebraic Cohomology and Deformation Theory.* In: Hazewinkel, M., Gerstenhaber, M. (Hrsg.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications.* [165], 13–264.
140. Goldstein, H.: *Klassische Mechanik.* AULA-Verlag, Wiesbaden, 11. Auflage, 1991.
141. Gorbunov, I. V., Lyakhovich, S. L., Sharapov, A. A.: *Wick quantization of cotangent bundles over Riemannian manifolds.* J. Geom. Phys. **53** (2005), 98–121.
142. Gotay, M. J.: *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations. II. Space + time decomposition.* Differential Geom. Appl. **1**.4 (1991), 375–390.
143. Gotay, M. J., Tuynman, G. M.: *R^{2n} is a universal symplectic manifold for reduction.* Lett. Math. Phys. **18**.1 (1989), 55–59.
144. Grabowski, J.: *Isomorphisms of algebras of smooth functions revisited.* Arch. Math. (Basel) **85**.2 (2005), 190–196.
145. Greub, W.: *Multilinear Algebra.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 1978.
146. Griffith, P., Harris, J.: *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley & Sons, New York, 1978.
147. Grigis, A., Sjöstrand, J.: *Microlocal Analysis for Differential Operators*, Band 196 in *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
148. Groenewold, H. J.: *On the principles of elementary quantum mechanics.* Physica **12** (1946), 405–460.
149. Guillemin, V., Sternberg, S.: *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1984.
150. Gutt, S.: *Equivalence of Deformations and Associated $*$-Products.* Lett. Math. Phys. **3** (1979), 297–309.
151. Gutt, S.: *An Explicit $*$-Product on the Cotangent Bundle of a Lie Group.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 249–258.
152. Gutt, S.: *On Some Second Hochschild Cohomology Spaces for Algebras of Functions on a Manifold.* Lett. Math. Phys. **39** (1997), 157–162.
153. Gutt, S.: *Variations on deformation quantization.* In: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries.* [97], 217–254.
154. Gutt, S., Rawnsley, J.: *Equivalence of star products on a symplectic manifold; an introduction to Deligne's Čech cohomology classes.* J. Geom. Phys. **29** (1999), 347–392.

155. Gutt, S., Rawnsley, J.: *Traces for star products on symplectic manifolds.* J. Geom. Phys. **42** (2002), 12–18.
156. Gutt, S., Rawnsley, J.: *Natural Star Products on Symplectic Manifolds and Quantum Moment Maps.* Lett. Math. Phys. **66** (2003), 123–139.
157. Gutt, S., Rawnsley, J., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Poisson Geometry, Deformation Quantisation and Group Representations*, Band 323 in *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
158. Haag, R.: *Local Quantum Physics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1993.
159. Haag, R., Hugenholtz, N. M., Winnink, M.: *On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics.* Commun. Math. Phys. **5** (1967), 215–236.
160. Haag, R., Kastler, D., Trych-Pohlmeyer, E. B.: *Stability and Equilibrium States.* Commun. Math. Phys. **33** (1974), 173–193.
161. Haag, R., Trych-Pohlmeyer, E. B.: *Stability Properties of Equilibrium States.* Commun. Math. Phys. **56** (1977), 213–224.
162. Halbout, G. (Hrsg.): *Deformation Quantization*, Band 1 in *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
163. Hall, B. C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Band 222 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2003.
164. Hansen, F.: *Quantum Mechanics in Phase Space.* Rep. Math. Phys. **19** (1984), 361–381.
165. Hazewinkel, M., Gerstenhaber, M. (Hrsg.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications.* Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1988.
166. Helgason, S.: *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000. Reprint of the 1962 edition.
167. Henneaux, M., Teitelboim, C.: *Quantization of Gauge Systems.* Princeton University Press, New Jersey, 1992.
168. Hess, H.: *Symplectic connections in geometric quantization and factor orderings.* Dissertation, Fachbereich Physik, Freie Universität, Berlin, 1981.
169. Hirsch, M. W.: *Differential Topology*, Band 33 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
170. Hochschild, G., Kostant, B., Rosenberg, A.: *Differential Forms on regular affine Algebras.* Trans. Am. Math. Soc. **102** (1962), 383–408.
171. Honerkamp, J., Römer, H.: *Klassische Theoretische Physik.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1989.
172. Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*, Band 274 in *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
173. Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1990.
174. Huebschmann, J.: *Poisson cohomology and quantization.* J. Reine Angew. Math. **408** (1990), 57–113.
175. Huebschmann, J.: *Lie-Rinehart algebras, Gerstenhaber algebras, and Batalin-Vilkovisky algebras.* Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 425–440.

176. Humphreys, J. E.: *Introdution to Lie Algebras and Representation Theory*, Band 9 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997. Seventh corrected printing.
177. Huybrechts, D.: *Complex Geometry: an Introduction*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 2005.
178. Jacobson, N.: *Basic Algebra I*. Freeman and Company, New York, 2. Auflage, 1985.
179. Jänich, K.: *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 4. Auflage, 1994.
180. Jänich, K.: *Vektoranalysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 4. Auflage, 2003.
181. Kadison, R. V., Ringrose, J. R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory*, Band 15 in *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1997.
182. Kadison, R. V., Ringrose, J. R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume II: Advanced Theory*, Band 16 in *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1997.
183. Kammerer, J. B.: *Analysis of the Moyal product in a flat space*. J. Math. Phys. **27** (1986), 529–535.
184. Karabegov, A. V.: *Deformation Quantization with Separation of Variables on a Kähler Manifold*. Commun. Math. Phys. **180** (1996), 745–755.
185. Karabegov, A. V.: *On deformation quantization on a Kählerian manifold that is related to the Berezin quantization. (Russian)*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. **30** (1996), 87–89.
186. Karabegov, A. V.: *Berezin's quantization on flag manifolds and spherical modules*. Trans. Amer. Math. Soc. **350**.4 (1998), 1467–1479.
187. Karabegov, A. V.: *Cohomological Classification of Deformation Quantizations with Separation of Variables*. Lett. Math. Phys. **43** (1998), 347–357.
188. Karabegov, A. V.: *On the Canonical Normalization of a Trace Density of Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **45** (1998), 217–228.
189. Karabegov, A. V.: *Pseudo-Kähler Quantization on Flag Manifolds*. Commun. Math. Phys. **200** (1999), 355–379.
190. Karabegov, A. V.: *On Fedosov's approach to Deformation Quantization with Separation of Variables*. In: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*. [96].
191. Karabegov, A. V., Schlichenmaier, M.: *Almost-Kähler Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **57** (2001), 135–148.
192. Karabegov, A. V., Schlichenmaier, M.: *Identification of Berezin-Toeplitz deformation quantization*. J. reine angew. Math. **540** (2001), 49–76.
193. Karasev, M.: *Formulas for noncommutative products of functions in terms of membranes and strings. I*. Russian J. Math. Phys. **2**.4 (1994), 445–462 (1995).
194. Karasev, M. V., Maslov, V. P.: *Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization*, Band 119 in *Translation of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1993.
195. Karasev, M. V., Osborn, T. A.: *Symplectic areas, quantization, and dynamics in electromagnetic fields*. J. Math. Phys. **43** (2002), 756–788.
196. Karasev, M. V., Osborn, T. A.: *Quantum Magnetic Algebra and Magnetic Curvature*. J. Phys. A **37** (2004), 2345–2363.
197. Karasev, M. V., Osborn, T. A.: *Cotangent bundle quantization: Entangling of metric and magnetic field*. J. Phys. A **38** (2005), 8549–8578.

198. KASSEL, C.: *Quantum Groups*, Band 155 in *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.
199. KELLEY, J. L.: *General Topology. Graduate Texts in Mathematics* Nr. **27**. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1955.
200. KIRILLOV, A. A.: *Elements of the theory of representations*, Band 220 in *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the Russian by Edwin Hewitt.
201. KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.: *Foundations of Differential Geometry II. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics* Nr. **15**. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1969.
202. KOLÁŘ, I., MICHOR, P. W., SLOVÁK, J.: *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
203. KONTSEVICH, M.: *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I.* Preprint **q-alg/9709040** (September 1997).
204. KONTSEVICH, M.: *Formality Conjecture*. In: STERNHEIMER, D., RAWNSLEY, J., GUTT, S. (HRSG.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry*. [294], 139–156.
205. KONTSEVICH, M.: *Operads and Motives in Deformation Quantization*. Lett. Math. Phys. **48** (1999), 35–72.
206. KONTSEVICH, M.: *Deformation Quantization of Poisson manifolds*. Lett. Math. Phys. **66** (2003), 157–216.
207. KOSMANN-SCHWARZBACH, Y.: *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids*. Acta Appl. Math. **41**.1-3 (1995), 153–165. Geometric and algebraic structures in differential equations.
208. KOSMANN-SCHWARZBACH, Y.: *Les Théorèmes de Noether. Histoire des Mathématiques*. Édition de l'École Polytechniques, Paris, 2004.
209. KOSMANN-SCHWARZBACH, Y.: *Quasi, twisted, and all that...in Poisson geometry and Lie algebroid theory*. In: MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. (HRSG.): *The breadth of symplectic and Poisson geometry*, Band 232 in *Progress in Mathematics*, 363–389. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2005. Festschrift in honor of Alan Weinstein.
210. KOSTANT, B.: *Quantization and Unitary Representation. Part I: Prequantization*. In: TAAM, C. T. (HRSG.): *Lectures in Modern Analysis and Application*, Band 170 in *Lecture Notes in Mathematics*, 87–208. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
211. KOSTANT, B.: *Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization*. In: BLEULER, K., REETZ, A. (HRSG.): *Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, 1975)*, Band 570 in *Lecture Notes in Mathematics*, 177–306. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Proceedings of the Symposium held at the University of Bonn, July 1–4, 1975.
212. KOSZUL, J. L.: *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*. Astérisque **1985** (1985), 257–271.
213. KUBO, R.: *Statistical-mechanical theory of irreversible processes, I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems*. J. Phys. Soc. Japan **12** (1957), 570–586.
214. LANCE, E. C.: *Hilbert C^*-modules. A Toolkit for Operator algebraists*, Band 210 in *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

215. Landi, G.: *An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries. Lecture Notes in Physics* Nr. **m51**. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1997.
216. Landsman, N. P.: *Mathematical Topics between Classical and Quantum Mechanics. Springer Monographs in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
217. Landsman, N. P.: *Between Classical and Quantum.* Preprint **quant-ph/0506082** (2005), 100 Seiten. Erscheint in Elsevier's Handbook of the Philosophy of Science, Volume 2: Philosophy of Physics, edited by J. Earman and J. Butterfield.
218. Landsman, N. P.: *When champions meet: rethinking the Bohr-Einstein debate.* Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys. **37** (2006), 212–242.
219. Lang, S.: *Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 3. Auflage, 1997.
220. Lang, S.: *Fundamentals of Differential Geometry*, Band 191 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
221. Libermann, P., Marle, C.-M.: *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics.* Reidel, Dordrecht, 1987.
222. Lichneriwicz, A.: *Les Varietes de Poisson et leurs Algebres de Lie Associees.* J. Diff. Geom. **12** (1977), 253–300.
223. Lichnerowicz, A.: *Existence and Equivalence of Twisted Products on a Symplectic Manifold.* Lett. Math. Phys. **3** (1979), 495–502.
224. Mackenzie, K. C. H.: *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Band 213 in *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.
225. Mackenzie, K. C. H., Xu, P.: *Lie bialgebroids and Poisson groupoids.* Duke Math. J. **73**.2 (1994), 415–452.
226. Madore, J.: *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications. London Mathematical Society Lecture Note Series* Nr. **257**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2. Auflage, 1999.
227. Maillard, J.-M.: *On the twisted convolution product and the Weyl transformation of tempered distributions.* J. Geom. Phys. **3**.2 (1986), 230–261.
228. Majid, S.: *Foundations of Quantum Group Theory.* Cambridge University Press, 1995.
229. Manchon, D.: *Une remarque sur l'exponentielle étoile.* In: *Rencontres Mathématiques de Glanon 1997*, VIII1–VIII3. Association Mathématique de Glanon, 1997.
230. Marsden, J. E., Patrick, G. W., Shkoller, S.: *Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs.* Comm. Math. Phys. **199**.2 (1998), 351–395.
231. Marsden, J. E., Ratiu, T. S.: *Einführung in die Mechanik und Symmetrie.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 2000.
232. Marsden, J. E., Weinstein, A.: *Some comments on the history, theory, and applications of symplectic reduction.* In: Landsman, N. P., Pflaum, M., Schlichenmaier, M. (Hrsg.): *Quantization of singular symplectic quotients.* Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2001.
233. Martin, P. C., Schwinger, J.: *Theory of many-particle systems, I.* Phys. Rev. **115** (1959), 1342–1373.

234. Meinrenken, E.: *Symplectic Geometry.* Department of Mathematics, University of Toronto, 2000. Vorlesungsskriptum. `www.math.toronto.edu/~mein/`.
235. Michor, P.: *Topics in Differential Geometry.* Schrödinger Institute, Wien, 2001. Vorlesungsskriptum. `www.mat.univie.ac.at/~michor/`.
236. Milnor, J. W., Stasheff, J. D.: *Characteristic Classes*, Band 76 in *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
237. Mittelstaedt, P.: *Philosophische Probleme der modernen Physik. BI-Hochschultaschenbücher* Nr. **50**. B. I.-Verlag, Mannheim, Wien, Zürich, 7. Auflage, 1989.
238. Moerdijk, I., Mrčun, J.: *Introduction to Foliations and Lie Groupoids. Cambridge studies in advanced mathematics* Nr. **91**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
239. Moreno, C.: *$*$-Products on Some Kähler Manifolds.* Lett. Math. Phys. **11** (1986), 361–372.
240. Moreno, C.: *Invariant Star Products and Representations of Compact Semisimple Lie Groups.* Lett. Math. Phys. **12** (1986), 217–229.
241. Moreno, C.: *Geodesic Symmetries and Invariant Star Products on Kähler Symmetric Spaces.* Lett. Math. Phys. **13** (1987), 245–257.
242. Moreno, C., Ortega-Navarro, P.: *$*$-Products on $D^1(\mathbb{C})$, S^2 and Related Spectral Analysis.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), 181–193.
243. Moreno, C., Ortega-Navarro, P.: *Deformation of the Algebra of Functions on Hermitian Symmetric Spaces Resulting from Quantization.* Ann. Inst. Henri Poincaré **38** (1983), 215–241.
244. Moser, J.: *On the Volume Elements on a Manifold.* Trans. Am. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.
245. Mrčun, J.: *On isomorphisms of algebras of smooth functions.* Proc. Amer. Math. Soc. **133**.10 (2005), 3109–3113 (electronic).
246. Müller-Bahns, M. F., Neumaier, N.: *Some remarks on $\mathfrak{g}$-invariant Fedosov star products and quantum momentum mappings.* J. Geom. Phys. **50** (2004), 257–272.
247. Nadaud, F.: *On Continuous and Differential Hochschild Cohomology.* Lett. Math. Phys. **47** (1999), 85–95.
248. Nakahara, M.: *Geometry, Topology and Physics.* Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia, 1990.
249. Neroslavski, O. M., Vlassov, A. T.: *Sur les Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique.* C. R. Acad. Sc. Paris I **292** (1981), 71–73.
250. Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem.* Commun. Math. Phys. **172** (1995), 223–262.
251. Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem for Families.* Adv. Math. **113** (1995), 151–205.
252. Neumaier, N.: *Sternprodukte auf Kotangentenbündeln und Ordnungs-Vorschriften.* Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1998. `http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~nine/`.
253. Neumaier, N.: *Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung.* Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2001. `http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~nine/`.
254. Neumaier, N.: *Local ν-Euler Derivations and Deligne's Characteristic Class of Fedosov Star Products and Star Products of Special Type.* Commun. Math. Phys. **230** (2002), 271–288.

255. Neumaier, N.: *Universality of Fedosov's Construction for Star Products of Wick Type on Pseudo-Kähler Manifolds.* Rep. Math. Phys. **52** (2003), 43–80.
256. Nowak, C. J.: *Über Sternprodukte auf nichtregulären Poissonmannigfaltigkeiten.* Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1997.
257. Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A.: *Weyl Manifolds and Deformation Quantization.* Adv. Math. **85** (1991), 224–255.
258. Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A.: *Existence of a Closed Star Product.* Lett. Math. Phys. **26** (1992), 285–294.
259. Ortega, J.-P., Ratiu, T. S.: *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*, Band 222 in *Progress in Mathematics.* Birkhäuser, Boston, 2004.
260. Paufler, C., Römer, H.: *De Donder-Weyl equations and multisymplectic geometry.* Rep. Math. Phys. **49**.2-3 (2002), 325–334.
261. Paufler, C., Römer, H.: *Geometry of Hamiltonian n-vector fields in multisymplectic field theory.* J. Geom. Phys. **44**.1 (2002), 52–69.
262. Peetre, J.: *Une Charactérisation abstraite des opérateurs différentiels.* Math. Skand. **7** (1959), 211–218.
263. Peetre, J.: *Réctification a l'article ≪Une Charactérisation abstraite des opérateurs différentiels≫.* Math. Skand. **8** (1960), 116–120.
264. Pflaum, M. J.: *A Deformation-Theoretical Approach to Weyl Quantization on Riemannian Manifolds.* Lett. Math. Phys. **45** (1998), 277–294.
265. Pflaum, M. J.: *The normal symbol on Riemannian manifolds.* New York J. Math. **4** (1998), 97–125.
266. Pflaum, M. J.: *On Continuous Hochschild Homology and Cohomology Groups.* Lett. Math. Phys. **44** (1998), 43–51.
267. Pflaum, M. J.: *A deformation-theoretic approach to normal order quantization.* Russ. J. Math. Phys. **7** (2000), 82–113.
268. Pittnauer, F.: *Vorlesung über Asymptotische Reihen. Lecture Notes in Mathematics* Nr. **301**. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
269. Pusz, W., Woronowicz, S. L.: *Passive States and KMS States for General Quantum Systems.* Commun. Math. Phys. **58** (1978), 273–290.
270. Querenburg, B. v.: *Mengentheoretische Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage, 2001.
271. Radko, O.: *A classification of topologically stable Poisson structures on a compact oriented surface.* J. Symplectic Geom. **1** (2002), 523–542.
272. Reed, M., Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis.* Academic Press, New York, San Fransisco, London, 1972.
273. Rieffel, M. A.: *Deformation quantization for actions of* $\mathbb{R}^d$. Mem. Amer. Math. Soc. **106**.506 (1993), 93 Seiten.
274. Rinehart, G.: *Differential forms on general commutative algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 195–222.
275. Römer, H.: *Klassische Mechanik und Dynamische Systeme.* Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität, 1995. Vorlesungsskriptum. `idefix.physik.uni-freiburg.de/~aufgabe/`.
276. Römer, H.: *Theoretical Optics. An Introduction.* Wiley-VCH, Berlin, 1. Auflage, 2004.
277. Römer, H., Filk, T.: *Statistische Mechanik. Konzepte der Theoretischen Physik.* VCH Verlagsgesellschaft mbH., Weinheim, 1994.
278. Römer, H., Forger, M.: *Elementare Feldtheorie.* VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1993.

279. RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 3. Auflage, 1987.
280. RUDIN, W.: *Functional Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 2. Auflage, 1991.
281. RUIZ, J. M.: *The Basic Theory of Power Series.* Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1993.
282. SAFAROV, Y.: *Pseudodifferential operators and linear connections.* Proc. London Math. Soc. **74** (1997), 379–416.
283. SAKAI, S.: *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Band 60 in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
284. SCHALLER, P., STROBL, T.: *Poisson structure induced (topological) field theories.* Mod. Phys. Lett. A **9**.33, 3129–3136.
285. SCHLICHENMAIER, M.: *Berezin-Toeplitz quantization of compact Kähler manifolds.* In: STRASBURGER, A., ALI, S., ANTOINE, J.-P., GAZEAU, J.-P., ODZIJEWICZ, A. (HRSG.): *Quantization, Coherent States and Poisson Structures, Proc. XIV'th Workshop on Geometric Methods in Physics Białowieża, 1995*, 101–115. Polish Scientific Publisher PWN, Warsaw, 1998.
286. SCHLICHENMAIER, M.: *Deformation quantization of compact Kähler manifolds by Berezin-Toeplitz quantization.* In: DITO, G., STERNHEIMER, D. (HRSG.): *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries.* [96], 289–306.
287. SCHLICHENMAIER, M.: *Berezin-Toeplitz quantization and Berezin symbols for arbitrary compact Kähler manifolds.* In: SCHLICHENMAIER, M., STRASBURGER, A., ALI, S., ODZIJEWICZ, A. (HRSG.): *Coherent States, Quantization and Gravity, Bialowieza 1998*, 45–56. Warsaw University Press, Warsaw, 2001.
288. SCHMÜDGEN, K.: *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*, Band 37 in *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990.
289. SCHOTTENLOHER, M.: *Geometrie und Symmetrie in der Physik.* Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
290. SEXL, R., URBANTKE, H. K.: *Gravitation und Kosmologie.* Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zrich, 3. Auflage, 1987.
291. SEXL, R. U., URBANTKE, H. K.: *Relativität, Gruppen, Teilchen.* Springer-Verlag, Wien, New York, 3. Auflage, 1992.
292. SNIATYCKI, J.: *Dirac brackets in geometric dynamics.* Ann. Inst. Henri Poincaré **XX** (1974), 365–372.
293. SOURIAU, J.-M.: *Structure des systèmes dynamiques. Maîtrises de mathématiques.* Dunod, Paris, 1970.
294. STERNHEIMER, D., RAWNSLEY, J., GUTT, S. (HRSG.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry. Mathematical Physics Studies* Nr. **20**. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1997.
295. STRAUMANN, N.: *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*, Band 150 in *Lecture Notes in Physics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1988.
296. SUBIN, M. A.: *Pseudodifferential operators and spectral theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2001.
297. TAKESAKI, M.: *Disjointness of the KMS-States of Different Temperatures.* Commun. Math. Phys. **17** (1970), 33–41.

298. Tamarkin, D., Tsygan, B.: *Cyclic Formality and Index Theorems.* Lett. Math. Phys. **56** (2001), 85–97.
299. Tamarkin, D. E.: *Formality of Chain Operad of Little Discs.* Lett. Math. Phys. **66** (2003), 65–72.
300. The, Y.-K.: *Zum Spektrum und Sternexponential in der Deformationsquantisierung.* Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, November 2000.
301. Thirring, W.: *Klassische Dynamische Systeme*, Band 1 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik.* Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1988.
302. Thirring, W.: *Klassische Feldtheorie*, Band 2 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik.* Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1990.
303. Thirring, W.: *Quantenmechanik von Atomen und Molekülen*, Band 3 in *Lehrbuch der Mathematischen Physik.* Springer-Verlag, Wien, New York, 2. Auflage, 1994.
304. Thirring, W.: *Quantum Mathematical Physics. Atoms, Molecules and Large Systems.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2002.
305. Underhill, J.: *Quantization on a manifold with connection.* J. Math. Phys. **19**.9 (1978), 1932–1935.
306. Vaisman, I.: *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994.
307. van Hove, L.: *Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations.* Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique (Classe des Sci.) **XXVI** (1951), 61–102.
308. von Neumann, J.: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 2. Auflage, 1996.
309. Waldmann, S.: *Ein Sternprodukt für den komplex projektiven Raum und die Fedosov-Konstruktion für Kähler-Mannigfaltigkeiten.* Diplomarbeit, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1995. 97 Seiten. `http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/`.
310. Waldmann, S.: *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen.* Dissertation, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1999. 190 Seiten. `http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/`.
311. Waldmann, S.: *Locality in GNS Representations of Deformation Quantization.* Commun. Math. Phys. **210** (2000), 467–495.
312. Waldmann, S.: *A Remark on the Deformation of GNS Representations of *-Algebras.* Rep. Math. Phys. **48** (2001), 389–396.
313. Waldmann, S.: *On the representation theory of deformation quantization.* In: Halbout, G. (Hrsg.): *Deformation quantization.* [162], 107–133.
314. Waldmann, S.: *The Picard Groupoid in Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **69** (2004), 223–235.
315. Waldmann, S.: *States and Representation Theory in Deformation Quantization.* Rev. Math. Phys. **17** (2005), 15–75.
316. Warner, F. W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Band 94 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1983.
317. Weinstein, A.: *Lectures on Symplectic Manifolds.* Providence, Rhode Island, 1977. Expository lectures from the CBMS regional conference held at the University of North Carolina, March 8–12, 1976.

318. Weinstein, A.: *The Local Structure of Poisson Manifolds.* J. Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.
319. Weinstein, A.: *Traces and triangles in symmetric symplectic spaces.* Contemp. Math. **179** (1994), 261–270.
320. Weinstein, A.: *Deformation Quantization.* Astérisque .227 (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
321. Weinstein, A.: *The modular automorphism group of a Poisson manifold.* J. Geom. Phys. **23** (1997), 379–394.
322. Weinstein, A.: *Poisson geometry.* Diff. Geom. Appl. **9** (1998), 213–238.
323. Weinstein, A.: *Commuting vector fields with compact support*, 2006. Private communication during the Poisson 2006 conference.
324. Weinstein, A., Xu, P.: *Hochschild cohomology and characteristic classes for star-products.* In: Khovanskij, A., Varchenko, A., Vassiliev, V. (Hrsg.): *Geometry of differential equations. Dedicated to V. I. Arnold on the occasion of his 60th birthday*, 177–194. American Mathematical Society, Providence, 1998.
325. Wells, R. O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Band 65 in *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1980.
326. Widom, H.: *Families of Pseudodifferential Operators.* In: Gohberg, I., Kac, M. (Hrsg.): *Topics in Functional Analysis*, 345–395. Academic Press, New York, 1978.
327. Widom, H.: *A Complete Symbolic Calculus for Pseudodifferential Operators.* Bull. Sc. Math. **104** (1980), 19–63.
328. Woodhouse, N. M. J.: *Geometric Quantization.* Clarendon Press, Oxford, 1992.
329. Xu, P.: *Fedosov $*$-Products and Quantum Momentum Maps.* Commun. Math. Phys. **197** (1998), 167–197.
330. Yano, K., Ishihara, S.: *Tangent and Cotangent Bundles*, Band 16 in *Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

Sachverzeichnis