Anhang

In diesem Anhang tragen wir den Beweis von Satz (1.19)(b) nach.

Satz. (vgl. Puppe [21], Fußnote [1] auf S.81, Strøm [27], 2. Lemma 3).
X sei ein topologischer Raum, A ein Teilraum von X, $i : A \subset X$ die Inklusion.

Behauptung. Ist $(X\times 0) \cup (A\times I)$ Retrakt von $X\times I$, dann ist die in (1.18) definierte bijektive stetige Abbildung $l : Z_i \longrightarrow (X\times 0) \cup (A\times I)$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir folgen Strøm [27], 2. Lemma 3.
Nachzuweisen ist die Stetigkeit von l^{-1}.
Zunächst identifizieren wir die dem Abbildungszylinder von i zugrunde liegende Menge unter der bijektiven Abbildung l mit $(X\times 0) \cup (A\times I)$.
Wir haben dann zu zeigen: die durch das Produkt $X\times I$ auf $(X\times 0) \cup (A\times I)$ induzierte Teilraumtopologie ist feiner als die Topologie des Abbildungszylinders.

Sei also C eine Teilmenge von $(X\times 0) \cup (A\times I)$, so daß $C \cap (X\times 0)$ offen in $X\times 0$ und $C \cap (A\times I)$ offen in $A\times I$ ist.

Behauptung. C ist offen im Teilraum $(X\times 0) \cup (A\times I)$ von $X\times I$.

Beweis. Wir definieren $U \subset X$ durch
$$U := \{x \in X \mid (x,0) \in C\}.$$
U ist offen in X, da $C \cap (X\times 0)$ offen in $X\times 0$ ist.
Ferner definieren wir offene Teilmengen $U_1, U_2, U_3, \ldots$ von X durch

$U_n := \bigcup \{V \mid V$ ist offene Teilmenge von X und

$(V \cap A) \times [0,\frac{1}{n}[\subset C\}$.

Wir setzen

$$B := U \times 0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}((A \cap U_n) \times [0,\tfrac{1}{n}[) \ .$$

Behauptung.

(1) $C = (C \cap (A \times]0,1])) \cup B$.

Beweis von (1). " $\subset$ " Sei $c \in C \subset (X \times 0) \cup (A \times I)$.

Fall 1: $c = (x,0)$ für ein $x \in X$. Dann $c \in U \times 0 \subset B$.

Fall 2: $c = (a,t)$ für ein $a \in A$, $t \in]0,1]$. Dann $c \in C \cap (A \times]0,1])$.

" $\supset$ " Zu zeigen ist: $B \subset C$.

Sei $b \in B$. Fall 1: $b \in U \times 0$. Dann $b \in C$ nach Definition von U. Fall 2: $b \in (A \cap U_n) \times [0,\frac{1}{n}[$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$, d.h. $b = (a,t)$ für ein $a \in A \cap U_n$ und ein $t \in [0,\frac{1}{n}[$. Da $a \in A \cap U_n$, gibt es eine offene Teilmenge V von X mit $a \in A \cap V$ und $(V \cap A) \times [0,\frac{1}{n}[\subset C$. Also $b = (a,t) \in C$.

Wir betrachten die Gleichung (1).

$C \cap (A \times I)$ ist nach Voraussetzung offen in $A \times I$.

Daher ist $C \cap (A \times]0,1])$ offen in $A \times]0,1]$.

$A \times]0,1]$ ist offen in $(X \times 0) \cup (A \times I)$. Also ist $C \cap (A \times]0,1])$ offen in $(X \times 0) \cup (A \times I)$.

Wenn wir zeigen:

(2) B ist offen in $(X \times 0) \cup (A \times I)$,

haben wir bewiesen, daß C offen in $(X \times 0) \cup (A \times I)$ ist.

Zunächst weisen wir nach

(3) $A \cap U = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

(4) Ist V eine offene Teilmenge von X mit $V \cap A \subset U_n$, dann gilt $V \subset U_n$.

Zu (3): "$\supset$" Sei $x \in A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Dann gibt es n_o mit $x \in A \cap U_{n_o}$. Es existiert dann also eine offene Teilmenge V von X mit $x \in A \cap V$ und $(V \cap A)\times[0,\frac{1}{n_o}[\subset C$. Also $(x,0) \in C$, d.h. $x \in U$ und daher $x \in A \cap U$.

"$\subset$" Sei $x \in A \cap U$. Also $(x,0) \in C$ und $x \in A$, also $(x,0) \in C \cap (A\times I)$. Da $C \cap (A\times I)$ nach Voraussetzung offen in $A\times I$ ist, existiert eine offene Teilmenge V' von A und eine natürliche Zahl $n_o \geq 1$ mit $(x,0) \in V'\times[0,\frac{1}{n_o}[\subset C$. Da V' offen in A ist, existiert eine offene Teilmenge V von X mit $V' = V \cap A$.

Also $(x,0) \in V'\times[0,\frac{1}{n_o}[= (V \cap A)\times[0,\frac{1}{n_o}[\subset C$, also $x \in U_{n_o}$, also $x \in A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Zu (4): Wir zeigen: $(V \cap A)\times[0,\frac{1}{n}[\subset C$.

Sei $v \in V \cap A$, also $v \in U_n$, da $V \cap A \subset U_n$. Es gibt also eine offene Teilmenge W von X mit $v \in W \cap A$ und $(W \cap A)\times[0,\frac{1}{n}[\subset C$. Also $\{v\}\times[0,\frac{1}{n}[\subset C$.

Aus (4) folgt insbesondere: eine offene Teilmenge von X , die A nicht trifft, ist Teilmenge von U_n für alle n.

Daraus ergibt sich unmittelbar:

(5) $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bar{A}$, wo $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A in X bezeichnet.

Wir nutzen jetzt die Voraussetzung " $(X\times 0) \cup (A\times I)$ ist Retrakt von $X\times I$ " aus und beweisen

(6) $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$:

Sei $r: X\times I \longrightarrow (X\times 0) \cup (A\times I)$ eine Retraktion.

Ist $t \in]0,1]$, dann ist $A\times t$ die abgeschlossene Hülle von

$A \times t$ in $(X \times 0) \cup (A \times I)$. Da r stetig ist und die Punkte von $A \times I$ festläßt, gilt für $t \in]0,1]$:

(6') $r(\bar{A} \times t) = A \times t$.

Wir behaupten:

(6") $r((X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \times I) \subset (X - U_n) \times I$ für alle n.

<u>Beweis von (6")</u>: Sei $x \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $t \in I$.

Wir nehmen an: es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $r(x,t) \in U_n \times I$. Da r stetig ist und U_n offen in X ist, gäbe es dann offene Umgebungen V und M von x bzw. t in X bzw. I mit $r(V \times M) \subset U_n \times I$.

Es würde folgen:

$$(V \cap A) \times t = r((V \cap A) \times t) \subset U_n \times I ,$$

also $V \cap A \subset U_n$, daher nach (4) $V \subset U_n$ und somit $x \in U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch, d.h. (6") ist bewiesen.

Sei jetzt $x \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Aus (5), (6'), (6") und (3) folgt für alle $t \in]0,1]$:

$r(x,t) \in (A \cap (X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)) \times I = (A \cap (X - U)) \times I \subset (X - U) \times I$

und daher, da r stetig ist und $X - U$ abgeschlossen in X ist:

$(x,0) = r(x,0) \in (X - U) \times I$, also $x \in X - U$.

Das zeigt: $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset X - U$, d.h. (6) ist bewiesen.

Wir definieren jetzt: $V_n := U \cap U_n$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Dann gilt:

(7) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$,

denn $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cap U_n) = U \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$, da

nach (6) $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Wir behaupten:

(8) $A \cap U_n = A \cap V_n$.

Beweis von (8): $A \cap U_n \supset A \cap V_n$, da $V_n \subset U_n$.
Sei $x \in A \cap U_n$. Da $x \in U_n$, gibt es eine offene Teilmenge W von X mit $x \in W$ und $(W \cap A) \times [0, \frac{1}{n}[\subset C$.
Da $x \in W \cap A$, folgt $(x,0) \in C$, d.h. $x \in U$.
Also $x \in A \cap U_n \cap U = A \cap V_n$.

Mit Hilfe von (7) und (8) beweist man leicht:

(9) $B = ((X \times 0) \cup (A \times I)) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \times [0, \frac{1}{n}[)$.

Da V_n offen in X ist, folgt aus (9): B ist offen in $(X \times 0) \cup (A \times I)$.
Wir haben also (2) bewiesen und sind fertig. ■

Literaturverzeichnis

[1] Blakers, A.L.; Massey, W.S., The homotopy groups of a triad II. Ann. of Math. 55 (1952), 192-201.

[2] Bourbaki, N., Eléments de mathématique, Livre III, Topologie générale, Chapitre 9, Utilisation des nombres réels en topologie générale, 2e édition. Hermann, Paris (1958).

[3] ———, Eléments de mathématique, Livre III, Topologie générale, Chapitre 10, Espaces fonctionnels, 2e édition. Hermann, Paris (1961).

[4] Brinkmann, H.-B.; Puppe, D., Kategorien und Funktoren. Lecture Notes in Mathematics No. 18, Springer, Berlin (1966).

[5] Brown, R., Elements of Modern Topology. Mc Graw-Hill, London (1968).

[6] Dold, A., Partitions of unity in the theory of fibrations. Ann. of Math. 78 (1963), 223-255.

[7] ———, Halbexakte Homotopiefunktoren. Lecture Notes in Mathematics No. 12, Springer, Berlin (1966).

[8] Dold, A., Thom, R., Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. Ann. of Math. 67 (1958), 239-281.

[9] Eilenberg, S.; Steenrod, N., Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press (1952).

[10] Freudenthal, H., Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Compositio Math. 5 (1937), 299-314.

[11] Hilton, P.J., An Introduction to Homotopy Theory. Cambridge University Press (1961).

[12] Hu, S.T., Homotopy Theory. Academic Press, New York and London (1959).

[13] Hurewicz, W.; Wallman, H., Dimension Theory. Princeton University Press (1948).

[14] James, I.M., Reduced product spaces. Ann. of Math. 62 (1955), 170-197.

[15] Kamps, K.H., Faserungen und Cofaserungen in Kategorien mit Homotopiesystem. Dissertation, Saarbrücken (1968).

[16] Lang, S., Introduction to Differentiable Manifolds. Interscience Publishers, New York, London (1962).

[17] Mitchell, B., Theory of categories. Academic Press, New York (1965).

[18] Nomura, Y., On mapping sequences. Nagoya Math. J. 17 (1960), 111-145.

[19] Puppe, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math. Zeitschrift 69 (1958), 299-344.

[20] ——————, Faserräume. Vorlesungsausarbeitung, Saarbrücken (1964).

[21] ——————, Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien. Arch. Math. 18 (1967), 81-88.

[22] ——————, Die Einhängungssätze im Aufbau der Homotopietheorie. Jahresbericht DMV 71 (1969), 48-54.

[23] Schubert, H., Topologie. B.G. Teubner, Stuttgart (1964).

[24] Spanier, E.H., Algebraic Topology. Mc Graw-Hill, New York (1966).

[25] Steenrod, N., The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press (1951).

[26] Strøm, A., Note on cofibrations. Math. Scand. 19 (1966), 11-14.

[27] ——————, Note on cofibrations II. Math. Scand. 22 (1968), 130-142.

[28] Puppe, D., Some well known weak homotopy equivalences are genuine homotopy equivalences. Erscheint demnächst in Symposia Mathematica Vol. V, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Universität Rom, Academic Press.

Stichwortverzeichnis