

## Anhang

In diesem Anhang tragen wir den Beweis von Satz (1.19)(b) nach.

Satz. (vgl. Puppe [21], Fußnote <sup>1)</sup> auf S.81, Strøm [27], 2. Lemma 3).

$X$  sei ein topologischer Raum,  $A$  ein Teilraum von  $X$ ,  
 $i : A \subset X$  die Inklusion.

Behauptung. Ist  $(X \times 0) \cup (A \times I)$  Retrakt von  $X \times I$ , dann ist die in (1.18) definierte bijektive stetige Abbildung  
 $l : Z_1 \longrightarrow (X \times 0) \cup (A \times I)$  ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir folgen Strøm [27], 2. Lemma 3.

Nachzuweisen ist die Stetigkeit von  $l^{-1}$ .

Zunächst identifizieren wir die dem Abbildungszyylinder von  $i$  zugrunde liegende Menge unter der bijektiven Abbildung  $l$  mit  $(X \times 0) \cup (A \times I)$ .

Wir haben dann zu zeigen: die durch das Produkt  $X \times I$  auf  $(X \times 0) \cup (A \times I)$  induzierte Teilraumtopologie ist feiner als die Topologie des Abbildungszyinders.

Sei also  $C$  eine Teilmenge von  $(X \times 0) \cup (A \times I)$ , so daß  $C \cap (X \times 0)$  offen in  $X \times 0$  und  $C \cap (A \times I)$  offen in  $A \times I$  ist.

Behauptung.  $C$  ist offen im Teilraum  $(X \times 0) \cup (A \times I)$  von  $X \times I$ .

Beweis. Wir definieren  $U \subset X$  durch

$$U := \{x \in X \mid (x, 0) \in C\}.$$

$U$  ist offen in  $X$ , da  $C \cap (X \times 0)$  offen in  $X \times 0$  ist.

Ferner definieren wir offene Teilmengen  $U_1, U_2, U_3, \dots$  von  $X$  durch

$$U_n := \bigcup \{V \mid V \text{ ist offene Teilmenge von } X \text{ und}$$

$$(V \cap A) \times [0, \frac{1}{n}[ \subset C \}.$$

Wir setzen

$$B := U \times 0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((A \cap U_n) \times [0, \frac{1}{n}[ ).$$

Behauptung.

$$(1) C = (C \cap (Ax]0, 1]) \cup B.$$

Beweis von (1). "  $\subset$  " Sei  $c \in C \subset (X \times 0) \cup (AxI)$ .

Fall 1:  $c = (x, 0)$  für ein  $x \in X$ . Dann  $c \in U \times 0 \subset B$ .

Fall 2:  $c = (a, t)$  für ein  $a \in A$ ,  $t \in ]0, 1[$ . Dann

$$c \in C \cap (Ax]0, 1]).$$

"  $\supset$  " Zu zeigen ist:  $B \subset C$ .

Sei  $b \in B$ . Fall 1:  $b \in U \times 0$ . Dann  $b \in C$  nach Definition von  $U$ . Fall 2:  $b \in (A \cap U_n) \times [0, \frac{1}{n}[$  für eine natürliche

Zahl  $n \geq 1$ , d.h.  $b = (a, t)$  für ein  $a \in A \cap U_n$  und ein  $t \in [0, \frac{1}{n}[$ . Da  $a \in A \cap U_n$ , gibt es eine offene Teilmenge

$V$  von  $X$  mit  $a \in A \cap V$  und  $(V \cap A) \times [0, \frac{1}{n}[ \subset C$ .

Also  $b = (a, t) \in C$ .

Wir betrachten die Gleichung (1).

$C \cap (AxI)$  ist nach Voraussetzung offen in  $AxI$ .

Daher ist  $C \cap (Ax]0, 1])$  offen in  $Ax]0, 1[$ .

$Ax]0, 1[$  ist offen in  $(X \times 0) \cup (AxI)$ . Also ist  $C \cap (Ax]0, 1])$  offen in  $(X \times 0) \cup (AxI)$ .

Wenn wir zeigen:

$$(2) B \text{ ist offen in } (X \times 0) \cup (AxI),$$

haben wir bewiesen, daß  $C$  offen in  $(X \times 0) \cup (AxI)$  ist.

Zunächst weisen wir nach

$$(3) A \cap U = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

(4) Ist  $V$  eine offene Teilmenge von  $X$  mit

$$V \cap A \subset U_n, \text{ dann gilt } V \subset U_n.$$

Zu (3): " $\supset$ " Sei  $x \in A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ .

Dann gibt es  $n_0$  mit  $x \in A \cap U_{n_0}$ . Es existiert dann also eine offene Teilmenge  $V$  von  $X$  mit  $x \in A \cap V$  und  $(V \cap A) \times ]0, \frac{1}{n_0}[ \subset C$ . Also  $(x, 0) \in C$ , d.h.  $x \in U$  und daher  $x \in A \cap U$ .

" $\subset$ " Sei  $x \in A \cap U$ . Also  $(x, 0) \in C$  und  $x \in A$ , also  $(x, 0) \in C \cap (A \times I)$ . Da  $C \cap (A \times I)$  nach Voraussetzung offen in  $A \times I$  ist, existiert eine offene Teilmenge  $V'$  von  $A$  und eine natürliche Zahl  $n_0 \geq 1$  mit  $(x, 0) \in V' \times ]0, \frac{1}{n_0}[ \subset C$ . Da  $V'$  offen in  $A$  ist, existiert eine offene Teilmenge  $V$  von  $X$  mit  $V' = V \cap A$ .

Also  $(x, 0) \in V' \times ]0, \frac{1}{n_0}[ = (V \cap A) \times ]0, \frac{1}{n_0}[ \subset C$ , also  $x \in U_{n_0}$ , also  $x \in A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ .

Zu (4): Wir zeigen:  $(V \cap A) \times ]0, \frac{1}{n}[ \subset C$ .

Sei  $v \in V \cap A$ , also  $v \in U_n$ , da  $V \cap A \subset U_n$ . Es gibt also eine offene Teilmenge  $W$  von  $X$  mit  $v \in W \cap A$  und  $(W \cap A) \times ]0, \frac{1}{n}[ \subset C$ . Also  $\{v\} \times ]0, \frac{1}{n}[ \subset C$ .

Aus (4) folgt insbesondere: eine offene Teilmenge von  $X$ , die  $A$  nicht trifft, ist Teilmenge von  $U_n$  für alle  $n$ .

Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$(5) \quad X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bar{A}, \text{ wo } \bar{A} \text{ die abgeschlossene Hülle von } A \text{ in } X \text{ bezeichnet.}$$

Wir nutzen jetzt die Voraussetzung " $(X \times 0) \cup (A \times I)$  ist Retrakt von  $X \times I$ " aus und beweisen

$$(6) \quad U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n:$$

Sei  $r: X \times I \rightarrow (X \times 0) \cup (A \times I)$  eine Retraktion.

Ist  $t \in ]0, 1]$ , dann ist  $A \times t$  die abgeschlossene Hülle von

$Ax_t$  in  $(X \times 0) \cup (A \times I)$ . Da  $r$  stetig ist und die Punkte von  $A \times I$  festläßt, gilt für  $t \in ]0, 1]$ :

$$(6') \quad r(\overline{A} \times t) = A \times t.$$

Wir behaupten:

$$(6'') \quad r((X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \times I) \subset (X - U_n) \times I \quad \text{für alle } n.$$

Beweis von (6''): Sei  $x \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ ,  $t \in I$ .

Wir nehmen an: es gibt eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  mit  $r(x, t) \in U_n \times I$ . Da  $r$  stetig ist und  $U_n$  offen in  $X$  ist, gäbe es dann offene Umgebungen  $V$  und  $M$  von  $x$  bzw.  $t$  in  $X$  bzw.  $I$  mit  $r(V \times M) \subset U_n \times I$ .

Es würde folgen:

$$(V \cap A) \times t = r((V \cap A) \times t) \subset U_n \times I,$$

also  $V \cap A \subset U_n$ , daher nach (4)  $V \subset U_n$  und somit

$x \in U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ . Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch, d.h. (6'') ist bewiesen.

Sei jetzt  $x \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ . Aus (5), (6'), (6'') und (3) folgt für alle  $t \in ]0, 1]$ :

$$r(x, t) \in (A \cap (X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)) \times I = (A \cap (X - U)) \times I \subset (X - U) \times I$$

und daher, da  $r$  stetig ist und  $X - U$  abgeschlossen in  $X$  ist:

$$(x, 0) = r(x, 0) \in (X - U) \times I, \text{ also } x \in X - U.$$

Das zeigt:  $X - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset X - U$ , d.h. (6) ist bewiesen.

Wir definieren jetzt:  $V_n := U \cap U_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Dann gilt:

$$(7) \quad U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

denn  $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cap U_n) = U \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = U$ , da  
nach (6)  $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ .

Wir behaupten:

$$(8) A \cap U_n = A \cap V_n .$$

Beweis von (8):  $A \cap U_n \supset A \cap V_n$ , da  $V_n \subset U_n$ .

Sei  $x \in A \cap U_n$ . Da  $x \in U_n$ , gibt es eine offene Teilmenge

$W$  von  $X$  mit  $x \in W$  und  $(W \cap A) \times [0, \frac{1}{n}[ \subset C$ .

Da  $x \in W \cap A$ , folgt  $(x, 0) \in C$ , d.h.  $x \in U$ .

Also  $x \in A \cap U_n \cap U = A \cap V_n$ .

Mit Hilfe von (7) und (8) beweist man leicht:

$$(9) B = ((X \times 0) \cup (A \times I)) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \times [0, \frac{1}{n}[).$$

Da  $V_n$  offen in  $X$  ist, folgt aus (9):  $B$  ist offen in  $(X \times 0) \cup (A \times I)$ .

Wir haben also (2) bewiesen und sind fertig. ■

### Literaturverzeichnis

- [1] Blakers, A.L.;        The homotopy groups of a triad II.  
Massey, W.S.,        Ann. of Math. 55 (1952), 192-201.
- [2] Bourbaki, N.,        Eléments de mathématique, Livre III,  
Topologie générale, Chapitre 9,  
Utilisation des nombres réels en topologie  
générale, 2<sup>e</sup> édition. Hermann, Paris  
(1958).
- [3] —————,        Eléments de mathématique, Livre III,  
Topologie générale, Chapitre 10, Espaces  
fonctionnels, 2<sup>e</sup> édition. Hermann, Paris  
(1961).
- [4] Brinkmann, H.-B.;    Kategorien und Funktoren. Lecture Notes in  
Puppe, D.,        Mathematics No. 18, Springer, Berlin  
(1966).
- [5] Brown, R.,        Elements of Modern Topology. Mc Graw-Hill,  
London (1968).
- [6] Dold, A.,        Partitions of unity in the theory of  
fibrations. Ann. of Math. 78 (1963),  
223-255.
- [7] —————,        Halbexakte Homotopiefunktoren. Lecture  
Notes in Mathematics No. 12, Springer,  
Berlin (1966).
- [8] Dold, A.,        Quasifaserungen und unendliche symme-  
Thom, R.,        trische Produkte. Ann. of Math. 67 (1958),  
239-281.
- [9] Eilenberg, S.;        Foundations of Algebraic Topology.  
Steenrod, N.,        Princeton University Press (1952).

- [10] Freudenthal, H., Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. *Compositio Math.* 5 (1937), 299-314.
- [11] Hilton, P.J., *An Introduction to Homotopy Theory.* Cambridge University Press (1961).
- [12] Hu, S.T., *Homotopy Theory.* Academic Press, New York and London (1959).
- [13] Hurewicz, W.; Wallman, H., *Dimension Theory.* Princeton University Press (1948).
- [14] James, I.M., Reduced product spaces. *Ann. of Math.* 62 (1955), 170-197.
- [15] Kamps, K.H., *Faserungen und Cofaserungen in Kategorien mit Homotopiesystem.* Dissertation, Saarbrücken (1968).
- [16] Lang, S., *Introduction to Differentiable Manifolds.* Interscience Publishers, New York, London (1962).
- [17] Mitchell, B., *Theory of categories.* Academic Press, New York (1965).
- [18] Nomura, Y., On mapping sequences. *Nagoya Math. J.* 17 (1960), 111-145.
- [19] Puppe, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. *Math. Zeitschrift* 69 (1958), 299-344.
- [20] —————, *Faserräume. Vorlesungsausarbeitung,* Saarbrücken (1964).
- [21] —————, *Bemerkungen über die Erweiterung von Homotopien.* *Arch. Math.* 18 (1967), 81-88.

- [22] ———— , Die Einhängungssätze im Aufbau der Homotopietheorie. Jahresbericht DMV 71 (1969), 48-54.
- [23] Schubert, H., Topologie. B.G. Teubner, Stuttgart (1964).
- [24] Spanier, E.H., Algebraic Topology. Mc Graw-Hill, New York (1966).
- [25] Steenrod, N., The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press (1951).
- [26] Strøm, A., Note on cofibrations. Math. Scand. 19 (1966), 11-14.
- [27] ———— , Note on cofibrations II. Math. Scand. 22 (1968), 130-142.
- [28] Puppe, D., Some well known weak homotopy equivalences are genuine homotopy equivalences. Erscheint demnächst in Symposia Mathematica Vol. V, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Universität Rom, Academic Press.



## Stichwortverzeichnis

	Seite		Seite
Abbildung, fasernweise	8	Einhängung, reduzierte	176
————, konstante	12	Endpunkt	103
————, punktierte	9	evaluation map	89
———— über L	8	Exponentialgesetz	87, 88
———— unter K	8		
Abbildungskegel	41	Faser	8
Abbildungswegeraum	100	Faserung	95
Abbildungszyylinder	24	————, induzierte	127
————, doppelter	40	————, punktierte	106
A-einfach	163	———— über L	106
Äquivalenzrelation, natür- liche	3	Fundamentalgruppe	160
Anfangspunkt	103	Fundamentalgruppoid	160
Anheften von Zellen	140	Grundpunkt	9
Ausschneidungssatz von Blakers-Massey	211	h-Äquivalenz	12
		———— über L	17
Bewertungsabbildung	89	———— unter K	17
		———— von Paaren	19
Cofaserung	23	h-assoziativ	182
————, induzierte	140	h-Cofaserung	44
————, punktierte	43	————, induzierte	140
Co-H-Raum	193	HEE	22
Copunkt	8	HEE bis auf Homotopie	44
Coverknüpfung	192	h-Faserung	110
		————, induzierte	127
Deckhomotopieeigenschaft	94	h-invers	12
———— bis auf Homotopie	109	h-kommutativ	182
Deformationsretrakt	60	h-links invers	12
————, schwacher	60	Hof	68
————, starker	60	Hoffunktion	68
DHE	94	homotop	10
DHE bis auf Homotopie	109	————, fasernweise	16
dominiert in $\text{Top}^A$	44	————, punktiert	14
———— in $\text{Top}_B$	110	———— relativ K	14
		———— über L	15
einfach	164	———— unter K	13
Einhängung	176	————, vertikal	16

	Seite		Seite
Homotopie	10	Kategorie der Paare	9
————, fasernweise	16	———— der punktierten	
————, punktierte	14	topologischen Räume	9
———— relativ K	14	———— der Wege in X	159
———— über L	15	—— — von X unter K	159
———— unter K	13	Kompakt-Offen-Topologie	86
————, vertikale	16	kompessibel	211
———— von Paaren	19	linksinvers	2
Homotopieäquivalenz	12	Möbiusband	99
———— über L	17	n-einfach	164
———— unter K	17	nullhomotop	12
Homotopiecofaserung	44	Produktsatz für Cofaserungen	79
Homotopieerweiterungs-		Punkt	8
eigenschaft	22	Quadrat, cokartesisches	3
———— bis auf Homo-		————, kartesisches	5
topie	44	————, schwach cokarte-	
Homotopiefaserung	110	sches	4
Homotopiegruppe	197	————, schwach kartesisches	5
————, relative	200	Quasifaserung	210
homotopieinvers	12	Quotientkategorie	3
Homotopiekategorie	11	Raum über L	8
homotopielinksinvers	12	—— unter K	8
homotopierechtsinvers	12	rechtsinvers	2
Homotopiesatz für h-		regulär, vollständig	72
Cofaserungen	142	Retrakt	59
———— für h-Fase-		————, schwacher	59
rungen	131	Retraktion	2
H-Raum	183	Satz von James	225
————, punktierter	183	Schleifenraum	177
h-rechtsinvers	12	Schnitt	2
Hurewicz-Faserung	95	Schnittenerweiterungseigen-	
h-wohlpunktiert	164	schaft	145
		———— unter K	8
invers	2	Schnittenerweiterungssatz	149
Isomorphismus	2		
Jameskonstruktion	225		
Kategorie der Objekte			
über L	8		
unter K	8		

	Seite
<b>schrumpfbar</b>	121
<b>SEE</b>	145
<b>shrinkable</b>	121
<b>trivial</b>	96
<b>——, lokal</b>	97
<b>Überdeckung</b>	143
<b>——, lokal endliche</b>	143
<b>——, nullhomotope</b>	154
<b>——, numerierbare</b>	143
<b>——, offene</b>	143
<b>Überlagerung</b>	97
<b>Verknüpfung</b>	182
<b>Weg</b>	103
<b>——, normierter</b>	103
<b>Wegeraum</b>	106
<b>wohlpunktiert</b>	164
<b>Zerlegung der Eins</b>	143
<b>zusammenziehbar</b>	12
<b>——, lokal</b>	137
<b>——, lokal punktiert</b>	73
<b>Zylinder</b>	14