

Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben

Aufgaben in § 1. 6. Durch die Ungleichungen werden die folgenden Mengen charakterisiert:

- (a) $(-1, 4)$; (b) $(-1, 2) \cup (4, \infty)$; (c) $(4, \infty)$; (d) \emptyset ; (e) $(\frac{5}{4}, \infty)$; (f) \mathbb{R} .

10. Man betrachte den Ausdruck $(\varepsilon a - \frac{b}{\varepsilon})^2$.

11. Man kann $s = \sup A$ nehmen.

12. Aus (A13) folgt (A13*) mit A11. Nun gelte (A13*), und es sei A' eine nach oben beschränkte Menge. Ist B die Menge aller oberen Schranken und $A = \mathbb{R} \setminus B$, so gilt $A < B$. Die Schnitzzahl s ist gleich $\sup A'$, wie man leicht sieht.

14. Das kleinste Intervall, welches die Menge enthält, ist

- (a) $[0, 1)$; (b) $(-\infty, 1)$; (c) $[2, \frac{5}{2}]$; (d) $(-3, 1)$.

Aufgaben in § 2. 1. $N_3 = \{1, -1\}$, $N_4 = \{\pm \frac{1}{2}, \pm 2, 1\}$,

$$N_5 = \{\pm \frac{1}{3}, \pm 3, \pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\}.$$

5. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die (paarweise verschiedenen) Nullstellen von P und (a_n) eine Lösung von (R). Gesucht sind Koeffizienten x_1, \dots, x_k derart, daß

$$(+) \quad a_n = x_1 \lambda_1^n + x_2 \lambda_2^n + \dots + x_k \lambda_k^n \quad \text{für } n=0, 1, 2, \dots$$

gilt. Die ersten k dieser Gleichungen bilden ein System von k linearen Gleichungen für k Unbekannte x_i . Die Koeffizientenmatrix (λ_i^j) ($i=1, \dots, k; j=0, \dots, k-1$) ist die Vandermonde-Matrix der Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; diese ist regulär (vgl. M. Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, S. 126). Daraus folgt die eindeutige Darstellung. Die Gleichung (+) gilt dann für alle n , da links und rechts eine Lösung von (R) mit denselben Anfangswerten steht.

10. (a) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$; (b) A^2 für $n=4m$ und $n=4m+1$, $A^2 + A$ für $n=4m+2$ und $n=4m+3$,

wobei $A = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$ und $m \in \mathbb{N}$ ist.

$$11. (a) \binom{n}{k} \left(\frac{364}{365}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{365}\right)^k; \quad (b) \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left(\frac{364}{365}\right)^{n-j} \left(\frac{1}{365}\right)^j.$$

Für $n=200$, $k=2$ ergibt sich als Wahrscheinlichkeit (a) 0,087 und (b) 0,105.

12. $\inf M = 1$, $\sup M = \infty$ für $\lambda > 1$, $\inf M = \sup M = 1$ für $\lambda = 1$,
 $\inf M = -\infty$, $\sup M = 1$ für $\lambda < 1$.

14. $f(n) = 6n - 2$, $a = 2$.

Aufgaben in § 3. 7. Für die Dirichlet-Funktion ist $P = \mathbb{Q}$.

Aufgaben in § 4. 4. Man kann den folgenden Beweisgang einschlagen:

(i) $\liminf A(a_1, \dots, a_n)$ ändert sich nicht, wenn man endlich viele a_n abändert. (ii) Es sei $\alpha = \liminf a_n$ endlich und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist $a_n > \alpha - \varepsilon$ für fast alle n , also nach Abänderung für alle n , also $A(a_1, \dots, a_n) > \alpha - \varepsilon$ für alle n , also $\alpha - \varepsilon \leq \liminf A(a_1, \dots, a_n)$. Ähnlich erledigt man den Fall $\alpha = \infty$; im Fall $\alpha = -\infty$ ist nichts zu beweisen.

9. Alle Folgen sind konvergent. Als Grenzwert ergibt sich (a) $-\frac{7}{2}$, (b) 0, (c) $\frac{1}{2}$, (d) 0, (e) 1, (f) 0, (g) $\frac{1}{2}$, (h) 0, (i) b (in allen Fällen).

10. Alle Folgen sind streng monoton.

15. n_0 ist die kleinste Zahl $\geq q^{1/x}/(1 - q^{1/x})$. In den beiden speziellen Fällen ist $n_0 = 3$ bzw. $n_0 = 14$.

16. (a) Die Folge ist monoton wachsend für $\lambda \geq \lambda_\alpha$, monoton fallend für $\lambda \leq \lambda_\alpha$ mit $\lambda_\alpha = \alpha/(1 + \alpha^2)$. (b) Mit der Bezeichnung $\xi_0 = (1 - \sqrt{1 - 4\lambda^2})/2\lambda$, $\xi_1 = (1 + \sqrt{1 - 4\lambda^2})/2\lambda$ gilt im Fall $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$: $a_n \nearrow \xi_0$ für $0 \leq \alpha < \xi_0$, $a_n \searrow \xi_0$ für $\xi_0 < \alpha < \xi_1$, $a_n \nearrow \infty$ für $\alpha > \xi_1$. Für $\alpha = \xi_0$ bzw. ξ_1 ist $a_n = \xi_0$ bzw. ξ_1 für alle n . Im Fall $\lambda > 1/2$ gilt $a_n \nearrow \infty$ für alle n .

17. Die Folge konvergiert.

18. Die Aufgabe erscheint schwierig; der Autor würde sich über positive Ergebnisse aus dem Leserkreis freuen. Als Grenzwert kommt offenbar nur 0 oder 2 in Frage. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß ein $\alpha \in (1, 2)$ mit $\lim a_n = 2$ existiert; sie stammen von Herrn Dr. R. Redlinger, Karlsruhe.

Es seien A, B, C die folgenden Teilmengen von $(1, \infty)$: $\alpha \in A$ bzw. B , wenn (a_n) streng monoton wachsend und beschränkt bzw. unbeschränkt ist, $\alpha \in C$ sonst. Man sieht leicht, daß $\lim a_n = 2$ für $\alpha \in A$, $B \supset [2, \infty)$ und $\frac{3}{2} \in C$ ist. Es ist $\alpha \in B$ genau dann, wenn es ein n mit $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ und $a_n > 2$ gibt. Daraus folgt, daß B offen ist. Es ist $\alpha \in C$ genau dann, wenn es ein n mit $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $a_{n+1} \leq a_n$ gibt. Daraus folgt, daß auch C offen ist (im Fall $a_{n+1} < a_n$ ist es einfach, im Fall $a_{n+1} = a_n$ ist $a_{n-1} = a_{n+2} < a_{n+1}$). Man beachte, daß immer $\alpha > 1$ vorausgesetzt ist. Also ist $(1, \infty) = A \cup B \cup C$, wobei die Mengen B, C offen, disjunkt und nicht leer sind. Daraus folgt $A \neq \emptyset$.

19. Man zeige, daß (a_n) eine wachsende Folge, (b_n) eine fallende Folge und $a_n b_n$ konstant ist. Daraus folgt dann $\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

20. Die Behauptung folgt aus $c^n \leq a^n + b^n + c^n \leq 3c^n$.

21. Die Folge (a_n) besitze eine konvergente Teilfolge, etwa (b_n) mit $\lim b_n = \alpha$. Sind unendlich viele $b_n > \alpha$, so gibt es ein $b_{n_1} > \alpha$, sodann ein $b_{n_2} \in (\alpha, b_{n_1})$, ein $b_{n_3} \in (\alpha, b_{n_2})$, usw. Die Folge (b_{n_k}) ist monoton fallend. Die anderen Fälle werden ähnlich behandelt.

Aufgaben in § 5. 2. Als Summe ergibt sich nacheinander $\frac{1}{24}, \frac{1}{60}, \frac{1}{18}, \frac{1}{90}$.

7. (b) Man reduziere das Problem zunächst auf den Fall $P(k) = k^m$ und danach auf den Fall $Q(k) = k^{m+1}$.

9. Konvergent sind (a), (b) für $\alpha = -3$, (d), (f), (g), (h), (j), (k), (m) für $|\alpha| < 1$. Divergent sind (b) für $\alpha \neq -3$, (c), (e), (i), (l), (m) für $|\alpha| \geq 1$.

10. Konvergent, divergent, konvergent.

11. Man bestimme die Anzahl der n_k im Intervall $(2^n, 2^{n+1})$ bzw. $(10^n, 10^{n+1})$.

12. (a) $x/(1-x)$ für $|x| < 1$, $1/(1-x)$ für $|x| > 1$.

(b) Es ist $s_n = 1 - [(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)]^{-1}$, also $\lim s_n = 1$.

13. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für $|\alpha| > 1$ (i. a. divergent für $0 < |\alpha| \leq 1$).

15. $\lim a_n = 0$, die Reihe divergiert.

Aufgaben in § 6. 7. (a) $-\frac{1}{4}$, (b) $-\frac{1}{2}$, (c) r , (d) $\frac{3}{2}$, (e) 1.

8. (a) \mathbb{R} , (b) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

9. Es gilt $f(x+h)/f(h) \leq f(x) \leq f(x+h)f(-h)$ für kleine $|h|$.

13. (a) und (b) sind einfach, man hat $g(\xi) = f(\xi -)$ zu setzen. Offenbar ist $f(b) - f(a) = g(b) - g(a) + \omega(\xi)$ und $\omega_f(x) = \omega_g(x)$ für $x \neq \xi$. Bei (c) und (d) kann man dann nacheinander $f_1(x) = f(x) - \omega(\xi_1)H(x - \xi_1)$, $f_2(x) = f_1(x) - \omega(\xi_2)H(x - \xi_2)$, ... betrachten und zeigen, daß alle f_k wachsend sind und daß

$$f_n(x) = f(x) - \sum_1^n \omega(\xi_k)H(x - \xi_k), \quad f(b) - f(a) = f_n(b) - f_n(a) + \sum_1^n \omega(\xi_k)$$

ist. Die Behauptung folgt für $n \rightarrow \infty$ (falls es unendlich viele Unstetigkeitsstellen gibt).

16. Es besteht eine Darstellung $P_k(x) = P_k(x_0)L_0(x) + \dots + P_k(x_n)L_n(x)$, wobei die L_k Lagrange-Polynome sind. Daraus folgt die Behauptung ohne Mühe.

Aufgaben in § 7. 2. Aus $RQ = P$ und $\text{Grad } P < k$ folgt durch Vergleich der Koeffizienten von x^n für $n \geq k$:

$$0 = a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} \Rightarrow \gamma_i = -c_i.$$

Also ist $x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k = x^k Q\left(\frac{1}{x}\right)$ das charakteristische Polynom.

3. $Q(x) = 1 - (\gamma_1 x + \dots + \gamma_k x^k)$, $P(x) = Q(x)(a_0 + a_1 x + \dots)$. Die Koeffizienten von $P(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 - \gamma_1 a_0 \\ &\vdots \\ b_{k-1} &= a_{k-1} - (\gamma_1 a_{k-2} + \gamma_2 a_{k-3} + \dots + \gamma_{k-1} a_0). \end{aligned}$$

4. $1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + \dots$, allgemein $a_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$.

5. (a) 1, (b) 1, (c) 0, (d) -2, (e) $\frac{1}{6}$, (f) $\frac{1}{2}$, (g) 8 für $a = \frac{1}{2}$ und 0 sonst, (h) $-\frac{1}{2}$, (i) $\frac{1}{45}$.

6. Es ist $|f_n(x)| \leq n^{-3/2}$ (man kann etwa für $|x| \leq 1/\sqrt{n}$ und $|x| \geq 1/\sqrt{n}$ gesondert abschätzen). Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe und die Behauptung.

7. (a) $\frac{1}{e}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) 1, (d) $e^{-1/2}$, (e) 1, (f) 1, (g) 1, (h) e , (i) 1, (j) $3\sqrt{3}$, (k) 2.

8. (a) Nur für $x=0$ konvergent. (b) (c) (e) In \mathbb{R} konvergent, in beschränkten Intervallen gleichmäßig konvergent. (d) für $x > 0$ konvergent, in jedem Intervall $[\varepsilon, \infty)$ mit $\varepsilon > 0$ gleichmäßig konvergent. (f) In \mathbb{R} konvergent, in jedem Intervall $[k\pi + \varepsilon, (k+1)\pi - \varepsilon]$ gleichmäßig konvergent ($\varepsilon > 0, k \in \mathbb{Z}$).

9. (a) $\frac{e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2})^2}$ für $x \neq 0$; (b) $\frac{x^3}{1 - e^{-x^2}}$ für $x \neq 0$, 0 für $x = 0$;

(c) e^{e^x} für $x \in \mathbb{R}$; (d) $\cos \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ und $\cosh \sqrt{-x}$ für $x < 0$;

(e) $\frac{1}{e^{2+\cos x} - 1}$ für $x \in \mathbb{R}$; (f) $\exp(-\frac{1}{2}(1+x+x^2))$ für $x \in \mathbb{R}$.

10. (a) $0, 1, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{10}$; (b) $e, 0, -\frac{e}{2}, 0, \frac{e}{6}, 0$; (c) $0, 1, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{7}{360}$;

(d) $\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{7\sqrt{2}}{32}, \frac{7\sqrt{2}}{128}, -\frac{11\sqrt{2}}{2048}, -\frac{123\sqrt{2}}{4096}$; (e) $\log 3, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0$.

11. Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$. Es ist $a_n =$ Anzahl der Teiler von n (1 und n eingeschlossen), insbesondere $(a_1, \dots, a_6) = (1, 2, 2, 3, 2, 4)$.

12. Die Folge $(f_n(x))$ ist (a) gleichmäßig konvergent in $[0, 2]$, (b) konvergent in $[0, 2]$, gleichmäßig konvergent in $[\delta, 2-\delta]$, (c) gleichmäßig konvergent in \mathbb{R} , falls $\alpha \leq \frac{1}{2}$, konvergent in \mathbb{R} und gleichmäßig konvergent für $|x| \geq \delta$, falls $\alpha > \frac{1}{2}$, (e) konvergent in $(0, \infty)$, gleichmäßig konvergent in $[\delta, \infty)$; dabei ist δ eine beliebige positive Zahl. In allen anderen Fällen ist die Folge divergent.

Aufgaben in §8. 8. Mit $z = x + iy$ ergibt sich (a) Parallelstreifen $-1 < y < 0$,

(b) Ellipse $4x^2 + 10y^2 = 25$, (c) Parabel $y^2 = 1 + 2x$,

(d) Gerade $y + x = 1$ ohne $z = 1$, (e) Kreis $|z + \frac{4}{3}| = \frac{2}{3}$, (f) Gerade $y = x$.

10. $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, $\zeta = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = e^{i4\pi/3}$,

$z^{-1} = -\frac{1}{2}(1 + i) = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$, $\zeta^{-1} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = e^{i2\pi/3}$.

11. (a) $z_k = 2e^{i\phi_k}$, $\phi_k = \frac{6k-1}{15}\pi$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; (b) $\frac{1+i}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(1-i)$;

(c) $\pm i$, $\pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$; (d) $z_k = \frac{i \sin \phi_k}{1 + \cos \phi_k}$, $\phi_k = \frac{2k\pi}{5}$, $k=0, \dots, 4$.

13. $\frac{1}{4} \left(\frac{2}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3+(-1)^n)z^n$.

Aufgaben in §9. 4. Aus (a), (b) folgt (mit den Bezeichnungen von 9.1) $s(Z, f) \leq J(f, I) \leq S(Z, f)$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

5. Man kann so vorgehen: (i) $f \leq g \Rightarrow J(f, I) \leq J(g, I)$, (ii) $J(f \equiv 1, [a, b]) = b - a$, (iii) $|I| \inf f(I) \leq J(f, I) \leq |I| \sup f(I)$. Bei (ii) zeige man, daß $J(f \equiv 1, [0, a]) = \phi(a)$ für $a > 0$ und daß $\phi(r) = r$ für rationale $r > 0$ gilt.

6. Man schätze die Differenz $\sigma(Z, \xi, \eta) - \sigma(Z, \xi)$ ab.

7. $a_k = (-1)^{k-1} \frac{e^{2k\pi} + e^{\alpha(k-1)\pi}}{\alpha^2 + 1}$, $b_k = -\alpha a_k$.

9. Zur Existenz vgl. man Aufgabe 18. Das Integral hat den Wert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) = 1 - C \approx 0,4228$. Dabei ist C die Eulersche Konstante; vgl. 12.17.

10. Es ist $f(x) \geq M - \varepsilon$ in einem Teilintervall $[\alpha, \beta]$. Das Integral von f^n liegt also zwischen $(\beta - \alpha)(M - \varepsilon)^n$ und $(b - a)M^n$. Daraus folgt die Behauptung.

13. Als Limes ergibt sich $\int_0^1 \frac{dt}{x + yt} = \frac{1}{y} \log \left(1 + \frac{y}{x} \right)$.

Aufgaben in § 10. 3. $g(x) = F(x)/F(b)$ mit $F(x) = 0$ für $x < a$, $F(x) = \int_a^x f(t-a)f(b-t)dt$ für $x \geq a$.

9. Man benutze die Lagrangesche Form des Restgliedes in der Taylor-Entwicklung.

10. Die Eindeutigkeit von θ folgt aus der strengen Monotonie von f' . Der Bruch $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ ist einerseits gleich $f'(a+\theta h) = f'(a) + \theta h f''(\xi)$, andererseits nach der Taylor-Formel gleich $f'(a) + \frac{h}{2} f''(\xi')$, wobei $\xi, \xi' \in (a, a+h)$ ist. Die Behauptung folgt für $h \rightarrow 0$.

14. Als Limes ergibt sich $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$.

17. Das folgt aus dem Zwischenwertsatz für Ableitungen.

18. Satz von Rolle! Die Einfachheit der Nullstellen folgt durch Abzählung.

19. Man zeige, daß $|P_n(x) - T_n(x; a)| \leq M_1 |x-a|^{n+1}$ ist und daß daraus $P_n \equiv T_n$ folgt.

20. $T_2(x; 0) = e(1 - \frac{1}{2}x^2)$, $M = 1$ oder $\frac{e}{3}$.

21. (a) $e, 0, 0, \frac{e}{3}, 0, 0, -\frac{e}{18}$; (b) $0, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{96}, 0, \frac{1}{1440}$.

23. (a) -2 , (b) $\frac{1}{2}$, (c) 1 , (d) $\frac{1}{2}$, (e) e^{-1} , (f) 1 , (g) $\frac{1}{24}$, (h) 1 .

25. (a) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ für $x \geq 0$, $f'(x) = 0$ für $x \leq 0$; (b) $f'(x) = (x\sqrt{1+2x})^{-1}$ für $x > 0$;

(c) $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{12}$;

(d) $f'(x) = \frac{x(x^3 - 2)}{1 + 2x^3 + x^4 + x^6}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgaben in § 11. Aufgabe in 11.10. Es ist $|H| : |Z_H| = 7 : 18$, $|V| : |Z_V| = 5 : 8$.

Aufgabe in 11.26. Jeder Fixpunkt von f^2 entspricht entweder einem Fixpunkt von f (d.h. ξ_μ) oder einer 2-periodischen Bahn (dann ist auch $f(\xi)$ ein Fixpunkt). Da es höchstens 4 Fixpunkte gibt (Polynom 4. Grades), existiert höchstens eine 2-periodische Bahn. Für $\mu_0 < \mu \leq 2$ ist $(f^2)'(\xi_\mu) > 1$, andererseits $f^2(1) < 1$. Also existiert zwischen ξ_μ und 1 ein weiterer Fixpunkt, welcher nicht Fixpunkt von f ist. Für $\mu = 1$ ist $(0; 1)$, für $\mu = 5/4$ ist $(-0,1656854; 0,9656854)$ die 2-periodische Bahn.

Bemerkung. Für $\mu = 2$ ergibt sich $(-0,309017; 0,809017)$.

1. $V = \pi \int_0^a \cosh^2 x dx = \frac{\pi}{4} (a + \sinh 2a)$.

3. Man benutze das Restglied in der Form von Lagrange.

4. Die Funktion f ist stetig und streng konvex in $[0, \infty)$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -\infty$, $\min f = f\left(\frac{1}{e}\right)$. Die Funktion g ist in $[0, \infty)$ stetig differenzierbar, in $[0, \alpha]$ streng monoton

fallend, in $[\alpha, \infty)$ streng monoton wachsend mit $\alpha = 1/\sqrt{e}$, $g'(0) = 0$, $\min g = g(\alpha)$. Die Funktion h ist $[0, \infty)$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$.

10. (a) $\frac{1}{3}(x^3 \sin x^3 + \cos x^3)$; (b) $\frac{2}{\alpha} e^{\alpha\sqrt{x}}$ für $\alpha \neq 0$ sowie $2\sqrt{x}$ für $\alpha = 0$;
 (c) $-\frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$; (d) $4 \arctan \sqrt{x} - 2 \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$; (e) $\tan x - x$;
 (f) $\log(\log x)$; (g) $\frac{1}{2} \log(1 + e^{2x}) + \arctan(e^x)$; (h) $-\frac{1}{2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} - \frac{1}{6} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)^3$;
 (i) $\frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{x-1} + \log|x-1| + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2} \arctan x$;
 (j) $\log|e^{2x} - 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}$; (k) $\frac{1}{32} \cos 4x + \frac{1}{8} x \sin 4x - \frac{1}{4} x^2 \cos 4x$;
 (l) $\frac{1}{4} (\log x)^4$; (m) $\frac{1}{169} e^{2x} (52x \sin 3x - 78x \cos 3x + 36 \sin 3x - 15 \cos 3x)$;
 (n) $-\frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + x \arccos 2x$.

11. (a) $\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right) \approx 0,8670$; (b) $3 \arctan 3 - \frac{1}{2} \log 10 \approx 2,5958$;
 (c) $\frac{32}{5} (\log 2)^5 \approx 1,0240$; (d) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| - \frac{u}{u^2-1} \Big|_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \approx 2,4855$; (e) $\frac{1}{4}$;
 (f) $\arctan \sqrt{3} + \operatorname{Arsinh} \sqrt{3} \approx 2,3642$;
 (g) $\frac{a \cos a \sin b - b \sin a \cos b}{b^2 - a^2}$, falls $|a| \neq |b|$,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2a, \text{ falls } b = a, \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2a, \text{ falls } b = -a;$$

(h) $\frac{1}{6}$.

14. (a) $f(x)$ und $f(x - \pi)$ sind gerade; f ist 2π -periodisch. (b) $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 (c) Stellen lokaler Minima: $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); Stellen lokaler Maxima in $[0, 2\pi]$:
 $x_1 = \pi - \arccos \frac{1}{3} \approx 1,9106$, $x_2 = \pi + \arccos \frac{1}{3} \approx 4,3726$.
 (d) f hat an der Stelle $x \in [0, \pi)$ einen Wendepunkt $\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{18} (5 \pm \sqrt{97})$
 $\Leftrightarrow x_3 \approx 1,2980$ bzw. $x_4 \approx 2,5409$; f ist konvex in $[0, x_3]$ und in $[x_4, \pi]$, konkav in $[x_3, x_4]$.

15. (a) $|F| = 2$ bzw. $\frac{\pi}{2}$, (b) $(x_s, y_s) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$ bzw. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{8})$.
 (c) $V = \pi^2(r^2 + \frac{1}{2})$ bzw. $\pi^2(r^2 + r + \frac{3}{8})$, (d) $J = \frac{3}{8} V$ bzw. $\frac{3,5}{96} V$.

16. (a) Maximale x -Koordinate im Punkt $(\sqrt{2}, 0)$, maximale y -Koordinate in den Punkten $(\pm \frac{1}{2} \sqrt{3}, \frac{1}{2})$, (b) 1,

(c) $V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} y^2 dx = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{1+4x^2} - 1 - x^2) dx \approx 0,6440$,

(d) $V = \pi \int_{-1/2}^{1/2} 2\sqrt{1-4y^2} dy = \frac{1}{2} \pi^2 \approx 4,9348$.

Aufgaben in § 12. 1. Eine Stammfunktion zu $1/x \cdot \log x \cdots \log_{p-1} x \cdot (\log_p x)^{\alpha}$ ist $(\log_p x)^{1-\alpha} / (1-\alpha)$. Sie strebt gegen 0 für $x \rightarrow \infty$, falls $\alpha > 1$ ist, d.h. das entsprechende Integral konvergiert. Im Fall $\alpha = 1$ ist $\log_{p+1} x$ eine Stammfunktion. Diese strebt gegen ∞ für $x \rightarrow \infty$, d.h. das entsprechende Integral divergiert.

3. Es ist $\zeta(5) = 1,0369277548$.

7. Mit der Bezeichnung $g^+(x) = \max(g(x), 0)$, $g^-(x) = \max(-g(x), 0)$ ist

$$g = g^+ - g^-, \quad \int_0^p g^+ dx = \int_0^p g^- dx.$$

Für

$$a_n^+ = \int_{np}^{(n+1)p} fg^+ dx, \quad a_n^- = \int_{np}^{(n+1)p} fg^- dx, \quad a_n = \int_{np}^{(n+1)p} fg dx$$

gilt $a_n^+ = a_n^+ - a_n^-$, $a_n^+ \searrow 0$, $a_n^- \searrow 0$ sowie $a_n^+ \geq a_{n+1}^- \geq a_{n+2}^+$. Es sei etwa $a = 0$. Die beiden Reihen $a_0^+ - a_1^- + a_2^+ - a_3^- + \dots$ und $a_1^+ - a_2^- + a_3^+ - \dots$ sind nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, also auch $\sum a_n$. Daraus folgt die Konvergenz des Integrals.

8. Mit den Bezeichnungen K für konvergent, AK für absolut konvergent, D für divergent gilt: (a) K für $0 < \alpha < 2$, AK für $1 < \alpha < 2$, (b) K für $0 < \alpha < 3$, AK für $1 < \alpha < 3$ (der Fall $a = b$ ist trivial), (c) K für $\alpha < 1$, (d) K für $0 < \alpha < 2$, AK für $0 < \alpha < 1$, (e) K für $1 < \alpha < 2$, nicht AK , (f) K für $\alpha > \frac{1}{3}$, (g) D , (h) D , (i) K , (j) K für $\alpha > -\frac{1}{2}$, (k) K , (l) K für $0 < \alpha < 1$, (m) K .

9. (a) $\frac{4}{15}$, (b) $\frac{1}{\cosh(1)} - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cosh(1)}{\cos(1) - 1}$, (c) $\log 2 \approx 0,6931$, (d) π , (e) -1 ,

(f) -4 , (g) 24 , (h) $\log(1 + \sqrt{2})$, (i) $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, (j) ∞ .

10. (a) $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{x-a}$ ($x > a$), $\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{x^2 + a^2}$, $\mathcal{L}(\cos at) = \frac{x}{x^2 + a^2}$,

$\mathcal{L}(H(t-a)) = \frac{1}{x} e^{-ax}$ ($x > 0$).

11. Es ist

$$\frac{2}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 4^{-k} \quad \text{mit} \quad a_k = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}\right)^2.$$

Aus

$$a_4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{2p} < a_{4+p} < a_4 = \left(\frac{105}{384}\right)^2 \quad \text{für } p = 1, 2, \dots$$

folgt

$$\frac{2}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{9}{64 \cdot 16} + \frac{25}{256 \cdot 64} + r_3,$$

wobei sich r_3 mit Hilfe der geometrischen Reihe abschätzen läßt:

$$\frac{a_4}{64} \cdot \frac{1}{3 \cdot 19} < r_3 < \frac{a_4}{64} \cdot \frac{1}{3}.$$

Es ist also $0,000366 < r_3 < 0,000390$ und schließlich $1,073180 < \frac{2}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) < 1,073205$.

13. $\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} C_1(x) \frac{1}{x^{s+1}} dx$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{12s} - \frac{s(s+1)(s+2)}{6} \int_1^{\infty} C_3(x) \frac{1}{x^{s+3}} dx.$

Aufgabe in 12.27. 2. Weg. Man bestimmt $w = T_n + R_n$ so, dass

$$T_n(t) \geq P(t) \text{ und } R_n(t) = \int_0^t (t-s)^n w(s) ds$$

ist. Die Gleichung führt auf $w^{(n+1)} = n!w$, der Ansatz $w(t) = \lambda e^{\alpha t}$ führt zu

$$\alpha^{n+1} = n! \text{ und } T_n(t) = \lambda \left(1 + \alpha t + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} t^n \right) \geq P(t).$$

Sind α und λ entsprechend bestimmt, so ist $u(t) \leq \lambda e^{\alpha t}$ für $t \geq 0$.

Historische Aufgabe in 12.27. $v' = Mv + A$, $v(0) = 0$, woraus man nach 12.9 $v(t) = A(e^{Mt} - 1)/M$ erhält. Aus $e^{-Mt} > 1 - Mt$ folgt $v(t) < Ate^{Mt}$.

Aufgabe in 12.28. Es ist $u(t) \leq g(t) + \int_0^t (t-s)^n u(s) ds$. Zwei Methoden.

(a) 2. Weg (s. oben): $g(t) \leq P(t) \implies u(t) \leq \lambda e^{\alpha_0 t}$, $\alpha_0 = (n!)^{1/(n+1)}$.

(b) Folgerung aus Satz 12.28: α_0 wie in (a); wegen $G(\alpha_0) < \infty$ ist $g(t) \leq Ce^{\alpha_0 t}$. Zu $\alpha > \alpha_0$ gibt es dann ein λ mit $u(t) \leq \lambda e^{\alpha t}$.

Bei (b) wächst die Schranke stärker ($\alpha > \alpha_0$), aber es ist ein grösserer Term $g(t) \leq Ce^{\alpha_0 t}$ zugelassen.

Aufgabe 1 in 12.29. Man benutzt den 2. Weg: $w = T_n + R_n$ mit $w^{(n+1)} = cn! \sqrt{w}$. Für $w = \lambda t^{2n+2}$ hat man

$$w^{(n+1)} = \lambda \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} t^{n+1} = n!c\sqrt{w} \implies \sqrt{\lambda} = \frac{n!(n+1)!}{(2n+2)!} c.$$

Der Ansatz $w(t) = \lambda(t+\alpha)^{2n+2}$ führt zu $w(0) = \lambda\alpha^{2n+2} = a$. Mit diesen Konstanten ist $u(t) \leq \lambda(t+\alpha)^{2n+2}$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 2 in 12.29. Lösung: $w(t) = 6/(\alpha - t)^{-2}$. Man erhält

$$u(t) \leq \frac{6}{(\alpha - t)^2} \text{ falls } w(0) = 6\alpha^{-2} \geq a \text{ und } w'(0) = 12\alpha^{-3} \geq b \text{ ist.}$$

Die Funktion $u(t)$ existiert mindestens für $0 \leq t < \alpha = \sqrt{6/a}$, wenn $0 \leq b \leq \sqrt{2/3} a^{3/2}$ ist. Ist b grösser, so wird $\alpha = \sqrt[3]{12/b}$.

Literatur

Werke zur Mathematik-Geschichte

Häufig zitiert sind

DSB = Dictionary of Scientific Biography, Vol. I–XV, Charles Scribner's Sons, New York 1970–1978. Hier findet man, alphabetisch angeordnet, ausführliche Beschreibungen des Lebens und der Werke aller großen Mathematiker.

OK = Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. W. Engelmann Verlag, Leipzig. Diese Schriftenreihe enthält zahlreiche „klassische“ mathematische Arbeiten vom Altertum bis ins 19. Jahrhundert, meistens sorgfältig kommentiert. Fremdsprachliche Werke sind ins Deutsche übersetzt.

MP = The mathematical papers of Isaac Newton, Vol. I–X. Ed. by D.T. Whiteside, Cambridge University Press 1967 ff.

1. ABEL, N.H.: Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$ Hrsg. v. A. Wangerin. OK 71, Leipzig 1921
2. ARCHIMEDES: Über Spiralen. OK 201, Leipzig 1922
3. BECKER, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Orbis Bd. II/6, München 1954
4. BERNOULLI, JAKOB: Unendliche Reihen. Hrsg. v. G. Kowalewski. OK 171, Leipzig 1909
5. BERNOULLI, JAKOB: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Hrsg. v. R. Haussner. OK 107 (1. und 2. Teil), OK 108 (3. und 4. Teil), Leipzig 1899
6. BERNOULLI, JOHANN: Differentialrechnung (nach einer Handschrift von 1691/92). Hrsg. von P. Schafheitlin. OK 211, Leipzig 1924
7. BOLZANO, B.: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Hrsg. v. Ph. Jourdain. OK 153, Leipzig 1905. Zitiert als „Rein analytischer Beweis“
8. BOLZANO, B.: Functionenlehre. Hrsg. v. K. Rychlik. B. Bolzano's Schriften, Bd. 1, Prag 1930
9. CANTOR, G.: Gesammelte Abhandlungen. Hrsg. v. E. Zermelo. Georg Olms, Hildesheim 1962
10. CANTOR, M.: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd. I–IV, Leipzig 1901. Der dritte Band wird als „Cantor III“ zitiert
11. CAUCHY, A.: Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1^{re} Partie. Analyse Algébrique, Paris 1821, Œuvres complètes II.3. Zitiert als „Cours d'Analyse“
12. CAUCHY, A.: Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, Paris 1823. Œuvres complètes II.4. Zitiert als „Calcul infinitésimal“
13. CAUCHY, A.: Leçons sur le calcul différentiel, Paris 1829. Œuvres complètes II.4. Zitiert als „Calcul différentiel“
14. DEDEKIND, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Gesammelte Schriften, 3. Band, S. 315–334. Braunschweig 1932

15. DEDEKIND, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? Ebenda, S. 335–391
16. DIJKSTERHUIS, E.J.: Die Mechanisierung des Weltbildes. Springer 1984
17. DUGAC, P.: *Éléments d'analyse* de Karl Weierstrass. Arch. Hist. Exact Sci. 10 (1973), 41–176
18. EDWARDS Jr., C.H.: The historical development of the Calculus. Springer 1979
19. EUKLID: Die Elemente, Buch I–XIII. Hrsg. v. Clemens Thaer. Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt 1980
20. EULER, L.: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. 1. Teil der *Introductio in Analysin Infinitorum*. Mit einer Einführung zur Reprintausgabe von W. Walter. Springer 1983. Zitiert als „Introductio“
21. EULER, L.: *Institutiones calculi differentialis*. Übersetzung „Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung“ von J.A.Chr. Michelsen 1790
22. EULER, L.: *Institutiones calculi integralis*. Übersetzung „Vollständige Anleitung zur Integralrechnung“ von J. Salomon, 3 Bände, Wien 1828
23. FERMAT, PIERRE DE: Abhandlungen über Maxima und Minima. Hrsg. v. M. Miller. OK 238, Leipzig 1934
24. FERMAT, PIERRE DE: Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. Hrsg. v. H. Wieleitner, OK 208, Leipzig 1923
25. GENOCCHI, A., PEANO, G.: Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Aus dem Italienischen übers. von G. Bohlmann und A. Schepp. Leipzig 1899
26. GERICKE, H.: Mathematik in Antike und Orient. Springer 1984
27. KEPLER, J.: Neue Stereometrie der Fässer. Übersetzung von R. Klug. OK 165, Leipzig 1908. Zitiert als „Fassmessung“
28. KLINE, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford Univ. Press, New York 1972
29. KOWALEWSKI, G.: Große Mathematiker. München-Berlin 1939
30. LEIBNIZ, G.W.: Über die Analysis des Unendlichen. Hrsg. v. G. Kowalewski. OK 162, Leipzig 1920
31. LEIBNIZ, G.W.: Mathematische Schriften. Hrsg. v. C.I. Gerhardt, Bd. 1–7. Georg Olms, Hildesheim 1962
32. NEWTONS Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Hrsg. v. G. Kowalewski. OK 164, Leipzig 1908
33. REIFF, R.: Geschichte der unendlichen Reihen. Wiesbaden 1969
34. RIEMANN, B.: Mathematische Werke. Hrsg. v. H. Weber. B.G. Teubner, Leipzig 1892
35. , STRUIK, D.J.: *A Source Book in Mathematics 1200–1800*. Harvard Univ. Press 1969
36. TROPFKE, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 1, 4. Aufl., bearb. v. K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. De Gruyter 1980
37. WAERDEN, B.L. van der: *Erwachende Wissenschaft*. Birkhäuser 1956
38. WALTER, W.: Old and new approaches to Euler's trigonometric expansions. Amer. Math. Monthly 89 (1982), 225–230

Lehrbücher und Nachschlagewerke

39. ACZÉL, J.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1961
40. BECKENBACH, E.F., BELLMAN, R.: *Inequalities*. Springer 1961
41. COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 1. Band, 4. Aufl., Springer 1971; 2. Band, 4. Aufl., Springer 1972
42. GRADSHTEYN, I.S., RYZHIK, I.M.: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press 1980

43. GRÖBNER, W., HOFREITER, N.: Integraltafel, Teil I und II. Springer 1961
44. HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E., PÓLYA, G.: Inequalities. Cambridge Univ. Press 1959
45. HEUSER, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 13. Aufl. und Teil 2, 11 Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 2000
46. JAHNKE-EMDE-LÖSCH: Tafeln Höherer Funktionen, 6. Aufl. B.G. Teubner, Stuttgart 1960
47. MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., and SONI, R.P.: Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Springer 1966
48. MANGOLDT, H. v., KNOPP, K.: Einführung in die Höhere Mathematik, Band 1 bis 4. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1990
49. SELBY, S.M., WEAST, R.C., et al.: Handbook of Mathematical Tables. Chemical Rubber Publ. Co., Cleveland 1962
50. STRUBECKER, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I-IV, R. Oldenbourg Verlag, München und Wien 1966ff.

Bezeichnungen und Grundformeln

Grundbegriffe wie $\lim a_n$, $\sum a_n$, f' , $\int f dx$, ... sind in der folgende Liste nicht aufgenommen.

$P(A)$ Potenzmenge 5
 $A + B$, $A - B$, λA , $a + A$ 16
 $A \sim B$ 21
 A^n 22
 $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ 12
 $A(x_i)$ arithmetisches Mittel 47
 $B_\varepsilon(a)$ ε -Umgebung 12, 174
 $\dot{B}_\varepsilon(a)$ punktierte ε -Umgebung 114
 $\bar{B}_\varepsilon(a)$ abg. Kreisscheibe 174
 B_n Bernoullische Zahlen 161
 $B_n(x)$ Bernoullische Polynome 346
 \mathbb{C} komplexe Zahlen 166
 $\text{card } A$ 21
 $C(J) = C^0(J)$ stetige Funktionen 115
 C^n , $C^n(J)$ 251
 $C^n[a, b]$, $C^n(a, b)$, ... 252
 $C^\infty(J)$ 252
 $D(x)$ Dirichlet-Funktion 51, 116
 D^+ , D^- , D_+ , D_- Dini-Derivierte 357
 $f(A)$, $f^{-1}(B)$ 5
 $|f|$, f^+ , f^- 39
 $f(x+) = f(x+0)$, $f(x-) = f(x-0)$ 116
 $G(x_i)$ geometrisches Mittel 47
 $\text{graph } f$ 5
 $H(x)$ Heaviside-Funktion 51, 116
 $|I|$ Intervalllänge 197
 id identische Abbildung 5
 Im Imaginärteil 167
 $\inf A$ 9
 $\inf f(A)$ 39

Formeln

Arcusfunktionen 157–158
 Areafunktionen 159–160
 Hyperbelfunktionen 158–159
 trigonometrische Funktionen 152–155, 186

$\text{Lip}(D)$ lipschitzstetige Funktionen 44
 $\lim \inf$, $\lim \sup$ für Folgen 73, 75
 $-$, $-$ für Funktionen 356
 $M(a, b)$ arithm.-geometr. Mittel 70
 $\max A$, $\min A$, $\max(a, b)$, $\min(a, b)$ 9
 $\max(f, g)$ 39
 \mathbb{N} natürliche Zahlen 18
 $N_n = \{1, \dots, n\}$ 21
 $O(Z)$ Oszillationssumme 201
 $P(A)$ Potenzmenge 5
 \mathbb{Q} rationale Zahlen 21
 $R(I)$, $R[a, b]$ Riemann-integrierbar 199
 \mathbb{R} reelle Zahlen 6
 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 11
 Re Realteil 167
 $\text{sgn } x$ 10
 $\sup A$ 9
 $\sup f(A)$ 39
 S_n^p Potenzsumme 36, 162
 $s(Z) = s(Z; f)$, $S(Z) = S(Z; f)$ 197
 $\sigma(Z, \xi) = \sigma(Z, \xi; f)$ 202
 $T(x; a)$ Taylor-Reihe 262
 \dot{U} punktierte Umgebung 114
 $[x]$ größte ganze Zahl $\leq x$ 31
 Z , $|Z|$, $Z + Z'$, $Z < Z'$ 197
 \mathbb{Z} ganze Zahlen 21
 $Z_p = p + \mathbb{N}$ 21
 \int , \int oberes, unteres Integral 199
 $\omega(A)$ Schwankung auf A 127
 $\omega(a)$ Schwankung im Punkt a 128

Tabellen

Ableitungen 250
 Integrale 274
 Integrale von Wurzelausdrücken ... 280

Namen- und Sachverzeichnis

Die kursiv gesetzte Seitenzahl hinter einem Eigennamen weist auf Lebensdaten hin.

- Abbildung 5
- , identische 6
- , kontrahierende 312
- ABEL, N.H. 86; 137, 138, 149
- Abelsche Vergleichskriterien 361
- Abelscher Grenzwertsatz 149
- abgeschlossene Menge 13, 174
- Ableitung 240
- , höhere 251
- , –, Leibnizsche Regel 252
- , linksseitige 242
- , logarithmische 249
- , Rechenregeln 246
- , rechtsseitige 242
- , Tabelle 250–251
- Ableitung der Umkehrfunktion 248
- Absolutbetrag 10
- absolute Konvergenz für Integrale 325, 329
- – – Reihen 94, 175
- abstoßender Fixpunkt 315, 316
- abzählbare Menge 23
- ACZÉL, J. 156
- Addition 6
- komplexer Zahlen 166, 168
- Additionstheorem der Binomialkoeffizienten 41
- affine Funktion 40
- AGM-Ungleichung 47, 48, 60, 61, 66, 78
- algebraische Zahl 34
- AL-HWARIZMI 4
- alternierende Reihe 93
- Amplitude 340
- analytische Fortsetzung 177, 178
- Anfangswertproblem 334
- Anordnungsaxiome 7
- Antidifferentiation 273
- anziehender Fixpunkt 315
- aperiodischer Grenzfall 343
- APIAN, P. 30
- Arbeit, mechanische 295
- ARCHIMEDES 188; 20, 70, 88, 189–191, 193, 288, 290
- Archimedische Eigenschaft 20
- Spirale 188, 189, 225, 286
- Archimedisches Axiom 21
- Kompressionsverfahren 188
- Arcusfunktionen 156
- Arcussinusreihe 210
- Arcustangensreihe 210
- Areafunktionen 159
- Argument einer komplexen Zahl 168
- arithmetische Folge 79
- arithmetisches Mittel 8, 47
- arithmetisch-geometrisches Mittel 70, 217
- Assoziativität 6
- Asymptote 305
- Attraktor 316
- Axiomatik 13
- AYOUB, R. 183
- Badezimmerwaage 342
- Bahn, periodische 315, 316
- BANACH, ST. 314
- BARBEAU, E.J. 84
- BARROW, I. 227; 28, 133, 229, 233
- BECKENBACH, E.F. 48, 307
- BECKER, O. 81
- bedingte Konvergenz 104
- BEEKMAN, W. 86
- BELLMAN, R. 48, 307
- BERKELEY, G. 236
- BERNOULLI, DANIEL 92, 112, 135

- , JAKOB 235; 28, 83, 90–92, 98, 102, 107, 146, 162, 163, 233
- , JOHANN 235; 83, 92, 112, 113, 135, 147, 195, 236
- , NIKLAUS 135
- Bernoullische Polynome 346, 347, 361
 - Ungleichung 28
 - Zahlen 161, 162
- BERNSTEIN, S. 267
- beschränkte Folge 58
 - Funktion 39
 - Menge 9
- Betafunktion 333
- Betrag einer komplexen Zahl 167
 - reellen Zahl 10
- Bewegungsgleichung 337
- Beweis, direkter 14
 - durch vollständige Induktion 18
 - , indirekter 14
- bijektive Abbildung 5
- Bild einer Menge 5
- BINET, J.P.H.M. 34
- Binetsche Darstellung 34
- Binomialkoeffizienten 28, 29, 41
- Binomialreihe 81, 103, 267
- binomischer Lehrsatz 29
- BLISS, G.A. 219
- DU BOIS-REYMOND, P. 354
- BOLZANO, B. 54f.; 2, 72, 84–86, 113, 123, 354
- BORWEIN, I.M. 218
- BORWEIN, P.B. 218
- BOYLE, R. 229
- Brechungsgesetz 254
- BRIGGS, H.S. 57; 132
- BÜRGI, J. 57

- CANTOR, G. 2; 4, 25, 34, 55, 72, 166
- CANTOR, M. 57, 134, 215, 235
- CARDANO, G. 146
- CARLEMAN, T. 312
- CARROLL, L. 216
- CAUCHY, A.-L. 85f.; 48, 55, 56, 67, 74, 97, 98, 104, 113, 118, 137, 138, 148, 195, 202, 238, 239, 256, 262, 267, 269, 323
 - Cauchyfolge 72
 - Cauchy-Hadamardsche Formel 143
 - Cauchy-Kriterium für Folgen 72, 175
 - für Funktionen 118, 125
 - für gleichmäßige Konvergenz 140, 141
 - für Reihen 94, 175
 - für uneigentliche Integrale 325, 329
- Cauchy-Produkt 103
- Cauchysche Ungleichung 310
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung 310
- CAVALIERI, B. 191f.; 82, 284, 290
- Cavalieriprinzipien 191
- charakteristisches Dreieck 233, 234
 - Polynom 35, 338
- Charakterisierung des Integrals als Mittelwert 218
 - charakteristische Gleichung 338
- CHU SHIH-CHIEH 28
- CICERO 288
- COLLINS, J. 215
- CONTI, A.S. 82
- Cosinus 152, 178
- Coulombsches Reibungsgesetz 341
- COURANT, R. 331
- Cotangens 154, 180
 - , Partialbruchzerlegung 181
- COTES, R. 299

- Dämpfung, schwache 342, 343
 - , starke 343
- Dämpfungskräfte 341
- Dämpfungsmaß 342
- Darboux'sche Summen 196
- DEDEKING, R. 2; 17, 25, 55, 82, 118, 166
- Dedekindscher Schnitt 2
 - Stetigkeitssatz 3, 17
- Defekt 313
- Definition durch vollständige Induktion 23
- Definitionsbereich, Definitionsmenge 5
- Delisches Problem 38
- DEMOKRIT 191
- Derivierte, symmetrische obere zweite 321
- DESCARTES, R. 223; 2, 4, 111, 192, 221, 226, 229, 254
- Dezimalbruch 105, 106
- Dezimaldarstellung 32
- dichte Menge 129
- Differential 235, 245
- Differentialgleichung 333, 334
 - der Wachstumsprozesse 335
 - der Zerfallsprozesse 335
 - , lineare 1. Ordnung 334
 - , – 2. Ordnung 336
- Differentialquotient 240
- Differentiation, gliedweise 262

- Differentiationsoperator 259
 Differenz von Mengen 4
 Differenzenquotient 240
 –, zentraler 2. Ordnung 269
 Differenzierbarkeit 240
 –, einseitige 242
 DIJKSTERHUIS, E.J. 110, 290
 DINI, U. 354
 Dini-Ableitung, -Derivierte 357, 364
 DIOPHANT VON ALEXANDRIA 3; 223
 Direktrix 226
 DIRICHLET, L. 116; 113, 138, 195
 Dirichlet-Funktion 51, 116, 200, 206
 disjunkte Mengen 5
 Distributivität 6
 divergente Folgen 61, 64
 – Integrale 324, 329
 – Reihen 87
 Divergenz, alternierende 313, 314
 –, bestimmte 126
 –, monotone 313, 314
 Division mit Rest 31
 – von Potenzreihen 150
 DODGSON, CH.L. 216
 Doppelreihen 101
 Doppelreihensatz 102, 175
 Drehellipsoid, Trägheitsmoment 294
 –, Volumen 287
 Drehkegel 287
 Drehkörper 286
 Drehparaboloid 287, 288
 Drehzylinder 287
 Dreieck, charakteristisches 233, 234
 –, Pascalsches 28
 Dreiecksungleichung 10, 27, 167
 – für Integrale 207, 326
 Dreieckszahlen 90
 Dualdarstellung 32
 DUGAC, P. 56, 138, 354
 Durchschnitt von Mengen 4

 e 66, 145, 147, 265, 270
 EDWARDS, C.H. 190, 235
 eigentlicher Grenzwert 64
 eigentliches Integral 323
 eindeutige Abbildung 5
 Einheit, imaginäre 166
 Einheitswurzeln 169
 Einschränkung 6
 einseitige Differenzierbarkeit 242

 Einselement 6, 166
 Einsetzen von Potenzreihen 150
 Einzugsbereich 316
 elastische Feder 295
 Element 4
 –, additiv inverses 6
 –, größtes 9
 –, kleinstes 9
 –, maximales 9
 –, minimales 9
 –, multiplikativ inverses 6
 –, neutrales 6
 elementare Funktion 250
 elementar-transzendente Funktion 166
 Ellipse 225
 elliptische Integrale 363
 EMDE, F. 213
 endliche Menge 21
 ENESTRÖM, G. 135
 Entwicklung eines Polynoms 40
 – von Potenzreihen 177
 Epsilonantik 59
 ERATOSTHENES 38
 EUDOXOS VON KNIDOS 1; 8, 20, 53, 54, 113, 187
 EUKLID 1; 20, 38, 53, 80, 134, 223
 EULER, L. 135; 67, 83, 84, 86, 91, 92, 104, 112, 113, 136, 137, 146–148, 153, 164, 176, 179, 181, 183, 185, 186, 215, 217, 236, 237, 262, 330, 332, 349
 Euler-Maclaurinsche Formel 349
 Eulersche Betafunktion 333
 – Gammafunktion 330
 – Gleichung 166, 178
 – Konstante 349
 – Summenformel 346, 347, 349
 Eulersches Integral 1. Gattung 333
 – 2. Gattung 332
 Exhaustionslemma 53
 Exhaustionsverfahren 52–54, 63, 193
 Exponentialfunktion 66, 78, 178
 Exponentialreihe 145
 Extrema 120, 244, 300, 307, 320

 Fakultät 29
 Feder, elastische 295
 Federkonstante 295
 Feinheitsmaß 197
 Fehlerabschätzung für die Simpsonsche Formel 298

- Fehlerfunktion 213
 Fehlerintegral 213
 FERMAT, P. DE 194; 2, 4, 111, 192, 193, 204, 221–223, 226, 253, 254, 292
 Fermatsches Kriterium für ein Extremum 244
 – Prinzip 253
 FIBONACCI 33
 Fibonacci'sche Zahlen 33, 34
 Fixpunkt 69, 312
 –, abstoßender 315, 316
 –, anziehender 315, 316
 Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen 312
 Fläche ebener Bereiche 283
 Flächeninhalt 196
 Fluente 230, 231
 Fluxion 230, 231
 Folge, – in A 22
 –, arithmetische 79
 –, beschränkte 58
 –, bestimmt divergente 64
 –, divergente 61, 64
 –, endliche 22
 – in $\overline{\mathbb{R}}$ 74
 –, komplexe 174, 175
 –, konvergente 60
 –, monotone 58
 –, rekurrente 35, 163
 –, unbestimmt divergente 64
 Folgenalgebra 76
 Folgenkriterium für Grenzwerte 117, 125, 126, 176
 – für Stetigkeit 117
 Folgenraum 76
 Formel von Cauchy-Hadamard 143
 Fortsetzung 6, 269
 –, analytische 177, 178
 –, stetige 128
 FOURIER, J.B.J. 313; 112
 FRANZ I. 54
 Fresnelsche Integrale 213
 FRIEDRICH II. 33
 FRIEDRICH DER GROSSE 136
 FRÖHLICHER, A. 13
 Fundamentalfolge 72
 Fundamentalreihe 2
 Fundamentalsatz der Algebra 41, 170
 Funktion 5, 112
 –, affine 40
 –, beliebig oft stetig differenzierbare 252, 306
 –, beschränkte 39
 –, bijektive 5
 –, differenzierbare 242
 –, elementare 250
 –, elementar-transzendente 166, 180
 –, gerade 39
 –, gleichmäßig stetige 122
 –, hyperbolische 158, 179
 –, injektive 5
 –, integrierbare 199, 204, 205
 –, komplexwertige 205
 –, konkave 301
 –, konvexe 301
 –, lineare 40
 –, lipschitzstetige 115
 –, monotone 43, 44
 –, monoton fallende 43
 –, – wachsende 43
 –, oszillierende 306
 –, periodische 39
 –, rationale 40, 171f.
 –, Riemannsche 354
 –, stetig differenzierbare 242
 –, stetige 114
 –, –, nirgends differenzierbare 359
 –, streng konkave 301
 –, – konvexe 301
 –, – monoton fallende 44
 –, – wachsende 44
 –, surjektive 5
 –, trigonometrische 154, 180
 –, ungerade 39
 –, unstetige 114
 –, zusammengesetzte 120
 –, zyklometrische 156
 Funktionalgleichung, d'Alembertsche 156
 – der Exponentialfunktion (E) 49, 67, 103
 Funktionenalgebra 39
 Funktionenraum 39

 g -adische Zahlendarstellung 31, 105, 106
 GALILEI, G. 221; 111, 191, 225
 Gammafunktion 330
 ganze Zahl 21
 GAUSS, C.F. 84; 11, 31, 70, 136, 215, 217, 330, 332
 Gaußsche Zahlenebene 167, 168
 gedämpfte Schwingung 342

- geometrische Reihe 80, 88
 geometrisches Mittel 47
 gerade Funktion 39
 GERICKE, H. 21
 Geschwindigkeit, mittlere 241
 –, momentane 241
 Gewichte 302
 gewichtetes arithmetisches Mittel 302
 – geometrisches Mittel 307
 Gleichheit von Funktionen 5
 – von n -Tupeln 22
 – von Paaren 5
 gleichmächtige Mengen 21
 gleichmäßige Konvergenz 139, 141
 – Stetigkeit 121, 122
 Glied einer Folge 22, 58
 – einer Reihe 86
 gliedweise Differentiation 261
 – Integration 209, 210
 GOLDBACH, CHR. 330; 82, 146, 332
 Grad eines Polynoms 39, 170
 GRADSHTEYN, I.S. 274
 GRANDI, G. 83
 Graph 5
 GREGORIUS A SANTO VICENTIO 58; 132, 192
 GREGORY, J. 228; 82, 148, 215, 227, 233, 236
 Grenzübergang unter dem Integralzeichen 327, 329
 Grenzwert einer Folge 60
 ---, eigentlicher 64
 --- in \mathbb{C} 175
 --- in $\overline{\mathbb{R}}$ 74
 ---, uneigentlicher 64
 -- Funktion 114, 176
 ---, einseitiger 116
 ---, uneigentlicher 126
 Grenzwertsatz von Abel 149
 GRÖBNER, W. 274
 GRONWALL, T.H. 361
 –, Lemma von 361
 Großer Umordnungssatz 100
 Grundintegrale 274
 GUDERMANN, CHR. 138; 56
 GULDIN, P. 290; 191, 292
 Guldinsche Regel 292

 HALLEY, E. 147; 148, 230
 HAMEL, G. 67

 HANKEL, H. 111
 HARDY, G.H. 48, 307
 harmonische Reihe 80, 88
 – Schwingung 340
 harmonischer Oszillator 339
 harmonisches Mittel 77
 HARNACK, A. 354
 HARRIOT, TH. 4
 Häufungspunkt einer Menge in \mathbb{R} 115
 --- in \mathbb{C} 174
 Häufungswert einer Folge in \mathbb{R} 71
 --- in $\overline{\mathbb{R}}$ 74
 --- in \mathbb{C} 174
 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 259, 260
 Hauptwerte der Arcusfunktionen 157
 HEAVISIDE, O. 116
 Heaviside-Funktion 51, 116
 HEINE, E. 113; 123
 HEINRICH IV. 4
 HENRY, D. 366
 HERON VON ALEXANDRIA 70
 HEUSER, H. 331
 HILBERT, D. 3; 309
 HINDERER, K. 311
 HOBBS, TH. 229
 höchstens abzählbare Menge 23
 HOFREITER, N. 274
 HOGATT, V.E. 34
 HÖLDER, O. 13, 309
 Hölder-Bedingung 51, 128
 Hölder-Stetigkeit 128
 Höldersche Ungleichung 309
 -- für Integrale 309
 Hookesches Gesetz 329
 L'HOSPITAL, G. DE 235; 256
 HUDDE, J. 224; 225
 HUYGENS, CHR. 233; 82, 190
 hyperbolische Funktionen 158, 179

 Identitätssatz für Polynome 41, 170
 -- Potenzreihen 147, 176
 imaginäre Einheit 166
 – Zahl 168
 Imaginärteil 167
 Indivisiblenmethode 191–193
 Induktion als Beweismethode 18
 – als Definitionsprinzip 23
 Induktionsannahme 18
 Induktionsprinzip 18

- Infimum 9
 Inhalt, äußerer 196
 –, elementargeometrischer 282
 –, innerer 196
 Inhaltsproblem 282
 injektive Abbildung 5
 innerer Punkt 13, 174
 Integrabilitätskriterium von Riemann 201
 Integral (Riemann, Darboux) 199
 –, absolut konvergentes 325, 329
 – als Funktional 219
 – als Funktion der oberen Grenze 212
 –, bestimmt divergentes 324
 –, divergentes 324, 329
 –, eigentliches 323
 –, elliptisches 363
 –, konvergentes 323, 329
 –, oberes 199
 –, Tabelle 274f.
 –, unbestimmtes 273
 –, uneigentliches 323
 –, –, unbeschränkter Integrand 328
 –, unteres 199
 Integrale über Teilintervalle 211
 Integralkriterium 326
 Integralsinus 213
 Integral-Ungleichungen 361f.
 -- vom Faltungstyp 364
 --, nichtlineare 366
 Integrand 199
 –, unbeschränkter 328
 Integration der rationalen Funktionen 278
 – durch Substitution 277
 –, gliedweise 209, 210
 –, numerische 296
 –, partielle 275
 Integrationsgrenze 199
 Integrationsintervall 199
 –, unbeschränktes 323
 Integrationsoperator 259
 Integrationsveränderliche 199
 integrierbare Funktion 199, 204, 205
 Interpolationspolynom 42
 Intervall 12
 –, abgeschlossenes 12
 –, halboffenes 12
 –, kompaktes 12
 –, n -dimensionales 282
 –, offenes 12
 Intervallsumme 282
 irrationale Zahl 21
 isolierter Punkt 115
 Iterationsverfahren 69, 319
 iterative Lösung von Gleichungen 312

 JAHNKE, E. 213
 JENS, W. 111
 JENSEN, J.L.W.V. 301
 Jensensche Ungleichung für Integrale 303
 --- konvexe Funktionen 301
 JORDAN, C. 196; 188, 282, 283, 354
 Jordansche Inhaltstheorie 283

 KALF, H. 162
 KALUZA, TH. 312
 Kaninchenaufgabe 33
 Kardinalzahl 21
 KARL II. 194
 kartesisches Produkt 5, 22
 Katenoid 320
 KATHARINA I. 135
 KEPLER, J. 110f.; 57, 58, 190, 191, 222, 244, 288, 290
 Keplersche Faßregel 297
 Keplers Nachtisch 288
 KESTEN, H. 111
 Kettenregel 247, 250
 Kleeblatt 286
 KLINE, M. 221
 KLOTTER, K. 344
 KNOPP, K. 331
 Koeffizientenvergleich 41, 151
 KOESTLER, A. 110
 Kombination 32
 kombinatorische Aufgaben 32
 Kommensurabilität 1
 Kommutativität 6, 25
 kompaktes Intervall 12
 komplexe Zahl 166
 Komposition 5
 – stetiger Funktionen 120
 Kompressionsverfahren, archimedisches 188, 193
 konjugiert-komplexe Zahl 167
 konkave Funktion 301
 kontrahierende Abbildung 312
 Kontraktion 312
 Kontraktionsprinzip 312
 Kontraosition 15
 Konvergenz, absolute (Integrale) 325, 329

–, absolute (Reihen) 94, 175
 –, alternierende 313, 314
 –, bedingte 104
 –, gleichmäßige 139, 141
 –, monotone 65, 313, 314
 –, punktweise 139
 –, quadratische 318
 –, unbedingte 104
 – von Folgen 60, 61, 174, 175
 – von Integralen 323
 – von Reihen 87, 174, 175
 Konvergenzkreis 176
 Konvergenzkriterium für monotone Funktionen 127
 – von Cauchy für Folgen 72, 175
 ----- Funktionen 118, 125
 ----- Reihen 94
 ----- uneigentliche Integrale 325, 329
 – von Leibniz 87
 Konvergenzradius 142, 176
 Konvergenzsatz für das Newton-Verfahren 318, 319
 konvexe Funktion 301, 321
 KOPERNIKUS, N. 110, 111
 Körperaxiome 6
 Körper der komplexen Zahlen 166
 – der reellen Zahlen 6
 KOWALEWSKI, G. 85, 92, 233
 Kreisfrequenz 340
 Kreismessung nach Archimedes 77
 Kriterien für Maxima und Minima 300
 Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit 129
 -- konvexe und konkave Funktionen 301
 -- Wendepunkte 300
 Kronecker-Symbol 42
 Kugelvolumen 287
 Kurvendiskussion 304–307

 LAGNY, TH.F. DE 217
 LAGRANGE, J.L. 237; 85, 263
 Lagrangesche Polynome 42, 43
 LAMBERT, J.H. 218
 LANDAU, E. 23
 LANFORD, O.E. 316
 LAPLACE, P.-S. 137
 Laplace-Transformation 362
 LAURENT, H. 354
 LEBESGUE, H.-L. 188, 197, 354
 LEGENDRE, A.-M. 332
 Legendresche Normalform 363

LEIBNIZ, G.W. 233; 31, 82, 83, 86, 89–93, 112, 113, 134, 135, 194, 195, 215, 216, 221, 228, 234–236, 245, 246, 248, 252, 256, 277, 279, 280, 285, 299, 334
 Leibnizsche Regel (Ableitung) 252
 – Reihe für $\pi/4$ 215
 – Sektorformel 285
 Lemniskate 322
 LEONARDO VON PISA 33
 LEOTAUD, V. 82
 Limes einer Folge 60, 175
 –, einseitiger 116
 – inferior für Folgen 73, 75
 --- Funktionen 356
 –, oberer 73, 75
 – superior für Folgen 73, 75
 --- Funktionen 356
 –, unterer 73, 75
 LINDEMANN, F. VON 218
 lineare Funktion 40
 Linearität des Integrals 205
 LIOUVILLE, J. 213
 LIPSCHITZ, R. 46; 354
 Lipschitzbedingung 44
 Lipschitzkonstante 44
 Lipschitzstetigkeit 115
 LITTLEWOOD, J.E. 48, 307
 logarithmische Abteilung 249
 – Reihe 147, 210
 Logarithmus 67, 68
 LÖSCH, F. 213
 Lösung einer Differentialgleichung 334
 Lucassche Zahlen 35
 LUDOLF VON CEULEN 215
 Ludolfsche Zahl 215
 LUDWIG XIV. 233
 LUTHER, M. 111

 MACHIN, J. 216; 217
 Mächtigkeit 21
 MACLAURIN, C. 236; 48, 349
 Maclaurinsche Reihe 237, 266
 MAGNUS, W. 213
 Majorantenkriterium für Reihen 92, 175
 -- gleichmäßige Konvergenz 142
 -- uneigentliche Integrale 326, 329
 MANGOLDT, H. VON 331
 MANN, TH. 74
 MASCHERONI, L. 349
 Mascheronische Konstante 349

- MÄSTLIN, M. 110
 Maximum einer Funktion 120
 ---, lokales 244, 300, 320
 -- Menge 9
 mechanische Arbeit 295
 Menge 4
 -, abgeschlossene 13, 174
 -, abzählbare 23
 -, beschränkte 9
 -, dichte 129
 -, endliche 21
 -, höchstens abzählbare 23
 -, leere 5
 -, meßbare 283
 -, nichtabzählbare 23, 24
 -, offene 13, 174
 -, quadrierbare 283
 -, überabzählbare 23, 24
 -, unendliche 23
 -, wohlgeordnete 20
 MERCATOR, N. 132; 82, 147, 209
 MICHELSEN, J.A.CHR. 237
 Minimum einer Funktion 120
 ---, lokales 244
 -- Menge 9
 MINKOWSKI, H. 309
 Minkowskische Ungleichung 310
 -- für Integrale 310
 Minorantenkriterium für Divergenz 93
 Mittel, arithmetisches 8, 47
 -, arithmetisch-geometrisches 70
 -, geometrisches 47
 -, gewichtetes arithmetisches 302, 307
 -, geometrisches 307
 -, r -ter Ordnung 307, 308
 -, harmonisches 77
 Mittelwert 47
 - mit einer beliebigen Funktion 307
 Mittelwertsatz der Differentialrechnung
 238, 239, 254
 ---, verallgemeinerter 256, 358
 Mittelwertsatz der Integralrechnung 208
 ---, erweiterter 209
 MOHLER, N.M. 236
 MOIVRE, A. DE 179
 Moivresche Formel 178
 MONGE, G. 85
 monotone Folge 58
 - Funktion 43, 355, 364
 - Konvergenz 65
 Monotoniekriterium für Folgen 65
 - für Funktionen 127
 Multiplikation 6
 - komplexer Zahlen 166, 168, 169
 - von Potenzreihen 144, 175
 - von Reihen 102
 NAPIER, J. 57; 132
 NAPOLEON III. 85
 natürliche Zahl 17, 18
 Nebenwerte der Arcusfunktionen 157
 negative Zahl 8
 NEUSCHWANDER, E. 354
 NEUGEBAUER, O. 146
 NEWTON, I. 228; 28, 50, 81, 82, 85, 104,
 111, 133–135, 147, 153, 181, 192, 194,
 209, 215, 216, 221, 227–234, 236, 241,
 248, 273, 299, 319, 333, 334
 Newton-Cotes-Formeln 299, 320
 Newtonsche Dreiachtelregel 320
 Newtonsches Gravitationsgesetz 295
 Newton-Verfahren 317
 nichtabzählbare Menge 23, 24
 nichtnegative Zahl 9
 NICOLSON, M. 236
 Notation, mathematische 3
 n -te Wurzel 46
 n -Tupel 22
 Nullelement 6, 166
 Nullfolge 58
 Nullmenge 5
 Nullpolynom 39
 Nullstelle 40
 Nullstellensatz für Polynome 41
 -- stetige Funktionen 123
 Nullteiler 7
 numerische Berechnung von unendlichen
 Reihen 327
 - Integration 296f.
 obere Schranke 9
 oberer Limes 73, 75
 OBERHETTINGER, F. 213
 Obersumme 197
 offene Menge 13, 174
 OLDENBURG, H. 82, 134
 Ordinatenmenge 196, 197, 283
 ORESME, N. VON 80; 81, 102
 Oszillationssumme 201

- π 77, 153, 215–218
- Paar, geordnetes 5, 22
- PAPPUS 292
- PARMENIDES 79
- Partialbruch 171
- Partialbruchzerlegung des Cotangens 181
 - im Reellen 172
 - rationaler Funktionen 171
- partielle Integration 275
- PASCAL, B. 30; 31, 36, 191, 193, 233
- PASCAL, E. 354
- Pascalsches Dreieck 28
- PASCH, M. 74; 354
- PEANO, G. 17; 188, 196, 282, 354
- Pendel 71
- periodische Bahn 315, 316
 - Funktion 39
- Permutation 32
- PETER DER GROSSE 135
- Pflaume 288, 289
- PLATON 38, 110
- PLUTARCH 188
- Polarkoordinaten 168, 179
- PÓLYA, G. 48, 307
- Polynom 39, 170
 - , charakteristisches 35, 338
 - , komplexes 170
 - , Lagrangesches 42, 43
 - , reelles 170
- Polynomialformel 35
- Polynomialkoeffizient 36
- Potenzen mit ganzen Exponenten 26, 27
 - irrationalen Exponenten 50, 66
 - rationalen Exponenten 48, 49
- Potenzfunktion 66
- Potenzgesetze 27, 49, 66
- Potenzmenge 5
- Potenzreihe 142, 176, 307
 - für $\arctan x$ 210
 - a^x 145
 - $\cos x$ 153
 - $\cosh x$ 158
 - $\cot x$ 161
 - $\coth x$ 161
 - e^x 145
 - $\log(1+x)$ 147, 210, 267
 - $\log(1+x)/(1-x)$ 148
 - $\sin x$ 153
 - $\sinh x$ 158
 - $\tan x$ 161
- $\tanh x$ 161
- $x/(e^x - 1)$ 160
- $(1+x)^a$ 103, 267
- PRESTON, CH. 316
- PRINGSHEIM, A. 74
- Prioritätenstreit 236
- Produktregel 246, 249
- Produkt 6, 7
 - von komplexen Zahlen 166, 169
- Produktdarstellung des Sinus 350
 - von Polynomen 170
- Produktintegration 275
- Produktmenge 5, 22
- Produktzeichen 25
- Quadraturformeln 297, 320
 - , summierte 299
- Quadrupel 22
- Quantoren 14
- Quintupel 22
- Quitte 289
- Quotientenkriterium 95, 175
- Quotientenregel 246
- Randpunkt 13
- rationale Funktion 40, 171f.
 - Zahl 21
- Realisierung einer Reihe 99
- Realteil 167
- Rechenregeln für Ableitungen 246, 252
 - Grenzwerte von Folgen 62–64
 - von Funktionen 119, 125
 - oberen und unteren Limes 75
 - uneigentliche Integrale 324, 325, 329
- REDHEFFER, R.M. 109, 311
- REDLINGER, R. 365
- reelle Zahl 6
- Regelfunktion 131
- Regel von de l'Hospital 256
- Reibung, trockene 341
- Reibungskräfte 341
- REIFF, R. 82–84, 134
- Reihe, absolut konvergente 94
 - , alternierende 93
 - , bestimmt divergente 87
 - , binomische 81, 103, 267
 - , divergente 87
 - , geometrische 80, 88
 - , harmonische 80, 88
 - , konvergente 87

- , logarithmische 147, 210, 267
- mit beliebiger Indexmenge 99
- , rekurrente 35, 163
- , unbestimmt divergente 87
- Reihenrest 86
- rekurrente Reihen 35, 163
- rekursive Definition 23
- REMMERT, R. 332, 351
- Repeller 316
- Resonanz 344, 345
- Rest einer Reihe 86
- Restglied von Cauchy 269
- – Lagrange 263
- – Schlömilch 269
- Restriktion 6
- RIEMANN, B. 195; 104, 105, 183, 196, 197, 354
- Riemann-Integral 199, 202
- , eigentliches 323
- , uneigentliches 323
- Riemannsche Funktion 354
- Riemannsche Summe 202
- Summendefinition 204
- Summenfolge 203
- Zetafunktion 183, 327, 363
- Zwischensumme 202
- Riemannscher Umordnungssatz 105
- RISCH, R.H. 213
- ROBERVAL, G.P. DE 225; 193
- ROLLE, M. 255
- Rotationskörper, Trägheitsmoment 294
- , Volumen 286
- RUDOLPH II. 57, 110
- RYZHIK, I.M. 274

- Sägezahnfunktion 122, 359
- SAKS 364
- Sandwich Theorem 63, 119
- Satz über die Mittel r -ter Ordnung 308
- – die Umkehrfunktion 45, 124
- – gliedweise Differentiation 261
- – – Integration 209
- von Bernstein 267, 268
- – Bolzano-Weierstraß 55
- – Bolzano-Weierstraß für Folgen 72, 75
- – Rolle 255
- – Taylor 263
- – Zygmund 364
- SCHEEFFER, L. 355; 240, 358
- SCHLÖMILCH, O. 214, 269
- SCHÖNFLIES, A. 55
- Schranke 9
- schwache Dämpfung 342
- Schwankung einer Funktion 127, 128
- Schwankungssumme 201
- Schwerpunkt 290
- Schwingung, gedämpfte 342
- SEGAL, S.L. 354
- Sehnen definition der Konvexität 302
- Sehnentrapezformel 297
- SEIDEL, PH.L. 138
- Sekante 240
- SELBY, S.M. 327
- SHANKS, D. 217
- SHANKS, W. 217
- SHARP, A. 215
- SIMPSON, TH. 297
- Simpsonsche Formel 297, 298
- –, summierte 299
- Sinus 152, 178
- , Produktdarstellung 350
- SLUSE, R.F. DE 224; 225
- SNELLIUS, W. 254
- SONI, P.P. 213
- Sprungstelle 127
- Stammfunktion 273
- starke Dämpfung 343
- Steigung einer Geraden 240
- stetige Differenzierbarkeit 242
- Stetigkeit 114, 176
- , einseitige 117
- , gleichmäßige 121
- Stetigkeitsmodul 128
- STIFEL, M. 56
- STIRLING, J. 353; 92, 333
- Stirlingsche Formel 351–353
- STOKES, G.G. 138
- STOLZ, O. 354
- STÖRMER, C. 217
- STRÖMHOLM, P. 222
- STRUBECKER, K. 354
- STRUJK, D.J. 236
- Stützgerade 301
- Subnormale 223
- Substitutionsregel 277
- Subtangente 223
- Summe einer Reihe 87
- von Potenzzahlen 36, 162
- – Zahlen 6, 7
- Summenzeichen 25

summierte Quadraturformeln 299
 – Simpsonsche Formel 299
 Supremum 9
 surjektive Abbildung 5
 SWIFT, J. 236
 SWINESHEAD, R. 80
 SZEGÖ, G. 312

 TAKAGI, T. 359
 Tangens 154, 180
 Tangente 240
 Tangentendefinition der Konvexität 302
 Tangententrapezformel 297
 TANNERY, J. 354
 TARTAGLIA, N. 146
 TAYLOR, B. 236
 Taylorpolynom 262
 Taylorsche Entwicklung 265
 – Reihe 262
 Taylorscher Satz 238, 263
 Technik des Integrierens 274
 Teilfolge 64
 Teilintegration 275
 Teilmenge 4
 Teilsomme 86
 Teleskopsumme 82
 THEON VON SMYRNA 38
 THOMAE, J. 354
 TORRICELLI, E. 225; 192, 193
 Torus 293
 Trägheitsmoment 293
 Transitivität 8
 transzendente Zahl 35
 Trichotomiegesetz 8
 trigonometrische Formeln 154, 155
 Tripel 22
 trockene Reibung 341
 TROPFKE, J. 58, 70
 TRUESDELL, C. 135
 TSCHIRNHAUS, W. VON 235
 Tupel 22
 TYCHO DE BRAHE 110

 überabzählbare Menge 23, 24
 Überlagerung zweier Zerlegungen 198
 Umgebung einer komplexen Zahl 174
 – reellen Zahl 12
 –, punktierte 114
 – von $\pm\infty$ 74
 Umkehrfunktion 5, 45, 124, 248

Umordnung einer Folge 64
 – Reihe 98
 Umordnungssatz 98
 –, großer 100, 175
 –, Riemannscher 105
 unbedingte Konvergenz 104
 unbestimmtes Integral 273
 uneigentlicher Grenzwert 64
 uneigentliches Integral 323
 unendliche Menge 23
 ungerade Funktion 39
 Ungleichung von Redheffer 311
 – Gronwall 361
 – zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel 47, 60, 61, 66, 69, 78
 untere Schranke 9
 unterer Limes 73, 75
 Untersumme 197
 Urbild einer Menge 5

 verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung 358
 Verdichtungssatz von Cauchy 97, 108
 Vereinigung von Mengen 4
 Verfeinerung 197
 Vergleichskriterien 92, 107, 175, 361
 Vielfachheit einer Nullstelle 41, 170
 VIETA (VIETÉ), F. 4; 171, 221
 VIVANTI, G. 354
 Vollständigkeitsaxiom 10
 VOLTERRA, V. 196; 367
 Vorzeichen 10
 Vulkan 289

 Wachstum der Exponentialfunktion 146
 – Logarithmusfunktion 146
 WAERDEN, B.L. VAN DER 23, 188
 WALLIS, J. 50, 194; 54, 229, 333, 351
 Wallissches Produkt 351
 WALTER, W. 181
 WEAST, R.C. 327
 WEIERSTRASS, K. 56; 55, 72, 113, 114, 138, 142, 354, 359
 Weierstraßsches Majorantenkriterium 142
 Wendepunkt 300
 Wertebereich, Wertemenge 5
 WEYL, H. 79
 WIELEITNER, H. 222
 Wiensches Strahlungsgesetz 315

- Winkelfunktionen 152, 153
 Wohlordnungssatz für natürliche Zahlen 20
 WRENCH, J.W. 217
 Wurzel einer komplexen Zahl 169
 -- reellen Zahl 46
 - eines Polynoms 40
 Wurzelkriterium 95, 175
 Wurzelsatz von Vieta 171

 YOUSCHKEWITCH, A.P. 113

 Zahl, algebraische 34
 -, Bernoullische 161
 -, ganze 21
 -, imaginäre 168
 -, irrationale 21
 -, komplexe 166
 -, konjugiert-komplexe 167
 -, natürliche 18
 -, negative 8
 -, nichtnegative 9
 -, positive 7, 8

 -, rationale 21
 -, reelle 6, 7, 10
 -, transzendente 35
 Zahlendarstellung in Positionssystemen 31
 Zahlenfolge 58
 -, komplexe 174
 ZELLER, K. 86
 ZENON VON ELEA 78f.
 Zerlegung 197
 -, äquidistante 197
 Zerlegungsnullfolge 199
 Zetafunktion 183, 327, 363
 Zusammensetzen von Abbildungen 5
 Zwischenpunkte 202
 Zwischensumme 202
 Zwischenwertsatz 2, 123
 - für Ableitungen 245
 ZYGMUND 364
 Zykloide 226
 zyklometrische Funktionen 156
 Zylinder 283