Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben

Aufgaben in § 1. *6.* Durch die Ungleichungen werden die folgenden Mengen charakterisiert:

(a) $(-1,4)$; (b) $(-1,2)\cup(4,\infty)$; (c) $(4,\infty)$; (d) $\emptyset$; (e) $(\frac{5}{4},\infty)$; (f) $\mathbb{R}$.

10. Man betrachte den Ausdruck $\left(\varepsilon a-\frac{b}{\varepsilon}\right)^2$.

11. Man kann $s=\sup A$ nehmen.

12. Aus (A13) folgt (A13*) mit A11. Nun gelte (A13*), und es sei A' eine nach oben beschränkte Menge. Ist B die Menge aller oberen Schranken und $A=\mathbb{R}\setminus B$, so gilt $A<B$. Die Schnittzahl s ist gleich $\sup A'$, wie man leicht sieht.

14. Das kleinste Intervall, welches die Menge enthält, ist
(a) $[0,1)$; (b) $(-\infty,1)$; (c) $[2,\frac{5}{2}]$; (d) $(-3,1)$.

Aufgaben in § 2. *1.* $N_3=\{1,-1\}$, $N_4=\{\pm\frac{1}{2},\ \pm 2,\ 1\}$,
$N_5=\{\pm\frac{1}{3},\ \pm 3,\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}\}$.

5. Es seien $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die (paarweise verschiedenen) Nullstellen von P und (a_n) eine Lösung von (R). Gesucht sind Koeffizienten $x_1,\dots,x_k$ derart, daß

$$(+)\qquad a_n=x_1\lambda_1^n+x_2\lambda_2^n+\dots+x_k\lambda_k^n \quad \text{für } n=0,1,2,\dots$$

gilt. Die ersten k dieser Gleichungen bilden ein System von k linearen Gleichungen für k Unbekannte x_i. Die Koeffizientenmatrix (λ_i^j) $(i=1,\dots,k;\ j=0,\dots,k-1)$ ist die Vandermonde-Matrix der Zahlen $\lambda_1,\dots,\lambda_k$; diese ist regulär (vgl. M. Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, S. 126). Daraus folgt die eindeutige Darstellung. Die Gleichung $(+)$ gilt dann für alle n, da links und rechts eine Lösung von (R) mit denselben Anfangswerten steht.

10. (a) $\left[\frac{n}{2}\right]+1$; (b) A^2 für $n=4m$ und $n=4m+1$, A^2+A für $n=4m+2$ und $n=4m+3$, wobei $A=\left[\frac{n}{4}\right]+1$ und $m\in\mathbb{N}$ ist.

11. (a) $\binom{n}{k}\left(\frac{364}{365}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{365}\right)^k$; (b) $\sum\limits_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{364}{365}\right)^{n-j}\left(\frac{1}{365}\right)^j$.
Für $n=200$, $k=2$ ergibt sich als Wahrscheinlichkeit (a) 0,087 und (b) 0,105.

12. $\inf M=1$, $\sup M=\infty$ für $\lambda>1$, $\inf M=\sup M=1$ für $\lambda=1$,
$\inf M=-\infty$, $\sup M=1$ für $\lambda<1$.

14. $f(n)=6n-2$, $a=2$.

Aufgaben in § 3. *7.* Für die Dirichlet-Funktion ist $P=\mathbb{Q}$.

Aufgaben in § 4. *4.* Man kann den folgenden Beweisgang einschlagen:
(i) $\liminf A(a_1, \ldots, a_n)$ ändert sich nicht, wenn man endlich viele a_n abändert. (ii) Es sei $\alpha = \liminf a_n$ endlich und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist $a_n > \alpha - \varepsilon$ für fast alle n, also nach Abänderung für alle n, also $A(a_1, \ldots, a_n) > \alpha - \varepsilon$ für alle n, also $\alpha - \varepsilon \leq \liminf A(a_1, \ldots, a_n)$. Ähnlich erledigt man den Fall $\alpha = \infty$; im Fall $\alpha = -\infty$ ist nichts zu beweisen.

9. Alle Folgen sind konvergent. Als Grenzwert ergibt sich (a) $-\frac{7}{2}$, (b) 0, (c) $\frac{1}{2}$, (d) 0, (e) 1, (f) 0, (g) $\frac{1}{2}$, (h) 0, (i) b (in allen Fällen).

10. Alle Folgen sind streng monoton.

15. n_0 ist die kleinste Zahl $\geq q^{1/\alpha}/(1-q^{1/\alpha})$. In den beiden speziellen Fällen ist $n_0 = 3$ bzw. $n_0 = 14$.

16. (a) Die Folge ist monoton wachsend für $\lambda \geq \lambda_\alpha$, monoton fallend für $\lambda \leq \lambda_\alpha$ mit $\lambda_\alpha = \alpha/(1+\alpha^2)$. (b) Mit der Bezeichnung $\xi_0 = (1-\sqrt{1-4\lambda^2})/2\lambda$, $\xi_1 = (1+\sqrt{1-4\lambda^2})/2\lambda$ gilt im Fall $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$: $a_n \nearrow \xi_0$ für $0 \leq \alpha < \xi_0$, $a_n \searrow \xi_0$ für $\xi_0 < \alpha < \xi_1$, $a_n \nearrow \infty$ für $\alpha > \xi_1$. Für $\alpha = \xi_0$ bzw. ξ_1 ist $a_n = \xi_0$ bzw. ξ_1 für alle n. Im Fall $\lambda > 1/2$ gilt $a_n \nearrow \infty$ für alle α.

17. Die Folge konvergiert.

18. Die Aufgabe erscheint schwierig; der Autor würde sich über positive Ergebnisse aus dem Leserkreis freuen. Als Grenzwert kommt offenbar nur 0 oder 2 in Frage. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß ein $\alpha \in (1, 2)$ mit $\lim a_n = 2$ existiert; sie stammen von Herrn Dr. R. Redlinger, Karlsruhe.

Es seien A, B, C die folgenden Teilmengen von $(1, \infty)$: $\alpha \in A$ bzw. B, wenn (a_n) streng monoton wachsend und beschränkt bzw. unbeschränkt ist, $\alpha \in C$ sonst. Man sieht leicht, daß $\lim a_n = 2$ für $\alpha \in A$, $B \supset [2, \infty)$ und $\frac{3}{2} \in C$ ist. Es ist $\alpha \in B$ genau dann, wenn es ein n mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ und $a_n > 2$ gibt. Daraus folgt, daß B offen ist. Es ist $\alpha \in C$ genau dann, wenn es ein n mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $a_{n+1} \leq a_n$ gibt. Daraus folgt, daß auch C offen ist (im Fall $a_{n+1} < a_n$ ist es einfach, im Fall $a_{n+1} = a_n$ ist $a_{n-1} = a_{n+2} < a_{n+1}$). Man beachte, daß immer $\alpha > 1$ vorausgesetzt ist. Also ist $(1, \infty) = A \cup B \cup C$, wobei die Mengen B, C offen, disjunkt und nicht leer sind. Daraus folgt $A \neq \emptyset$.

19. Man zeige, daß (a_n) eine wachsende Folge, (b_n) eine fallende Folge und $a_n b_n$ konstant ist. Daraus folgt dann $\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{a_1 b_1}$.

20. Die Behauptung folgt aus $c^n \leq a^n + b^n + c^n \leq 3c^n$.

21. Die Folge (a_n) besitze eine konvergente Teilfolge, etwa (b_n) mit $\lim b_n = \alpha$. Sind unendlich viele $b_n > \alpha$, so gibt es ein $b_{n_1} > \alpha$, sodann ein $b_{n_2} \in (\alpha, b_{n_1})$, ein $b_{n_3} \in (\alpha, b_{n_2})$, usw. Die Folge (b_{n_k}) ist monoton fallend. Die anderen Fälle werden ähnlich behandelt.

Aufgaben in § 5. *2.* Als Summe ergibt sich nacheinander $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{90}$.

7. (b) Man reduziere das Problem zunächst auf den Fall $P(k) = k^m$ und danach auf den Fall $Q(k) = k^{m+1}$.

9. Konvergent sind (a), (b) für $\alpha = -3$, (d), (f), (g), (h), (j), (k), (m) für $|\alpha| < 1$. Divergent sind (b) für $\alpha \neq -3$, (c), (e), (i), (l), (m) für $|\alpha| \geq 1$.

10. Konvergent, divergent, konvergent.

11. Man bestimme die Anzahl der n_k im Intervall $(2^n, 2^{n+1})$ bzw. $(10^n, 10^{n+1})$.

12. (a) $x/(1-x)$ für $|x| < 1$, $1/(1-x)$ für $|x| > 1$.
(b) Es ist $s_n = 1 - [(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)]^{-1}$, also $\lim s_n = 1$.

13. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für $|\alpha|>1$ (i.a. divergent für $0<|\alpha|\leq 1$).

15. $\lim a_n = 0$, die Reihe divergiert.

Aufgaben in § 6. *7.* (a) $-\frac{1}{4}$, (b) $-\frac{1}{2}$, (c) r, (d) $\frac{3}{2}$, (e) 1.

8. (a) $\mathbb{R}$, (b) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$.

9. Es gilt $f(x+h)/f(h) \leq f(x) \leq f(x+h)f(-h)$ für kleine $|h|$.

13. (a) und (b) sind einfach, man hat $g(\xi)=f(\xi-)$ zu setzen. Offenbar ist $f(b)-f(a) = g(b)-g(a)+\omega(\xi)$ und $\omega_f(x)=\omega_g(x)$ für $x \neq \xi$. Bei (c) und (d) kann man dann nacheinander $f_1(x)=f(x)-\omega(\xi_1)H(x-\xi_1)$, $f_2(x)=f_1(x)-\omega(\xi_2)H(x-\xi_2), \ldots$ betrachten und zeigen, daß alle f_k wachsend sind und daß

$$f_n(x)=f(x)-\sum_1^n \omega(\xi_k)H(x-\xi_k), \quad f(b)-f(a)=f_n(b)-f_n(a)+\sum_1^n \omega(\xi_k)$$

ist. Die Behauptung folgt für $n\to\infty$ (falls es unendlich viele Unstetigkeitsstellen gibt).

16. Es besteht eine Darstellung $P_k(x)=P_k(x_0)L_0(x)+\ldots+P_k(x_n)L_n(x)$, wobei die L_k Lagrange-Polynome sind. Daraus folgt die Behauptung ohne Mühe.

Aufgaben in § 7. *2.* Aus $RQ=P$ und $\operatorname{Grad} P<k$ folgt durch Vergleich der Koeffizienten von x^n für $n \geq k$:

$$0=a_n+c_1 a_{n-1}+\ldots+c_k a_{n-k} \;\Rightarrow\; \gamma_i=-c_i.$$

Also ist $x^k+c_1x^{k-1}+\ldots+c_k = x^k Q\left(\frac{1}{x}\right)$ das charakteristische Polynom.

3. $Q(x)=1-(\gamma_1 x+\ldots+\gamma_k x^k)$, $P(x)=Q(x)(a_0+a_1x+\ldots)$. Die Koeffizienten von $P(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{k-1}x^{k-1}$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1-\gamma_1 a_0 \\ &\vdots \\ b_{k-1} &= a_{k-1}-(\gamma_1 a_{k-2}+\gamma_2 a_{k-3}+\ldots+\gamma_{k-1}a_0). \end{aligned}$$

4. $1+2x^2+2x^3+6x^4+10x^5+22x^6+\ldots$, allgemein $a_n=\frac{1}{3}(2^n+2(-1)^n)$.

5. (a) 1, (b) 1. (c) 0, (d) -2, (e) $\frac{1}{6}$, (f) $\frac{1}{2}$, (g) 8 für $a=\frac{1}{2}$ und 0 sonst, (h) $-\frac{1}{2}$, (i) $\frac{1}{45}$.

6. Es ist $|f_n(x)| \leq n^{-3/2}$ (man kann etwa für $|x|\leq 1/\sqrt{n}$ und $|x|\geq 1/\sqrt{n}$ gesondert abschätzen). Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe und die Behauptung.

7. (a) $\frac{1}{e}$, (b) $\frac{1}{2}$, (c) 1, (d) $e^{-1/2}$, (e) 1, (f) 1, (g) 1, (h) e, (i) 1, (j) $3\sqrt{3}$, (k) 2.

8. (a) Nur für $x=0$ konvergent. (b) (c) (e) In $\mathbb{R}$ konvergent, in beschränkten Intervallen gleichmäßig konvergent. (d) für $x>0$ konvergent, in jedem Intervall $[\varepsilon,\infty)$ mit $\varepsilon>0$ gleichmäßig konvergent. (f) In $\mathbb{R}$ konvergent, in jedem Intervall $[k\pi+\varepsilon, (k+1)\pi-\varepsilon]$ gleichmäßig konvergent ($\varepsilon>0$, $k\in\mathbb{Z}$).

9. (a) $\frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$ für $x\neq 0$; (b) $\frac{x^3}{1-e^{-x^2}}$ für $x\neq 0$, 0 für $x=0$;

(c) e^{e^x} für $x \in \mathbb{R}$; (d) $\cos\sqrt{x}$ für $x \geq 0$ und $\cosh\sqrt{-x}$ für $x<0$;

(e) $\dfrac{1}{e^{2+\cos x}-1}$ für $x \in \mathbb{R}$; (f) $\exp\left(-\frac{1}{2}(1+x+x^2)\right)$ für $x \in \mathbb{R}$.

10. (a) $0, 1, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{10}$; (b) $e, 0, -\dfrac{e}{2}, 0, \dfrac{e}{6}, 0$; (c) $0, 1, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{7}{360}$;

(d) $\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{7\sqrt{2}}{32}, \dfrac{7\sqrt{2}}{128}, -\dfrac{11\sqrt{2}}{2048}, -\dfrac{123\sqrt{2}}{4096}$; (e) $\log 3, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0$.

11. Die Reihe konvergiert für $|x|<1$. Es ist a_n = Anzahl der Teiler von n (1 und n eingeschlossen), insbesondere $(a_1, \ldots, a_6) = (1, 2, 2, 3, 2, 4)$.

12. Die Folge $(f_n(x))$ ist (a) gleichmäßig konvergent in $[0,2]$, (b) konvergent in $[0,2]$, gleichmäßig konvergent in $[\delta, 2-\delta]$, (c) gleichmäßig konvergent in $\mathbb{R}$, falls $\alpha \leq \frac{1}{2}$, konvergent in $\mathbb{R}$ und gleichmäßig konvergent für $|x| \geq \delta$, falls $\alpha > \frac{1}{2}$, (e) konvergent in $(0, \infty)$, gleichmäßig konvergent in $[\delta, \infty)$; dabei ist δ eine beliebige positive Zahl. In allen anderen Fällen ist die Folge divergent.

Aufgaben in § 8. *8.* Mit $z = x+iy$ ergibt sich (a) Parallelstreifen $-1<y<0$,
(b) Ellipse $4x^2+10y^2=25$, (c) Parabel $y^2=1+2x$,
(d) Gerade $y+x=1$ ohne $z=1$, (e) Kreis $|z+\frac{4}{3}|=\frac{2}{3}$, (f) Gerade $y=x$.

10. $z=-1+i=\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, $\zeta=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})=e^{i4\pi/3}$,
$z^{-1}=-\frac{1}{2}(1+i)=\frac{1}{2}\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$, $\zeta^{-1}=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})=e^{i2\pi/3}$.

11. (a) $z_k=2e^{i\phi_k}$, $\phi_k=\dfrac{6k-1}{15}\pi$, $k=0,1,2,3,4$; (b) $\dfrac{1+i}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}(1-i)$;

(c) $\pm i$, $\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$; (d) $z_k=\dfrac{i\sin\phi_k}{1+\cos\phi_k}$, $\phi_k=\dfrac{2k\pi}{5}$, $k=0,\ldots,4$.

13. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{(1-z)^2}+\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1+z}\right)=\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3+(-1)^n)z^n$.

Aufgaben in § 9. *4.* Aus (a), (b) folgt (mit den Bezeichnungen von 9.1) $s(Z,f) \leq J(f,I) \leq S(Z,f)$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

5. Man kann so vorgehen: (i) $f \leq g \Rightarrow J(f,I) \leq J(g,I)$, (ii) $J(f\equiv 1, [a,b]) = b-a$, (iii) $|I| \inf f(I) \leq J(f,I) \leq |I| \sup f(I)$. Bei (ii) zeige man, daß $J(f\equiv 1, [0,a]) = \phi(a)$ für $a>0$ und daß $\phi(r)=r$ für rationale $r>0$ gilt.

6. Man schätze die Differenz $\sigma(Z,\xi,\eta)-\sigma(Z,\xi)$ ab.

7. $a_k=(-1)^{k-1}\dfrac{e^{\alpha k\pi}+e^{\alpha(k-1)\pi}}{\alpha^2+1}$, $b_k=-\alpha a_k$.

9. Zur Existenz vgl. man Aufgabe 18. Das Integral hat den Wert $\lim_{n\to\infty}\left(\log n-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)=1-C\approx 0{,}4228$. Dabei ist C die Eulersche Konstante; vgl. 12.17.

10. Es ist $f(x) \geq M-\varepsilon$ in einem Teilintervall $[\alpha,\beta]$. Das Integral von f^n liegt also zwischen $(\beta-\alpha)(M-\varepsilon)^n$ und $(b-a)M^n$. Daraus folgt die Behauptung.

13. Als Limes ergibt sich $\int_0^1 \dfrac{dt}{x+yt}=\dfrac{1}{y}\log\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$.

Aufgaben in § 10. *3.* $g(x)=F(x)/F(b)$ mit $F(x)=0$ für $x<a$, $F(x)=\int_a^x f(t-a)f(b-t)dt$ für $x\geq a$.

9. Man benutze die Lagrangesche Form des Restgliedes in der Taylor-Entwicklung.

10. Die Eindeutigkeit von θ folgt aus der strengen Monotonie von f'. Der Bruch $\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$ ist einerseits gleich $f'(a+\theta h)=f'(a)+\theta h f''(\xi)$, andererseits nach der Taylor-Formel gleich $f'(a)+\frac{h}{2}f''(\xi')$, wobei $\xi, \xi' \in (a, a+h)$ ist. Die Behauptung folgt für $h\to 0$.

14. Als Limes ergibt sich $\frac{16}{3}$ und $\frac{1}{2}$.

17. Das folgt aus dem Zwischenwertsatz für Ableitungen.

18. Satz von Rolle! Die Einfachheit der Nullstellen folgt durch Abzählung.

19. Man zeige, daß $|P_n(x)-T_n(x;a)|\leq M_1|x-a|^{n+1}$ ist und daß daraus $P_n\equiv T_n$ folgt.

20. $T_2(x;0)=e(1-\frac{1}{2}x^2)$, $M=1$ oder $\frac{e}{3}$.

21. (a) $e, 0, 0, \frac{e}{3}, 0, 0, -\frac{e}{18}$; (b) $0, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{96}, 0, \frac{1}{1440}$.

23. (a) -2, (b) $\frac{1}{2}$, (c) 1, (d) $\frac{1}{2}$, (e) e^{-1}, (f) 1, (g) $\frac{1}{24}$, (h) 1.

25. (a) $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ für $x\geq 0$, $f'(x)=0$ für $x\leq 0$; (b) $f'(x)=(x\sqrt{1+2x})^{-1}$ für $x>0$;
(c) $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ für $0<|x|<\frac{\pi}{2}$, $f'(0)=\frac{1}{12}$;
(d) $f'(x)=\dfrac{x(x^3-2)}{1+2x^3+x^4+x^6}$, $x\in\mathbb{R}$.

Aufgaben in § 11. *Aufgabe in 11.10.* Es ist $|H|:|Z_H|=7:18$, $|V|:|Z_V|=5:8$.

Aufgabe in 11.26. Jeder Fixpunkt von f^2 entspricht entweder einem Fixpunkt von f (d.h. ξ_μ) oder einer 2-periodischen Bahn (dann ist auch $f(\xi)$ ein Fixpunkt). Da es höchstens 4 Fixpunkte gibt (Polynom 4. Grades), existiert höchstens eine 2-periodische Bahn. Für $\mu_0<\mu\leq 2$ ist $(f^2)'(\xi_\mu)>1$, andererseits $f^2(1)<1$. Also existiert zwischen ξ_μ und 1 ein weiterer Fixpunkt, welcher nicht Fixpunkt von f ist. Für $\mu=1$ ist (0; 1), für $\mu=5/4$ ist $(-0{,}1656854; 0{,}9656854)$ die 2-periodische Bahn.

Bemerkung. Für $\mu=2$ ergibt sich $(-0{,}309017; 0{,}809017)$.

1. $V=\pi\int_0^a \cosh^2 x\,dx=\frac{\pi}{4}(a+\sinh 2a)$.

3. Man benutze das Restglied in der Form von Lagrange.

4. Die Funktion f ist stetig und streng konvex in $[0,\infty)$, $f(0)=1$, $f'(0)=-\infty$, $\min f=f\left(\frac{1}{e}\right)$. Die Funktion g ist in $[0,\infty)$ stetig differenzierbar, in $[0,\alpha]$ streng monoton fallend, in $[\alpha,\infty)$ streng monoton wachsend mit $\alpha=1/\sqrt{e}$, $g'(0)=0$, $\min g=g(\alpha)$. Die Funktion h ist $[0,\infty)$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend, $h(0)=0$, $h'(0)=1$.

10. (a) $\frac{1}{3}(x^3 \sin x^3 + \cos x^3)$; (b) $\frac{2}{\alpha} e^{\alpha\sqrt{x}}$ für $\alpha \neq 0$ sowie $2\sqrt{x}$ für $\alpha = 0$;

(c) $-\frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$; (d) $4 \arctan \sqrt{x} - 2\frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$; (e) $\tan x - x$;

(f) $\log(\log x)$; (g) $\frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + \arctan(e^x)$; (h) $-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{1}{6}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^3$;

(i) $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{x-1} + \log|x-1| + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\arctan x$;

(j) $\log|e^{2x}-1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}$; (k) $\frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{8} x \sin 4x - \frac{1}{4}x^2 \cos 4x$;

(l) $\frac{1}{4}(\log x)^4$; (m) $\frac{1}{169} e^{2x}(52x \sin 3x - 78x \cos 3x + 36 \sin 3x - 15 \cos 3x)$;

(n) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + x \arccos 2x$.

11. (a) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \log(1+\sqrt{2})\right) \approx 0{,}8670$; (b) $3\arctan 3 - \frac{1}{2}\log 10 \approx 2{,}5958$;

(c) $\frac{32}{5}(\log 2)^5 \approx 1{,}0240$; (d) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| - \frac{u}{u^2-1}\Big|_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \approx 2{,}4855$; (e) $\frac{1}{4}$;

(f) $\arctan\sqrt{3} + \operatorname{Arsinh}\sqrt{3} \approx 2{,}3642$;

(g) $\frac{a \cos a \sin b - b \sin a \cos b}{b^2 - a^2}$, falls $|a| \neq |b|$,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4a}\sin 2a, \text{ falls } b = a, \qquad -\frac{1}{2} + \frac{1}{4a}\sin 2a, \text{ falls } b = -a;$$

(h) $\frac{1}{6}$.

14. (a) $f(x)$ und $f(x-\pi)$ sind gerade; f ist 2π-periodisch. (b) $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(c) Stellen lokaler Minima: $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; Stellen lokaler Maxima in $[0, 2\pi]$: $x_1 = \pi - \arccos\frac{1}{3} \approx 1{,}9106$, $x_2 = \pi + \arccos\frac{1}{3} \approx 4{,}3726$.
(d) f hat an der Stelle $x \in [0, \pi)$ einen Wendepunkt $\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{18}(5 \pm \sqrt{97})$ $\Leftrightarrow x_3 \approx 1{,}2980$ bzw. $x_4 \approx 2{,}5409$; f ist konvex in $[0, x_3]$ und in $[x_4, \pi]$, konkav in $[x_3, x_4]$.

15. (a) $|F| = 2$ bzw. $\frac{\pi}{2}$, (b) $(x_s, y_s) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$ bzw. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{8})$.
(c) $V = \pi^2(r^2 + \frac{1}{2})$ bzw. $\pi^2(r^2 + r + \frac{3}{8})$, (d) $J = \frac{3}{8}V$ bzw. $\frac{35}{96}V$.

16. (a) Maximale x-Koordinate im Punkt $(\sqrt{2}, 0)$, maximale y-Koordinate in den Punkten $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, (b) 1,

(c) $V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} y^2\,dx = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{1+4x^2} - 1 - x^2)\,dx \approx 0{,}6440$,

(d) $V = \pi \int_{-1/2}^{1/2} 2\sqrt{1-4y^2}\,dy = \frac{1}{2}\pi^2 \approx 4{,}9348$.

Aufgaben in § 12. *1.* Eine Stammfunktion zu $1/x \cdot \log x \cdots \log_{p-1} x \cdot (\log_p x)^\alpha$ ist $(\log_p x)^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. Sie strebt gegen 0 für $x \to \infty$, falls $\alpha > 1$ ist, d.h. das entsprechende Integral konvergiert. Im Fall $\alpha = 1$ ist $\log_{p+1} x$ eine Stammfunktion. Diese strebt gegen ∞ für $x \to \infty$, d.h. das entsprechende Integral divergiert.

3. Es ist $\zeta(5) = 1{,}0369277548$.

7. Mit der Bezeichnung $g^+(x)=\max(g(x),0)$, $g^-(x)=\max(-g(x),0)$ ist

$$g=g^+-g^-,\quad \int_0^p g^+\,dx=\int_0^p g^-\,dx.$$

Für

$$a_n^+=\int_{np}^{(n+1)p} fg^+\,dx,\quad a_n^-=\int_{np}^{(n+1)p} fg^-\,dx,\quad a_n=\int_{np}^{(n+1)p} fg\,dx$$

gilt $a_n=a_n^+-a_n^-$, $a_n^+\searrow 0$, $a_n^-\searrow 0$ sowie $a_n^+\geqq a_{n+1}^-\geqq a_{n+2}^+$. Es sei etwa $a=0$. Die beiden Reihen $a_0^+-a_1^-+a_2^+-a_3^-+-\dots$ und $a_1^+-a_2^-+a_3^+-+\dots$ sind nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, also auch $\sum a_n$. Daraus folgt die Konvergenz des Integrals.

8. Mit den Bezeichnungen K für konvergent, AK für absolut konvergent, D für divergent gilt: (a) K für $0<\alpha<2$, AK für $1<\alpha<2$, (b) K für $0<\alpha<3$, AK für $1<\alpha<3$ (der Fall $a=b$ ist trivial), (c) K für $\alpha<1$, (d) K für $0<\alpha<2$, AK für $0<\alpha<1$, (e) K für $1<\alpha<2$, nicht AK, (f) K für $\alpha>\frac{1}{3}$, (g) D, (h) D, (i) K, (j) K für $\alpha>-\frac{1}{2}$, (k) K, (l) K für $0<\alpha<1$, (m) K.

9. (a) $\frac{4}{15}$, (b) $\dfrac{1}{\cosh(1)}-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\cosh(1)}{\cos(1)-1}$, (c) $\log 2\approx 0{,}6931$, (d) π, (e) -1,

(f) -4, (g) 24, (h) $\log(1+\sqrt{2})$, (i) $-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, (j) ∞.

10. (a) $\mathscr{L}(e^{at})=\dfrac{1}{x-a}$ $(x>a)$, $\mathscr{L}(\sin at)=\dfrac{a}{x^2+a^2}$, $\mathscr{L}(\cos at)=\dfrac{x}{x^2+a^2}$,

$\mathscr{L}(H(t-a))=\dfrac{1}{x}e^{-ax}$ $(x>0)$.

11. Es ist

$$\frac{2}{\pi}F\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k4^{-k}\quad\text{mit}\quad a_k=\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots(2k)}\right)^2.$$

Aus

$$a_4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{2p}<a_{4+p}<a_4=\left(\frac{105}{384}\right)^2\quad\text{für } p=1,2,\dots$$

folgt

$$\frac{2}{\pi}F\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{1}{4\cdot 4}+\frac{9}{64\cdot 16}+\frac{25}{256\cdot 64}+r_3,$$

wobei sich r_3 mit Hilfe der geometrischen Reihe abschätzen läßt:

$$\frac{a_4}{64}\cdot\frac{1}{3,19}<r_3<\frac{a_4}{64}\cdot\frac{1}{3}.$$

Es ist also $0{,}000366<r_3<0{,}000390$ und schließlich $1{,}073180<\frac{2}{\pi}F(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})<1{,}073205$.

13.
$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\frac{1}{2}+\frac{1}{s-1}-s\int_1^{\infty}C_1(x)\frac{1}{x^{s+1}}\,dx\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{12s}-\frac{s(s+1)(s+2)}{6}\int_1^{\infty}C_3(x)\frac{1}{x^{s+3}}\,dx.\end{aligned}$$

Aufgabe in 12.27. 2. Weg. Man bestimmt $w = T_n + R_n$ so, dass

$$T_n(t) \geq P(t) \quad \text{und} \quad R_n(t) = \int_0^t (t-s)^n w(s)ds$$

ist. Die Gleichung führt auf $w^{(n+1)} = n!w$, der Ansatz $w(t) = \lambda e^{\alpha t}$ führt zu

$$\alpha^{n+1} = n! \quad \text{und} \quad T_n(t) = \lambda\left(1 + \alpha t + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}t^n\right) \geq P(t).$$

Sind α und λ entsprechend bestimmt, so ist $u(t) \leq \lambda e^{\alpha t}$ für $t \geq 0$.

Historische Aufgabe in 12.27. $v' = Mv + A$, $v(0) = 0$, woraus man nach 12.9 $v(t) = A(e^{Mt} - 1)/M$ erhält. Aus $e^{-Mt} > 1 - Mt$ folgt $v(t) < Ate^{Mt}$.

Aufgabe in 12.28. Es ist $u(t) \leq g(t) + \int_0^t (t-s)^n u(s)ds$. Zwei Methoden.

(a) 2. Weg (s. oben): $g(t) \leq P(t) \Longrightarrow u(t) \leq \lambda e^{\alpha_0 t}$, $\alpha_0 = (n!)^{1/(n+1)}$.

(b) Folgerung aus Satz 12.28: α_0 wie in (a); wegen $G(\alpha_0) < \infty$ ist $g(t) \leq Ce^{\alpha_0 t}$. Zu $\alpha > \alpha_0$ gibt es dann ein λ mit $u(t) \leq \lambda e^{\alpha t}$.
Bei (b) wächst die Schranke stärker ($\alpha > \alpha_0$), aber es ist ein grösserer Term $g(t) \leq Ce^{\alpha_0 t}$ zugelassen.

Aufgabe 1 in 12.29. Man benutzt den 2. Weg: $w = T_n + R_n$ mit $w^{(n+1)} = cn!\sqrt{w}$. Für $w = \lambda t^{2n+2}$ hat man

$$w^{(n+1)} = \lambda\,\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}\,t^{n+1)} = n!c\sqrt{w} \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n!(n+1)!}{(2n+2)!}c.$$

Der Ansatz $w(t) = \lambda(t+\alpha)^{2n+2}$ führt zu $w(0) = \lambda\alpha^{2n+2} = a$. Mit diesen Konstanten ist $u(t) \leq \lambda(t+\alpha)^{2n+2}$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 2 in 12.29. Lösung: $w(t) = 6/(\alpha - t)^{-2}$. Man erhält

$$u(t) \leq \frac{6}{(\alpha - t)^2} \text{ falls } w(0) = 6\alpha^{-2} \geq a \text{ und } w'(0) = 12\alpha^{-3} \geq b \text{ ist.}$$

Die Funktion $u(t)$ existiert mindestens für $0 \leq t < \alpha = \sqrt{6/a}$, wenn $0 \leq b \leq \sqrt{2/3}a^{3/2}$ ist. Ist b grösser, so wird $\alpha = \sqrt[3]{12/b}$.

Literatur

Werke zur Mathematik-Geschichte

Häufig zitiert sind

DSB = Dictionary of Scientific Biography, Vol. I–XV, Charles Scribner's Sons, New York 1970–1978. Hier findet man, alphabetisch angeordnet, ausführliche Beschreibungen des Lebens und der Werke aller großen Mathematiker.

OK = Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. W. Engelmann Verlag, Leipzig. Diese Schriftenreihe enthält zahlreiche „klassische" mathematische Arbeiten vom Altertum bis ins 19. Jahrhundert, meistens sorgfältig kommentiert. Fremdsprachliche Werke sind ins Deutsche übersetzt.

MP = The mathematical papers of Isaac Newton, Vol. I–X. Ed. by D.T. Whiteside, Cambridge University Press 1967 ff.

1. ABEL, N.H.: Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$ Hrsg. v. A. Wangerin. OK 71, Leipzig 1921
2. ARCHIMEDES: Über Spiralen. OK 201, Leipzig 1922
3. BECKER, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Orbis Bd. II/6, München 1954
4. BERNOULLI, JAKOB: Unendliche Reihen. Hrsg. v. G. Kowalewski. OK 171, Leipzig 1909
5. BERNOULLI, JAKOB: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Hrsg. v. R. Haussner. OK 107 (1. und 2. Teil), OK 108 (3. und 4. Teil), Leipzip 1899
6. BERNOULLI, JOHANN: Differentialrechnung (nach einer Handschrift von 1691/92). Hrsg. von P. Schafheitlin. OK 211, Leipzig 1924
7. BOLZANO, B.: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Hrsg. v. Ph. Jourdain. OK 153, Leipzig 1905. Zitiert als „Rein analytischer Beweis"
8. BOLZANO, B.: Functionenlehre. Hrsg. v. K. Rychlik. B. Bolzano's Schriften, Bd. 1, Prag 1930
9. CANTOR, G.: Gesammelte Abhandlungen. Hrsg. v. E. Zermelo. Georg Olms, Hildesheim 1962
10. CANTOR, M.: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd. I–IV, Leipzig 1901. Der dritte Band wird als „Cantor III" zitiert
11. CAUCHY, A.: Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1re Partie. Analyse Algébrique, Paris 1821, Œuvres complètes II.3. Zitiert als „Cours d'Analyse"
12. CAUCHY, A.: Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, Paris 1923. Œuvres complètes II.4. Zitiert als „Calcul infinitésimal"
13. CAUCHY, A.: Leçons sur le calcul différentiel, Paris 1829. Œuvres complètes II.4. Zitiert als „Calcul différentiel"
14. DEDEKIND, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Gesammelte Schriften, 3. Band, S. 315–334. Braunschweig 1932

15. DEDEKIND, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? Ebenda, S. 335–391
16. DIJKSTERHUIS, E.J.: Die Mechanisierung des Weltbildes. Springer 1984
17. DUGAC, P.: Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. Arch. Hist. Exact Sci. 10 (1973), 41–176
18. EDWARDS Jr., C.H.: The historical development of the Calculus. Springer 1979
19. EUKLID: Die Elemente, Buch I–XIII. Hrsg. v. Clemens Thaer. Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt 1980
20. EULER, L.: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. 1. Teil der Introductio in Analysin Infinitorum. Mit einer Einführung zur Reprintausgabe von W. Walter. Springer 1983. Zitiert als „Introductio"
21. EULER, L.: Institutiones calculi differentialis. Übersetzung „Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung" von J.A.Chr. Michelsen 1790
22. EULER, L.: Institutiones calculi integralis. Übersetzung „Vollständige Anleitung zur Integralrechnung" von J. Salomon, 3 Bände, Wien 1828
23. FERMAT, PIERRE DE: Abhandlungen über Maxima und Minima. Hrsg. v. M. Miller. OK 238, Leipzig 1934
24. FERMAT, PIERRE DE: Einführung in die ebenen und körperlichen Örter. Hrsg. v. H. Wieleitner, OK 208, Leipzig 1923
25. GENOCCHI, A., PEANO, G.: Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Aus dem Italienischen übers. von G. Bohlmann und A. Schepp. Leipzig 1899
26. GERICKE, H.: Mathematik in Antike und Orient. Springer 1984
27. KEPLER, J.: Neue Stereometrie der Fässer. Übersetzung von R. Klug. OK 165, Leipzig 1908. Zitiert als „Fassmessung"
28. KLINE, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford Univ. Press, New York 1972
29. KOWALEWSKI, G.: Große Mathematiker. München-Berlin 1939
30. LEIBNIZ, G.W.: Über die Analysis des Unendlichen. Hrsg. v. G. Kowalewski. OK 162, Leipzig 1920
31. LEIBNIZ, G.W.: Mathematische Schriften. Hrsg. v. C.I. Gerhardt, Bd. 1–7. Georg Olms, Hildesheim 1962
32. NEWTONS Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Hrsg. v. G. Kowalewski. OK 164, Leipzig 1908
33. REIFF, R.: Geschichte der unendlichen Reihen. Wiesbaden 1969
34. RIEMANN, B.: Mathematische Werke. Hrsg. v. H. Weber. B.G. Teubner, Leipzig 1892
35. , STRUIK, D.J.: A Source Book in Mathematics 1200–1800. Harvard Univ. Press 1969
36. TROPFKE, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Bd. 1, 4. Aufl., bearb. v. K. Vogel, K. Reich, H. Gericke. De Gruyter 1980
37. WAERDEN, B.L. van der: Erwachende Wissenschaft. Birkhäuser 1956
38. WALTER, W.: Old and new approaches to Euler's trigonometric expansions. Amer. Math. Monthly 89 (1982), 225–230

Lehrbücher und Nachschlagewerke

39. ACZÉL, J.: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1961
40. BECKENBACH, E.F., BELLMAN, R.: Inequalities. Springer 1961
41. COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 1. Band, 4. Aufl., Springer 1971; 2. Band, 4. Aufl., Springer 1972
42. GRADSHTEYN, I.S., RYZHIK, I.M.: Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press 1980

43. GRÖBNER, W., HOFREITER, N.: Integraltafel, Teil I und II. Springer 1961
44. HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E., PÓLYA, G.: Inequalities. Cambridge Univ. Press 1959
45. HEUSER, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 13. Aufl. und Teil 2, 11 Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart 2000
46. JAHNKE-EMDE-LÖSCH: Tafeln Höherer Funktionen, 6. Aufl. B.G. Teubner, Stuttgart 1960
47. MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., and SONI, R.P.: Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics. Springer 1966
48. MANGOLDT, H. v., KNOPP, K.: Einführung in die Höhere Mathematik, Band 1 bis 4. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1990
49. SELBY, S.M., WEAST, R.C., et al.: Handbook of Mathematical Tables. Chemical Rubber Publ. Co., Cleveland 1962
50. STRUBECKER, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I–IV, R. Oldenbourg Verlag, München und Wien 1966ff.

Bezeichnungen und Grundformeln

Grundbegriffe wie $\lim a_n$, $\sum a_n$, f', $\int f\,d\,x$, ... sind in der folgende Liste nicht aufgenommen.

Formeln

Tabellen

Namen- und Sachverzeichnis

Die kursiv gesetzte Seitenzahl hinter einem Eigennamen weist auf Lebensdaten hin.