Anhang

[1] Die Schreibweise »Pythagor*ä*er« bzw. »pythagor*ä*isch« ist aus dem »a« der letzten Silbe des Pythagor*a*s abgeleitet. Im Unterschied dazu findet man oft die Schreibweise »Pythagor*e*er« bzw. »pythagor*e*isch«, hergeleitet aus dem griechischen Eigenschaftswort »pythagór*e*ios«. Beide Varianten sind möglich.

[2] Der Name des Pythagoras ist für immer mit dem mathematischen Lehrsatz verbunden, wonach das Quadrat über der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks zu den beiden Quadraten über den Katheten a und b flächengleich ist:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

In Abb. 32 ist diese Aussage graphisch dargestellt. Man kann mit einiger Phantasie aus den beigefügten dünnen Linien zugleich die Beweisführung Euklids für diesen Satz entnehmen. Abb. 33 liefert einen viel durchsichtigeren Beweis dieses Lehrsatzes: Die linke Figur setzt sich aus den beiden Flachen der kleinen Quadrate mit den Seiten a und b sowie den beiden Rechtecksflächen mit a als Länge und b als Breite zusammen. Trennt man beide Rechtecke entlang ihrer Diagonalen c, kann man sie sich so verschoben denken, dass die rechte Figur von Abb. 33 entsteht. Die Fläche, die vorher die beiden kleinen Quadrate mit Seitenlängen a und b eingenommen haben, wird nun vom Quadrat mit der Diagonalenlänge c ausgefüllt. Darum ist in der Tat

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Es gibt noch eine Reihe anderer Beweise für diesen Lehrsatz; keinen dieser Beweise dürfte Pythagoras selbst erdacht haben. Er hat den nach ihm benannten Satz vielmehr mit großer Sicherheit von ägyptischen oder babylonischen Mathematikern übernommen; auch indische Quellen sprechen von einer Entdeckung dieses Satzes. Wie so oft in der Geschichte der Wissenschaft musste der wahre Entdecker einer Erkenntnis hinter einem anderen, der sie nur überlieferte, zurückstehen.

[3] Für das Multiplikationssymbol gibt es mehrere Schreibweisen: Bei reinen Zahlenrechnungen ist das Zeichen »×« vorteilhaft, weil eine Verwechslung mit dem Dezimalpunkt nicht zu befürchten ist. Bei Formeln mit Buchstaben zieht man den Multiplikationspunkt »·« heran, um eine Verwechslung mit dem Buchsta-

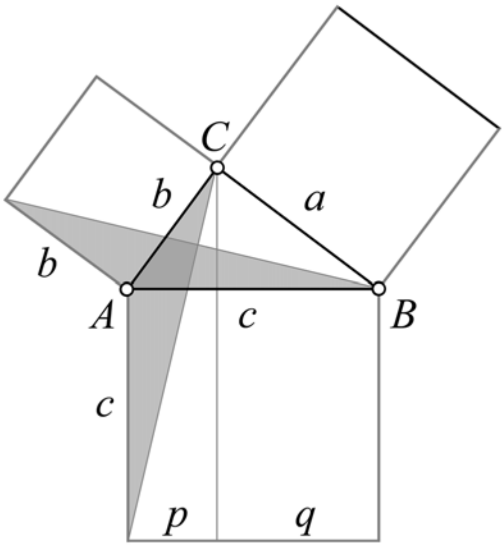

Abb. 32. Euklids Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes: Die beiden grau gerasterten Dreiecke sind flächengleich. Der doppelte Flächeninhalt eines Dreiecks ist das Produkt einer Seite mit dem (Normal)abstand des gegenüberliegenden Eckpunktes von der Seite. Darum gilt $c \cdot p = b^2$. Genauso begründet man $c \cdot q = a^2$. Wegen $c \cdot p + c \cdot q = c^2$ folgt hieraus der Satz des Pythagoras.

ben x zu vermeiden, oder man setzt ohne eigenes Multiplikationszeichen einfach die Buchstaben nebeneinander. Ebenso gibt es bei der Division drei Möglichkeiten der Schreibweisen: $a:b$ oder a/b (die satztechnisch gut in der Zeile liegen) beziehungsweise als Bruch

$$\frac{a}{b},$$

der für den geübten Mathematiker leichter lesbar ist, aber satztechnisch mehr Aufwand bedeutet.

[4] Es ist interessant, die *Länge* der Schneeflockenkurve des Helge von Koch zu berechnen: Aus ihrer Konstruktionsweise ergibt sich, dass nach jedem Schritt die Länge der neuen Seiten nur mehr ein *Drittel* der Länge der alten Seiten beträgt, dafür aber *vier* mal so viele neue Seiten wie alte Seiten vorliegen. Hatte daher das ursprüngliche Dreieck einen bestimmten Umfang u, besitzt der erste Stern den Umfang

$$\frac{4}{3} \cdot u\,,$$

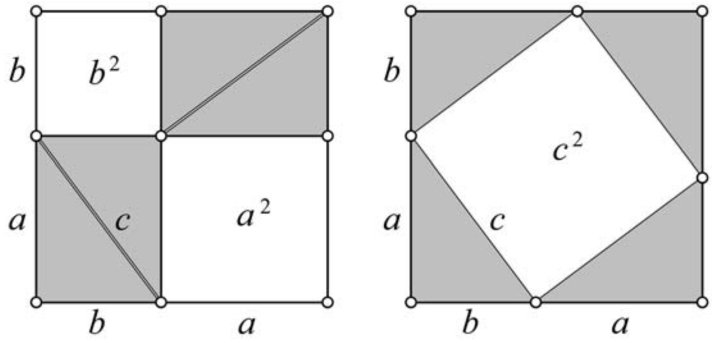

Abb. 33. Der sogenannte »indische Beweis« des pythagoräischen Lehrsatzes: Offensichtlich gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Dabei ist c nicht nur die Länge der Diagonale des Rechtecks mit der Breite a und der Länge b sondern zugleich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit a und b als Katheten.

der nach dem nächsten Konstruktionsschritt gebildete »zackigere« Stern den Umfang

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot u = \frac{16}{9} \cdot u,$$

die nach dem nächsten Konstruktionsschritt gebildete »Schneeflocke« den Umfang

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot u = \frac{64}{27} \cdot u.$$

So geht dies ohne Ende weiter: Nach dem n-ten Konstruktionsschritt ist man bereits bei einem Umfang von

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot u$$

angelangt. Beachtet man, dass die einzelnen Faktoren sich als

$$\frac{4}{3} = 1.33333\ldots, \quad \frac{16}{9} = 1.77777\ldots,$$

$$\frac{64}{27} = 2.37037\ldots$$

errechnen, erkennt man: Wurde die Figur nach drei Konstruktionsschritten weiter mit Zacken bereichert, hat sich ihr Umfang bereits mehr als verdoppelt. Dies bedeutet, dass die Umfänge mit wachsender Zunahme der Zacken alle Schranken überspringen, sie explodieren ins Unendliche.

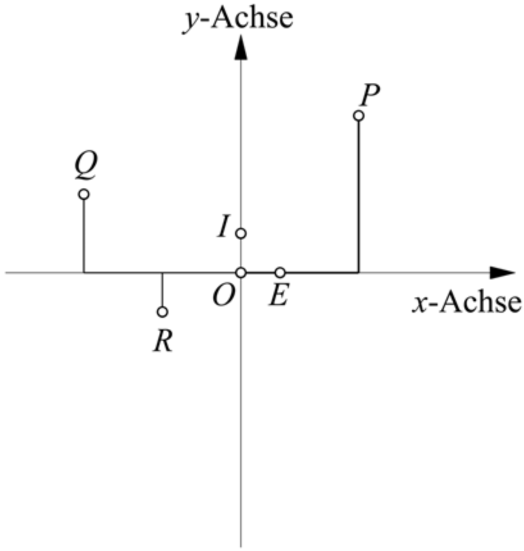

Abb. 34. Darstellung von Punkten in einem Koordinatensystem: In dieser Skizze ist $P = (3, 4)$. Für die Eichung wichtig sind der Ursprung $0 = (0, 0)$ und die beiden Einheitspunkte $E = (1, 0)$, $I = (0, 1)$. Zusätzlich sind noch zwei weitere Punkte $Q = (-4, 2)$ und $R = (-2, -1)$ eingetragen.

[5] Ob man bei der Herstellung der Mandelbrotfigur einen Punkt schwarz färbt oder nicht, ergibt sich aus der folgenden Anweisung: Man legt in die Ebene ein Koordinatensystem, so dass jeder Punkt P der Ebene durch die Angabe zweier Größen a und b eindeutig fixiert ist (Abb. 34): a bezeichnet den waagrechten Abstand des Punktes von der senkrechten y-Achse (wobei nach rechts hin a positiv und nach links hin a negativ gemessen wird), b bezeichnet den senkrechten Abstand des Punktes von der waagrechten x-Achse (wobei nach oben hin b positiv und nach unten hin b negativ gemessen wird). Wir schreiben $P = (a, b)$ und nennen a und b die *Koordinaten* von P in diesem Koordinatensystem. Mit Hilfe des vorgegebenen Punktes $P = (a, b)$ konstruieren wir eine Folge von Punkten

$$X_0, \; X_1, \; X_2, \; X_3, \; \ldots, \; X_n, \; X_{n+1}, \; \ldots$$

nach folgender Vorschrift: Zunächst sei

$$X_0 = (0, 0)$$

der Ursprung 0 des Koordinatensystems. Angenommen, wir haben für einen Index n bereits

$$X_n = (x_n, y_n)$$

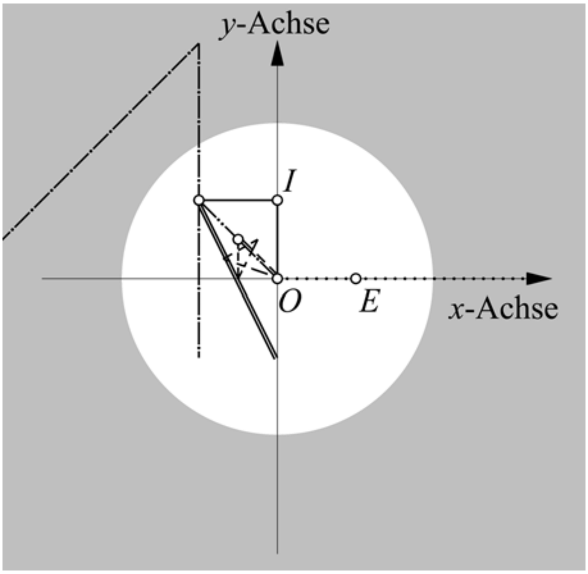

Abb. 35. Vier Punkte P und die daraus gebildeten Folgen der X_n: Im Falle $P = E = (1, 0)$ explodieren die X, in Richtung der punktierten Linien. Im Falle $P = I = (0, 1)$ verharren die X_n gemäß der Bewegung entlang der durchgezogenen Linien in einem beschränkten Bereich. Im Falle $P = (-1, 1)$ explodieren die X_n in Richtung der strichpunktierten Linien. Im Falle $P = (-0.5, 0.5)$ verharren die X_n gemäß der Bewegung entlang der gestrichelten Linien in einem beschränkten Bereich.

konstruiert, dann erhält man den nächsten Punkt

$$X_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$$

als Ergebnis der Rechnungen

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \,, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n + b \,.$$

Dies bedeutet ausführlich: Zu Beginn setzt man $X_0 = (x_0, y_0) = 0$, d. h.

$$x_0 = 0 \,,$$
$$y_0 = 0 \,.$$

Dann erhält man für $n = 0$ nach der obigen Vorschrift

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0^2 - y_0^2 + a = \\ &= a \,, \\ y_1 &= 2x_0 y_0 + b = \\ &= b \,, \end{aligned}$$

und somit $X_1 = (x_1, y_1) = (a, b) = P$. Weiter erhält man für $n = 1$ nach der obigen Vorschrift

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2 - y_1^2 + a = \\ &= a^2 - b^2 + a \,, \\ y_2 &= 2x_1y_1 + b = \\ &= 2ab + b \,. \end{aligned}$$

Die Koordinaten des dritten Punktes X_3 ergeben sich aus den obigen Werten wieder nach der Vorschrift, jetzt für $n = 2$:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2^2 - y_2^2 + a = \\ &= (a^2 - b^2 + a)^2 - (2ab + b)^2 + a \\ &= a^4 + b^4 - 6a^2b^2 + 2a^3 - 6ab^2 + a^2 - b^2 + a \,, \\ y_3 &= 2x_2y_2 + b = \\ &= 2(a^2 - b^2 + a)(2ab + b) + b \\ &= 4a^3b - 4ab^3 + 6a^2b - 2b^3 + 2ab + b \,. \end{aligned}$$

Wenn man mit Bleistift und Papier rechnet, beginnt ab diesem Schritt jede Übersicht zu schwinden. Für eine Rechenmaschine ist es hingegen kein Problem, diese Rechnungen für $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, … fortzuführen (Abb. 35).

Die Devise bei der Konstruktion der Mandelbrotfigur lautet nun: Der Punkt P bleibt weiß, wenn sich die Folge der durch ihn gebildeten Punkte

$$X_0\,,\quad X_1\,,\quad X_2\,,\quad X_3\,,\quad \ldots\,,\quad X_n\,,\quad X_{n+1}\,,\quad \ldots$$

unbeschränkt vom Ursprung $X_0 = 0 = (0, 0)$ entfernt. (Dies ist sicher bereits dann der Fall, sobald einer der Punkte X_n mehr als doppelt so weit wie der Punkt $E = (1, 0)$ von 0 entfernt ist.) Bleibt hingegen die Folge der Punkte

$$X_0\,,\quad X_1\,,\quad X_2\,,\quad X_3\,,\quad \ldots\,,\quad X_n\,,\quad X_{n+1}\,,\quad \ldots$$

beschränkt, färbt man den Punkt P schwarz.

Am besten illustriert man diese Anweisung anhand simpler Beispiele: Wenn $P = 0 = (0, 0)$ ist, d. h. wenn $a = b = 0$ gilt, dann bleiben alle Punkte

$$0 = X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = \ldots X_n = X_{n+1} = \ldots$$

im Ursprung hängen; 0 muss schwarz gefärbt werden. Wenn hingegen $P = E = (1, 0)$ ist, dann errechnen sich die Punkte X_n als

$$\begin{aligned} &X_0 = (0{,}0)\,,\quad X_1 = (1{,}0)\,,\quad X_2 = (2{,}0)\,,\quad X_3 = (5{,}0)\,, \\ &X_4 = (26{,}0)\,,\quad X_5 = (677{,}0)\,,\quad \ldots\,, \end{aligned}$$

d. h. diese Punktfolge explodiert vom Ursprung weg, und darum bleibt E weiß. Eine genaue Analyse der allgemeinen Formeln zeigt, dass die auf der x-Achse liegenden Punkte $P = (a, 0)$ nur für $-2 \le a \le 0.25$ schwarz gefärbt werden und der restliche Teil der x-Achse weiß bleibt. Zum Beispiel kommt man beim Punkt $P = (-1, 0)$ auf die Punktefolge

$$X_0 = (0,0)\ ,\quad X_1 = (-1,0)\ ,\quad X_2 = (0,0)\ ,$$
$$X_3 = (-1,0)\ ,\quad X_4 = (0,0)\ ,\quad X_5 = (-1,0)\ ,\quad \dots\ ,$$

d. h. die Folge springt nur zwischen den Punkten (0, 0) und (–1, 0) hin und her. Betrachten wir das Verhalten der Folge, wenn man von $P = I = (0, 1)$ ausgeht:

$$X_0 = (0,0)\ ,\quad X_1 = (0,1)\ ,\quad X_2 = (-1,1)\ ,$$
$$X_3 = (0,-1)\ ,\quad X_4 = (-1,1)\ ,\quad X_5 = (0,-1)\ ,\quad \dots\ ,$$

auch sie springt nach dem Verlassen von *0* und *I* zwischen zwei Punkten hin und her. Der Punkt $I = (0, 1)$ ist darum schwarz. Als letzte Beispiele betrachten wir noch den Punkt $P = (-1, 1)$ mit seiner daraus gebildeten Folge

$$X_0 = (0,0)\ ,\quad X_1 = (-1,1)\ ,\quad X_2 = (-1,-1)\ ,$$
$$X_3 = (-1,3)\ ,\quad X_4 = (-9,-5)\ ,\quad X_5 = (55,91)\ ,\quad \dots\ ,$$

die offenkundig von *0* weg explodiert, weshalb dieser Punkt weiß bleibt. Gehen wir vom Punkt $P = (-0.5, 0.5)$ aus, errechnet sich die von ihm gebildeten Folge als

$$X_0 = (0,0)\ ,\quad X_1 = (-0.5,0.5)\ ,\quad X_2 = (-0.5,0)\ ,$$
$$X_3 = (-0.25,0.5)\ ,\quad X_4 = (-0.6875,0.25)\ ,$$
$$X_5 = (-0.08984375,0.15625)\ ,\quad \dots\ .$$

Sie bleibt jedenfalls nach den ersten fünf Schritten innerhalb des Kreises mit Mittelpunkt *0* und dem Radius 2 (d.h. der Kreis läuft durch (2, 0)). Man darf darum vermuten, dass dieser Punkt *P* schwarz zu färben ist.

Am letzten Beispiel erkennen wir, welches Problem sich hinter der Konstruktion der Mandelbrotfigur verbirgt: Die Explosion der Punktefolge von *0* weg ist im Allgemeinen leicht zu diagnostizieren: Sobald sich ein Punkt der Folge von *0* weiter als 2 entfernt, kann die Punktefolge nicht mehr beschränkt bleiben. Hingegen ist es im Allgemeinen sehr schwer *definitiv* zu sagen, dass die Punktefolge für *alle unendlich vielen* Indizes *n* innerhalb des Kreises vom Radius 2 um *0* verweilt: Hier kann man auch mit dem Computer nur Vermutungen anstellen, die eine Berechnung genügend vieler Folgeglieder bestenfalls erhärtet, jedoch nie sichert.

[6] Bezeichnet $\varphi = d : s$ das Verhältnis von Diagonale zur Seite des Pentagramms, ergibt sich aus den Formeln

$$\varphi = \frac{d}{s} = \frac{d'}{s'}\ ,\ \frac{d}{d'} = \frac{s}{s'}\ ,\ d = s + d',\ s = d' + s'$$

und der Rechnung

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{s}{d} = \frac{d-d'}{d} = 1 - \frac{d'}{d} = 1 - \frac{s'}{s} = \frac{s-s'}{s} = \frac{d'}{s} = \frac{s'}{d'}$$

mit den Folgerungen

$$\varphi = \frac{d}{s} = \frac{s}{d'} = \frac{d'}{s'}$$

und

$$\varphi = \frac{s+d'}{s} = 1 + \frac{d'}{s} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

dass dieses Verhältnis φ der zauberhaften Formelkette

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \ldots$$

gehorcht. Dieser »Kettenbruch« kommt nie zu einem Ende. Dies ist letztlich der Grund für die *Irrationalität* von φ, d. h. für die Tatsache, dass φ *kein* Verhältnis ganzer Zahlen sein kann. Anhand des Beispiels

$$917 : 700 = 1 + 217 : 700 = 1 + \frac{1}{700 : 217} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3 + 49 : 217} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{217 : 49}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + 21 : 49}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{49 : 21}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + 7 : 21}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{21 : 7}}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}$$

sieht man sehr leicht, dass jede »Kettendivision« ganzer Zahlen – in diesem Fall der Zahlen 917 und 700 – irgendwann aufhören muss. Denn nach der ersten

Division bleibt der Rest 217, der kleiner als der Nenner 700 ist, nach der zweiten Division bleibt der Rest 49, der kleiner als der Nenner 217 ist, nach der dritten Division bleibt der Rest 21, der kleiner als der Nenner 49 ist, nach der vierten Division bleibt der Rest 7, der kleiner als der Nenner 21 ist, und die letzte Division geht restlos auf. Irgendwann muss eine Kettendivision mit einer letzten restlosen Division enden: Der Rest der vorhergehenden Division ist nämlich der Nenner der nachfolgenden Division, und darum werden die Reste schrittweise kleiner. Weil zwischen erstem Nenner und Null nur *endlich* viele Zahlen als Reste zur Verfügung stehen, ist der Abbruch des Verfahrens garantiert.

[7] Die »regelmäßigen Körper«, auch *reguläre Polyeder* genannt, spielen in der Entwicklung der Physik eine gewisse Rolle. Platon stellt sie in seiner Schrift Timaios in direkten Zusammenhang mit den Elementen, aus denen die Welt besteht. Die Lektüre dieser Schrift hat mehr als 2000 Jahre später den jungen Werner Heisenberg zum Studium der Naturwissenschaften angeregt und war ihm Leitfaden in der Entwicklung der Quantentheorie.

Wie man aus Abb. 11 erkennt, sind die regulären Polyeder aus gleichseitigen und gleichwinkligen Dreiecken, Vierecken und Fünfecken aufgebaut. Das gleichseitige Dreieck hat als Innenwinkel 60°. Drei gleichseitige Dreiecke benötigt man mindestens zum Aufbau einer räumlichen Ecke – hieraus entsteht das Tetraeder. Eine aus vier gleichseitigen Dreiecken gebildete räumliche Ecke bildet die Hälfte eines Oktaeders. Eine aus fünf gleichseitigen Dreiecken gebildete räumliche Ecke bildet das Viertel eines Ikosaeders. Sechs gleichseitige Dreiecke aneinandergeheftet bleiben wegen $6 \times 60° = 360°$ in der Ebene liegen. Die Möglichkeiten, aus gleichseitigen Dreiecken räumliche Ecken zu erzeugen, sind somit erschöpft. Das gleichseitige und gleichwinklige Viereck ist das Quadrat, es hat als Innenwinkel 90°. Drei Quadrate benötigt man mindestens zum Aufbau einer räumlichen Ecke – hieraus entsteht die Hälfte eines Würfels. Vier Quadrate aneinandergeheftet bleiben wegen $4 \times 90° = 360°$ in der Ebene liegen – mehr räumliche Ecken kann man mit Quadraten nicht herstellen. Das Pentagramm, das gleichseitige und gleichwinklige Fünfeck, hat als Innenwinkel 108°. Drei Pentagramme benötigt man mindestens zum Aufbau einer räumlichen Ecke – hieraus entsteht das Viertel eines Dodekaeders. Vier Pentagramme aneinandergeheftet überlappen einander wegen $4 \times 108° > 360°$ – mehr räumliche Ecken kann man daher mit Pentagrammen nicht herstellen.

Ein Polyeder ist allgemein ein Körper, der von ebenen Flächen begrenzt wird. Diese Flächen selbst haben gerade Kanten als Ränder und die Kanten beginnen und enden in Ecken. Viele Polyeder gehorchen dem *Polyedersatz* des Leonhard Euler: Die Anzahl e der Ecken zur Anzahl f der Flächen addiert ergibt genau um 2 mehr als die Anzahl k der Kanten:

$$e + f = k + 2.$$

Wie man unschwer bestätigt, gehorchen die regulären Polyeder dem Polyedersatz. Zusätzlich ist bei einem regulären Polyeder jede Flächen von der gleichen Zahl n von Kanten begrenzt, und von jeder Ecke geht die gleiche Zahl m von

Kanten aus. Da an jede Kante zwei Flächen aneinanderstossen, gilt $n \cdot f = 2 \cdot k$, denn in $n \cdot f$ werden die Kanten doppelt gezählt.

Da jede Kante von zwei Ecken begrenzt wird, gilt aus demselben Grund $m \cdot e = 2 \cdot k$. Dies in den Polyedersatz eingesetzt führt zu

$$\frac{2k}{m} + \frac{2k}{n} = k + 2 \, ,$$

nach Division beider Seiten durch $2k$ zu

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \, .$$

Nur sehr wenige Zahlenkombinationen in k, m und n eingesetzt, lösen diese Gleichung: Es sind dies $(k, m, n) = (6, 3, 3)$ für das Tetraeder, $(k, m, n) = (12, 3, 4)$ sowie $(k, m, n) = (12, 4, 3)$ für Würfel und Oktaeder und $(k, m, n) = (30, 3, 5)$ sowie $(k, m, n) = (30, 5, 3)$ für Dodekaeder und Ikosaeder. Mehr Lösungen gibt es nicht, darum sind dies die einzigen »regelmäßigen Körper«.

Zwischen Würfel und Oktaeder und zwischen Dodekaeder und Ikosaeder bestehen »reziproke« Beziehungen: Die Flächenmitten eines Würfels sind die Ecken eines Oktaeders und umgekehrt, die Flächenmitten eines Dodekaeders sind die Ecken eines Ikosaeders und umgekehrt. Das Tetraeder ist zu sich selbst reziprok: Seine Flächenmitten sind die Ecken eines kleineren, eingeschriebenen Tetraeders.

[8] Über die Verteilung der Primzahlen herrschen noch viele ungelöste Vermutungen: Man weiß zum Beispiel nicht, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Es ist zwar bekannt, dass sich ab 7 jede ungerade Zahl als Summe dreier Primzahlen schreiben lässt, z. B.

$$7 = 2 + 2 + 3 \, , \quad 9 = 2 + 2 + 5 \, , \quad 11 = 3 + 3 + 5 \, ,$$
$$13 = 3 + 5 + 5 \ldots \, ,$$

aber man weiß noch nicht, ob sich ab 4 jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt, z. B.

$$4 = 2 + 2 \, , \quad 6 = 3 + 3 \, , \quad 8 = 3 + 5 \, , \quad 10 = 3 + 7 \, ,$$
$$12 = 5 + 7 \, , \quad \ldots$$

Die Zahlen

$$2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \, , \quad 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \, ,$$
$$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17, \quad 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257 \, ,$$
$$2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$$

sind lauter Primzahlen. Euler bewies jedoch, dass

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$$

keine Primzahl mehr ist. Ob es unter den Zahlen der Form $2^{2^n} + 1$ noch weitere Primzahlen gibt, ist eine offene Frage. Diese Zahlen sind auch von geometrischem Interesse: Gauß (*1777, †1855) bewies, dass die einzigen regelmäßigen Vielecke, die man allein mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, jene sind, bei denen die Zahl ihrer Ecken von der Form $2^m \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ ist. Dabei bezeichnen die $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen der obigen Gestalt $2^{2^n} + 1$ (und $m \geq 0$, $k \geq 0$ sind ganze Zahlen). Man kann zum Beispiel mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges 15-Eck oder 60-Eck, nicht aber ein regelmäßiges Siebeneck, Neuneck oder 45-Eck konstruieren.

[9] Noch bedeutender als die Tatsache, dass sich bis auf 1 jede Zahl als Produkt von Primzahlen schreiben lässt, ist die Erkenntnis Euklids, dass diese Produktdarstellung sogar *eindeutig* ist (wenn man von der Reihenfolge der Primfaktoren absieht). Dies ist keineswegs selbstverständlich. So gilt zum Beispiel

$$332\,928 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 17 \times 17\,,$$

aber

$$332\,929 = 577 \times 577\,,$$

d. h. diese beiden grundverschiedenen Primfaktorenzerlegungen stellen *fast* die gleiche Zahl 332 928 bzw. 332 929 dar. Könnte nicht irgendwann der Fall eintreten, dass zwei verschiedene Zerlegungen in Primfaktoren

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_K \quad \text{und} \quad q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_L$$

genau ein und dieselbe Zahl n darstellen? Angenommen, dies wäre in der Tat der Fall und n bezeichnete die *kleinste* der Zahlen, die sich auf zwei verschiedene Arten in Primfaktoren zerlegen ließe:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_K = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_L\,.$$

Keine der Primzahlen p_k könnte mit einer der Primzahlen q_l übereinstimmen, denn ein in beiden Zerlegungen vorkommender gemeinsamer Primfaktor ergäbe, durch ihn gekürzt, zwei verschiedene Zerlegungen einer noch kleineren Zahl als n. Da p_1 deshalb von q_1 verschieden ist, können wir von $p_1 < q_1$ ausgehen (im umgekehrten Fall argumentieren wir, die p-s mit den q-s vertauscht, genauso). Die Zahl

$$m = (q_1 - p_1) \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_L = p_1 \cdot (p_2 \cdot \ldots \cdot p_K - q_2 \cdot \ldots \cdot q_L)$$

ist einerseits *kleiner* als n und hat, wie man der obigen Formel entnimmt, zwei Produktdarstellungen, wobei in der ersten p_1 sicher *keinen* der vorkommenden Faktoren teilt, in der zweiten hingegen als Faktor auftritt. Also hätte auch m sicher mehrere Zerlegungen in Primfaktoren, was der Definition von n als *kleinste* dieser Zahlen widerspricht. Dies belegt Euklids Behauptung, die Zerlegung jeder von 1 verschiedenen Zahl in Primfaktoren ist (abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren) eindeutig.

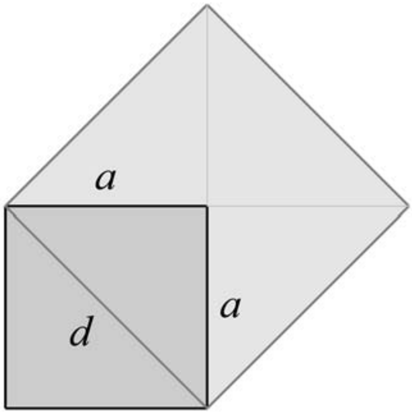

Abb. 36. Das Quadrat mit Seitenlange a und Flächeninhalt a^2 besitzt eine Diagonale der Länge d. Das über d errichtete Quadrat hat den doppelt so großen Flächeninhalt $d^2 = 2a^2$.

Die Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung hat entscheidende Konsequenzen. Ein Beispiel soll dies belegen (Abb. 36): Das Verhältnis $\sqrt{2}$ der Diagonale des Quadrats zu seiner Seitenlänge ergibt mit sich multipliziert 2,

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \,.$$

Wenn nämlich a die Länge der Quadratseite und d die Länge der Quadratdiagonale bezeichnen, folgt aus dem Satz des Pythagoras sofort

$$a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2 = d^2 \,,$$

was nach Division durch a^2 in der Tat

$$2 = \frac{d^2}{a^2} = \left(\frac{d}{a}\right)^2 = \sqrt{2}^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

beweist. Wäre $\sqrt{2} = m:n$ das Verhältnis zweier ganzer Zahlen m und n, ergäbe sich hieraus

$$2 = \sqrt{2}^2 = \frac{m^2}{n^2} \,, \qquad 2 \cdot n^2 = m^2 \,.$$

Wir denken uns m und n in Primfaktoren zerlegt. In der Primfaktorenzerlegung von m^2 und n^2 kommen die Primfaktoren von m und n jeweils *doppelt* so oft vor. Der Primfaktor 2 kommt in m^2 insbesondere in einer *geradzahligen* Vielfachheit vor, während er in $2 \cdot n^2$ in einer *ungeradzahligen* Vielfachheit auftritt. Da dies der eben bewiesenen *Eindeutigkeit* der Zerlegung in Primfaktoren widerspricht, kann $\sqrt{2}$ kein Verhältnis ganzer Zahlen sein.

10 Das Wort »es gibt« verursachte in der gesamten Geschichte der Mathematik reichlich Verwirrung. Auch heute sind sich die Mathematiker nicht über seine

Bedeutung einig. Eine sich *Formalisten* nennende Gruppe von Mathematikern gesteht einem mathematischen Objekt bereits dann »Existenz« zu, wenn es sich innerhalb der mathematischen Welt widerspruchsfrei einordnen lässt. Im Gegensatz dazu verbindet die sich *Platonisten* nennende Gruppe von Mathematikern mit der »Existenz« eines mathematischen Objekts die Vorstellung eines effektiven Vorhandenseins dieses Objekts: Wie es Schafe, Rosen und Sterne »gibt«, »gibt« es auch unendlich viele Primzahlen; ja in der Sicht dieser Mathematiker ist die »Existenz« der unendlich vielen Primzahlen noch mehr verbürgt als die »Existenz« der uns sinnlich erfahrbaren Welt. Eine dritte Position wird von den sich *Intuitionisten* oder *Konstruktivisten* nennenden Mathematikern eingenommen: Für sie ist die »Existenz« eines mathematischen Objekts bereits dann verbürgt, wenn seine Konstruktion unter Zuhilfenahme der Zahlen 1, 2, 3, 4, … gelingt. Die »Existenz« der Zahlen 1, 2, 3, 4, … selbst wird als intuitiv gegeben erachtet. Sie existieren in dem Maße, in dem man jedermann erklären kann, wie man mit ihnen rechnet.

Vergleicht man diese Positionen mit den Denkschulen der griechischen Philosophie, kann man in der Position der Formalisten und jener der Sophisten Parallelen sehen, die Position der Platonisten natürlich mit Platon selbst in Verbindung setzen und die Position der Intuitionisten oder Konstruktivisten zur philosophischen Schule der Kyniker in Analogie setzen.

[11] Die größte noch ohne elektronische Rechenmaschine ermittelte Primzahl wurde 1876 berechnet: Es ist dies der Zahlengigant

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727\ .$$

Die Zahlen der Form $2^p - 1$ erweisen sich zuweilen als Primzahlen (aber nur, wenn auch p eine Primzahl ist), so sind zum Beispiel

$$2^2-1=3\,,\quad 2^3-1=7\,,\quad 2^5-1=31\,,\quad 2^7-1=127$$

Primzahlen, hingegen ist $2^{11}-1=2047=23\times 89$ keine Primzahl. Auch die größten derzeit bekannten, mit Computern berechneten Primzahlen sind von dieser Gestalt. Zum Beispiel besteht der als Primzahl errechnete Zahlenkoloss

$$2^{25964951}-1$$

aus 7 816 230 Ziffern; ihn aufzuschreiben erfordert ein mehr als 1500 Seiten dickes Buch!

[12] Für Archimedes war es evident, dass jede vorgegebene positive Größe von einem der Brüche in der Folge

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0.333\,333\,333\ldots\ , \\
\frac{1}{12} = \frac{1}{3\times 4} &= 0.083\,333\,333\ldots\ , \\
\frac{1}{48} = \frac{1}{3\times 16} &= 0.020\,833\,333\ldots\ , \\
\frac{1}{192} = \frac{1}{3\times 64} &= 0.005\,208\,333\ldots\ , \\
\frac{1}{768} = \frac{1}{3\times 256} &= 0.001\,302\,083\ldots\ , \\
\frac{1}{3072} = \frac{1}{3\times 1024} &= 0.000\,325\,520\ldots\ , \\
\ldots &
\end{aligned}
$$

unterlaufen wird.

Dies stimmt sicher, wenn man unter »positiven Größen« positive *Dezimalzahlen* versteht: Denn wie klein auch immer eine positive Dezimalzahl sein mag, irgendwann muss in ihr nach endlich vielen Nullen ab dem Dezimalpunkt eine von Null verschiedene Ziffer erscheinen. Bei der oben gegebenen unendlichen Folge von Brüchen nimmt die Anzahl der Nullen nach dem Dezimalpunkt unbeschränkt zu: Jeweils nach höchstens zwei weiteren Brüchen der Folge handelt man sich eine zusätzliche Null nach dem Dezimalpunkt ein. Einmal ist daher ein Bruch aus dieser Folge sicher kleiner als die gegebene positive Dezimalzahl.

Stimmt diese Aussage hingegen auch für *geometrische Größen*? Der griechische Mathematiker Eudoxos von Knidos um 400 v. Chr. war davon fest überzeugt, und Archimedes teilte seine Meinung. Heute ist man sich dessen nicht mehr so sicher (vgl. Anmerkung 17 und die von Hilbert vertretene Position der Geometrie als formales Sprachspiel). Ein eigenes Axiom, wonach jede positive geometrische Größe von einem der Brüche aus der unendlichen Folge

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \ldots$$

unterlaufen wird, dient zur Sicherung der Überzeugung des Archimedes.

13 Die »unendliche Summe«

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$$

ist ein spezielles Beispiel einer sogenannten *geometrischen Reihe*: Allgemein lautet die geometrische Reihe

$$1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots\ ,$$

wobei im obigen Beispiel die Größe q den Wert $q = 1/4$ annimmt. Die Summe s der geometrischen Reihe kann man mit dem folgenden Trick leicht ermitteln: Wenn man die Formel

$$s = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots$$

auf beiden Seiten mit q multipliziert, insbesondere auf der rechten Seite jeden einzelnen Summanden mit q multipliziert, erhält man

$$sq = q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots \quad .$$

Hieraus ersieht man die Beziehung

$$s = 1 + sq \quad .$$

Nach der Umformung

$$s - sq = s(1 - q) = 1$$

gelangt man im Falle $q \neq 1$ (um nicht Null im Nenner zu bekommen) zur berühmten *Summenformel* der geometrischen Reihe:

$$s = \frac{1}{1 - q} .$$

In der Tat erhält man im Spezialfall $q = 1/4$ des Archimedes den von ihm behaupteten Wert

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} .$$

Diese Herleitung des Ergebnisses scheint auf den ersten Blick viel einfacher und eleganter als die mühsame Argumentation des Archimedes. Ihr einziger Nachteil ist, dass sie so nicht stimmen kann. Denn für $q = 2$ kommt man zu dem völlig unsinnigen Resultat

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots = \frac{1}{1 - 2} = -1 \ .$$

Wo aber steckt der Fehler? In einer falschen Rechnung kann er nicht verborgen sein. Es handelt sich vielmehr darum, dass der sorglose Umgang mit »unendlichen Summen« zu diesem Nonsens führt. Es ist nämlich nicht einmal definiert, was man sich unter einer »unendlichen Summe« vorstellen soll – umso mehr müssen wir den klaren Blick des Archimedes bewundern, der all diesen Problemen auswich.

[14] Wie aus der Abbildung 37 unmittelbar ersichtlich ist, besitzen das Dreieck mit den Ecken P, Q, M und das Dreieck mit den Ecken P', Q', M die gleichen Flächeninhalte, denn die Grundlinien $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ sind gleich lang und M ist von beiden Grundlinien gleich weit entfernt. Es folgt hieraus für das Sechseck, dass sein Flächeninhalt mit dem Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken A, B und M übereinstimmt, wobei die von A zu B führende Strecke den *Umfang* des Sechsecks als Länge besitzt.

Johannes Kepler hat die gleiche Überlegung auf den Kreis mit Radius r und Umfang u übertragen: Er fasste den Kreis als »Unendlicheck« auf und for-

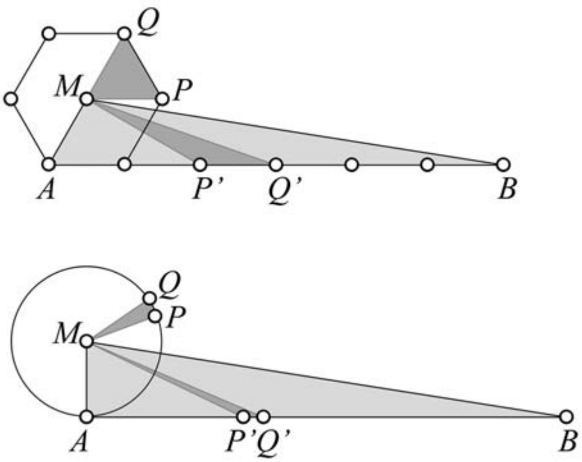

Abb. 37. Das Sechseck besitzt den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck mit den Ecken *A*, *B* und *M*. Kepler behauptet, dass man dieselbe Beweisführung auch beim Kreis formulieren darf.

mulierte die obige Überlegung für zwei »unmittelbar benachbarte« Punkte *P* und *Q* dieses »Unendlichecks«. Auf diese Weise gelangte er zur Behauptung, der Flächeninhalt $r^2\pi$ des Kreises stimme mit dem Flächeninhalt $ru/2$ des Dreiecks mit den Ecken *A*, *B* und *M* überein. Die Gleichung

$$\frac{ru}{2} = r^2\pi$$

führt nach Multiplikation beider Seiten mit 2 und Division beider Seiten durch *r* zur bekannten Formel

$$u = 2r\pi$$

für den Kreisumfang.

Nicht nur Archimedes, alle Mathematiker der Antike hätten die Argumentation Keplers verworfen: Was soll man sich denn unter einem »Unendlicheck« vorstellen? Und noch schwerwiegender: Es gibt auf einem Kreis keine zwei »unmittelbar benachbarten« Punkte *P* und *Q*. Entweder stimmt *P* mit *Q* überein, dann sind sie gleich und nicht benachbart. Oder *P* ist von *Q* verschieden, dann gibt es bereits unendlich viele Punkte auf dem Kreisbogen zwischen ihnen, also sind sie genauso wenig benachbart.

Das Eigenartige aber ist: Trotz all dieser Einwände ist die von Kepler erhaltene Formel $u = 2r\pi$ korrekt!

[15] Ob man den Anstieg $\Delta y : \Delta x$ der Hypotenuse betrachtet oder ob man das reziproke Verhältnis $\Delta x : \Delta y$ ins Auge fasst, ist in Wahrheit reine Konvention. Der

Vorteil im Verhältnis $\Delta y : \Delta x$ liegt allein im Sprachlichen begründet: In der Tat ist seine Größe direkt mit dem anschaulichen »Anstieg« der Hypotenuse korreliert, während man für das Verhältnis $\Delta x : \Delta y$ ein Kunstwort wie zum Beispiel »Flachheit« eigens einführen müsste.

[16] Neben dem Paradoxon des fliegenden Pfeils ist Zenons Paradoxon von Achill und der Schildkröte berühmt:

Angenommen, der hundertmal schnellere Achill läuft einer, ursprünglich hundert Meter von ihm entfernten Schildkröte nach und bewältigt diese Strecke in zehn Sekunden, so hat die Schildkröte in dieser Zeit einen Meter zurückgelegt und noch immer einen Vorsprung. Auch wenn Achill diesen Meter in einer Zehntel Sekunde durchläuft, hat die Schildkröte immer noch einen Vorsprung von einem Zentimeter, und selbst nach einer weiteren Tausendstel Sekunde liegt das Tier immer noch einen Zehntel Millimeter voraus. Zenon behauptet: Das langsamste Wesen – die Schildkröte – wird in seinem Lauf niemals von dem schnellsten – Achill – eingeholt, *denn der Verfolger muss immer erst zu dem Punkt gelangen, von dem das fliehende Wesen schon aufgebrochen ist*. Also muss das langsamere Wesen immer einen gewissen Vorsprung haben. Der Hinweis darauf, die sukzessive Addition aller zurückgelegten Wege führe eben zu einer geometrischen Reihe

$$
\begin{aligned}
&100 + 1 + 0.01 + 0.0001 + \ldots = \\
&= 100 \times \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \ldots\right) = \\
&= 100 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{10\,000}{99} = 101.010101\ldots \;,
\end{aligned}
$$

die genau die Überholstrecke in Metern in der Überholzeit von

$$
\begin{aligned}
&10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100\,000} + \ldots = \\
&= 10 \times \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \ldots\right) = \\
&= 10 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{10\,00}{99} = 10.101010\ldots \;,
\end{aligned}
$$

Sekunden angibt, ist sicher wichtig und erhellt den *mathematischen* Aspekt des Paradoxons. Wir haben bei der Diskussion der Summenformel

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

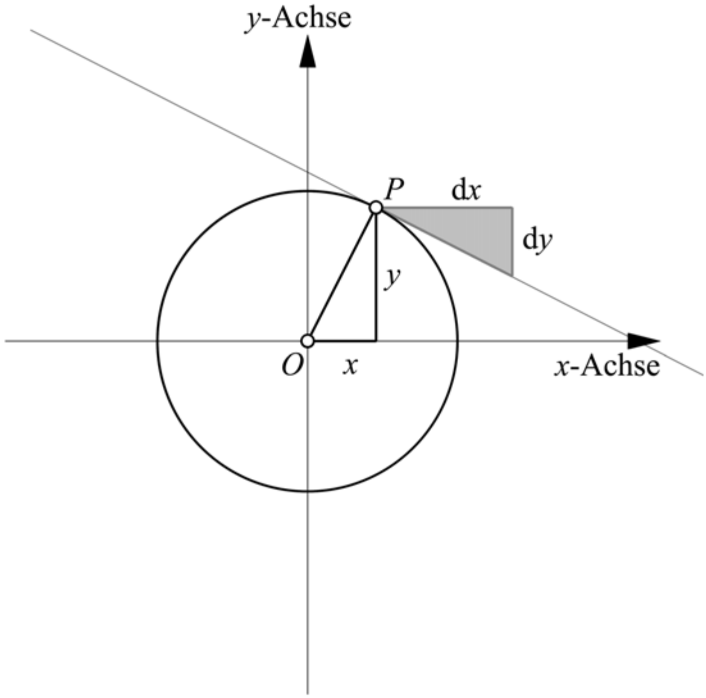

Abb. 38. Der Kreis mit der Tangente im Punkt $P = (x, y)$. Setzt man willkürlich $dx = y$, folgt aus $dy : dx = -x : y$ die Beziehung $dy = -x$. Die Kreistangente ist im rechten Winkel zum Radius, der den Mittelpunkt mit P verbindet.

in Anmerkung 13 jedoch gelernt, dass diese Formel nicht immer stimmt. Der Begriff einer »unendlichen Summe« war sowohl zur Zeit des Archimedes wie auch zur Zeit von Newton und Leibniz noch völlig nebulos.

Daher deckt dieser Hinweis das fehlerhafte *logische* Argument des Zenon gerade *nicht* auf. Die Frage bleibt offen, welcher Trugschluss es ihm überhaupt erst ermöglicht, diese Aporie zu entwickeln, aus der es – folgt man seinem Argument – kein Entrinnen gibt. Aristoteles sieht den logischen Fehler darin, sich die ganze Überholstrecke aus *unendlich* vielen Teilstrecken zusammengesetzt zu denken. Sobald man *das Unendliche als vollendetes Ganzes* zu begreifen versucht, sprengt man den Rahmen der intuitiven Vorstellungskraft und des logischen Denkens.

[17] Als erstes Beispiel betrachten wir einen *Kreis* mit Mittelpunkt $0 = (0, 0)$ und Radius r (Abb. 38): Der Punkt $P = (x, y)$ liegt genau dann auf ihm, wenn (nach dem Satz des Pythagoras) seine Koordinaten der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

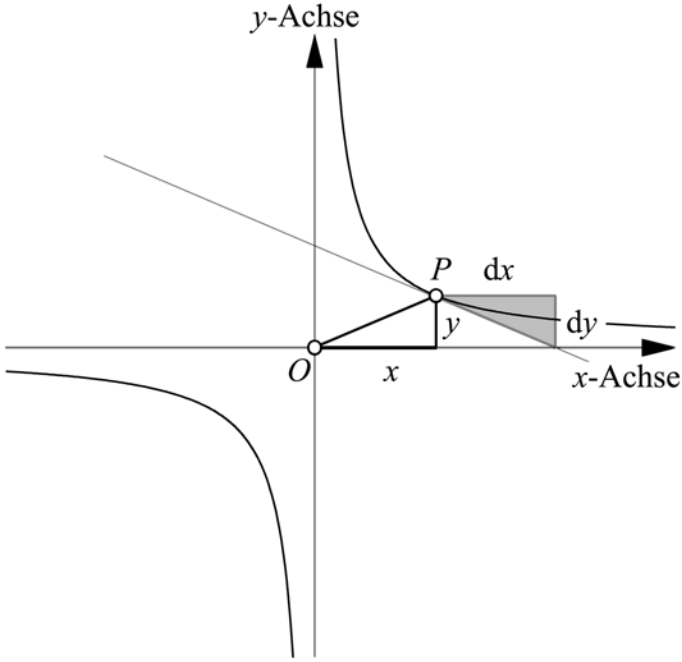

Abb. 39. Die gleichseitige Hyperbel mit der Tangente im Punkt $P = (x, y)$. Setzt man willkürlich $\mathrm{d}x = x$, folgt aus $\mathrm{d}y : \mathrm{d}x = -y : x$ die Beziehung $\mathrm{d}y = -y$. Die Hyperbeltangente schneidet die Koordinatenachsen an den Stellen $(2x, 0)$ und $(0, 2y)$.

gehorchen. Der benachbarte Punkt $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ soll ebenfalls auf dem Kreis liegen:

$$(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + y^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2 = r^2.$$

Subtrahiert man die obere Gleichung von der unteren, verbleibt

$$2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 2y\,\Delta y + \Delta y^2 = 0\,,$$

woraus man nach dem Zwischenschritt

$$\Delta y \cdot (2y + \Delta y) = -\Delta x \cdot (2x + \Delta x)$$

sofort

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2x + \Delta x}{2y + \Delta y}$$

erhält. In der *rechten* Seite dieser Gleichung kann man (bei $y \neq 0$) ohne weiteres $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$ setzen: Leibniz findet so den Tangentenanstieg

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

im Punkt P des Kreises – wie es auch anschaulich nahegelegt wird: Die Tangente ist im rechten Winkel zum Radius, der auf den Punkt weist.

Als zweites Beispiel betrachten wir eine sogenannte *gleichseitige Hyperbel* mit den Koordinatenachsen als *Asymptoten* (Abb. 39): Der Punkt P = (x, y) liegt genau dann auf ihr, wenn

$$xy = c$$

gilt, wobei c eine positive Konstante darstellt. Wenn der Punkt $Q = (x+\Delta x, y+\Delta y)$ ebenfalls auf der Hyperbel liegt, gehorchen auch seine Koordinaten dieser Gleichung:

$$(x+\Delta x)(y+\Delta y) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = c\ .$$

Subtrahiert man die obere Gleichung von der unteren, verbleibt

$$x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 0\ ,$$

woraus man nach dem Zwischenschritt

$$\Delta y \cdot (x + \Delta x) = -y\Delta x$$

sofort

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{y}{x+\Delta x}$$

erhält. In der *rechten* Seite dieser Gleichung kann man (bei $x \neq 0$) ohne weiteres $\Delta x = 0$ setzen: Leibniz findet so den Tangentenanstieg

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}$$

im Punkt P der gleichseitigen Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten.

Als drittes Beispiel betrachten wir eine *Parabel* mit $0 = (0, 0)$ als Scheitel und der x-Achse als Parabelachse (Abb. 40): Der Punkt $P = (x, y)$ liegt genau dann auf ihr, wenn

$$y^2 = 2px$$

gilt, wobei p eine positive Konstante darstellt. Wenn der Punkt $Q = (x + \Delta x, y+\Delta y)$ ebenfalls auf der Parabel liegt, gehorchen auch seine Koordinaten dieser Gleichung:

$$(y + \Delta y)^2 = y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = 2p(x + \Delta x) = 2px + 2p\Delta x\ .$$

Subtrahiert man die obere Gleichung von der unteren, verbleibt

$$2y\Delta y + \Delta y^2 = 2p\Delta x\ ,$$

woraus man nach dem Zwischenschritt

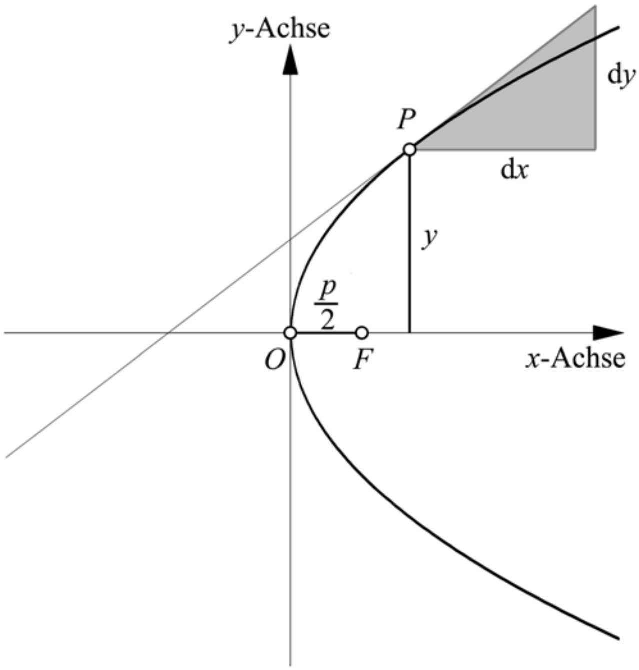

Abb. 40. Die Parabel mit der Tangente im Punkten $P = (x, y)$. Der Brennpunkt hat die Koordinaten $F = (p/2, 0)$. Setzt man willkürlich $\mathrm{d}y = p$, folgt aus $\mathrm{d}y : \mathrm{d}x = p : y$ die Beziehung $\mathrm{d}x = y$.

$$\Delta y \cdot (2y + \Delta y) = 2p\Delta x$$

sofort

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2p}{2y + \Delta y}$$

erhält. In der *rechten* Seite dieser Gleichung kann man (bei $y \neq 0$) ohne weiteres $\Delta y = 0$ setzen: Leibniz findet so den Tangentenanstieg

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{y}$$

im Punkt P der Parabel.

[18] Im 20. Jahrhundert entdeckte Abraham Robinson (*1918, †1974), dass es in einem System einer sehr formalisierten Mathematik möglich ist, neben den gewohnten Dezimalzahlen auch sogenannte unendlich kleine und unendlich große Zahlen einzuführen und mit ihnen wie gewohnt zu rechnen. (Diese Größen ge-

horchen nicht dem in der Anmerkung 12 formulierten Axiom des Archimedes.) Damit glaubte er die »unendlich kleinen Dreiecke« von Newton und Leibniz auf eine gesunde Basis stellen zu können. Allerdings ist es mehr als zweifelhaft, ob seine Theorie die intuitiven Gedanken von Leibniz und Newton treu wiederzugeben vermag: Keiner von beiden hätte sich in dem hohen Abstraktionsniveau jener formalen Mathematik zurechtgefunden, das Robinson erklimmen muss, um sein Rechnen mit den unendlich kleinen und den unendlich großen Zahlen rechtfertigen zu können.

[19] Die im Text präsentierte Berechnung von $\sqrt{2}$ ist zwar korrekt, jedoch erbärmlich langsam. Eine bessere Idee zur Berechnung von $\sqrt{2}$ geht von folgendem Gedanken aus: Angenommen, man hat bereits eine Näherung a an $\sqrt{2}$ gefunden. Es sei dann $b = 2/a$. Offenbar gilt $ab = 2$. Wenn a etwas kleiner als der wahre Wert $\sqrt{2}$ ist, muss die Näherung b darum etwas größer als der wahre Wert $\sqrt{2}$ sein. Wenn umgekehrt a etwas größer als der wahre Wert $\sqrt{2}$ ist, muss die Näherung b etwas kleiner als der wahre Wert $\sqrt{2}$ sein. Es liegt folglich nahe, das arithmetische Mittel dieser beiden Näherungen

$$a' = \frac{a+b}{2}$$

als nächstbessere Näherung an $\sqrt{2}$ zu berechnen und diesem a' in gleicher Weise wie oben die Näherung $b' = 2/a'$ zuzuordnen. Sodann fährt man mit

$$a'' = \frac{a'+b'}{2}$$

und $b'' = 2/a''$ fort und gelangt zu immer genaueren Näherungen an $\sqrt{2}$.

Um dies anhand konkreter Zahlen zu illustrieren, gehen wir von der Näherung $a = 1.5 = 3/2$ an $\sqrt{2}$ aus: Wir betrachten daher

$$a = \frac{3}{2} = 1.500\,000\,000\ldots\ ,$$
$$b = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1.333\,333\,333\ldots$$

und berechnen das arithmetische Mittel sowie 2 durch diesen Wert dividiert:

$$a' = \frac{3/2+4/3}{2} = \frac{17}{12} = 1.416\,666\,666\ldots\ ,$$
$$b' = \frac{2}{17/12} = \frac{24}{17} = 1.411\,764\,705\ldots\ .$$

Im nächsten Schritt bekommen wir:

$$a'' = \frac{17/12+24/17}{2} = \frac{577}{408} = 1.414\,215\,686\ldots\ ,$$
$$b'' = \frac{2}{577/408} = \frac{816}{577} = 1.414\,211\,438\ldots\ .$$

Im dritten Schritt

$$a''' = \frac{577/408 + 816/577}{2} = \frac{665\,857}{470\,832} = 1.414\,213\,562\ldots\ ,$$
$$b''' = \frac{2}{665\,857/470\,832} = \frac{941\,664}{665\,857} = 1.414\,213\,562\ldots$$

stimmen die obere und die untere Näherung an $\sqrt{2}$ bereits in neun Stellen nach dem Dezimalpunkt überein. Nach so wenigen Rechenschritten wurde $\sqrt{2}$ schon außerordentlich genau ermittelt.

Es ist nicht uninteressant, dass dieses bemerkenswert effektive Verfahren zur Berechnung von Wurzeln babylonische Mathematiker lange vor der Blütezeit der antiken griechischen Mathematik erfanden. Newton hat es mit den Methoden der Differentialrechnung wieder entdeckt und zur Lösung einer Reihe anderer Gleichungen verallgemeinert.

[20] Unter den vielen »Paradoxien des Unendlichen« zählt jene zu den bekanntesten, die von *Hilberts Hotel* erzählt:

Hilbert argumentiert, dass ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern nie völlig belegt sein kann: Angenommen, es seien alle Zimmer des Hotels mit Gästen belegt und ein neuer Gast möchte einquartiert werden. Die Hoteldirektion bittet dann den Gast von Zimmer 1 in Zimmer 2 zu wechseln, den Gast von Zimmer 2 in Zimmer 3 zu wechseln, den Gast von Zimmer 3 in Zimmer 4 zu wechseln, und so weiter. Nachdem dies erfolgt ist, haben alle bisherigen Gäste die Zimmer mit der nächstgrößeren Nummer eingenommen und für den neuen Gast ist Zimmer 1 frei geworden.

Noch paradoxer wird die Angelegenheit, wenn Gäste nicht nur kommen, sondern auch gehen, gleichsam: wenn man Hilberts Hotel zu *Hilberts Stundenhotel* variiert:

Wir nummerieren die eintreffenden Gäste der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, … . Alle Gäste bleiben jeweils nur eine Stunde in Hilberts Etablissement (mit seinen unendlich vielen Zimmern). Zu Beginn der ersten Stunde kommt Gast 1. Zu Beginn der zweiten Stunde kommen die Gäste 2 und 3, während Gast 1 geht. Zu Beginn der dritten Stunde kommen die Gäste 4, 5, 6, während die Gäste 2 und 3 gehen. Zu Beginn der fünften Stunde kommen die Gäste 7, 8, 9, 10, während die Gäste 4, 5, 6 gehen. Zu Beginn jeder Stunde kommen jeweils um einen Gast mehr neue Gäste als Gäste dieses Hotel verlassen. Ist dieses Hotel nach unendlich vielen Stunden belegt?

Einerseits kann man argumentieren, dass es belegt ist: Denn mit jeder Stunde kommen mehr Gäste als gingen, so dass schlussendlich *unendlich* viele Gäste im Hotel logieren sollten.

Andererseits kann man argumentieren, dass es sich *geleert* hat: Denn *alle* der unendlich vielen Gäste haben das Hotel bereits verlassen!

[21] Die gewaltigen Unendlichkeiten, welche Cantor zu entdecken meinte, gingen aus seinem *Mengen*begriff hervor:

Betrachten wir als Beispiel die Menge

$$x = \{1, 2, 3\}$$

die die ersten drei Zahlen 1, 2, 3 als ihre *Elemente* enthält. Unter einer *Teilmenge* von x versteht man bekanntlich eine Menge y, die nur Elemente enthalten darf, die auch Elemente von x sind. Als mögliche Teilmengen von x kommen im obigen Beispiel die einelementigen Mengen

$$y_1 = \{1\}, \quad y_2 = \{2\}, \quad y_3 = \{3\},$$

die zweielementigen Mengen

$$y_4 = \{1, 2\}, \quad y_5 = \{1, 3\}, \quad y_6 = \{2, 3\}$$

und als sogenannte uneigentliche Teilmengen die *leere Menge*

$$y_0 = \{\} = \emptyset \ ,$$

die kein einziges Element enthält, sowie die Menge selbst

$$y_7 = \{1,\ 2,\ 3\} = x$$

in Frage. Wie man sieht, hat die Menge x, welche aus 3 Elementen besteht, genau $2^3 = 8$ mögliche Teilmengen y. Die Menge z aller Teilmengen von x heißt die *Potenzmenge* von x. Man überlegt sich ziemlich schnell, dass eine *endliche* Menge x, bestehend aus n Elementen, eine Potenzmenge z besitzt, die aus 2^n Elementen, nämlich den 2^n möglichen Teilmengen von x, besteht. Weil stets $2^n > n$ zutrifft, hat die Potenzmenge einer endlichen Menge immer mehr Elemente als die Menge selbst.

Diese letzte Aussage stimmt ganz allgemein: Es sei x eine beliebige Menge, z die Potenzmenge von x, d. h. die Elemente y von z sind die Teilmengen von x. Wir wollen annehmen, es sei auf irgendeine Art gelungen, jedem Element t von x eine Teilmenge $y = y_t$ von x zuzuordnen. In einem gewissen Sinn könnte man von einer *Nummerierung* der Teilmengen y von x durch die Elemente t von x sprechen. Wir behaupten, dass – wie geschickt man auch die »Nummerierung« zu bewerkstelligen versucht – *nie alle* Teilmengen y von x erfasst werden. Der Beweis ist sehr kurz:

Es sei eine »Nummerierung« von Teilmengen y von x als $y = y_t$ mit Elementen t von x gegeben. Wir bilden die Teilmenge y^*, welche alle t aus x enthält, die *nicht* in den nach ihnen »nummerierten« Teilmengen y_t vorkommen, d. h.

$$y^* = \{t \in x : t \notin y_t\} \ .$$

Hätte diese Teilmenge y^* eine Nummer t^*, d. h. wäre $y^* = y_{t^*}$, dann müsste man einerseits aus $t^* \in y^* = y_{t^*}$ nach Definition von y^* sofort $t^* \notin y_{t^*} = y^*$, andererseits aus $t^* \notin y_{t^*} = y^*$ ebenfalls nach Definition von y^* sofort $t^* \in y^* = y_{t^*}$ folgern. Beide Möglichkeiten führen auf einen Widerspruch, und darum kann es eine derartige »Nummer« t^* für y^* nicht geben.

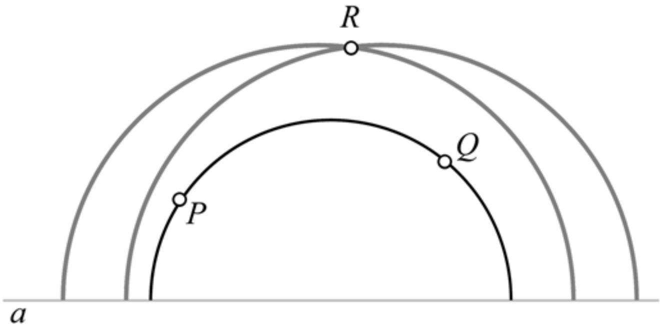

Abb. 41. Die poincarésche Halbebene ist die Halbebene oberhalb der Achse *a*. Durch zwei »Punkte« *P* und *Q* verläuft genau eine »Gerade«, nämlich der Halbkreis durch *P* und *Q*. Durch einen dritten »Punkt« *R* gibt es hingegen mehrere parallele »Gerade«, nämlich die Halbkreise durch *R*, welche mit der »Geraden« durch *P* und *Q* keinen gemeinsamen »Punkt« haben.

»Nummeriert« man die Teilmengen y einer Menge x mit den Elementen von x, gibt es immer eine Teilmenge y, die von dieser »Nummerierung« nicht erfasst wird.

In diesem Sinne enthält die Potenzmenge *z* einer Menge *x* stets *mehr* Elemente als die Menge *x* selbst. Dies brachte die Mengenlehre Cantors in arge Probleme: Denn die »Allmenge«, die überhaupt alle denkbaren Objekte enthält, kann unmöglich »kleiner« als ihre Potenzmenge sein!

Auf der anderen Seite erlaubte die Bildung der Potenzmenge einer unendlichen Menge die Erzeugung einer Menge, die noch mehr Elemente in sich trägt, als die vorgegebene unendliche Menge selbst. Auch von dieser Potenzmenge kann man wieder die Potenzmenge bilden, von dieser wieder, und dies beliebig oft. Mit dieser Methode glaubte Cantor gigantische Kaskaden von Unendlichkeiten entdeckt zu haben.

[22] Ein Beispiel einer ebenen »Geometrie«, in der das Parallelenaxiom des Euklid *nicht* stimmt, entwarf Poincaré: In seinem geometrischen Sprachspiel ist die von einer waagrechten Achse *a* begrenzte obere Halbebene die »Ebene«, in der sich das geometrische Geschehen abspielt (Abb. 41). Die »Punkte« der »Geometrie« Poincarés sind die Punkte dieser oberen Halbebene und die »Geraden« der »Geometrie« Poincarés sind diejenigen Halbkreise in der oberen Halbebene, deren Mittelpunkte auf der Achse *a* ruhen (wobei auch die senkrecht zur Achse verlaufenden geradlinigen Strahlen gleichsam als »Ehrenbürger« unter den »Geraden« aufgenommen werden). Poincaré konnte beweisen, dass in dem Sprachspiel dieser »Geometrie« alle Axiome Euklids außer dem Parallelenaxiom zutreffen: Zum Beispiel kann man durch je zwei voneinander verschiedene »Punkte« genau

eine »Gerade« (d. h. genau einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt auf der Achse *a*) legen. Jedoch gibt es zu einer gegebenen »Geraden« und einem nicht auf ihr liegenden »Punkt« eine ganze Fülle von »Geraden« durch diesen »Punkt«, die mit der gegebenen »Geraden« keinen »Punkt« gemeinsam haben – Euklids Parallelenaxiom ist in diesem geometrischen Sprachspiel rundweg falsch!

Gegen Poincarés Halbebene könnte man einwenden, dass in ihr das naturgegebene Bild dessen, was wir uns unter einer »Ebene« oder einer »Geraden« vorstellen, sträflich verzerrt wurde. Allerdings steht dieser Einwand auf tönernen Füßen. Kant glaubte noch an den von Euklids Axiomen errichteten *naturgegebenen* Raum als schlichte Bedingung dafür, dass wir geometrisch zu denken vermögen. Die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins zerbrach das Apriori der euklidischen Geometrie in der uns umgebenden Welt. Die »mathematische Analyse des Raumproblems« erwies sich nach Einsteins umwälzenden Entdeckungen als viel komplexer, als es die Erkenntnistheorie Kants erahnte. In einer Vorlesungsreihe unter dem oben genannten Titel hatte sich unübertroffen Hermann Weyl mit dieser Problematik auseinandergesetzt.

[23] Neben der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit besteht noch eine dritte Forderung, will man ein sinnvolles Axiomensystem erstellen: Das Axiomensystem soll aus voneinander *unabhängigen* Axiomen bestehen. Damit meint man, dass jedes Axiom, welches man aus den übrigen Axiomen des Systems bereits als Satz herleiten kann, aus der Liste der Axiome zu streichen ist. Es hätte zum Beispiel keinen Sinn, den Satz von Thales in die Liste der geometrischen Axiome Euklids aufzunehmen, denn dieser Satz ist ohnehin aus den bereits bekannten Axiomen Euklids beweisbar. Umgekehrt haben sich seit Euklid Generationen von Mathematikern darum bemüht, entweder zu beweisen, dass das Parallelenaxiom des Euklid in Wahrheit aus den übrigen euklidischen Axiomen folgt (und Euklids Axiomensystems deshalb *nicht* unabhängig ist), oder aber die Unabhängigkeit des euklidischen Parallelenaxioms von den anderen euklidischen Axiomen zu belegen. Erst Gauß ist zu Beginn des 19. Jahrhunderts das zweitgenannte gelungen.

[24] In der formalisierten Mathematik wird zuerst die Umgangssprache auf wenige Worte reduziert. Diese Worte sind:

»(…) und (…)« , »(…) oder (…)«

»nicht (…)« , »für alle . gilt (…)« ,

»es gibt ein . mit (…)« .

Dabei stehen die drei Punkte … für irgendwelche mathematischen Aussagen und der eine Punkt . für irgendwelche mathematischen Objekte, wobei Zermelo statt »mathematisches Objekt« das Wort »Menge« verwendet. Hatte Cantor noch unter einer *Menge* intuitiv die *Zusammenfassung von Gegenständen unseres Denkens zu einem Ganzen* verstanden, ist im formalisierten Axiomensystem Zermelos *Menge* nichts anderes als eine inhaltlich nichtssagende Worthülse. Unter den mathematischen Aussagen ist die mit dem Zeichen $\in$ gebildete Zeichenkombination

$$x \in y\,,$$

in der x und y für »Mengen« stehen, diejenige »Aussage«, mit der unter Verwendung der obigen sprachlichen Kürzel alle weiteren »Aussagen« gebildet werden. Cantor verband mit $x \in y$ noch die Erkenntnis, dass x in der Menge y als Element enthalten ist – bei Zermelo handelt es sich um eine von jeder anschaulichen Vorstellung befreite inhaltsleere, formale Beziehung zwischen den »Mengen« x und y.

Einfache Beispiele zeigen, wie »Aussagen« entstehen: Neben der »Aussage« $x \in y$ kann man die »Aussage«

$$\text{nicht } (x \in y)$$

bilden, welche man einfach durch $x \notin y$ abkürzt. Für die etwas komplexere »Aussage«

$$\text{für alle } z \text{ gilt } ((z \notin x) \text{ oder } (z \in y))$$

schreibt man $x \subset y$. Cantor verband darin die inhaltliche Vorstellung, dass x eine *Teilmenge* von y ist, denn für jedes Element z von x ist $z \notin x$ falsch, daher muss es aufgrund der obigen »Aussage« die Beziehung $z \in y$ erfüllen. Zermelo verbietet nicht, solche anschaulichen Vorstellungen in seinem formalen System mitzuschleppen, notwendig sind sie nicht. Die formal schon recht komplexe »Aussage«

$$(x \subset y) \text{ und } (y \subset x)$$

ist für Zermelo die *Definition* der Gleichheit $x = y$. Es ist interessant festzustellen, dass in Zermelos formalem System die Gleichheit von zwei »Mengen« nicht intuitiv als selbstverständlich betrachtet wird, sondern die Abkürzung einer komplexen formalen »Aussage« ist. Dass stets $x = x$ gilt, ist im formalen System Zermelos ein *beweisbarer mathematischer Satz*.

Als erstes Axiom Zermelos fordern wir, dass die »Aussage«

$$(x = y) \text{ und } (x \in z)$$

durch die »Aussage«

$$y \in z$$

ersetzt werden kann. Dieses Axiom besagt anschaulich, dass gleiche »Mengen« Elemente derselben »Menge« sind – eigentlich eine Selbstverständlichkeit, die aber im formalen Axiomensystem erwähnt werden muss.

Die weiteren Axiome Zermelos dienen dazu, die *Existenz* von »Mengen« zu garantieren. Zum Beispiel wird die Existenz einer *leeren Menge* $\emptyset$ verlangt, wobei die »Aussage«

$$x \in \emptyset$$

zur »Aussage«

$$\text{nicht } (x = x)$$

gleichbedeutend ist. Da die zweitgenannte Aussage für keine »Menge« zutrifft, enthält die leere Menge – wie der Name sagt – nichts. Ist x eine »Menge«, verlangt Zermelo in einem weiteren Axiom die Existenz der *einpunktigen Menge* $\{x\}$, wobei die »Aussage«

$$y \in \{x\}$$

zur »Aussage«

$$y = x$$

gleichbedeutend ist. Sind schließlich x und y zwei »Mengen», verlangt Zermelo in einem nächsten Axiom die Existenz der *Vereinigungsmenge* $x \cup y$, wobei die »Aussage«

$$z \in x \cup y$$

zur »Aussage«

$$(z \in x) \text{ oder } (z \in y)$$

gleichbedeutend ist.

Mit den bisher genannten Axiomen ist die Bildung der folgenden »Mengen« gestattet:

$$1 = \emptyset \cup \{\emptyset\}\,, \quad 2 = 1 \cup \{1\}\,, \quad 3 = 2 \cup \{2\}\,,$$

$$4 = 3 \cup \{3\}\,, \quad \ldots\,.$$

Aus diese Weise gelingt es, jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, … als eine »Menge« im formalen System Zermelos zu interpretieren.

Neben den bisher genannten Axiomen formulierte Zermelo eine Reihe von weiteren Axiomen, um die ganze Theorie der unendlichen Dezimalzahlen in das formale System der »Mengen« integrieren zu können. Eines der beiden heikelsten unter ihnen ist das *Unendlichkeitsaxiom*, das die Existenz einer *unendlichen Menge* u verlangt, für die einerseits

$$\emptyset \in u$$

und andererseits

$$(x \notin u) \text{ oder } (x \cup \{x\} \in u)$$

zutrifft. Das andere ist das *Potenzmengenaxiom:* Wenn x eine »Menge« bezeichnet, dann gibt es eine *Potenzmenge* 2^x, wobei die »Aussage«

$$y \in 2^x$$

zur »Aussage«

$$y \subset x$$

gleich bedeutend ist. Diese beiden Axiome zusammengenommen erlauben, Kaskaden immer gewaltiger werdender Unendlichkeiten zu konstruieren: Wenn u

eine unendliche »Menge« bezeichnet, kann man der Reihe nach die »Mengen«

$$u_1 = 2^u, \quad u_2 = 2^{u_1}, \quad u_3 = 2^{u_2}, \quad u_4 = 2^{u_3}, \quad \ldots$$

bilden. Cantor bewies bereits in seiner intuitiven Mengenlehre, dass jede Menge »mehr« Teilmengen als Elemente besitzt. Zermelo konnte diesen Nachweis ohne weiteres auf seine formale »Mengen«lehre übertragen und bastelte sich so das Cantorsche Universum gigantischer Unendlichkeiten axiomatisch zurecht.

Naiverweise könnte man fragen, warum man die Axiome Zermelos überhaupt braucht. Wäre es nicht denkbar, dass man zu *jeder* »Aussage« $A(x)$, in der die »Menge« x vorkommt, eben jene »Menge« y konstruiert, für die $x \in y$ genau dann zutrifft, wenn $A(x)$ stimmt. Diese Hoffnung hat vor Zermelo noch Gottlob Frege (*1848, †1925) gehegt und geglaubt, damit die gesamte Mathematik auf die Theorie der Aussagen, d. h. auf die Logik zurückführen zu können. Bertrand Russell (*1872, †1970) zeigte jedoch, dass der simple logizistische Ansatz Freges nicht haltbar ist: Er betrachtet jenes r, für das

$$x \in r$$

dann und nur dann gilt, wenn die »Aussage«

$$x \notin x$$

zutrifft. Dieses so definierte r kann aber keine »Menge« sein: Denn im Falle $x = r$ wäre die »Aussage« $r \in r$ genau dann gültig, wenn $r \notin r$ zutrifft – eine logische Aporie. Russell kleidete sein Beispiel in die folgende Geschichte: Liest man $x \in y$ als »x wird von y rasiert«, so ist r für Russell der Barbier eines Dorfes, der alle jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Was aber, so fragt Russell, macht dieser Barbier mit seinem eigenen Bart?

[25] Der Unvollständigkeitssatz Gödels in seiner ursprünglichen Version besagt nicht nur, dass jedes formale Axiomensystem, das die Arithmetik der ganzen Zahlen beschreiben kann und widerspruchsfrei ist, nie vollständig sein kann, sondern er präzisiert sogar diese Unvollständigkeit: Die Aussage, *das formale Axiomensystem ist widerspruchsfrei,* konnte Gödel in eine innerhalb des Systems formulierbare Aussage übersetzen und zugleich nachweisen, dass gerade für diese Aussage das Axiomensystem keinen Beweis zu liefern imstande ist. Insofern ist der Zusammenbruch von Hilberts Programm noch dramatischer: Es besteht keine Chance, zum Beispiel innerhalb der Mathematik, die auf den Axiomen Zermelos ruht, den formalen Nachweis zu führen, dass das Axiomensystem Zermelos widerspruchsfrei ist.

[26] Bourbaki nennt sein Buch *Eléments de Mathématique* und nicht, wie man es im Französischen eigentlich erwarten würde, »Eléments des Mathématiques«. Die Bevorzugung des ungewohnten Singulars belegt die Auffassung Bourbakis, dass die gesamte Mathematik einer einzigen Quelle – dem formalen Axiomensystem Zermelos – entspringt und nur in eine einzige Richtung – jene der formalen deduktiven Methode – voranzutreiben ist.

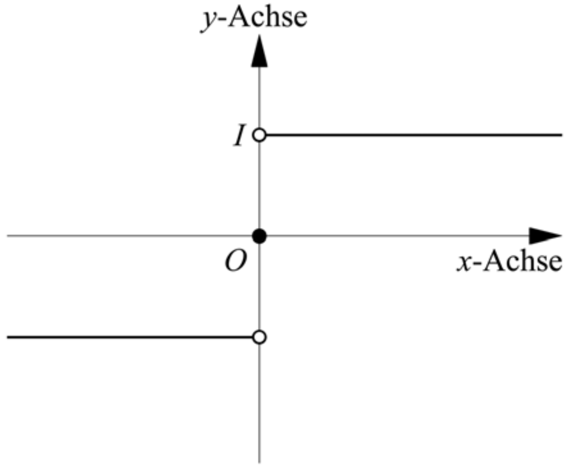

Abb. 42. Die Abbildung $y = \mathrm{sgn}(x)$ ist in der cantorschen Mathematik für alle unendlichen Dezimalzahlen x definiert. In der Mathematik Brouwers ist sie hingegen nur für alle unendlichen Dezimalzahlen x definiert, die entweder von Null verschieden sind oder mit Null übereinstimmen – und dies sind nicht alle Punkte auf der x-Achse!

[27] Die ungewohnte Denkweise Brouwers über das Unendliche ist nicht allein hinderlich; sie verhilft manchmal auch zu neuen überraschenden Einsichten: In der Mathematik Cantors ist es zum Beispiel kein Problem, die unendlichen Dezimalzahlen α ihrem Vorzeichen nach einzuteilen: Man schreibt $\mathrm{sgn}(\alpha) = +1$, wenn α eine positive unendliche Dezimalzahl ist, $\mathrm{sgn}(\alpha) = -1$, wenn α eine negative unendliche Dezimalzahl ist, und man setzt $\mathrm{sgn}(\alpha) = 0$, wenn $\alpha = 0$ gilt. Zeichnet man die Punkte $(x, \mathrm{sgn}(x))$ in ein Koordinatensystem ein, erhält man zwei Halbgeraden zusammen mit dem Punkt $O = (0, 0)$, die eben an dieser Stelle O einen »Sprung« aufweisen (Abb. 42). Dies ist der Grund, warum man

$$y = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } x > 0\,, \\ 0, & \text{wenn } x = 0\,, \\ -1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

eine *unstetige* Abbildung nennt. In der Mathematik Brouwers ist die Situation grundlegend anders: Von einer unendlichen Dezimalzahl ψ kann man im Allgemeinen nie behaupten, dass sie entweder von Null verschieden ist oder mit Null übereinstimmt. Darum kann man in der Mathematik Brouwers nie $\mathrm{sgn}(\psi)$ von allen unendlichen Dezimalzahlen ψ berechnen. *Unstetige* Abbildungen $y = f(x)$ sind in der Mathematik Brouwers nur dann vorstellbar, wenn man sie *nicht für alle* unendlichen Dezimalzahlen x definiert. Abbildungen $y = f(x)$ in denen man für x beliebige unendliche Dezimalzahlen einsetzen kann, besitzen in Brouwers Mathematik sicher keine Sprünge – ganz im Einklang zum leibnizschen Prinzip des *natura non facit saltus*.

Abbildungsnachweis

Mit freundlicher Genehmigung wurden uns folgende Abbildungen zur Verfügung gestellt:

Pythagoras (S. 2): Bildarchiv d. ÖNB, Wien
Euklid (S. 18): Ernst, Max, Euklid. VG Bild-Kunst, Bonn 2005
Archimedes (S. 34): Bildarchiv d. ÖNB, Wien
Leibniz (S. 56): Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Newton (S. 63): akg-images gmbh, Berlin
Einstein (S. 63): Bildarchiv d. ÖNB, Wien
Kronecker (S. 86): Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Abb. 5, 7, 8, 9 nach Penrose R., The Emperor’s New Mind, Oxford Universitiy Press, pp 72–77.