

Liste der verwendeten Symbole

$:=$	ist definiert als, ist definitionsgemäß gleich
$\{ \}$	Menge, bestehend aus
$\{ \}$	Menge aller ... mit der Eigenschaft ...
\in	ist Element von, ist enthalten in
\notin	ist nicht enthalten in
\subset	ist Teilmenge von
\cap	Zeichen für den Durchschnitt von Mengen
\cup	Zeichen für die Vereinigung von Mengen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ...
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
(a, b)	offenes Intervall in \mathbb{R} mit den Endpunkten a und b
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{R}_+	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
\emptyset	leere Menge
$M \times N$	kartesisches Produkt der Mengen M und N
M^n	kartesisches Produkt mit n Faktoren M , Menge aller n -tupel von Elementen aus M
$M \setminus N$	Komplementärmenge von N in M
\circ	Zeichen für die Zusammensetzung von Abbildungen
\rightarrow	Abbildungspfeil
$a \mapsto b$	a wird abgebildet auf b , a wird b zugeordnet
\sphericalangle	Zeichen für Winkel
\equiv	ist kongruent zu
\perp	steht senkrecht auf
\parallel	ist parallel zu
\bar{z}	konjugiert-komplexe Zahl zu $z \in \mathbb{C}$
$ z $	Absolutbetrag von $z \in \mathbb{C}$ (auch: Norm eines Vektors z)
$\operatorname{Re}(z)$	Realteil von $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im}(z)$	Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$
\langle , \rangle	Skalarprodukt
$g(A, B)$	Gerade durch die Punkte A, B ($A \neq B$)
\overline{AB}	Strecke von A nach B
\tilde{g}	Äquivalenz bzgl. einer Geraden g
\tilde{P}	Äquivalenz bzgl. eines Punktes P (auf einer Geraden)
σ_g	Spiegelung an der Geraden g
$s(z_1, z_2)$	Nichteuklidische Strecke von z_1 nach z_2 ($z_1 \neq z_2$)

Zusammenstellung der im Text als bekannt vorausgesetzten mathematischen Grundbegriffe

A. *Aus der Mengenlehre*

Menge
 Element einer Menge
 Teilmenge
 Durchschnitt und Vereinigung von Mengen
 Komplementärmenge
 Kartesisches Produkt von Mengen, n -tupel
 Abbildung, identische Abbildung
 Verknüpfung auf einer Menge
 Injektive, surjektive, bijektive Abbildung
 Zusammensetzung von Abbildungen
 Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung
 Fixpunkt einer Abbildung
 Äquivalenzrelation, Äquivalenzklasse
 Einschränkung einer Äquivalenzrelation auf eine Teilmenge

B. *Aus der (linearen) Algebra*

Gruppe
 Untergruppe
 Abelsche Gruppe
 Permutationsgruppe
 Gruppenhomomorphismus, Gruppenisomorphismus
 Körper, (Schiefkörper)
 Teilkörper eines Körpers
 Vektorraum über einem Körper, Vektoren
 (Skalarprodukt in \mathbb{R}^n)
 (Norm eines Vektors in \mathbb{R}^n)
 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
 Lineares Gleichungssystem
 Matrix, Matrizenmultiplikation
 (Rang einer Matrix)
 invertierbare Matrix, (Gruppe der invertierbaren Matrizen)
 orthogonale Matrix
 Determinante
 Translation in \mathbb{R}^n

C. *Aus der Analysis*

Zahlenfolge

Unendliche Reihe

Dyadische Entwicklung einer reellen Zahl

Die Zahl π Intervall in \mathbb{R} Intervallschachtelungsprinzip in \mathbb{R}

Limes

Graph einer Funktion

Monoton wachsende Funktion

Stetigkeit

Zwischenwertsatz

Ableitung einer differenzierbaren Funktion

Elementare Funktionen: rationale Funktion, Wurzelfunktion, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktionen, Tangens hyperbolicus

Kurve in \mathbb{R}^2 , Parameterdarstellung

Tangente an eine Kurve, Tangentenvektor

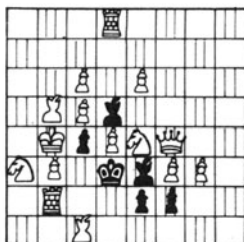
(Jacobische Matrix einer differenzierbaren Abbildung)

Die obigen Begriffe werden behandelt in den rororo-vieweg-Taschenbüchern von G. Fischer [8] und O. Forster [9]. Von den eingeklammerten Begriffen wird im Text nur in unwesentlicher Weise Gebrauch gemacht.

Lösung der Schachaufgabe § 3, 6.

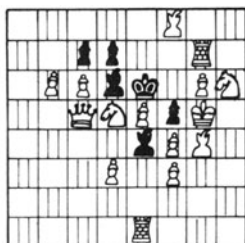
In der angegebenen Stellung gibt es bei der üblichen Konvention, daß die weißen Bauern von unten nach oben ziehen, zunächst kein Matt in einem Zug. Da auf dem Schachbrett das Feld h1 weiß ist, im Diagramm aber schwarz, muß das Brett um 90 Grad gedreht werden.

a) Drehung im Uhrzeigersinn:



Es scheint jetzt De3 matt möglich zu sein. Im Sinne des Problemschachs ist dies jedoch nur eine „Verführung“. Tatsächlich ist die obige Stellung nicht „partiemiöglich“. Welches sollte der letzte schwarze Zug gewesen sein?

b) Drehung gegen den Uhrzeigersinn:



In dieser Stellung kann der letzte Zug von Schwarz nur $f7 - f5$ gewesen sein. Es folgt $e5 \times f6$ en passant, matt.

Die Lösung der Aufgabe lautet somit: Das Schachbrett ist um 90° gegen den Uhrzeigersinn zu drehen. Der Lösungszug ist dann $e5 \times f6$ en passant, matt!

Literaturhinweise

Das folgende Literaturverzeichnis enthält die Titel, auf die im Text Bezug genommen wird oder durch die der Autor bei der Vorbereitung des Textes beeinflusst wurde. Es handelt sich nur um eine kleine Auswahl aus dem umfangreichen Schrifttum zu unserem Gegenstand, z. B. enthält die Lehrbuchsammlung der Universität Regensburg unter dem Stichwort „Klassische Geometrie“ rund 250 Titel, Originalarbeiten in mathematischen Zeitschriften sind dabei natürlich nicht mitgerechnet.

- [1] *E. Artin*: Geometric algebra. Princeton 1957.
- [2] *F. Bachmann*: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1959.
- [3] *R. Baldus, F. Löbell*: Nichteuklidische Geometrie. Berlin 1953.
- [4] *C. Caratheodory*: Funktionentheorie. Basel–Stuttgart 1960.
- [5] *P. Dembowski*: Finite geometries. Ergebnisse der Mathematik Bd. 44. Berlin–Heidelberg–New York 1968.
- [6] *A. Dürer*: Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und dem Richtscheit. Nürnberg 1525.
- [7] *Euklid*: Die Elemente. Übersetzung von C. Thaer. 5 Bde. Leipzig 1933–1937.
- [8] *G. Fischer*: Lineare Algebra. rororo-vieweg.
- [9] *O. Forster*: Analysis 1 und 2. rororo-vieweg.
- [10] *R. Hartshorne*: Foundations of projective geometry. New York 1967.
- [11] *D. Hilbert*: Grundlagen der Geometrie. 10. Auflage. Stuttgart 1968.
- [12] *F. Klein*: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie (Nachdruck). Berlin–Heidelberg 1967.
- [13] *W. Klingenberg*: Grundlagen der Geometrie. Mannheim 1971.
- [14] *K. Knopp*: Elemente der Funktionentheorie. 3. Auflage. Berlin 1954.
- [15] *H. Lenz*: Nichteuklidische Geometrie. Mannheim 1967.
- [16] *R. Lingenberg*: Grundlagen der Geometrie I. Mannheim 1969.
- [17] *H. Meschkowski*: Grundlagen der Euklidischen Geometrie. 2. Aufl. Zürich 1974.
- [18] *H. J. und Th. Nastold*: Begründung der euklidischen Geometrie mit Hilfe von Abbildungen. Schriftenreihe des Math. Inst. der Universität Münster, Heft 21.
- [19] *O. Perron*: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. Stuttgart 1962.
- [20] *G. Pickert*: Ebene Inzidenzgeometrie. Frankfurt/M.–Hamburg 1958.
- [21] *I. Toth*: Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum. Arch. History of Exact Sciences 3. (1966/67), 249–422.
- [22] *I. Toth*: Non-Euclidian geometry before Euclid. Scientific American 221 (1969), 87–98.

Quellennachweis der Bilder

- Seiten IX und 91 Aus M. Salmi: Raffaello, Vol. 1. Istituto Geografico de Agostini, Novara.
Mit freundlicher Genehmigung der Vatikanischen Museen
- Seiten 1 und 6 Aus A. Dürer: Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit. Faksimiledruck nach der Urausgabe von 1525. Hrsg. von A. Jaeggli, Bibliothek der ETH, Zürich.
Mit freundlicher Genehmigung des Germanischen Nationalmuseums, Nürnberg
- Seite 18 Aus L. C. Jaffé; Piet Mondrian. M. DuMont Schauberg, Köln.
Mit freundlicher Genehmigung der Kröller-Müller Stichting, Otterlo
- Seite 38 Aus Indien (Länder und Völker. Enzyklopädie für Geographie, Geschichte, Kunst, Kultur, Sitten und Bräuche). Hrsg. Kunstkreis-Buchverlag W. Schweizer, Luzern
- Seite 43 Aus Paul Klee und seine Malerfreunde. Die Sammlung Felix Klee. Verlag Aurel Bongers, Recklinghausen.
Mit freundlicher Genehmigung von COSMOPRESS, Genf. (Copyright 1975 by COSMOPRESS, Genf)
- Seite 56 Aus H. Glück und E. Dietz: Die Kunst des Islam. Propyläen Verlag, Berlin.
Mit freundlicher Genehmigung des F. Bruckmann Verlags, München
- Seite 82 Aus Baukunst und Musik. Kalender-Sonderausgabe des „Heidelberger Portländer“.
Mit freundlicher Genehmigung der Portland-Zementwerke, Heidelberg
- Seite 110 Aus S. Alexandrian: Max Ernst. Rembrandt Verlag, Berlin.
Mit freundlicher Genehmigung von COSMOPRESS, Genf. (Copyright 1975 by SPADEM, Paris, und COSMOPRESS, Genf)
- Seite 129 Aus C. Reid: Hilbert. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York.
Mit freundlicher Genehmigung des Springer-Verlags, Heidelberg

- Seite 134 Computergrafik von G. Nees mit Siemens Datenverarbeitungs-
anlage. Aus H. W. Franke und G. Jäger: Apparative Kunst.
M. DuMont Schauberg, Köln.
Mit freundlicher Genehmigung der Siemens AG, München
- Seite 147 Aus G. di San Lassarò: Paul Klee. Droemer-Knauer,
München / Zürich.
Mit freundlicher Genehmigung von COSMOPRESS, Genf.
(Copyright 1975 by COSMOPRESS, Genf)

Sachregister

- Abstand, nichteuklidischer 126
 Ähnlichkeit 84
 Ähnlichkeitsabbildung 53
 Anfangspunkt eines Polygons 34
 Antipodenpunkt 10
 Axiom 7
 Anordnungsaxiome 35
 Archimedisches 36, 71
 Bewegungsaxiome 40
 Inzidenzaxiome 8
 Kongruenzaxiome 64
 Parallelenaxiom 16
 Streckenaxiome 20
 Vollständigkeitsaxiom 74
 Axiom von Pasch 19
 Automorphismus einer Ebene 12
 – – – mit Strecken und
 Bewegungen 52
 – – –, streckenerhaltender 29

 Bewegung 40
 –, eigentliche 53
 –, nichteuklidische 111
 –, uneigentliche 53

 Dehnung 87
 Drehung 46
 –, nichteuklidische 123
 Dreieck 12
 –, gleichschenkliges 60
 –, gleichseitiges 31
 –, nichteuklidisches 106
 –, rechtwinkliges 76
 Durchmesser 63

 Ebene 8
 –, affine 16
 –, duale projektive 17
 –, endliche 15
 –, euklidische 101
 –, hyperbolische 127
 – mit Strecken 19
 – mit Strecken und Bewegungen 40
 –, projektive 16
 Ecken eines Polygons 35
 Einheitssphäre 9
 Endpunkt eines Polygons 35

 Flächeninhalt eines Dreiecks 93
 – eines Parallelogramms 89
 – eines Polygons 92
 Flagge 28
 –, nichteuklidische 106
 Fußpunkt eines Lots 43

 Gaußsche Zahlenebene 103
 Geometrie, absolute 80
 –, affine 15
 –, ebene 7
 –, elliptische 81
 –, endliche 15
 –, euklidische 101
 –, hyperbolische 127
 –, nichtarchimedische 81
 –, nichteuklidische 80, 133
 –, projektive 15
 –, sphärische 10
 Gerade 7
 –, nichteuklidische 103
 –, uneigentliche 17
 –, unendlich ferne 17
 Geradenbüschel 17
 glatte Kurven 121
 Gleichung einer Geraden 9
 – – nichteuklidischen Geraden 103
 Großkreis 9
 Gruppe der Automorphismen einer
 Ebene 14
 – der nichteuklidischen Bewegungen 112
 – der streckenerhaltenden Auto-
 morphisamen 29
 –, Bewegungsgruppe 41
 –, Drehungsgruppe 48

 Halbebene 25
 –, nichteuklidische 106
 –, obere 103
 –, Poincarésche 103
 Halbgerade 25
 Halbgruppe 69
 –, abelsche 69
 –, geordnete 69
 Halbgruppenhomomorphismus 70
 Hauptsatz der affinen Geometrie 14

- Hjemslevsche Mittellinie 64
 Hülle, euklidische 102
 –, pythagoreische 102

 Inneres eines Dreiecks 35
 Intervallschachtelungsprinzip 74
 Isomorphismus von Ebenen 12
 – – –, streckenerhaltender 29
 – – – mit Strecken und Bewegungen 52

 Kanten eines Polygons 35
 Kathetensatz 90
 Körper, euklidischer 102
 –, geordneter 36
 –, Koordinatenkörper 97
 –, nichtarchimedisch geordneter 36
 –, pythagoreischer 50
 Kongruenz 57
 Konstruktion mit Zirkel und Lineal 101
 Koordinatenachsen 97
 Koordinatenkörper 97
 Koordinatenursprung 97
 Kreis 63
 –, nichteuklidischer 120

 Länge 67
 – einer nichteuklidischen Strecke 126
 Lot 43
 –, nichteuklidisches 120

 Maßstab 72
 Mittelpunkt einer Strecke 44
 Mittelsenkrechte 44
 –, nichteuklidische 120
 Modell 8
 Kleinsches Modell 133
 Poincarésches Modell 111
 Poincarésches Modell im Einheits-
 kreis 135

 n-Eck 12
 Seite eines n-Ecks 12

 Orientierung einer Ebene 53
 orthogonal 41

 Parallelität von Geraden 12
 Parallelogramm 84
 Polyeder 34

 Polygon 34
 –, doppelpunktfreies 35
 –, geschlossenes 35
 –, nichteuklidisches 106
 projektive Abschließung einer affinen
 Ebene 17
 Punkt 7
 Punkt einer Strecke, innerer 21
 – – –, unendlich ferner 17

 randparallel 124
 Rechteck 84
 Riemannsche Zahlenkugel 122

 Satz von den drei Spiegelungen 46
 – von Desargues 101
 – von Fano 101
 – von Pappus 101
 – von Pythagoras 90
 – von Thales 63
 Scheitel eines Winkels 27
 Schenkel eines Winkels 27
 Sehne 63
 Sekante 63
 Skala der Ordnung t eines Maßstabs 71
 – eines Winkelmessers 76
 Skalarmultiplikation 102
 Spiegelung 39
 nichteuklidische Spiegelung 113
 Orthogonalspiegelung 44
 Punktspiegelung 64
 Schrägspiegelung 44
 Schubspiegelung 64
 Spiegelung am Halbkreis 113
 Strahl 25
 –, nichteuklidischer 106
 Strahlensatz 85
 Strecke 19
 Abtragen einer Strecke 57
 Addition von Strecken 67
 freie Strecke 67
 Größenvergleich von Strecken 67
 nichteuklidische Strecke 104
 Summe freier Strecken 69

 Translation 54

 Umkreis 65

 Vektor 102
 Vektoraddition 102

Winkel 27

Abtragen eines Winkels 58

Äußeres eines Winkels 27

Außenwinkel eines Dreiecks 27

gestreckter Winkel 27

Größenvergleich von Winkeln 75

Innenwinkel eines Dreiecks 27

Inneres eines Winkels 27

Nebenwinkel 27

nichteuklidischer Winkel 106

Nullwinkel 27

orientierter Winkel 80

Peripheriewinkel 63

rechter Winkel 42

Scheitelwinkel 27, 59

spitzer Winkel 45

Stufenwinkel 84

stumpfer Winkel 45

Wechselwinkel 84

Winkeladdition 80

Winkelhalbierende 45, 120

Winkelmaß 76

Winkelmesser 75

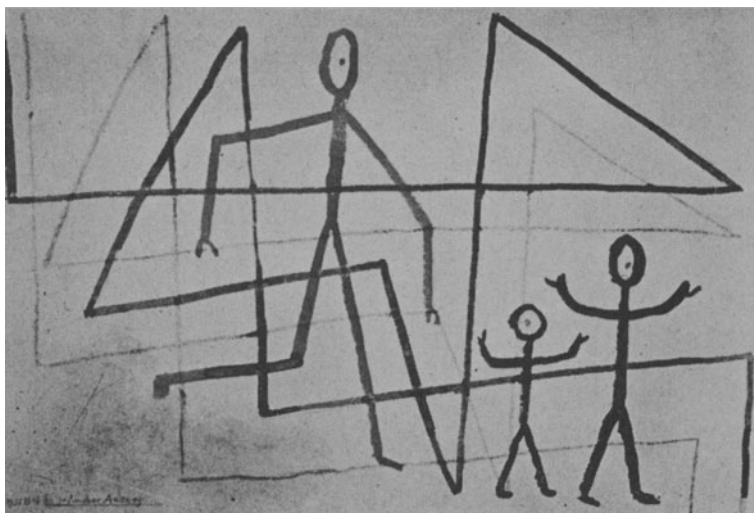
winkeltreue Abbildung 121

Zentriwinkel 63

Kurzbiographie des Autors

Geboren am 10.3.1933 in Heidelberg. Studium 1953–57, Promotion 1959 und Habilitation 1963 an der Universität Heidelberg. Danach Gastaufenthalte an der Universität München, der Purdue-University und der Louisiana State University, USA. Seit 1969 ordentlicher Professor an der Universität Regensburg.

Der Forschungsschwerpunkt des Autors ist Algebra und algebraische Geometrie.



P. Klee: Der gefundene Ausweg (1935)

Beispiele aus Büchern und Briefen: Wie man zu Geld kommen kann



« Wie groß auch seine Armut war ... »

so hatte er bis dahin eigentlich noch nicht empfunden, daß sein ungeordnetes Verschwenden der früheren Reichtümer ihn Mangel leiden ließ. Diesen Morgen aber, als es ihm an allem gebrach, um die Dame zu ehren, der zuliebe er einst Unzählige bewirtet und geehrt hatte, erkannte er zuerst seine Dürftigkeit. In der peinlichsten Herzensangst lief er wie außer sich hin und her und verwünschte sein Schicksal, als er weder Geld vorfand noch irgend etwas, das er hätte verpfänden können . . .

Da fiel ihm sein guter Falke in die Augen, der im Eßzimmer auf seiner Stange saß, und wie er sonst nirgends einen Ausweg zu entdecken vermochte, faßte er ihn und erachtete das edle Tier, als er es wohlgenährt fand, für eine Speise, die einer solchen Dame würdig sei. Und ohne sich weiter zu besinnen, drehte er ihm den Hals um . . .»

So geschehen in der neunten Geschichte des fünften Tages des Dekameron. Und natürlich heiratete die so bewirtete Dame den Falkenkoch, denn sie zog «den Mann, der des Reichtums entbehrt, dem Reichtume vor, der des Mannes entbehrt». Und so fand Federigo eine außerordentliche Gattin nebst außerordentlichem Vermögen.

Summa summarum: In Büchern und Briefen kommt einer leichter zu Geld als mit Büchern und Briefen, es seien denn Sparbücher und Pfandbriefe.

Pfandbrief und Kommunalobligation

**Meistgekaufte deutsche Wertpapiere - hoher
Zinsertrag - schon ab 100 DM bei allen Banken
und Sparkassen**

Verbriefte  **Sicherheit**