
Literatur

1. Samuel R. Buss, editor. *Handbook of proof theory*, volume 137 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1998.
2. Georg Cantor. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.*, 46:481–512, 1895.
3. A. Church. A note on the Entscheidungsproblem. *J. Symbolic Logic*, 1:40–41, 1936.
4. Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.
5. Stephen Cook. The importance of the P versus NP question. *J. ACM*, 50(1):27–29 (electronic), 2003.
6. S. Barry Cooper. *Computability theory*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
7. Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, second edition, 2001.
8. Gerhard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen. I. *Math. Z.*, 39:176–210, 1934.
9. Gerhard Gentzen. *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*. (Forsch. z. Logik u. z. Grundlegung d. exakt. Wiss. N. F., 4) Leipzig: S. Hirzel. S. 19–44. , 1938.
10. Kurt Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatsh. Math. Phys.*, 37(1):349–360, 1930.
11. Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatsh. Math.*, 38:173–198, 1931.
12. Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 24:556–557, 1938.
13. R. L. Goodstein. On the restricted ordinal theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 9(2):33–41, 1944.
14. J. Herbrand. Sur le probleme fondamental de la logique mathématique. *Sprawozd. Towarz. Nauk. Warszaw.*, Wydz. III, 24:12–56, 1931.
15. K. Jänich. *Topologie. 8. Aufl.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2005.
16. Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.
17. Laurie Kirby and Jeff Paris. Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bull. London Math. Soc.*, 14(4):285–293, 1982.

18. Sabine Koppelberg. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet.
19. Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. An introduction to independence proofs, Reprint of the 1980 original.
20. Niklas Luhmann. *Soziale Systeme*. 1984.
21. David Marker. *Model theory*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. An introduction.
22. J. A. Robinson. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *J. ACM*, 12(1):23–41, 1965.
23. Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Addison–Wesley Series in Logic. Addison–Wesley Publishing Company, 1973.
24. Robert M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel J. Math.*, 25:287–304, 1976.
25. K. Tent and M. Ziegler. *A Course in Model Theory*. ASL Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2012.

Sachverzeichnis

- $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$, 12–14, 24, 61, 74, 77, 124
 \Leftrightarrow , 6
 \forall , 6
 $\exists x_1, \dots, x_n$, 7
 \mathcal{A}^* , 89
 β_x^a , 12
 $\beta(a, b, i)$, 114, 133
 $\beta'(a, i)$, 135
 $\vdash_L \varphi$, 23
 C_0^0 , 90, 91
 $\text{dom}(R)$, 61, 120
 Δ_1^P -Formel, 135
 \vee , 6
 $\vee \dots \vee$, 6
 $\bigvee_{i=1}^N$, 45
 \exists -Quantorenaxiome, 19, 20, 62
 ε_0 , 80
 \exists , 6
 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, 13, 14, 62, 81, 89, 109
 φ^n , 107
 φ_e^n , 107
 $\dot{=}$, 6
 $\text{Im}(R)$, 61, 90
 \rightarrow , 6
 $<$, 69, 79, 92, 97
 $x \leq y$, 70
 \wedge , 6
 $\bigwedge_{i=1}^N$, 46
 $\wedge \dots \wedge$, 6
 L_R , 4, 57, 92, 100
 $\models \varphi$, 17, 90
 \mathbb{N} , 3, 67, 101
 \neg , 6
 \emptyset , 59, 69, 73
 $\mathfrak{B}(y)$, 61, 99, 131
 Π_n^0 -Relation, 121
Q, 123
 Q^* , 123
 R^{-1} , 62
 \mathcal{R}_r , 89
S, 3, 4, 67, 90
 Σ_1 -Formel, 124
im engeren Sinn, 124
 Σ_n^0 -Relation, 121
 Σ_1^P -Funktion, 133
Sub, 82, 127
 $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$, 11, 14, 33, 103, 120
 $T \vdash \varphi$, 30
 $T \models \varphi$, 30
 $t(x_1, \dots, x_n)$, 12
 $\bigcup y$, 60
V, 59
 W_e , 106
 x ist frei für s in φ , 14, 59, 60, 97, 100
 (x, y, z) , 61
 $\{z \mid \varphi(z, y_1, \dots, y_n)\}$, 57
- A**
Abbildung
 ordnungstreue, 75
abgeleitete Axiome und Regeln, 24
Ableitbarkeit im Sequenzenkalkül, 36
abzählbare Menge, 78
Ackermann, 95
Ackermannfunktion, 95
Addition, 70, 80
Äquivalenz
 elementare Ä. von Strukturen, 14
 Junktor, 7
 von aussagenlogischen Formeln, 20
 von Formeln, 43
 von Theorien, 66

- allgemeingültige
 - aussagenlogische Formel, 18
 - Formel, 17
- Allquantor, 7
 - \forall -Quantorenaxiome, 24
 - beschränkter, 124
- Anfangskonfiguration, 90
- archimedischer Körper, 16
- arithmetische Hierarchie, 121
- arithmetische Relation, 119
- atomare Formel, 6
- Aussage, 13
- Aussagenlogik, 18
- aussagenlogische Formel, 18
- Aussagenvariable, 18
- Aussonderungsaxiom, 59
- Auswahlaxiom, 66
- Auswahlfunktion, 76
- Automorphismus, 9
- Axiome des Hilbertkalküls, 23
 - \exists -Quantorenaxiome, 19
 - abgeleitete Axiome
 - \forall -Quantorenaxiome, 24
 - Gleichheit, 19
 - Tautologie, 18
- Axiome von ZFC, 58
 - Aussonderung, 59
 - Auswahl, 66
 - Ersetzung, 62
 - Extensionalität, 57, 59
 - Fundierung, 65
 - Paarmenge, 60
 - Potenzmenge, 61
 - Unendlichkeit, 65
 - Vereinigung, 60
- B**
- Belegung, 11
- berechenbare Funktion, 89
- beschränkter Allquantor, 124
- Betafunktion, *siehe* Gödels β -Funktion
- Beth, 41
 - Satz von, 41
- Beweis, 25, 110
- beweisbare Formel, 23
- Beweisbarkeit, 23, 30
- Beweisbarkeitsprädikat
 - von ZFC, 82, 138
- bijektive Funktion, 63
- Bildbereich, 61
- Bindungsstärke, 7
- Boolesche Algebra, 20
- C**
- CON_{ZFC} , 83, 139
- Cantor, 78
 - Satz von, 78
- Cantorsche Normalform, 80
- CH, 79
- charakteristische Funktion, 97
- Church, 103, 125
 - Satz von, 125
- Churchsche These, 103
- Cobhams Theorie, 123
- Craig, 39
- Craigscher Interpolationssatz, 39
- D**
- de Morgan, 20
- de Morgansche Regeln, 20
- Deduktionslemma, 137
- deduktiv abgeschlossene Theorie, 27
- definierbare
 - Menge, 13
 - Relation, 13
- Definitionsbereich, 61
- definitorische Erweiterung, 63, 64
- Diagramm, 26
- Differenzmenge, 59
- Disjunktion, 7
- disjunktive Normalform, 21, 51
- Distributivgesetz, 20
- Durchschnitt, 59
- E**
- effektiv axiomatisierbare Theorie, 110
- Eindeutige Lesbarkeit
 - von Formeln, 8
 - von Termen, 5
- Einführung
 - \forall -Einführung, 24
 - \exists -Einführung, 20
 - neuer Funktionszeichen, 63
 - neuer Konstanten, 64
 - neuer Relationszeichen, 63
- Einschränkung
 - einer Funktion, 62
 - einer Struktur, 18

Einsetzung, 91
 elementare Äquivalenz, 14
 elementare Klasse, 33
 endliche Axiomatisierbarkeit, 33
 endliche Menge, 78
 entscheidbare Theorie, 110
 erblich endliche Menge, 75
 erfüllen, 13
 Ersetzungsaxiom, 62
 Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz, 85, 121
 Erweiterung
 definitorische, 64
 konservative, 63
 erzeugte Unterstruktur, 9
 existentielle Formel, 43
 Existenz Einführung, 20
 Existenzquantor, 6
 \exists -Quantorenaxiome, 19, 20
 Expansion, 18
 Exponentiation, 80
 Extensionalitätsaxiom, 57, 59

F

Fixpunktsatz
 Q^* , 127
 Kleenescher, 107
 ZFC, 81
 Flußdiagramm, 92
 Σ_1 -Formel, 124, 135
 allgemeingültige, 17
 äquivalente, 20, 43
 atomare, 6
 aussagenlogische, 18
 beweisbare, 23, 30
 existentielle, 43
 im engeren Sinn, 124
 L -Formel, 6
 modallogische, 140
 quantorenfreie, 43
 universelle, 43
 zweistufige, 129, 135
 Fränkel, 58
 Zermelo-Fränkel-Mengenlehre, 58
 freies Vorkommen, 12
 fundierte Menge, 65
 Fundierungsaxiom, 65
 Σ_1^P -Funktion, 61, 133
 primitiv rekursive, 91

berechenbare, 89
 bijektive, 63
 charakteristische, 97
 injektive, 63
 partiell rekursive, 107
 rekursive, 90
 surjektive, 63
 Funktional, 62, 74
 Funktionszeichen, 4

G

Gentzen, 35, 117
 geordnetes Paar, 60
 Gleichheitsaxiome, 19
 Gleichheitszeichen, 6, 32, 45
 gleichmächtige Mengen, 77
 Gödel, 23
 1. Unvollständigkeitssatz, 85, 121
 2. Unvollständigkeitssatz, 83, 139
 Vollständigkeitssatz, 23
 Gödelisierung, 101
 Gödelnummer, 100, 101, 109, 110
 Gödels β -Funktion, 114, 133
 Goodstein, 80
 Satz von, 80
 $GOTO(r, c_0, \dots, c_L)$, 89
 Graph, 32
 Graph einer Funktion, 62, 119
 Grundmenge, 4
 Gültigkeit, 13

H

Halteproblem, 107
 Henkin, 26
 Henkintheorie, 26
 Herbrand, 44
 Satz von, 45
 Herbrand-Normalform, 44
 Hilbert, 23
 Hilbertkalkül, 23

I

Implikation, 7
 Induktion, 74
 Induktionsschema, 131
 injektive Funktion, 63
 Interpolationssatz, 39
 inverse Relation, 62
 irreflexive Relation, 68

Isomorphie, 4
 Isomorphismus, 4

J

Junktor, 6, 21

K

Kardinalzahl, 78
 Klammern, 5–7
 Klasse, 74
 Klausel, 51
 Kleene, 103
 Fixpunktsatz, 107
 Normalform, 103
 Prädikat, 103
 Körperaxiome, 7
 Koinzidenzatz, 13
 Kompaktheitssatz, 31
 der Aussagenlogik, 32
 Komprehensionsaxiom, 57
 Konfiguration, 90
 Kongruenzrelation, 19
 Konjunktion, 6
 konjunktive Normalform, 21
 konservative Erweiterung, 63
 konsistente Theorie, 25
 Konstante, 4
 konstante Funktion, 90
 Konstantenzeichen, 4
 konstanter Term, 29
 Kontinuumshypothese, 79
 Kopiermaschine, 92
 Korrektheitssatz, 24
 Krivine, 17
 Kuratowski, 60
 Kuratowski-Paar, 55, 60

L

leere Menge, 59
 L-Formel, 6
 Limeszahl, 74
 lineare Ordnung, 68
 Literal, 51
 Loeb, 82
 Satz von, 140
 Loeb-Axiome, 82, 139
 Löschmaschine, 92
 Löwenheim, 31
 Satz von Löwenheim-Skolem, 31

logische Folgerung, 30, 137
 logische Zeichen, 6
 L-Struktur, 4
 L-Term, 5

M

Mächtigkeit, 77
 maximales Element, 77
 Menge
 abzählbare, 78
 endliche, 78
 erblich endliche, 75
 fundierte, 65
 leere, 59
 transitive, 68
 modallogische Formel, 140
 Modell, 13, 26
 aus Konstanten, 28
 Modus Ponens, 19
 Morgan, *siehe* de Morgan
 μ -Rekursion, 91
 Multiplikation, 70, 80

N

Nachfolgekonfiguration, 90
 Nachfolger, 67, 90
 Nachfolgerkardinalzahl, 79
 Nachfolgeroperation, 3
 Nachfolgerzahl, 74
 Naive Mengenlehre, 57
 natürliche Zahl, 68
 Negation, 6
 Neumann, *siehe* von Neumann
 nichtstandard natürliche Zahl, 71
 Normalform
 disjunktive, 21, 51
 Herbrand-Normalform, 44
 konjunktive, 21
 pränex, 43
 Skolem-Normalform, 43

O

obere Schranke, 77
 Ordinalzahl, 73
 Ordnung
 lineare, 68
 partielle, 68
 ordnungstreue Abbildung, 75

P

$P=NP$, 51
 Paar, *siehe* geordnetes Paar
 Paarmenge, 60
 Paarmengenaxiom, 60
 partiell rekursive Funktion, 107
 partielle Ordnung, 68
 Peanoarithmetik, 131
 zweiter Stufe, 135
 Potenzmenge, 61
 Potenzmengenaxiom, 61
 Prädikat, 4, 97
 pränex Normalform, 43
 Primformel, 6
 primitiv rekursive
 Arithmetik, 134
 Funktion, 91
 Relation, 97
 primitive Rekursion, 91
 Produkt, 61
 Projektionsfunktion, 90
 $PUSH(r, l)$, 89

Q

Quantor, 6, 7
 quantorenfreie Formel, 43
 Quine, 58

R

r. a., *siehe* rekursiv aufzählbar
 Reduktionssatz, 107
 Regeln des Hilbertkalküls, 23
 abgeleitete Regeln
 Aussagenlogik, 24
 \forall -Einführung, 24
 Existenzeinführung, 20
 Modus Ponens, 19
 Registermaschine, 89
 Rekursion
 μ -Rekursion, 91
 primitive, 91
 Rekursionssatz, 74
 rekursiv
 aufzählbar, 105
 trennbar, 121
 rekursive
 Bijektion, 100
 Funktion, 90
 Relation, 97

Relation, 61

 primitiv rekursive, 97
 arithmetische, 119
 rekursiv aufzählbare, 105
 rekursive, 97
 Relationszeichen, 4
 Repräsentierung
 einer Funktion, 126
 einer Relation, 127
 Resolutionsmethode, 52
 Resultante, 52
 Ring-Sprache, 4
 Rosser, 85
 Rossettsatz, 85
 Russell, 58
 Russellsche Antinomie, 58

S

Schlußregeln, *siehe* Regeln des Hilbertkalküls
 Schnittregel, 40
 Schranke
 obere, 77
 Sequenz, 35
 allgemeingültige, 35
 Sequenzenkalkül, 36
 Shefferscher Strich, 21
 Skolem, 31
 Normalform, 43
 Satz von Löwenheim-Skolem, 31
 Skolemfunktion, 44
 s-m-n-Satz, 107
 Sprache, 4
 rekursive, 109
 stark rekursive Struktur, 111
 Stelligkeit, 4
 STOP, 89
 Stopkonfiguration, 90
 Struktur, 4
 stark rekursive, 111
 Substitutionslemma, 14
 Supremum, 80
 surjektive Funktion, 63

T

L -Theorie, 25
 Tarski, 32
 Satz über die Wahrheitsdefinition, 82, 129,
 138
 Tarski-Kriterium, 32

- Tautologie, 18
- Teilformel, 6
- Teilmenge, 59
- Term, 5
 - konstanter, 29
- Theorie, 25
 - äquivalente, 66
 - deduktiv abgeschlossene, 27
 - effektiv axiomatisierbare, 110
 - entscheidbare, 110
 - konsistente, 25
 - vollständige, 26, 110
 - widerspruchsfreie, 25
- transitive
 - Menge, 68
 - Relation, 68
- Tripel, 61
- Turing, 95
- Turingmaschine, 95, 103

- U**
- Unendlichkeitsaxiom, 65
- Unifikationssatz, 47
- Uniformisierungssatz, 107
- universelle
 - rekursiv aufzählbare Relation, 106
 - Formel, 43
 - partiell rekursive Funktion, 107
- Universum, 4
- unmittelbarer Nachfolger, 69
- Unterstruktur, 9
 - elementare, 32
- Unvollständigkeitssatz, 83, 85, 121, 139

- V**
- Variable, 5
- Vereinigung, 60
- Vereinigungsmengenaxiom, 60
- Volles Komprehensionsaxiom, *siehe*
 - Komprehensionsaxiom
- vollständige Theorie, 26, 110
- vollständiges Diagramm, *siehe* Diagramm
- Vollständigkeitsatz, 23, 36
- von Neumann, 75
 - von Neuman-Hierarchie, 75

- W**
- wahre L_N -Theorie, 123
- Wahrheit, 13
- Wahrheitsdefinition, 82, 129, 138
- Wahrheitstafel, 18
- Wahrheitswert, 18
- widerspruchsfreie Theorie, 25
- Wohlordnung, 69
- Wohlordnungssatz, 76
- Wohlordnungstyp, 75
- Wort, 89

- Z**
- Zeichenreihe, 6
- Zermelo, 58
 - Zermelo-Fränkel-Mengenlehre, 58
- ZFC, 58
- Zorn, 76
- Zornsches Lemma, 76
- zutreffen, 12
- Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz, 83, 139
- zweistufige Formeln, 110, 129, 135