Anhang. Algebraische Grundlagen

Bei vielen der hier geführten Beweise waren Ordinalzahlen und das Prinzip der transfiniten Induktion entscheidende Hilfsmittel. Es kann nicht Zweck des Büchleins sein, die tiefgründigen Überlegungen darzustellen, die zu diesen algebraischen Begriffen führen oder gar die bekannten Sätze über Ordinalzahlen auf dieser Grundlage zu beweisen. Hierzu sei auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Das Ziel dieses Kapitels besteht vielmehr darin, diejenigen algebraischen Ergebnisse außerhalb der elementaren Mengenlehre anzugeben, die wir im einzelnen benötigen — das algebraische Fundament also, auf dem wir aufbauen konnten. Dabei folgen wir im wesentlichen Klaua [1], wo auch die Beweise der zitierten Aussagen zu finden sind.

A.1. Wohlordnungen

Wir betrachten eine beliebige Menge X und eine in dieser Menge definierte binäre Relation R.[1])

Definition 1. Das Paar (X, R) heißt *Wohlordnung*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $(x \neq y \wedge x, y \in X) \Rightarrow$ entweder $x < y(R)$ oder $y < x(R)$;

(b) $\big(x, y \in X \wedge x < y(R)\big) \Rightarrow x \neq y$;

(c) $\big(x, y, z \in X \wedge y < x(R) \wedge z < y(R)\big) \Rightarrow z < x(R)$;

(d) $(\emptyset \neq M \subset X) \Rightarrow \exists\, x_M \in M\colon (y \in M \wedge y \neq x_M) \Rightarrow x_M < y(R)$.

Die ersten drei Forderungen kennzeichnen die Vollständigkeit (a), Antisymmetrie (b) und Transitivität (c) der Relation R. Die Forderung (d) verlangt in jeder nichtleeren Teilmenge M von X die Existenz eines kleinsten Elements im Sinne der Relation R.

---

[1]) Jede binäre Relation R läßt sich als eine Teilmenge $\mathfrak{R}$ des Produkts $X \times X$ auffassen und umgekehrt: $(x, y) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow x < y(R)$.

Definition 2. Zwei Wohlordnungen (X_1, R_1) und (X_2, R_2) heißen *von gleichem Ordnungstyp*, wenn es eine eineindeutige Abbildung f von X_1 auf X_2 derart gibt, daß

$$x_1 < y_1(R_1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (R_2)$$

gilt.

Jetzt sei $W = (X, R)$ eine Wohlordnung und $x \in X$. Dann bezeichnen wir mit W_x die folgende Wohlordnung (Y_x, R_x):

$$Y_x = \{y \in X \mid y < x(R)\},$$

$$y_1 < y_2(R_x) \Leftrightarrow y_1 < y_2(R) \qquad (y_1, y_2 \in Y_x).$$

Die Wohlordnung W_x heißt *Abschnitt von* W und entsteht, indem nur die Elemente aus X, die im Sinne von R kleiner als x sind, in ihrer gegebenen „Reihenfolge" betrachtet werden.

Satz 1 (Hauptsatz über wohlgeordnete Mengen). *Es seien* $W_1 = (X_1, R_1)$ *und* $W_2 = (X_2, R_2)$ *beliebige Wohlordnungen. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. W_1 *und* W_2 *sind vom gleichen Ordnungstyp.*
2. *Es gibt ein* $x_1 \in X_1$, *so daß* W_{1x_1} *und* W_2 *vom gleichen Ordnungstyp sind.*
3. *Es gibt ein* $x_2 \in X_2$, *so daß* W_1 *und* W_{2x_2} *vom gleichen Ordnungstyp sind.*

Wir werden im 1. Fall schreiben $W_1 \sim W_2$, in den Fällen 2 und 3 dagegen $W_2 \prec W_1$ bzw. $W_1 \prec W_2$ (lies: W_2 ist äquivalent, kleiner als bzw. größer als W_1).

Satz 2. *Es sei* (X, R) *eine Wohlordnung und* $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *eine Folge in* X *mit der Eigenschaft*

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_k > x_{k+1} > \cdots \qquad (R).$$

Dann ist die Folge $\{x_k\}$ *endlich.*

Die Tatsache, daß in jeder Wohlordnung jede streng monoton fallende Folge endlich ist, benutzten wir wesentlich zum Beweis von Satz 1.6.1.

Satz 3 (Prinzip der transfiniten Induktion). *Es sei* $W = (X, R)$ *eine Wohlordnung und* A *eine Teilmenge von* X. *Wenn für das kleinste Element* x_0 *aus* X (im Sinne der Relation R) *gilt* $x_0 \in A$ *und wenn ferner mit beliebigem* $x \in X$ *aus* $Y_x \subset A$ *folgt* $x \in A$, *so ist* $A = X$.

Satz 4 (Definition über transfinite Induktion). *Es sei* (X, R) *eine Wohlordnung,* B *eine Menge und* G_x $(x \in X)$ *die Menge aller Abbildungen von* Y_x *in* B. *Weiter möge* $G = \bigcup_{x \in X} G_x$ *und* T *eine Abbildung von* G *in* B *sein. Dann existiert genau eine Abbildung* f *von* X *in* B *mit*

$$f(x) = T(f \downarrow Y_x) \qquad \forall\, x \in X$$

(hierbei bezeichnet $f \downarrow Y_x$ die Einschränkung von f auf den Definitionsbereich Y_x).

Nach Satz 4 läßt sich eine Abbildung f von X in B auf die folgende Weise definieren:

(D 1) Angabe des Bildes $f(x_0)$ für das kleinste Element x_0 aus X;

(D 2) Angabe einer eindeutigen Vorschrift T, wie aus den Bildern $f(y)$ aller Elemente $y < x(R)$ das Bild $f(x)$ zu konstruieren ist.

Satz 5 (Wohlordnungssatz). *Zu jeder Menge X existiert eine Relation R derart, daß (X, R) eine Wohlordnung ist (jede Menge läßt sich wohlordnen).*

Satz 6 (Auswahlaxiom). *Es seien X und Y nichtleere Mengen und F eine Abbildung von X in die Potenzmenge 2^Y der Menge Y mit der Eigenschaft $F(x) \neq \emptyset \ \forall\ x \in X$.*
Dann existiert eine Abbildung f von X in Y derart, daß

$$f(x) \in F(x) \qquad \forall\ x \in X$$

gilt.

Wir benötigten das (zum Wohlordnungssatz äquivalente) Auswahlaxiom bereits in dem Moment, als wir stillschweigend die Existenz von Strategien voraussetzten.

A.2. Ordinalzahlen und ihre Summe

Nach Definition 2 sind wir in der Lage, Wohlordnungen von gleichem und verschiedenem Ordnungstyp zu unterscheiden.

Damit liegt die Idee nahe, jeder Wohlordnung W eine gewisse Größe $\alpha(W)$ zuzuordnen, die ihren Ordnungstyp repräsentiert; und es scheint vernünftig, zu fordern, daß $\alpha(W_1) = \alpha(W_2)$ genau dann gilt, wenn $W_1 \sim W_2$.

Auf diese Weise würde allen Wohlordnungen desselben Typs ein Objekt zugeordnet, welches ihren gemeinsamen Ordnungstyp kennzeichnet.

Die strenge Begründung dafür, daß eine derartige Zuordnung existiert, d. h., daß sich unsere Idee verwirklichen läßt, führt an die Grenze zwischen Algebra und Philosophie. Die wesentliche Schwierigkeit besteht darin, daß es keine „Menge aller Wohlordnungen eines vorgegebenen Typs" und keine „Menge aller Ordnungstypen" geben kann. Wir nehmen die Existenz von Objekten, die die Ordnungstypen von Wohlordnungen repräsentieren, als gegeben hin und bezeichnen diese Objekte als *Ordinalzahlen.*

Da zwei endliche Wohlordnungen (das Wort „endlich" bezieht sich auf die zugrunde liegenden Mengen) genau dann vom selben Typ sind, wenn die zugehörigen Mengen dieselbe Anzahl von Elementen aufweisen, können wir die zu endlichen Wohlordnungen gehörenden Ordinalzahlen (endliche Ordinalzahlen genannt) mit den natürlichen Zahlen (einschließlich Null als Repräsentant der leeren Wohlordnung) identifizieren. Allgemein kennzeichnen wir Ordinalzahlen mit griechischen Buchstaben. Dabei steht ω für den Ordnungstyp der Menge aller natürlichen Zahlen in ihrer gewöhnlichen Ordnung. Beim Umgang mit Ordinalzahlen ist zu beachten:

Satz 7. *Es gibt keine Menge aller Ordinalzahlen.*

Wir können also Mengen *von* Ordinalzahlen betrachten, aber nicht die Menge *aller* Ordinalzahlen.

Es seien nun α und β zwei Ordinalzahlen.

Definition 3. Wir nennen α *kleiner als* β ($\alpha < \beta$), wenn für zwei Wohlordnungen W_α, W_β vom Ordnungstyp α bzw. β die Relation $W_\alpha \prec W_\beta$ besteht.

Die Repräsentantenunabhängigkeit dieser und der folgenden Definitionen ergibt sich aus der Definition des Ordnungstyps und der Kleiner-Relation zwischen Wohlordnungen (Satz 1). Weiter gilt:

Satz 8. *Jede Menge von Ordinalzahlen bildet zusammen mit der in Definition* 3 *erklärten Relation* $<$ *eine Wohlordnung. Ist insbesondere* $X(\alpha)$ *die Menge aller Ordinalzahlen, die kleiner als die Ordinalzahl* α *sind, so repräsentiert* α *den Ordnungstyp der Wohlordnung* $\big(X(\alpha), <\big)$.

Definition 4. Es seien $W_\alpha = (X, R_X)$ und $W_\beta = (Y, R_Y)$ zwei Wohlordnungen vom Typ α bzw. β, und es gelte $X \cap Y = \emptyset$. Dann bezeichnen wir mit $\alpha + \beta$ den Ordnungstyp der Wohlordnung $W = (X \cup Y, R)$, wobei R wie folgt erklärt ist:

$$x < y(R), \quad \text{falls} \quad \begin{cases} & x, y \in X \wedge x < y(R_X) \\ \text{oder} & x \in X, \ y \in Y \\ \text{oder} & x, y \in Y \wedge x < y(R_Y). \end{cases}$$

Die Wohlordnung W entsteht also durch „Anheften" der Wohlordnung W_β an die Wohlordnung W_α. Dabei ist die Reihenfolge wichtig: z. B. gilt $\omega = 1 + \omega \neq \omega + 1$.

Definition 5. Eine Ordinalzahl α heißt *Grenzzahl*, wenn die Menge $X(\alpha)$ aller Ordinalzahlen, die kleiner als α sind, kein größtes Element besitzt.

Wegen $X(0) = \emptyset$ ist offenbar 0 die kleinste Grenzzahl. Die nächste Grenzzahl ist ω ($X(\omega)$ besteht aus allen endlichen Ordinalzahlen), dann folgt $\omega + \omega$ ($= 2\omega$) usw.

Satz 9. *Zu jeder Ordinalzahl* α *existieren genau eine Grenzzahl* $\lambda(\alpha)$ *und genau eine endliche Ordinalzahl* $k(\alpha)$ *mit* $\alpha = \lambda(\alpha) + k(\alpha)$.

Diese Darstellung benötigten wir in Abschnitt 2.3.

Satz 10. *Unter allen Ordinalzahlen, die einer vorgegebenen Ordinalzahlmenge nicht angehören, gibt es eine kleinste.*

A.3. Zur Anwendung des Induktionsprinzips

Wir benutzten das Prinzip der Definition über transfinite Induktion, um gewisse Teilmengen aller Positionen der untersuchten Spiele auszuzeichnen. Dabei gingen wir — etwa im Zusammenhang mit der Ordnung eines Graphen (P, γ) — von der Vorstellung aus, daß jeder Ordinalzahl α eine Teilmenge $Q_\alpha (\subset P)$ zugeordnet wird. Als Urbilder der zu konstruierenden Abbildung $\alpha \rightsquigarrow Q_\alpha$ sind also alle Ordinalzahlen zugelassen, womit wir zunächst vor einer Schwierigkeit stehen, wenn wir Satz 4 anwenden wollen: Der Definitionsbereich X der zu konstruierenden Abbildung ist keine Menge, somit ist (X, R) auch keine Wohlordnung.

Diese Schwierigkeit ist leicht zu umgehen, indem wir von vornherein eine — in Abhängigkeit von P — hinreichend große Ordinalzahl $\alpha(P)$ wählen und dann nur noch die Menge $X(\alpha(P))$ aller Ordinalzahlen, welche kleiner als $\alpha(P)$ sind, betrachten. Wir können beispielsweise so vorgehen:

Es sei $M = M(P)$ eine beliebige Menge von größerer Mächtigkeit als die Potenzmenge 2^P von P. Sie läßt sich wohlordnen (Satz 5). Wir wählen $\alpha(P)$ als eine den Ordnungstyp einer Wohlordnung (M, R) repräsentierenden Ordinalzahl. Dann sind (M, R) und $(X(\alpha(P)), <)$ Wohlordnungen gleichen Typs (Satz 8), wonach insbesondere M und $X(\alpha(P))$ dieselbe Mächtigkeit haben.

Schränken wir jetzt unsere induktive Definition auf $\alpha \in X(\alpha(P))$ ein, so müssen gewissen verschiedenen Urbildern α und β dieselben Bilder Q_α, Q_β zugeordnet werden (andernfalls hätte 2^P mindestens die Mächtigkeit von M). Mit unserer speziellen Abbildung T folgt so die Existenz einer Ordinalzahl $\alpha_0 \in X(\alpha(P))$, daß

$$Q_{\alpha_0} = Q_\alpha \qquad \forall\ \alpha \in X(\alpha(P)), \quad \alpha > \alpha_0 .$$

Setzen wir schließlich formal $Q_\beta = Q_{\alpha_0}$ für jede nicht in $X(\alpha(p))$ liegende Ordinalzahl β, dann erhalten wir die von uns betrachteten, jeder Ordinalzahl α zugeordneten Mengen Q_α. Tatsächlich haben wir uns stets nur für Mengen Q_α mit $\alpha \leqq \alpha_0$ interessiert.

Literatur

Um zu kennzeichnen, mit welchen Teilgebieten der Spieltheorie sich die betreffenden Arbeiten vorrangig befassen, benutzen wir die nachstehenden Abkürzungen:

KN konkrete Nimmspiele
TN Theorie der Nimmspiele
UI Spiele mit unvollständiger Information
VI Spiele mit vollständiger Information
GS Spieltheorie insgesamt

Bachet de Méziriac
[1] Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres, Lyon 1612.
Benson, D. C.
[1] A generalization of the game of Nim, Amer. Math. Monthly **63** (1956), 533 (TN).
Berge, C.
[1] Théorie générale des jeux à n personnes, Gauthier-Villars, Paris 1957 (GS).
[2] La fonction de Grundy d'un graphe infini, C. r. Acad. sci. Paris **242** (1956), 1404—1407 (TN).
[3] Topological games with perfect information, in: Contributions to the Theory of Games III, Ann. Math. Study 39, Princeton University Press, Princeton (N. J.) 1957, 165—178 (VI).
[4] Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris 1958 (UI, VI, TN).
Berge, C., und M. P. Schützenberger
[1] Jeux de Nim et solutions, C. r. Acad. sci. Paris **242** (1956), 1672—1674 (TN).
Bouton, C. L.
[1] Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. Math. 2 (1902), No. 3, 35—39 (KN)
Bucan, G. P., und L. P. Varvak (Буцан, Г. П., и Л. П. Варвак)
[1] К вопросу об играх на графе, Алгебра и матем. логика, Киев 1966, 122—138 (TN).
Burger, E.
[1] Einführung in die Theorie der Spiele, W. de Gruyter, Berlin 1959 (GS).

Connell, I. G. A.
[1] A generalization of Wythoff's game, Canad. Math. Bull. **2** (1959), No. 3, 181—190 (KN).
Constantinescu, P., C. Lulea and S. Niculescu
[1] Algorithm for determing the nucleus of a graph associated with the game of Nim, Stud. cerc. mat. Acad. RPR **15** (1964), N. 1, 77—81 (rumän.) (KN).

Denofsky, M. E.
[1] Games and graphs, Techn. Eng. News, 48 (1966), No. 3, 36—39 (VI).
Domorjad, A. P. (Доморяд, А.П.)
[1] Математические игры и развлечения, Физматгиз, Москва 1961 (KN).

Gale, D., and F. M. Stewart
[1] Infinite games with perfect informations, in: Contributions to the Theory of Games II, Ann. Math. Study 28, Princeton University Press, Princeton (N. J.) 1953, 245—266 (VI).
Grundy, P. M.
[1] Mathematics and games, Eureka **2** (1939), 6 (TN).
Grundy, P. M., and C. A. Smith
[1] Disjunctive games with the last player loosing, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956), 52—77 (KN, VI).
Gutiérrez, C. S.
[1] Games of Nim and graphs, Estadist. españ. **25** (1964), 27—35 (TN).
[2] Grafos y juegos de N personas, Trab. estadist. **15** (1964), No. 2, 169—182 (TN, VI).
Guy, R. K., and C. A. B. Smith
[1] The G-values of various games, Proc. Cambridge Philos. Soc. **52** (1956), 514—526 (KN).
Holladay, J. C.
[1] Cartesian products of termination games, in: Contributions to the Theory of Games III, Princeton Univ. Press, Princeton (N. J.) 1957, 189—200 (TN).

Kálmar, L.
[1] Zur Theorie der abstrakten Spiele, Acta Sci. Math. Szeged **4** (1928/29), 65—85 (VI).
Klaua, D.
[1] Kardinal- und Ordinalzahlen, Akademie-Verlag, Berlin 1974.
König, D.
[1] Über eine Schlußweise aus dem Endlichen ins Unendliche, Acta Sci. Math. Szeged **3** (1927), 121—130 (VI).
Kuhn, H. W.
[1] Extensive games and the problem of information, Contributions to the Theory of Games II, Ann. Math. Study 28, Princeton University Press, Princeton (N. J.) 1953, 193—216 (UI).
Kummer, B.
[1] Diskrete Positionsspiele und eine Verallgemeinerung des v. Neumann-Morgensternschen Lösungsbegriffs für klassische Kooperativspiele, Dissertation (A), Humboldt-Universität Berlin 1975 (TN, VI).
[2] Antagonistische Terminalspiele, Ekonomicko-matematický Obzor, Roč. **12** (1976), č. 2, 117—126 (VI).

Lasker, E.
[1] Brettspiele der Völker, Aug. Scherl GmbH, Berlin 1930.

Moore, E. H.
[1] A generalization of the game called Nim, Ann. Math. **11** (1909), 93—94 (KN).
von Neumann, J., and O. Morgenstern
[1] Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, Princeton (N. J.) 1944 (Deutsche Übers.: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Physica-Verlag, Würzburg 1961. Russ. Übers.: Теория игр и экономическое поведение, Наука, Москва 1970) (GS).

Nožička, F., J. Guddat und H. Hollatz
[1] Theorie der linearen Optimierung, Akademie-Verlag, Berlin 1972.

Owen, G.
[1] Spieltheorie, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971 (Übers. a. d. Engl.) (GS).

Piehler, J.
[1] Einführung in die dynamische Optimierung, 2. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1966.

Skole, J.
[1] Eigenschaften von Gleichgewichtssituationen diskreter Positionsspiele, Diplomarbeit, Humboldt-Universiät Berlin 1975 (VI).

Smith, C. A. B.
[1] Graphs and composite games, J. Comb. Theory **1** (1966), No. 1, 51—81 (TN).

Thomsen, P.
[1] The mathematical treatment of a well-known two-person-game, Math. Aidsskr., Ser. A, **3** (1952), 63—72 (KN).

Vorob'ev, N. N. (Vorobjoff, N. N.; Worobjow, N. N.; Воробьев, Н. Н.)
[1] Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung, 3. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; Physica-Verlag, Würzburg 1969 (Übers. a. d. Russ.) (GS).
[2] Расчлененные стратегии в позиционных играх, Проблемы кибернетики **7** (1963), 5—20 (UI).
[3] Контролируемые процессы и теория игр, Вестник ЛГУ, Сер. мат. мех. астрон. **11** (1955), вып. 4, 49.
[4] Редуцированные стратегии в позиционных играх, в сб. Позиционные игры, Наука, Москва 1967, 94—113 (UI).
[5] Entwicklung der Spieltheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975 (Übers. a. d. Russ.) (GS).

Vorob'ev, N. N., V. V. Malinnikov und A. I. Sobolev (Воробьев, Н. Н., В. В. Малинников и А. И. Соболев)
[1] Задачи линейного программирования на конечных ориентированных графах, Экономика и матем. методы **6** (1968), 622—628.

Wythoff, W. A.
[1] A modification of the game of Nim. Nieuw archief voor wiskunde, Reeks 2 (1907), d. 7, 199—202 (KN).

Zermelo, E.
[1] Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels, Proc. 5th Congress of Mathematicians (Cambridge 1912), Cambridge University Press 1913, 501—504 (Russ. Übers.: О применении теории множеств к теории шахматной игры, в сб. Матричные игры, Физматгиз, Москва 1961, 167—172) (VI).

Verzeichnis der Beispiele

Sachverzeichnis