

---

## Literatur

1. R. Adler, A. Konheim, M. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. 114, 309–319 (1965).
2. M.D. Boshernitzan, *Elementary proof of Furstenberg's diophantine result*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 67–70.
3. M. Brokate, G. Kersting, *Maß und Integral*, Mathematik Kompakt, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009.
4. J.B. Conway, *A Course in Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics Series, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2000.
5. H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.
6. H. Furstenberg, *The unique ergodicity of the horocycle flow*, in: Recent advances in topological and symbolic dynamics, Lecture Notes in Mathematics, vol. 318, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, 95–115.
7. <http://matheuscms.wordpress.com/2009/02/19/furstenbergs-2x-3x-mod-1-problem/>
8. G.A. Hedlund, *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. **2** (1936), 530–542.
9. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
10. G. Kersting and A. Wakolbinger, *Elementare Stochastik*, Mathematik Kompakt, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2008.
11. V.L. Klee, Jr., *Invariant metrics in groups (Solution of a problem of Banach)*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 484–487.
12. N. Kusolitsch, *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2011.
13. E. Lindenstrauss, *Pointwise theorems for amenable groups*. Invent. Math. 146 (2001), no. 2, 259–295.
14. K.R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, New York-London, 1967.
15. W. Rudin, *Functional Analysis*, Second Ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
16. D.J. Rudolph,  *$\times 2$  and  $\times 3$  invariant measures and entropy*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10** (1990), 395–406.
17. V.S. Varadarajan, *Groups of automorphisms of Borel spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 191–220.

18. J. Wengenroth, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, Berlin-New York, 2008.
19. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. 77 (1916), 313–352.
20. D. Witte, *Ratner's Theorems on Unipotent Flows*, Chicago Lectures in Mathematics Series, University of Chicago Press, Chicago-London, 2005.
21. K. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 138, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2007.
22. M. Ziegler, *Mathematische Logik*, Mathematik Kompakt, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2010.

# Sachverzeichnis

$\|f\|_p$ , 48  
 $1_B$ , 26

## A

Abbildung  
  affin, 30  
  messbar, 47  
Äquivarianz, 18, 65  
Alphabet, 13  
A-Shift, 13  
Automorphismus  
  von  $\mathbb{T}^2$ , 6  
  von  $\mathbb{T}^d$ , 57

## B

Bahn  
  eines Punktes, 1, 126  
  zweiseitige, 1  
Bairescher Kategoriensatz, 8  
Banachraum, 24  
bedingte Erwartung, 50  
Bernoullimaß, 32  
 $\beta$ -Transformation, 70, 71  
  Ergodizität, 73  
Bildmaß, 28, 47  
Borel  
   $\sigma$ -Algebra, 24  
 $\mathcal{B}_X$ , 24  
 $\mathcal{B}_X^T$ , 126  
 $(\mathcal{B}_X^T)_\mu$ , 126

## C

$\mathbb{C}$ , 34

Cartanzerlegung, 145  
 $C(X)$ , 24

## D

dynamisches System  
  maßerhaltend, 64  
  ergodisch, 64  
  invertierbar, 65  
  schwach mischend, 64  
  stark mischend, 64  
  totalergodisch, 87  
topologisch, 1  
  eindeutig ergodisch, 33  
  exakt, 10  
  expansiv, 7  
  intrinsisch ergodisch, 121  
  invertierbar, 1  
  minimal, 11  
  mischend, 10  
  surjektiv, 1  
  transitiv, 8

## E

Eigenfunktion, 60  
Eigenwert, 60  
Entropie  
  bedingte (einer Zerlegung), 93  
  einer Transformation, 98  
  bezüglich einer Zerlegung, 96  
  einer Zerlegung, 92  
  topologische, 109  
Entropieabbildung, 114  
  Halbstetigkeit, 116  
  Variationsprinzip, 117

- Ergode, 55
- Ergodensatz
  - der Informationstheorie, 101
  - für mittelbare Gruppen, 135
  - individueller, 52
  - $L_p$ -, 53
- Ergodizität, 38, 54, 127
  - eindeutig, 33, 68, 146
  - total, 87
- Erzeuger
  - durchschnittstabil, 31
  - einseitig, 103
  - topologisch, 111
  - zweiseitig, 103
- euklidische Norm
  - auf  $\mathbb{R}^n$ , 137
- expansive Konstante, 7
- Extremalpunkt, 37
  
- F**
- Faktor
  - abbildung, 18
  - messbar, 65
  - topologisch, 18
  - trivial, 65
- Fixpunkt, 1
- Følner-Folge, 134
- Fourierreihe, 56
- Fundamentalebene, 142
- Furstenbergs Frage, 130
  
- G**
- G-Aktion
  - messbar, 127
  - stetig, 126
- $G_\delta$ -Menge, 8
- ggT, 129
- Gitter, 141
  - uniform, 141
- Gleichverteilung
  - von Bahnen, 147
  - von Folgen, 67
  - von Polynomen, 70
- $G(\mu)$ , 66
- Graph
  - endlich, gerichtet, 17
- G-Raum
  - messbar, 127
  - topologisch, 126
- Gruppe
  - mittelbar, 134
  - topologisch, 126
- Gruppenaktion, 126
- Gruppentranslation, 44
  
- H**
- Haarmaß, 136
  - auf  $SL_2(\mathbb{R})$ , 136
- Eindeutigkeit, 137
- linkes, 136
- rechtes, 136
  
- I**
- $Id_X$ , 131
- Indikatorfunktion, 26
- Information
  - bedingte (einer Zerlegung), 93
  - einer Zerlegung, 92
- Injektivitätsradius, 148
- Isomorphie
  - topologisch, 18
  - von Shifträumen, 18
  - zu einem Markovshift, 21
- Isomorphismus
  - maßhaltender dynamischer Systeme, 65
  - messbar, 47, 65
  - topologisch, 18
- Iwasawazerlegung, 137
  
- J**
- Jensensche Ungleichung, 50
  
- K**
- Kettenbruch
  - entwicklung, 74
  - transformation, 74
  - Ergodizität, 77
  - Gaußmaß, 76
- Kilometerzähler, 34
  - Gruppenstruktur, 35
  - verallgemeinert, 35

**L** $\lambda$ , 29 $\lambda^d$ , 30

Lebesguemaß

auf  $\mathbb{T}$ , 29auf  $\mathbb{T}^d$ , 30 $L_p$ -Norm, 48**M**

Markovkette, 83

Markovmaß, 32

 $k$ -Block, 33

Markovshift

Block-Darstellung, 18

topologisch, 15

einseitig, 15

einstufig, 19

mehrstufig, 19

zweiseitig, 15

und Datenaufzeichnung, 17, 20

Martingalsatz

aufsteigend, 99

Maß

ergodisch, 38, 127

invariant, 28

mit maximaler Entropie, 120

Parry-, 121

 $T$ -invariant, 126

Träger, 138

 $\text{Mat}_{22}(\mathbb{R})$ , 137

Matrix

aperiodisch, 16

hyperbolisch, 8

irreduzibel, 16

kompatibel, 33

stochastisch, 32

strikt positiv, 32

Mautner-Phänomen, 143

Maximumnorm

auf  $C(X)$ , 24auf  $\mathbb{R}^n$ , 41

Menge

 $\varepsilon$ -dicht, 109 $G_\delta$ , 8 $\varepsilon$ -getrennt, 109

invariant, 2

konvex, 27

minimal, 12

nichtwandernd, 5

 $S$ -invariant, 127

strikt invariant, 2

strikt  $S$ -invariant, 127 $T$ -invariant, 126

messbar

Abbildung, 47

Raum, 47

Metrik

 $d$  auf  $\mathbb{T}$ , 2 $d^{(2)}$  auf  $\mathbb{T}^2$ , 7

invariant, 40

rechtsinvariant, 139

Mischung

schwach, 58

stark, 58

topologisch, 10

mittelbar, 134

monotone Klasse, 59

monotoner Klassensatz, 86

Multiplikation

mit 2, 3

mit  $p$ , 39

multiplikative Halbgruppe, 127

lakunär, 128

nichtlakunär, 128

 $\mathcal{M}(X)$ , 26 $\mathcal{M}(X)^T$ , 28, 126**N** $\mathbb{N}$ , 3 $\mathbb{N}_0$ , 4 $\mathcal{N}_\mu$ , 54

Nullmenge, 51

**O** $\omega(x)$ , 4 $\omega$ -Limesmenge, 4

orbit closing property, 41

 $\mathcal{O}_T^+(x)$ , 1 $\mathcal{O}_T(x)$ , 1, 126 $\Omega(T)$ , 5**P** $p$ -adische ganze Zahlen, 35

Periode, 1

**Punkt**

- generisch, 66, 147
- periodisch, 1
- rekurrent, 5

**Q**

$\mathbb{Q}$ , 25

Quotientenmetrik, 141

**R**

$R_\alpha$ , 3

$\mathbb{R}$ , 2

$\mathbb{R}_+$ , 13

**Raum**

- lokalkompakt, 126
- messbar, 47
  - isomorph, 47
- separabel, 126
- Standard-Borel-, 127
- Wahrscheinlichkeits-, 47

Rekurrenzsatz von Poincaré, 49

Rotation des Kreises, 3

**S****Satz von**

- Dani, 147
- Furstenberg, 68, 128, 146
- Howe-Moore, 145
- Kryloff-Bogoliuboff, 29
- Rudolph, 130
- Sarnak, 151
- Stone-Weierstrass, 34, 45, 133

schwache Konvergenz, 145

schwache\* Konvergenz, 26

schwache\* Topologie, 26

Semiring, 14

**ShiftrTransformation**

- einseitig, 14
- zweiseitig, 15

**Shiftraum**

- A-Shift, 13
- einseitig, 13
- sofisch, 22
- zweiseitig, 14

 **$\sigma$ -Algebra**

- abzählbar erzeugt, 44

Borel, 24

invariant, 65

strikt invariant, 65

$SL_2(\mathbb{R})$ , 136

$SL_2(\mathbb{Z})$ , 134

$\Sigma_N^+$ , 16

$S^T$ , 51

$S_\mu^T$ , 51

stochastischer Prozess, 81

stationär, 81

Vektor, 32

**T**

$T_*\mu$ , 24, 28, 47

$\mathbb{T}$ , 2

$T_2$ , 3

$T_p$ , 39

$T_A$ , 6, 57

$T_\beta$ , 70

Teilshift, 15

$T^\infty X$ , 24

**Träger**

- einer Funktion, 138
- eines Maßes, 138

**Transformation**

- ergodisch, 54
- expansiv, 86
- intrinsisch ergodisch, 121
- invertierbar, 48
- maßtreu, 48
- minimal, 11
- schwach mischend, 58
- stark mischend, 58
- topologisch transitiv, 8
- totalergodisch, 87

**U**

Übergangsmatrix, 16, 83

unitäre Darstellung, 143

$U_T$ , 54

**V**

Variationsprinzip, 117

Version, 48

**W**

Wort, 14  
erlaubt, 16

**X**

$(X, G, T)$ , 126

**Z**

$\mathbb{Z}$ , 1  
Zerlegung, 91  
Ziffernentwicklung, 3, 70  
Zylindermenge  
im einseitigen Shiftraum, 14  
im zweiseitigen Shiftraum, 15