Assurance et Prévention : Une Approche Portefeuille

par Patrick Gougeon *

1. Introduction

La théorie des choix de portefeuilles¹ a représenté une contribution importante à l'étude des décisions en avenir risqué. Initialement développée dans le cadre de l'analyse boursière, puis étendue au domaine des choix d'investissements et de diversification au sein de l'entreprise, elle concerne en définitive l'ensemble des choix financiers, donc aussi les choix d'assurances. Comme le note très justement J. J. Rosa [10] « ... l'assurance en tant qu'échange d'une somme monétaire actuelle contre une somme monétaire conditionnelle est un actif financier... » ; il ajoute : « ... l'assurance ne peut être analysée que dans le cadre de la théorie des actifs financiers, i.e. la théorie des choix de portefeuilles ».

De plus, cette approche théorique est sans doute la plus conforme aux idées émises dans le cadre du « risk-management ». C'est en effet une approche globale permettant de définir la part des différents modes d'action envisageables pour traiter l'ensemble des risques — purs et spéculatifs — encourus par l'entreprise.

Comme l'indique le tableau ci-dessous, l'exposition au risque est le résultat de décisions diverses concernant l'investissement, le financement la politique de couverture, ...

Seule l'approche portefeuille permet de définir les règles visant à coordonner toutes les décisions et plus particulièrement préciser le rôle de l'assurance, de la prévention, ou toute autre technique de couverture, dans la gestion des risques de l'entreprise.

Certains auteurs se sont déjà engagés dans cette voie, Sans prétendre à l'exhaustivité, nous citerons les travaux qui ont le plus retenu notre attention. Michael L. Smith

* L'auteur, professeur à l'Ecole Supérieure de Commerce de Paris (ESCP), remercie deux arbitres de la revue pour leurs suggestions sur une première version de cet article.

¹ Les éléments de base de la théorie des choix de portefeuilles seront supposés connus. Le cas échéant, le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de H. Levy et M. Sarnat [6], chapitres 11 et 12, p. 155.

[12], dans le domaine des choix d'assurances, s'est intéressé au problème de la détermination d'une franchise optimale dans le cadre d'une analyse rentabilité-risque. En utilisant les conclusions du C.A.P.M. (Capital Asset Pricing Model), J. David Cummins [1] complète la théorie de la firme en intégrant les décisions relevant du « risk management ». Hans Werner Sinn [11] traite quant à lui de l'efficience de l'assurance selon divers principes de tarification.

L'originalité du présent exposé ne concerne donc pas le cadre théorique retenu, mais se situe plutôt au niveau du choix de la fonction objectif du décideur et des questions abordées. Plus précisément nous proposons :

- une analyse financière des liaisons entre l'assurance et la prévention ;
- une étude de l'influence d'une contrainte de financement dans la définition d'une politique globale de traitement du risque.

La théorie des choix de portefeuilles procède en deux étapes :

- la détermination de l'ensemble des portefeuilles efficients ;
- la recherche du portefeuille satisfaisant au mieux les objectifs du décideur.

Cette progression justifie le plan adopté ci-après. Dans la première partie, nous précisons les caractéristiques d'un programme efficient incluant l'assurance et la prévention. Dans la seconde partie, il conviendra de déterminer le programme optimal compte tenu des objectifs du décideur.

2. Assurance et prévention : détermination des programmes efficients

2.1. L'assurance

Comme nous l'avons déjà précisé, le contrat d'assurance possède toutes les caractéristiques d'un actif financier : la compagnie d'assurance émet un titre (le contrat) dont l'assuré se rend acquéreur par le paiement d'une prime qui représente le montant de l'investissement. La contrepartie financière de cette dépense d'investissement est l'indemnité perçue en cas de sinistre. Il s'agit d'une allocation des ressources de l'agent entre différents « états de la nature »², et aussi d'une allocation intertemporelle, le paiement de la prime précédant en général la perception de l'indemnité éventuelle. Ces deux caractéristiques confèrent indiscutablement au contrat d'assurance la qualité d'actif financier.

En tant qu'actif financier, le contrat d'assurance possède certaines caractéristiques précises.

- Alors que l'acquisition d'une action, d'une obligation comme la plupart des titres financiers ne suppose aucune condition particulière, la réalisation d'une opération d'assurance est assujettie à l'existence préalable ou la création d'un risque.
- De plus, alors que deux actions peuvent se substituer l'une à l'autre au sein d'un portefeuille de titres, il n'en est pas de même pour deux contrats d'assurance qui

² La présentation de Ehrlich et Becker [4] est très explicite sur ce point.

ne couvriraient pas un même risque. J. J. Rosa [10] a très bien insisté sur cette absence de substitutalité entre actifs d'assurance :

« ... Une difficulté considérable provient de ce que les divers types d'assurances ne sont pas substituables entre eux. L'assurance dégâts des eaux ne remplace pas l'assurance responsabilité civile automobile et vice-versa... »

Du fait de son activité, l'entreprise est soumise à deux catégories de risques :

- les risques spéculatifs liés aux aléas du marché, ainsi qu'à l'impossibilité de connaître avec certitude le niveau des coûts de fonctionnement et leur évolution. C'est traditionnellement ce seul type de risque qui est considéré dans la théorie de l'investissement ;
- les risques purs liés à l'éventualité de sinistres accidentels. Sinistres se traduisant par la disparition de biens qu'il faudra remplacer (incendie) ou par l'immobilisation d'une partie de l'appareil productif pour une durée plus ou moins longue, ou bien encore à l'occasion desquels la responsabilité de l'entreprise se trouverait engagée (risques liés au lancement d'un produit nouveau, dommage subis par des tiers du fait de l'entreprise...).

D'une certaine manière, cela revient à opérer une distinction entre les risques assurables, les risques purs, et les risques non assurables, les risques spéculatifs. Encore faut-il préciser que l'assurance concerne aussi certains risques spéculatifs, les risques liés à des variations de prix susceptibles d'être couverts grâce aux marchés à terme. Cela concerne essentiellement la variation de change, les variations de taux d'intérêt et les variations du cours de certaines marchandises cotées à terme.

Soit R le taux de rentabilité globale d'un investissement. Nous noterons

$$(1) \quad R = x - z$$

x correspond à la rentabilité de l'investissement en cas de non-sinistre (éventuellement négative) et z à la chute de rentabilité infligée à l'entreprise si un sinistre survient (avec $z \geq 0$).

Pour plus de clarté, précisons que cette distinction a surtout une signification ex-ante. Ex-post seul R est observé et il peut être difficile d'opérer une distinction entre ce qu'aurait été le revenu de l'entreprise en l'absence de sinistre (x) et le coût du sinistre (z) si cette éventualité est survenue. x et z sont deux variables aléatoires, chacune étant caractérisée par une distribution de probabilité subjective quelconque dont nous retiendrons seulement les deux premiers moments : l'espérance mathématique (notée μ) et la variance (notée σ^2), mesure du risque dans le cadre de la théorie des portefeuilles.

Pour x et z nous noterons respectivement :

$$\begin{array}{cc} \mu x & \mu z \\ x : & z : \\ \sigma x & \sigma z \end{array}$$

En première approximation nous considérerons que ces deux composantes du risque global sont indépendantes, ce qui permet de poser : $\text{cov}(x, z) = 0$.

De plus, nous admettrons que seule la seconde composante, z , peut faire l'objet d'une couverture par l'assurance.

Soit P la « prime » dont il faut s'acquitter pour une couverture totale par l'assurance. Dans la mesure où nous raisonnons sur la base d'une perception « subjective » du risque, rien ne garantit l'identité des appréciations de l'assureur et de l'assuré respectivement. En conséquence la prime P est non actuarielle. Il s'agit d'un taux, la dépense d'assurance contribuant à réduire le taux de rentabilité global. Nous noterons k le « taux de couverture », avec $0 \leq k \leq 1$. Pour $k < 1$ l'assurance est partielle. Seule une proportion k de la prime totale est due par l'assuré — la dépense d'assurance correspond au produit kP . En contrepartie, l'indemnité promise par l'assureur dans l'éventualité d'une perte z est seulement kz ³.

Pour un taux de couverture k , la rentabilité de la combinaison investissement-assurance s'écrit :

$$(2) \quad R(k) = x - z + k(z - P)$$

l'espérance de rentabilité :

$$(3) \quad \mu(k) = \mu_x - \mu_z(1 - k) - kP$$

le risque :

$$(4) \quad \sigma(k)^2 = \sigma_x^2 + (1 - k)^2 \sigma_z^2$$

La frontière AB sur le graphique ci-dessous représente l'ensemble des possibilités « investissement-assurance ». Chaque point de cette courbe correspond à une valeur du taux de couverture k .

Figure 1

³ Cette formulation du contrat d'assurance correspond au cas d'une franchise proportionnelle. Elle est empruntée à J. Mossin [7].

L'expression analytique de cette courbe peut être obtenue en remplaçant dans l'équation (3) k par sa valeur déduite de l'égalité (4). Nous noterons de façon synthétique :

$$\mu_k = T(\mu_k)$$

On enregistre un déplacement de B vers A à mesure que le taux de couverture k croît de 0 à 1.

Il est facile de vérifier que T est concave (ou de façon équivalente que $d\mu/d\sigma$ est une fonction croissante de k).

2.2. Prise en compte de la prévention

La prévention est une attitude active face au risque. Elle ne consiste pas, au contraire des opérations de transferts du risque, à prévoir une compensation financière le cas échéant, elle vise à en réduire l'intensité. Plus précisément deux effets sont escomptés :

- une réduction de la probabilité de survenance du risque ;
- une moindre gravité du sinistre si celui-ci, malgré tout, survient.

La représentation probabiliste ci-dessous rend compte de ces deux composantes :

Figure 2

La probabilité d'une perte nulle est accrue. De plus, la courbe de fréquence se trouve décalée vers la gauche, les pertes importantes étant devenues moins probables.

Cette transformation de distribution de probabilité suggère donc à la fois une réduction de l'espérance mathématique de perte et simultanément une dispersion — c'est-à-dire un écart type — plus faible.

Ainsi, soit v le coût de la prévention ⁴, nous écrirons :

$$\mu_z = \mu_z(v), \text{ avec } \frac{d\mu_z}{dv} < 0 \text{ et } \frac{d^2\mu_z}{dv^2} > 0$$

et $\sigma_z = \sigma_z(v), \text{ avec } \frac{d\sigma_z}{dv} < 0 \text{ et } \frac{d^2\sigma_z}{dv^2} > 0$

Le signe positif des dérivées secondes correspond à l'hypothèse d'efficacité marginale décroissante de la prévention.

La réduction simultanée de l'espérance mathématique de perte et du risque mesuré par l'écart type de la distribution, constitue l'effet direct d'une action préventive. Un effet indirect doit être pris en compte lorsque l'assurance et la prévention sont combinées : la réduction de prime consentie par l'assureur consécutivement à la mise en œuvre d'un programme de prévention par l'assuré.

Pour formaliser cette relation entre la prime demandée et l'effort de prévention nous noterons :

$$P = P(v) \text{ avec } \frac{dP}{dv} < 0$$

La réduction de prime (dP) est justifiée par l'amélioration du risque appréciée par l'assureur lorsque l'effort de prévention est augmenté d'un montant dv .

La fonction $P(v)$ schématise la politique de tarification de l'assureur en matière de prévention.

Ces précisions étant données, nous pouvons exprimer les paramètres du choix lorsque l'assurance et la prévention sont envisagées simultanément, il vient

$$(5) \quad \mu(k, v) = \mu_x - (1 - k) \mu_z(v) - k p(v)$$

$$(6) \quad \sigma^2(k, v) = \sigma_x^2 + (1 - k)^2 \sigma_z^2(v)$$

A partir de ces données, nous rechercherons les « solutions efficaces » — c'est une étape préalable à la détermination d'une « solution optimale » à partir de la fonction objectif de l'agent et d'éventuelles contraintes.

Pour chaque niveau de risque, il existe une solution efficace obtenue en recherchant l'espérance mathématique de gain la plus grande.

Soit :

$$\text{Max}_{k,v} \mu(k, v)$$

$$\text{Sous contrainte } \sigma(k, v) = \sigma_0$$

Ce problème d'optimisation conduit à la condition suivante, indépendante de la valeur σ_0 choisie :

$$\frac{\mu'_k}{\sigma'_k} = \frac{\mu'_v}{\sigma'_v}$$

⁴ v est la dimension d'un taux, l'effort de prévention contribue à réduire le taux de rentabilité du projet étudié.

Chaque membre de cette égalité est un rapport de dérivées partielles, qui mesure le coût d'une réduction de risque supplémentaire, il s'agit donc d'une efficacité marginale. Ainsi quelle que soit la solution choisie par l'agent, l'efficacité marginale de l'un des modes de traitement du risque, assurance ou prévention, ne doit pas excéder celle de l'autre.

Nous explicitons ci-après la détermination de l'ensemble des solutions efficientes à l'aide d'une représentation graphique.

Figure 3

La courbe A_0M décrit l'ensemble des solutions accessibles pour divers niveaux de prévention sans recours à l'assurance. Elle est obtenue en faisant varier v pour un taux de couverture nul ($k = 0$).

La forme de cette courbe est déduite des hypothèses émises antérieurement quant à l'efficacité de la prévention ⁵.

Chaque point de la courbe A_0M est associé à un effort de prévention particulier, une réduction plus importante du risque pouvant être obtenue grâce à l'assurance. Ainsi la courbe A_1M' décrit l'ensemble des combinaisons obtenues pour une dépense v_1 de prévention en faisant varier le taux de couverture k .

La courbe efficiente, d'expression analytique $T(\mu, \sigma) = 0$ est en définitive la courbe enveloppe des courbes telles que A_1M' . Chaque point de cette courbe est associé à l'espérance mathématique de gain la plus élevée pour un niveau de risque donné.

2.3. Efficacité de la prévention et assurance

Deux types d'interactions doivent être retenus :

- d'une part, la prévention abaisse le coût de l'assurance d'un montant égal au rabais de prime consenti par l'assureur ;
- d'autre part, l'assurance, qui permet un transfert d'une partie des risques vers l'assureur, contribue à réduire l'intérêt de la prévention pour l'entreprise.

Les caractéristiques du risque encouru dépendent du niveau de prévention, nous noterons :

$$\mu(v) \text{ et } \sigma(v)$$

le taux de rentabilité et le degré de risque du projet pour une dépense de prévention égale à v .

Pour un taux de couverture k donné, l'efficacité moyenne d'une dépense de prévention (v) aura pour expression :

$$(7) \quad \gamma = \frac{\sigma(0) - \sigma(v)}{\mu(0) - \mu(v)}$$

Le numérateur correspond à une réduction de risque obtenue grâce à l'effort de prévention, lequel contribue à la réduction de la rentabilité escomptée inscrite au dénominateur. Ce ratio mesure donc la réduction du risque obtenue pour une diminution d'un point du taux de rentabilité escompté.

Sur le graphique ci-dessous, l'efficacité moyenne, γ , est mesurée par la pente de OA ($\gamma = t_{\theta} \theta_v$). La forme de la courbe OA suggère une efficacité moyenne de la prévention toujours décroissante.

Pour étudier l'influence de l'assurance sur la politique de prévention de l'entreprise, nous proposons d'analyser l'influence du taux de couverture (k) sur l'efficacité moyenne de la prévention.

⁵ La concavité de la courbe A_0M s'exprime par l'inégalité :

$\frac{d(d\mu)}{d\sigma} / dv > 0$. Cette inégalité peut être établie sans difficulté à partir des hypothèses précédemment émises :

$$\frac{d^2 \mu z}{dv^2} > 0 \quad \frac{d^2 \sigma z}{dv^2} > 0$$

Figure 4

En développant l'expression de (7), il vient :

$$(8) \quad \gamma = \frac{\sigma(0) - \sigma(v)}{v - (1 - k)(\mu_z(0) - \mu_z(v)) - k(p(0) - p(v))}$$

Au dénominateur, trois éléments apparaissent ⁶ :

- la dépense de prévention : v
- le gain direct de la prévention — c'est-à-dire la réduction de la perte moyenne escomptée $(\mu_z(0) - \mu_z(v))$ — pondérée par la proportion du risque conservée par l'assuré $(1 - k)$ soit :
 $(1 - k)(\mu_z(0) - \mu_z(v))$
- le rabais de prime consenti par l'assureur pondéré par le taux de couverture :
 $k(P(0) - P(v))$

⁶ Quelles que soient les valeurs de k et de v , nous admettrons que la somme de ces trois éléments est positive, les gains ne permettant pas de compenser la dépense de prévention v . Dans le cas contraire, la prévention s'imposerait car elle serait sans coût.

Dans l'hypothèse extrême d'une couverture d'assurance intégrale, l'effet défavorable de l'assurance sur la prévention apparaît clairement. Selon l'équation 6, pour $k = 1$, il vient :

$$\sigma(0) = \sigma(v) \rightarrow \gamma = 0$$

D'un point de vue strictement financier, l'efficacité de la prévention est nulle. En dérivant l'expression de γ par rapport à k , des conclusions plus générales peuvent être énoncées.

Si la condition suivante est satisfaite⁷ :

$$(\mu_z(0) - \mu_z(v)) - (p(0) - p(v)) > 0$$

c'est-à-dire si l'économie d'assurance réalisée grâce à la prévention ($P(0) - P(v)$) est inférieure au gain direct de prévention ($\mu_z(0) - \mu_z(v)$), alors nous aurons :

$$\partial(\gamma) / \partial k < 0$$

En conclusion, si l'économie d'assurance réalisée est insuffisante, l'efficacité moyenne de la prévention se réduit lorsque le taux de couverture augmente. Il en résulte une incitation à moins de prévention lorsque l'agent a recours à l'assurance.

Il s'agit ici d'un résultat classique qui a justifié de la part des assureurs la recherche de principes de tarification incitatifs⁸. Pour notre part, nous formulerons deux remarques relatives à la prise en compte de la prévention dans la tarification :

- une difficulté majeure provient de l'inévitable divergence d'appréciation de l'efficacité d'un programme de prévention entre l'assuré et l'assureur. Bien souvent, le rabais de prime sera jugé insuffisant par l'assuré convaincu de la bonne qualité de son risque ;
- notre conclusion suggère que la conservation d'une partie d'un risque renforce d'autant l'incitation à la prévention. En conséquence la tarification de la prévention ne peut être conçue indépendamment de celle des franchises⁹.

Il reste que l'idée d'une substituabilité entre l'assurance et la prévention s'oppose à une thèse courante selon laquelle la prévention est un impératif pour l'entreprise. Il convient donc de rechercher les conditions pour lesquelles notre modèle serait en accord avec cette thèse.

A l'occasion des développements précédents, nous avons admis que l'assurance et la prévention étaient deux modes de couverture parfaitement substituables. Or, dans la pratique, le domaine des risques couverts par l'un et l'autre ne coïncide pas toujours. En particulier, la couverture d'assurance s'avère souvent incomplète si bien que la prévention peut s'imposer.

⁷ Il s'agit ici d'une condition suffisante mais non nécessaire.

⁸ Nous abordons une question essentielle qui a fait l'objet de nombreux développements : l'influence de l'assurance sur la gravité des risques (« moral hazard »). L'article de G. Dionne [3] constitue une excellente synthèse sur ce point.

⁹ Cela revient à considérer que les agents à risques élevés vont rechercher une couverture plus large par l'assurance. Cette idée a déjà été émise par Pauly [8]. Nous avons précisément abordé la question de la tarification des franchises dans [5].

Malgré les efforts déployés par les assureurs pour élaborer des formules de couverture aussi larges que possible, une entreprise prospère, même bien assurée, sera toujours sanctionnée par la survenance d'un sinistre. En effet, compte tenu de la différence dans le mode d'évaluation de l'assureur et de l'assuré, l'indemnisation consécutive au sinistre est le plus souvent partielle.

« La fonction indemnitaire de l'assurance de dommage interdit qu'elle devienne source d'enrichissement pour l'assuré ou le bénéficiaire et limite la garantie de l'assureur au seul préjudice subi. » Ce principe, simple en apparence, est en fait d'une application délicate compte tenu des difficultés inhérentes à l'évaluation du préjudice subi.

Lorsqu'un sinistre survient, seule l'évaluation économique — fondée sur le principe de l'actualisation des revenus futurs — est significative pour l'entreprise. Or, ce mode d'évaluation est par nature subjectif et ne saurait en conséquence s'imposer. La valeur d'assurance peut être assimilée à une valeur de remplacement, mais elle diffère en général de la valeur économique.

La perte subie par une entreprise à l'occasion d'un sinistre correspond non seulement au montant nécessaire pour remplacer les actifs détruits, mais aussi aux divers coûts d'opportunité engendrés par la cessation d'activité (manque à gagner temporaire, perte définitive de clientèle...). Les garanties offertes par les assureurs pour la couverture de ces derniers sont généralement insuffisantes. Certes, l'assurance des « pertes d'exploitation » constitue un progrès majeur motivé par la volonté des assureurs de proposer des garanties plus complètes. Cependant, l'indemnisation offerte est nécessairement déterminée par référence aux règles de la comptabilité ¹⁰ souvent mal adaptées pour apprécier la perte économique subie par l'assuré. L'évaluation comptable est en effet tournée vers le passé tandis que les coûts à prendre en compte concernent l'avenir.

Il suffit d'ailleurs, pour se convaincre de l'insuffisance du seul recours à l'assurance, d'imaginer le cas d'une entreprise moyenne, bien placée sur un marché prometteur. Toute cessation d'activité consécutive à un sinistre peut avoir pour effet de remettre en cause à jamais la situation acquise sur le marché considéré. Un tel coût d'opportunité ne peut pas être couvert par l'assurance ¹¹.

Dans le cadre du modèle présenté ici, il suffit d'admettre que la couverture d'assurance est toujours partielle, le paramètre k ne pouvant jamais atteindre l'unité. Dans cette hypothèse, la part du risque nécessairement conservée par l'assuré peut être jugée suffisamment importante pour constituer une incitation à la prévention. Notamment si le risque résiduel dépasse le seuil tolérable du point de vue de l'entreprise.

Dans cette perspective, la non-survenance du sinistre est le seul objectif à retenir, seule la prévention peut y contribuer. L'assurance doit alors être considérée comme

¹⁰ En France, ce principe est affirmé dans l'article 38 de la loi du 13 juillet 1930 : « l'étude des charges financières garanties repose sur l'examen des postes comptables et doit donc être effectuée conformément au plan comptable général de 1957 qui permet de représenter toutes les opérations financières effectuées par une entreprise ».

¹¹ A l'inverse en période de dépression, la valeur d'assurance peut excéder la valeur économique. Dans ce cas, la survenance d'un sinistre peut être source de gain. Sans supposer l'acte volontaire de la part de l'assuré, le relâchement de l'effort de prévention peut expliquer l'aggravation de la sinistralité généralement observée au cours de telles périodes.

une action complémentaire — et non plus substituable — surtout destinée, en cas de sinistre, à financer les dépenses supplémentaires qu'il faudra engager afin d'éviter la cessation d'activité de l'entreprise ou d'en accélérer la reprise.

3. Assurance et prévention : détermination du programme optimal

Les développements précédents ont permis de préciser l'ensemble des choix efficients. Une partie du problème se trouve ainsi résolue, il reste à rechercher la solution la plus satisfaisante compte tenu de la fonction objectif de l'agent. Il convient donc tout d'abord de préciser les caractéristiques de cette fonction objectif.

3.1. Représentation des préférences de l'agent

La seule notion de variabilité — dont rend compte la variance — nous paraît limitée pour apprécier le risque d'un projet. Surtout si l'éventualité de lourdes pertes ne peut être exclue. En effet, de nombreuses enquêtes et observations ont fait apparaître l'existence d'un « seuil de vulnérabilité » — c'est-à-dire un niveau de rentabilité en deçà duquel l'équilibre financier de l'entreprise serait compromis. La prise en considération d'un tel seuil est possible grâce à l'introduction d'une contrainte destinée à restreindre le domaine des choix possibles afin d'en exclure les solutions trop risquées.

Soit S ce seuil de vulnérabilité (ou seuil de ruine) et α la probabilité d'enregistrer un taux de rentabilité inférieur à S , la contrainte s'exprime ainsi :

$$\alpha \leq \alpha^*$$

où α^* est une probabilité limite dont la valeur est choisie par le centre de décision.

Il s'agit là d'un problème classique qui peut être retranscrit en termes d'espérances mathématique et de variance¹². La contrainte précédente devient :

$$(9) \quad \mu \geq a\sigma + S$$

où a est d'autant plus élevé que α^* est petit. Graphiquement, cette contrainte conduit à exclure toute la partie inférieure du plan comme le suggère la figure ci-dessous¹³.

En résumé, nous admettons que l'agent cherche à maximiser une fonction objectif à deux arguments (μ et σ) — conformément à l'approche traditionnelle avec la contrainte explicitée ci-dessus soit :

$$(10) \quad \begin{array}{l} \text{Max } U(\mu, \sigma) \\ \text{S.C. } \mu \geq a\sigma + S \end{array}$$

¹² Sur ce point, voir : D. H. Pyle et J. J. Turnovsky [9], et plus récemment Day, Aigner et Smith [2].

¹³ Cette formulation est déduite à partir de l'inégalité de Tchebycheff valable quelle que soit la distribution de probabilité étudiée. Elle conduit cependant à exagérer l'attitude d'aversion pour le risque du décideur.

Figure 5

3.2. Recherche de la solution optimale : cas général

Dans le cadre de la théorie des portefeuilles, nous devons considérer la possibilité d'emprunter ou de prêter à un taux fixe R_f en complément d'un investissement risqué. Soit ω la part de l'actif risqué dans le portefeuille final¹⁴. En combinant une solution de la frontière efficiente avec l'actif sans risque, nous obtenons un portefeuille aux caractéristiques suivantes :

¹⁴ Réciproquement $(1 - \omega)$ représenterait la part de l'actif non risqué de rentabilité R_f . Pour $0 < \omega < 1$, il s'agit d'un prêt consenti par l'entreprise, pour $\omega > 1$, il s'agit d'un emprunt.

$$(11) \quad \begin{aligned} \mu &= \omega (\mu_p) + (1 - \omega) R_f \\ \sigma &= \omega \sigma_p \end{aligned}$$

où le couple (μ_p, σ_p) caractérise une solution efficiente choisie parmi l'ensemble défini précédemment noté $T(\mu_p, \sigma_p) = 0$.

Il convient de rechercher l'élément de cet ensemble et la part consacrée à l'actif risqué, tels que la satisfaction du centre de décision soit la plus grande tout en respectant la contrainte relative au risque de ruine, soit :

$$(12) \quad \begin{aligned} \text{Max : } & U(\mu, \sigma) \\ \text{S.C. : } & T(\mu_p, \sigma_p) = 0 \\ & \mu \geq a \sigma + S \end{aligned}$$

Deux types de solutions doivent être commentés selon que la contrainte liée à l'existence d'un seuil de ruine est effective ou ne l'est pas.

— La contrainte n'est pas effective :

Figure 6

Nous retrouvons une solution classique. A l'optimum, la tangente issue de R_f est commune à une courbe d'indifférence et à la frontière efficiente.

Les égalités d'équilibre s'écrivent :

$$(13) \quad \frac{U\theta}{U\mu} = \frac{T\theta}{T\mu} = \frac{(\mu M - R_f)}{\sigma M}$$

La pente de cette tangente correspond à une « prime de risque », elle est maximale à l'optimum.

Le point M est déterminé indépendamment des préférences de l'agent. Quelle que soit la solution finale (M' ou M'') il existe un programme de sécurité optimal.

Ce dernier résultat est important car il soutient l'idée qu'une décentralisation de la gestion des risques par l'assurance et la prévention est possible. Le « Risk-Manager » et son équipe ont pour charge de déterminer l'ensemble des programmes de sécurité efficaces. Le choix d'un programme précis est ensuite déterminé objectivement à partir du taux R_f . Le centre de décision intervient seulement pour déterminer le niveau du risque final en jouant sur sa position financière.

— La contrainte est effective :

Figure 7

Les remarques précédentes restent valables quant à la détermination du point M . Dans ce cas, cependant, l'agent peut être amené à limiter la part consacrée à l'actif risqué (ou à restreindre son endettement) afin de maintenir la probabilité de ruine à un niveau satisfaisant (solution M').

En résumé, il apparaît donc que la variable d'ajustement est toujours ω . En jouant sur sa position financière ¹⁵ l'agent accédera à un niveau de risque et de rentabilité plus ou moins élevé selon ses préférences.

Notre présentation permet donc de mettre en évidence les relations entre la politique de financement de l'entreprise et la politique de sécurité. Ce point est approfondi ci-après.

3.3. Prise en compte d'une contrainte de financement

Les développements qui ont été présentés montrent que les décisions relatives à la sécurité ne peuvent être envisagées séparément des décisions de financement, toutes deux étant déterminantes du degré de risque assumé en définitive par l'entrepreneur. Il reste cependant à compléter le modèle sur ce point, il faut se demander si les solutions proposées sont toujours praticables compte tenu des contraintes de financement qui s'imposent en général à l'entreprise.

Lorsque l'analyse se rapporte à un choix d'investissement, le phénomène d'indivisibilité peut difficilement être négligé. Même lorsqu'une réalisation partielle du projet peut être envisagée, il est abusif de considérer que l'entrepreneur est totalement libre dans la détermination du montant engagé à l'occasion de l'investissement. Ne serait-il pas plus opportun de considérer le montant de l'investissement comme une donnée ? C'est l'hypothèse que nous retiendrons ici.

Lorsque les fonds dont dispose l'entreprise sont insuffisants pour couvrir l'intégralité de la dépense d'investissement, celle-ci se trouve nécessairement en position d'emprunteuse. Dans ces conditions, le choix de financement concerne essentiellement le mode de financement et non le montant qu'il faut emprunter. Le souci d'un chef d'entreprise sera de trouver un organisme prêteur qui apporte son concours moyennant le plus faible taux d'intérêt possible, et des modalités de son remboursement jugées acceptables.

Dans le cadre du modèle présenté, cela revient à admettre que le taux d'endettement est une donnée, fonction du montant de l'autofinancement et de la somme requise pour réaliser l'investissement.

Nous noterons : $\omega = \omega_0$

Géométriquement, cette nouvelle contrainte peut être représentée comme suit :

¹⁵ Nous entendons par position financière la différence à un moment donné entre créances et engagements.

Figure 8

Pour $\omega = \omega_0$ la courbe efficiente $A'B'$ est directement déduite de AB par une homothétie de rapport ω_0 .

A' par exemple correspond à une combinaison de l'actif A avec l'actif sans risque de rendement R_f , les proportions respectives étant ω_0 et $1 - \omega_0$ (le point A' est placé le long de la droite R_fA de telle sorte que $R_fA'/R_fA = \omega_0$). De nouveau, deux types de solutions doivent être envisagés.

— la contrainte n'est pas effective :

Nous aurons à l'optimum :

$$(14) \quad \begin{aligned} \mu &> a\sigma + S \\ -\frac{U'\sigma}{U'\mu} &= \frac{T'\sigma}{T'\mu} \end{aligned}$$

Figure 9

La solution optimale est en M' , le point correspondant sur AB est M . Les tangentes en M' à A' et en M à AB sont parallèles. C'est l'expression de la condition optimale écrite ci-dessus (14).

Il faut remarquer qu'en l'absence de contrainte de financement, la solution optimale correspondrait au point M'' . L'introduction d'une telle contrainte en matière de financement se traduit donc à la fois par une chute d'utilité mais aussi par un accroissement de la dépense de sécurité permettant de compenser le surcroît de risque accepté par l'agent du fait de la nécessité de s'endetter au-delà de ce qu'il souhaiterait ¹⁶.

¹⁶ Cette remarque résulte des hypothèses admises ici. La situation opposée aurait pu être décrite : l'agent moins endetté qu'il ne le souhaiterait, réduirait en contrepartie sa dépense de sécurité.

De plus, au contraire des cas précédents, lorsque le taux d'endettement s'impose à l'entreprise, la détermination du taux de couverture n'est pas indépendante des préférences des dirigeants. Il en résulte une complexité accrue des choix de sécurité, compte tenu des difficultés inhérentes à la spécification de la fonction d'utilité.

— La contrainte est effective :

$$\mu = a\sigma + S$$

Le point solution est dans ce cas immédiatement déterminé à l'intersection de la droite limite SL et de la courbe efficiente $A'B'$ obtenue pour $\omega = \omega_0$.

Figure 10

A la différence du cas précédent, le point solution M' , auquel correspond M sur AB , est déterminé indépendamment des préférences de l'investisseur. La règle de décision est proche ici du principe du « safety first » : le niveau de sécurité est choisi de manière que la probabilité de ruine n'excède pas une valeur préalablement fixée.

C'est ici la position de la droite limite SZ qui est déterminante, donc la valeur de S . Il apparaît notamment que le taux de couverture sera d'autant plus fort que le seuil de vulnérabilité se situera à un niveau élevé.

4. Conclusions

Nous venons de présenter un modèle global d'interdépendance directement inspiré des thèses soutenues dans le cadre de ce qu'il est aujourd'hui convenu d'appeler le « risk-management ». Selon cette optique, les décisions relatives à la sécurité (prévention et assurances), qui seront déterminantes du niveau de risque global, ne peuvent être isolées du contexte général. En particulier, nous avons insisté sur la nécessité de prendre en compte les conditions de financement de l'entreprise. Dans la mesure où ces dernières sont souvent imposées, le niveau de l'endettement devant être considéré alors comme une contrainte, il convenait de préciser les implications de cette situation.

En raisonnant dans la perspective d'une hausse du taux d'endettement, deux effets doivent être considérés :

- si l'effet levier contribue à augmenter la rentabilité de l'entreprise, dans la mesure où le coût du financement est inférieur à la rentabilité propre des investissements, sa variabilité, donc le risque, se trouve aussi accrue ;
- de plus, le niveau du seuil de vulnérabilité de l'entreprise n'est pas indépendant du montant des charges fixes de remboursement. Il se trouve dans ce cas rehaussé.

D'après les conclusions du modèle présenté, ces deux éléments constituent une incitation à la recherche de sécurité et donc aussi à une rationalisation dans la gestion des risques.

Il faut aussi noter l'interaction entre les deux modes de traitement du risque étudiés (assurance et prévention). La nature de cette interaction dépend en grande partie des règles de tarification retenues par l'assureur. Si l'un et l'autre ne s'excluent pas, notamment parce que la prévention n'est jamais efficace à 100 %, il convient d'éviter que l'assurance ne constitue une incitation à moins de prévention. Il s'agit pour cela d'établir une tarification adéquate, à partir d'un dialogue entre assurés et assureurs, c'est bien en ce sens que les choses paraissent évoluer.

RÉFÉRENCES

1. CUMMINS, J. D. : « Risk management and the theory of the firm », *Journal of Risk and Insurance*, 43 (décembre 1976), 587-609.
2. DAY, H. D., AIGNER, D. J., et SMITH, K. R. : « Safety margins and profit maximization in the theory of the firm », *Journal of Political Economy*, 79 (novembre-décembre 1971), 1293-1301.
3. DIONNE, G. : « Le risque moral et la sélection adverse : une revue critique de la littérature », *L'Actualité Economique*, avril-juin 1981, 193-224.
4. EHRLICH, I., et BECKER, G. S. : « Market insurance, self-insurance and self-protection », *Journal of Political Economy*, 80 (juillet-août 1972), 623-647.

5. GOUGEON, P. : « La négociation des franchises », *La Revue du Financier*, 21 (mai-juin 1982), 73-75.
6. LEVY, H., et SARNAT, M. : *Capital Investment and Financial Decisions*, Prentice Hall International, Londres, 1978.
7. MOSSIN, J. : « Aspects of rational insurance purchasing », *Journal of Political Economy*, 76 (janvier-février 1968), 553-568.
8. PAULY, M. V. : « Overinsurance and public provision of insurance », *Quarterly Journal of Economics*, 88 (février 1974), 44-62.
9. PYLE, D. M., et TURNOVSKY, S. J. : « Safety-first and expected utility maximization in mean standard deviation portfolio analysis », *Review of Economic Studies*, 52 (février 1970), 75-81.
10. ROSA, J. J. : « La demande d'assurance non vie : l'état actuel de la théorie », *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, 5 (février 1977), 35-42.
11. SINN, H. W. : « The efficiency of insurance markets », *European Economic Review*, 11 (décembre 1978), 321-341.
12. SMITH, M. L. : « Applying risk return analysis to deductible selection problems : a mathematical approach », *Journal of Risk and Insurance*, 43 (septembre 1976), 377-392.