Correction : Les schémas de subdivision de Besicovitch et de Cantor

Serge Dubuc¹

© Fondation Carl-Herz and Springer Nature Switzerland AG 2022

Correction to: Ann. Math. Québec

<https://doi.org/10.1007/s40316-020-00131-9>

1 Correction du théorème 1

Théorème 1 Soit un schéma de subdivision de Besicovitch $L_0, L_1, L_2, \dots$ dont la limite est f , si $\delta_n = O(1/2^n)$ où δ_n est le diamètre de la partition engendrée par les abscisses de L_n , alors aucune dérivée à droite finie de f n'existe. Il en est de même pour les dérivées à gauche.

Démonstration Quitte à changer la position de l'origine et les échelles des axes, on peut supposer que L_0 a pour extrémités les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre $\xi \in [0, 1)$ tel que la dérivée à droite $D = f'_+(\xi)$ existe comme limite finie. Nous posons $M = \sup_n (2^n \delta_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre que nous choisirons tantôt. Soit n un entier suffisamment grand, on détermine les abscisses consécutives de L_{n+1} , $a_n < c_n < d_n < e_n$ où a_n est l'abscisse de L_n à la droite de ξ qui lui soit le plus proche et que c_n, d_n, e_n sont les 3 voisins immédiats à droite de a_n parmi les abscisses de L_{n+1} . On exige de n que

$$|f(x) - f(\xi) - D(x - \xi)| < \varepsilon(x - \xi) \quad \text{lorsque } x \text{ est remplacé par } c_n, d_n, e_n.$$

Dans un premier temps, nous supposons que $D \leq 0$. Puisque par construction, $f(c_n) = f(e_n)$ et $f(d_n) = f(c_n) \pm 1/2^{n+1}$, parmi les trois abscisses c_n, d_n, e_n , nous pouvons en choisir deux $x_1 < x_2$ tels que $f(x_2) = f(x_1) + 1/2^{n+1}$. Sachant que $x_1 - \xi < x_2 - \xi < 2M/2^n$, on obtient que $f(x_2) - f(\xi) - D(x_2 - \xi) < 2M\varepsilon/2^n$ et $f(x_1) - f(\xi) - D(x_1 - \xi) > -2M\varepsilon/2^n$. Par soustraction, on obtient $1/2^{n+1} - D(x_2 - x_1) < 4M\varepsilon/2^n$. C'est une impossible inégalité si l'on choisit $\varepsilon = 1/(8M)$.

Si $D > 0$, parmi les trois abscisses c_n, d_n, e_n , nous en choisissons deux $x_1 < x_2$ tel que $f(x_2) = f(x_1) - 1/2^{n+1}$. En transposant les arguments de tantôt, on obtient que $f(x_2) -$

The original article can be found online at <https://doi.org/10.1007/s40316-020-00131-9>.

✉ Serge Dubuc
serge.dubuc@umontreal.ca

¹ Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-ville, Montréal, QC H3C 3J7, Canada

$f(\xi) - D(x_2 - \xi) > -2M\varepsilon/2^n$ et $f(x_1) - f(\xi) - D(x_1 - \xi) < 2M\varepsilon/2^n$. Par soustraction, on obtient $-1/2^{n+1} - D(x_2 - x_1) > -1/2^{n+1}$, une impossible inégalité.

Pour ce qui est de l'inexistence de dérivée à gauche finie, on procède par symétrie. Soit L'_n l'image de L_n sous la symétrie centrale $(x, y) \rightarrow (1 - x, 1 - y)$, alors la suite L'_n converge vers la fonction $x \rightarrow 1 - f(1 - x)$. Cette fonction n'admet aucune dérivée à droite finie et f elle-même n'admet aucune dérivée à gauche finie. $\square$

2 La fonction de Besicovitch et sa variante

La tradition reconnaît que la fonction de Besicovitch provient de Singh [5] : si $S : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de Singh, alors la fonction de Besicovitch, définie sur $[0, 2]$, est $y = f(x) = S(x/2)$. La fonction de Besicovitch peut être construite à l'aide d'une suite de lignes polygonales $L_0, L_1, L_2, \dots$ dont chaque côté est muni d'un indice m de partage et d'un signe $s = \pm 1$ d'orientation. La ligne de départ L_0 est $\{(0, f(0) = 0), (1, f(1) = 1), (2, f(2) = 0)\}$ et chacun des deux côtés est d'indice $m = 1$ et de signe $s = -1$. À chaque étape, un côté $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ d'indice m et de signe s est subdivisé en 4 côtés donnant lieu à une ligne $ACDEB$. Les sommets intercalés sont dans l'ordre $(c, f(c)), (d, f(d)), (e, f(e))$ où $d = (a + b)/2$, $c = d - (b - a)/2^{2m+1}$, $e = d + (b - a)/2^{2m+1}$ alors que $f(c) = f(e) = (f(a) + f(b))/2$ et $f(d) = (f(a) + f(b))/2 + s(f(b) - f(a))$. Les indices associés à ces nouveaux côtés sont dans l'ordre $m + 1, 1, 1, m + 1$ tandis que les signes associés sont $s, -s, -s, s$. La fonction f est d'abord définie sur un ensemble dense dans $[0, 2]$, puis se prolonge par continuité à tout $[0, 2]$.

On peut modifier le schéma de Besicovitch précédent en décidant que le signe d'orientation associé à chaque côté est toujours négatif. On désignera par $y = B(x)$ la fonction limite de ce second schéma. Dubuc a cru que la fonction B était la fonction de Besicovitch, ce qui ne correspond pas à l'usage. Pour éviter toute confusion, nous proposons de dire que B est la variante de la fonction de Besicovitch. Partant de là, il faut corriger l'énoncé du théorème 9 et nous retirons dans le texte [3] le paragraphe consécutif à ce théorème qui critiquait un résultat central de Besicovitch.

Théorème 9 *La dérivée à droite de $y = B(x)$, la variante de la fonction de Besicovitch, en $4/7$ vaut $+\infty$.*

3 Correction du théorème 11

Théorème 11 *Il est impossible que la fonction de Besicovitch, $y = f(x)$, ait une dérivée à droite égale à $\pm\infty$ en un endroit donné. Il en est de même pour la dérivée à gauche.*

Démonstration Soit $L_0, L_1, L_2, \dots$ la suite de lignes polygonales dans la construction de la fonction de Besicovitch $y = f(x)$. Soit $x \in [0, 2)$ un endroit donné. Au nombre x correspond une suite de chiffres $c_0, c_1, c_2, \dots$ de la manière suivante: si $n \geq 0$ et si $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ est le k ème côté de L_n tel que $a \leq x < b$, alors c_n est le reste de la division de $k - 1$ par 4. On dira que la suite c_n est l'adresse de x . On désignera par s_n le signe associé du k ème côté et $\Delta_n = f(b) - f(a) = \pm 1/2^n$ l'accroissement des ordonnées de ce côté. Partant de là, nous distinguons 4 cas.

Cas 1 : il y a une infinité de 1 dans l'adresse de x . Soit un entier n pour lequel $c_n = 1$, on désigne par $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ le côté de L_n tel que $a \leq x < b$. Ce côté est remplacé par

Fig. 1 Quatre types de subdivision pour une subdivision de Besicovitch

la ligne polygonale de 5 sommets $(a, f(a)), (c, f(c)), (d, f(d)), (e, f(e)), (b, f(b))$. Il y a quatre possibilités illustrées par la Fig. 1. Chaque fois, $f(e) = f(c)$ et $c \leq x < d$. Il existe donc un nombre $x' \in (d, e]$ tel que $f(x') = f(x)$. En x , il y a une accumulation de quotients différentiels nuls, $f[x, x'] = 0$. La dérivée à droite au point x ne peut pas évaluer $\pm\infty$.

Cas 2 : il y a une infinité de 2 dans l'adresse de x , mais seulement un nombre fini de 1. Soit un entier N tel que $c_n \neq 1$ tout $n > N$. Nous considérons les deux suites Δ_n et s_n pour $n > N$. Un examen des 4 subdivisions de la Fig. 1 montre la propriété suivante : si $c_n = 0$ ou 3, alors $s_n \Delta_n$ et $s_{n+1} \Delta_{n+1}$ sont de même signe tandis que $s_n \Delta_n$ et $s_{n+1} \Delta_{n+1}$ ont des signes opposés lorsque $c_n = 2$. De là, on obtient qu'il existe un entier n tel que $c_n = 2$ et le signe de Δ_n est s_n . Dans la même figure, en observant les subdivisions a) et d), on voit que $d \leq x < e$, $f(d) = f(b)$. Il existe donc un nombre $x' \in (e, b]$ tel que $f(x') = f(x)$. Comme tantôt, en x , il y a une accumulation de quotients différentiels nuls. La dérivée à droite au point x ne peut pas évaluer $\pm\infty$.

Cas 3 : les chiffres 1 et 2 n'apparaissent qu'un nombre fini de fois dans l'adresse de x alors que le chiffre 0 apparaît une infinité de fois. On suppose que N est le plus petit entier tel que pour tout $n > N$, $c_n \in \{0, 3\}$. Désignons par $C_n = [(a_n, f(a_n)), (b_n, f(b_n))]$ le côté de L_n tel que $a_n \leq x < b_n$. L'indice de partage de C_N est 1 et de là, pour tout $n > N$, l'indice de partage de C_n est $n - N + 1$. On remarque que $b_{N+1} - a_{N+1} = (1 - 1/4)(b_N - a_N)/2$, $b_{N+2} - a_{N+2} = (1 - 1/4^2)(b_{N+1} - a_{N+1})/2$, $b_{N+3} - a_{N+3} = (1 - 1/4^3)(b_{N+2} - a_{N+2})/2, \dots$ Ce qui entraîne que $b_n - a_n = (b_N - a_N)2^{N-n} \prod_{m=1}^{n-N} (1 - 1/4^m)$.

Soit $n > N$ tel que $c_n = 0$, le quotient différentiel $f(b_n) - f(x)/(b_n - x)$ est majoré en valeur absolue par $2/(2^N (b_N - a_N) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 1/4^m))$ puisque $|f(b_n) - f(x)| \leq 1/2^n$ et

$b_n - x > (b_n - a_n)/2$. Comme le chiffre 0 apparaît une infinité de fois dans l'adresse de x , il existe une accumulation de quotients différentiels $f[x, b_n]$ bornés par une même quantité. La dérivée à droite au point x ne peut pas évaluer $\pm\infty$.

Cas 4 : les chiffres 0, 1 et 2 n'apparaissent qu'un nombre fini de fois dans l'adresse de x . On choisit un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $c_n = 3$. Désignons encore par $(a_n, f(a_n), (b_n, f(b_n))$ les deux sommets consécutifs de L_n tels que $a_n \leq x < b_n$. Le fait que $c_N = 3$ entraîne que $b_{N+1} = b_N$; de même, $b_{N+2} = b_N$ et ainsi de suite, pour tout $n > N$, $b_n = b_N$. D'autre part, pour tout n , $b_n - a_n < 1/2^n$. De là, l'inégalité, $b_N - x < 1/2^n$. Lorsque n est suffisamment grand, cette dernière inégalité est impossible. Le cas 4 ne se produit jamais.

Enfin la symétrie de f par rapport à la verticale $x = 1$ donne lieu à l'équation $f(x) = f(2 - x)$ et implique que la dérivée à gauche n'est jamais égale à $\pm\infty$. $\square$

Les théorème 1 et 11 donnent une démonstration simple du célèbre résultat de Besicovitch que sa fonction n'admet en aucun endroit une dérivée unilatérale, ni finie, ni infinie. Nous indiquons quatre endroits où ce résultat est établi : chez les auteurs Besicovitch (pp. 548–556) [1], Singh (pp. 61–69) [5], Jeffery (pp. 172–181) [4] et Ciesielki [2]. Notre démonstration et celle de Ciesielski sont les plus courtes.

Nous remercions le professeur Ciesielski d'avoir aimablement attiré notre attention sur les arguments inadéquats dans la démonstration initiale des théorèmes 1 et 11.

References

1. Besicovitch A. S.: Étude des fonctions continues dans le cadre de la question de leur dérivabilité. (en russe) Mat. Sb. 31, (1924) 529–556.
2. Ciesielski, K. C.: Continuous maps admitting no tangent line: A centennial of Besicovitch functions. Amer. Math. Monthly (accepted in 2021).
3. Dubuc, S.: Les schémas de subdivision de Besicovitch et de Cantor. Ann. Math. Qué. 44, 329–347 (2020).
4. Jeffery, R. L.: The theory of functions of a real variable. Reprint of the 1953 original. Dover Publications, New York, 1985
5. Singh, A. N.: On functions without one-sided derivatives. Proc. Benares Math. Soc. (N.S.) 3, 55–69 (1941)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.