Résonance d'onde acoustique générée dans le pneumatique par les oscillations du système roue-carrosserie

Hypolithe Okou² · Narcisse Dakouri¹ · Fulgence Nindjin² · Jérôme Adou²

Received: 28 December 2016 / Accepted: 20 March 2019 / Published online: 9 April 2019
© The Author(s) 2019

Résumé

Nous partons, dans ce papier, des équations (établies dans [4]) de type Navier-Stokes régissant l'écoulement d'une masse liquide dans un tore en rotation rapide avec une vitesse angulaire constante Ω . En notant C_0 la vitesse du son en régime permanent, on montre, à l'échelle de temps $\frac{R}{C_0}$, l'existence dans le pneumatique d'une onde acoustique, qui, selon [3], engendre un phénomène de résonance. Nous faisons l'hypothèse d'une chaussée suffisamment plane. Nous montrons l'apparition du phénomène de résonance qui se traduit par le fait que l'onde acoustique évolue de manière sinusoïdale en croissant en module en fonction du temps.

Mots clés Onde acoustique · résonance · air · tore · pneumatique

Mathematics Subject Classification 35Q35 · 76Q05

1 Introduction

Dans la présente étude, nous nous intéressons au mouvement de l'air dans un pneumatique en rotation rapide autour d'un axe $\vec{e}_z$ avec une vitesse angulaire constante Ω . Ce pneumatique est assimilé à un tore $\mathbb{T}$ dont le cercle générateur et le cercle de section ont respectivement pour rayon R de $\frac{d}{2}$. Au contact de la chaussée, le pneumatique subit une déformation que nous modélisons par une ellipse $\mathbb{A}(t)$ dont le demi grand axe est a tandis que le demi petit

✉ Hypolithe Okou
okouakpetihi@hotmail.com

Narcisse Dakouri
dakurnar6@yahoo.fr

Fulgence Nindjin
nindjinaka_fulgence@hotmail.com

Jérôme Adou
jkadou@hotmail.com

¹ Unité Mixte de Recherche et d'Innovation en Mathématiques et Informatique Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication, 18 BP 1501, Abidjan 18, Ivory Coast

² UFR de Mathématiques et Informatique Université Félix Houphouët Boigny d'Abidjan, 22 BP 582, Abidjan 22, Ivory Coast

axe est noté b . Pendant le mouvement de rotation, la déformation $\mathbb{A}(t)$ se déplace à la surface du tore à la vitesse angulaire $(-\Omega)$, engendrant ainsi dans $\mathbb{T}$ un mouvement d'air. En notant C_0 la vitesse du son en régime permanent, une étude antérieure a montré qu'à l'échelle de temps $\frac{R}{C_0}$, une onde acoustique se superpose à l'écoulement généré dans le pneumatique. Dans [3], il a été établi que $p = 0$ est un pôle de résonance de l'onde acoustique généré dans le pneumatique. Cette même étude a modélisé numériquement le phénomène de la résonance acoustique au voisinage de ce pôle. Une autre étude [4] a montré qu'outre le pôle $p = 0$, le problème d'onde acoustique admet d'autres pôles. Ces pôles ont été explicités, en utilisant le système de coordonnées toroïdales. Dans ladite étude, Dakouri et al. ont, en outre, mis en évidence le phénomène de la résonance lorsque la fréquence μ caractérisant les sinuosités supposées régulières de la route est voisine de l'une des fréquences propres de vibration acoustique du tore.

Dans le présent travail, nous partons du modèle étudié dans [4] et nous montrons, avec l'hypothèse d'une chaussée suffisamment plane, que l'onde acoustique peut provoquer un phénomène de résonance. Pour parvenir à ce résultat, nous partons des équations d'onde acoustique générée dans le pneumatique (voir [3] ou [4]). À l'aide d'une transformation de Laplace, nous mettons par la suite en évidence les pôles de résonance, en tenant compte d'une part des fréquences propres de vibration acoustique du tore $\mathbb{T}$ et d'autre part, de la fréquence d'excitation résultant de la dynamique du système roue-carrosserie. Nous effectuons une transformée inverse de Laplace en vue de modéliser formellement le comportement asymptotique de l'onde acoustique, au voisinage de l'un de ces pôles non nuls de résonance. Nous montrons qu'à cette résonance, l'onde acoustique évolue de manière sinusoïdale en croissant en module en fonction du temps.

2 Equations

Dans [1], l'écoulement du fluide dans le pneumatique a été étudié en assimilant l'air à un gaz parfait à entropie constante, l'effet de dissipation étant supposé négligeable. Si C désigne le centre géométrique du pneumatique en rotation à la vitesses angulaire constante Ω autour de son axe $(C; \vec{e}_z)$, l'équation décrivant le mouvement de l'air dans le repère mobile $(C; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié à $\mathbb{T}$ s'écrit

$$\frac{D\eta}{Dt} + \eta \operatorname{div} \vec{V} = 0; \quad \eta \frac{D\vec{V}}{Dt} + \eta \Omega^2 \vec{x} + 2\eta \vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\nabla} h = \vec{0}, \quad \text{dans } \mathbb{T} \times [0; +\infty[. \quad (1)$$

En outre, si nous désignons par $f_r(t)$ la hauteur de la déformation du pneumatique relativement au plan tangent de contact contenant $\mathbb{A}(t)$, et par f_r^0 la valeur de cette hauteur en régime permanent, alors

$$f_r(t) = f_r^0 + \xi(t), \quad (2)$$

où $\xi(t)$ caractérise la variation de $f_r(t)$ et résultant des oscillations verticales supposées constantes qui traduisent la dynamique du ressort de suspension liant la roue à la carrosserie. Si nous faisons l'hypothèse que la chaussée est suffisamment plane alors de (2), nous pouvons déduire la condition aux limites associée à (1) suivante

$$\vec{V} \cdot \vec{N} = \frac{d\xi}{dt} \chi_{\mathbb{A}} \quad \text{sur } \partial\mathbb{T} \times [0; +\infty[, \quad (3)$$

$\chi_{\mathbb{A}}$ désignant la fonction caractéristique de $\mathbb{A}(t)$. Dans (1), h et η désignent respectivement la pression et la densité de masse. Le vecteur $\vec{N}$ représente la normale extérieure à la surface $\partial\mathbb{T}$

du tore, et $\vec{x}$ est un vecteur radial contenu dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Dans l'étude [2], au repos, nous supposons que l'enthalpie de l'air dans le tore $\mathbb{T}$ est constante et nous la désignons par

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}) + \frac{\Omega^2 x^2}{2}. \quad (4)$$

Puis, sans restreindre l'étude, nous supposons également qu'à l'instant initial

$$\vec{V} = \vec{0} \text{ et } \rho(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}). \quad (5)$$

Avec les grandeurs adimensionnalisées suivantes:

$$\begin{cases} \vec{V} = \Omega a \vec{\tilde{V}}, & \xi = f_r^0 \tilde{\xi}, & \rho = \rho_0 + \Omega^2 R a \tilde{\rho}, \\ t = \frac{R}{C_0} \tau, & \vec{x} = R \vec{\tilde{x}}, & \vec{\nabla} = R \vec{\tilde{\nabla}}, & ds = \pi a b ds^* \end{cases} \quad (6)$$

les équations (1)–(3) s'écrivent:

$$\begin{cases} \vec{\tilde{\nabla}} \cdot \vec{\tilde{V}} + M_{tr} [1 + (1 - \gamma) \delta M_{tr}^2 \tilde{\rho}] \left[\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} + M_{tr} \left(\delta(\vec{\tilde{V}} \cdot \vec{\tilde{\nabla}}) \tilde{\rho} - \vec{\tilde{V}} \cdot \vec{\tilde{x}} \right) \right] = 0 \\ \text{dans } \mathbb{T}^* \times [0; +\infty[, \\ \frac{\partial \vec{\tilde{V}}}{\partial \tau} + M_{tr} \left[\vec{\tilde{\nabla}} \tilde{\rho} + 2 \vec{e}_z \wedge \vec{\tilde{V}} + \delta \left(\vec{\tilde{V}} \cdot \vec{\tilde{\nabla}} \right) \vec{\tilde{V}} \right] = \vec{0} \text{ dans } \mathbb{T}^* \times [0; +\infty[, \\ \vec{\tilde{V}} \cdot \vec{N} = M_{tr} \frac{d\tilde{\xi}}{d\tau} \chi_{\mathbb{A}^*} \text{ sur } \partial \mathbb{T}^* \times [0; +\infty[, \\ \frac{d\tilde{\xi}}{d\tau} = \frac{\tau}{\delta} + \tilde{F}''(\tau) + \frac{B}{\delta} \tilde{N}^{-1} \int_0^\tau \tilde{\xi}(\tau') d\tau' + \mathbb{K}(M_{tr}; \tilde{F}(\tau)) \end{cases} \quad (7)$$

avec

$$\mathbb{K}(M_{tr}; \tilde{F}(\tau)) = \tau M_{tr} \tilde{F}'(\tau) + \delta M_{tr}^2 \tilde{F}'(\tau) \tilde{F}''(\tau) \quad (9)$$

Dans le problème (7), la notation $\chi_{\mathbb{A}^*}$ désigne la fonction caractéristique de la surface adimensionnée $\mathbb{A}^*$ de l'ellipse $\mathbb{A}(t)$, $\delta = \frac{a}{R}$ est un paramètre géométrique tel que $\delta \ll 1$

tandis que $M_{tr} = \frac{\Omega R}{C_0}$ est le nombre de Mach de translation associé au mouvement de l'air

dans $\mathbb{T}^*$. En outre, le paramètre $\alpha_2 = \frac{(M + m)g}{ma\Omega^2}$, où g désigne l'accélération de pesanteur tandis que M et m représentent respectivement la masse de la carrosserie et celle du pneumatique, est de l'ordre de δ . Dans (8), ζ est un paramètre lié au profil de la route. Ce dernier (profil de la route) est caractérisé par la fonction $\tilde{F}$ et $\tilde{N}$ désigne l'opérateur inversible défini pour toute fonction $\tilde{Z}$ par

$$\tilde{N} \tilde{Z}(\tau) = \tilde{Z}(\tau) + \frac{M\omega}{m\Omega} M_{tr} \int_0^\infty \tilde{Z}(\tau - \tau_1) \sin\left(\frac{\omega}{\Omega} M_{tr} \tau_1\right) d\tau_1, \quad \forall \tau. \quad (10)$$

En considérant M_{tr} comme un petit paramètre de perturbation, le problème (7) a été étudié dans [3], à l'aide du développement asymptotique suivant

$$(\vec{\tilde{V}}, \tilde{\rho}) = (\vec{\tilde{V}}_0, \tilde{\rho}_0) + M_{tr}(\vec{\tilde{V}}_1, \tilde{\rho}_1) + M_{tr}^2(\vec{\tilde{V}}_2, \tilde{\rho}_2) + \dots \quad (11)$$

En posant

$$\tilde{\rho}_0^{(1)}(\vec{x}, \tau) = \tilde{\rho}_0(\vec{x}, \tau) - \tilde{\rho}_0^{(2)}(\vec{x}), \quad \forall (\vec{x}, \tau) \in \mathbb{T}^* \times [0; +\infty[, \quad (12)$$

cette étude a permis d'établir le problème d'onde acoustique suivant

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\rho}_0^{(1)} - \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0^{(1)}}{\partial \tau^2} = 0 & \text{dans } \mathbb{T} \times [0; +\infty[\\ \vec{\nabla} \tilde{\rho}_0^{(1)} \cdot \vec{N} = - \left[\tilde{F}^{(3)}(\tau) + \frac{1}{\delta} (1 + B \tilde{N}^{-1} \tilde{\xi}(\tau)) \right] \chi_{\mathbb{A}^*} & \text{sur } \partial \mathbb{T}^* \times [0; +\infty[\\ \tilde{\rho}_0^{(1)}(\vec{x}; 0) = -\tilde{\rho}_0^{(2)}(\vec{x}); \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_0^{(1)}}{\partial \tau}(\vec{x}; 0) = v_0(\vec{x}) \end{cases} \quad (13)$$

où $\tilde{\rho}_0^{(2)}(\vec{x})$ est une fonction connue dépendant du paramètre δ (voir [3]) tandis que $v_0(\vec{x})$ est une donnée initiale.

3 Mise en évidence des modes de résonance

Afin de mettre en évidence les pôles de résonance du problème d'onde acoustique (13), nous passons de l'espace temporel à l'espace spectral en effectuant, pour tout $p \in \mathbb{C}$, les transformations de Laplace suivantes:

$$(\hat{\rho}(\cdot, p); \hat{X}(p); \hat{Y}(p)) = \int_0^\infty (\tilde{\rho}_0^{(1)}(\cdot, \tau); \tilde{\xi}(\tau); \tilde{F}(\tau)) e^{-\tau p} d\tau \quad (14)$$

où $(\tilde{\rho}_0^{(1)}(\cdot, \tau); \tilde{\xi}(\tau); \tilde{F}(\tau)) \rightarrow (-\tilde{\rho}_0^{(2)}; 0; 0)$ (au sens de distribution) quand $\tau \rightarrow 0$. Le problème d'onde (13) s'écrit alors dans le domaine spectral comme suit:

$$\begin{cases} -\Delta \hat{\rho} + p^2 \hat{\rho} = -p \tilde{\rho}_0^{(2)} + v_0(\vec{x}) & \text{dans } \mathbb{T}^* \\ \vec{\nabla} \hat{\rho} \cdot \vec{N} = [\hat{\omega}_\sigma(p) - p^3 \hat{Y}(p)] \chi_{\mathbb{A}^*} & \text{sur } \partial \mathbb{T}^* \end{cases} \quad (15)$$

avec, pour tout $p \in \mathbb{C}$,

$$\hat{\omega}_\sigma(p) = -\frac{1}{\delta p} + \frac{2B\xi}{\delta^3} \frac{p^2 \left(p^2 + \frac{m}{M+m} \omega_a^2 \right)}{p^4 + \left(2B \frac{\sigma^2}{a_0^2} + \omega_a^2 \right) p^2 + 2B \frac{\sigma^2}{a_0^2} \frac{m}{m+M} \omega_a^2} \hat{Y}(p). \quad (16)$$

Dans (16), $\hat{Y}(p) = \frac{e^{(-p+i\mu)T_1}}{p-i\mu}$, où T_1 est une constante, μ et σ désignent respectivement la fréquence et le nombre d'onde caractérisant les sinuosités de la route. Le paramètre ω_a est défini par

$$\omega_a = \frac{R}{C_0} \sqrt{\frac{k(M+m)}{mM}} \quad (17)$$

est interprété à l'échelle de temps $\frac{R}{C_0}$ comme un nombre de Mach associé à la fréquence d'oscillation du ressort de raideur k , liant la roue à la carrosserie. Si nous admettons dans ce papier que la chaussée est suffisamment plane, nous pouvons faire l'hypothèse que μ et

σ sont nuls. Alors la fonction $\widehat{Y}(p)$ résultant de (14) est holomorphe dans $\operatorname{Re}(p) > 0$ (voir [4]). Ainsi, $\widehat{\omega}_\sigma(p)$ et $\widehat{Y}(p)$ deviennent respectivement:

$$\widehat{\omega}_0(p) = -\frac{1}{\delta p} + \frac{2B\xi}{\delta^3} \frac{p^2 + \frac{m}{M+m}\omega_a^2}{p^2 + \omega_a^2} \widehat{Y}(p). \quad (18)$$

et

$$\widehat{Y}(p) = \frac{e^{-pT_1}}{p} \quad (19)$$

Nous déduisons de (18) qu'outre le pôle $p = 0$, le problème d'onde (15) admet des pôles d'excitation non nuls qui sont:

$$p = \pm i\omega_a. \quad (20)$$

En outre dans [4], il a été prouvé que le problème aux valeurs propres associé à (15) suivant:

$$\Delta h + \lambda^2 h = 0 \text{ in } \mathbb{T}; \quad \vec{\nabla} h \cdot \vec{N} = 0 \text{ sur } \partial\mathbb{T} \quad (21)$$

admet pour spectre

$$D = \{n^2 - j^2 + \frac{1}{4}; n, j \in \mathbb{Z}, |n| \geq |j|\} \cup \{j^2 - \frac{1}{4}; j \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{n^2; n \in \mathbb{Z}^*\}, \quad (22)$$

les fonctions propres associées étant définies dans le système de coordonnées toroïdales $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ par

$$\rho_{nj} = h(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \left[\kappa_0 \mathbb{P}_{j-\frac{1}{2}}(\cosh \vartheta_1) + \nu_0 \mathbb{Q}_{j-\frac{1}{2}}(\cosh \vartheta_1) \right] \cos(n\vartheta_2), \quad (23)$$

où κ_0 et ν_0 sont des constantes tandis que $\mathbb{P}_{j-\frac{1}{2}}$ et $\mathbb{Q}_{j-\frac{1}{2}}$ désignent respectivement les fonctions de Legendre de première et de seconde espèce. Pour plus de précision, voir [4]. Nous pouvons par conséquent déduire de (22) et (23) les modes propres de vibration acoustique du tore que nous notons simplement dans la suite $(\widehat{\lambda}_n, \widehat{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui, en vertu du théorème de diagonalisation vérifie

$$0 < \widehat{\lambda}_1^2 \leq \widehat{\lambda}_2^2 \leq \dots \leq \widehat{\lambda}_n^2 \leq \dots \quad (24)$$

Nous convenons en outre que la fréquence propre

$$\widehat{\lambda}_{-n} = -\widehat{\lambda}_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (25)$$

est associée à la fonction propre

$$\widehat{\rho}_n^* = \widehat{\rho}_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (26)$$

Comme d'après [5] les fonctions propres $\widehat{\rho}_n^*$ forment une base hilbertienne orthonormale, alors

$$\int_{\mathbb{T}^*} |\widehat{\rho}_n^*|^2 du_x = 1. \quad (27)$$

En définitive, si la fréquence d'excitation ω_a définie en (20) et caractérisant les oscillations du système roue-carrosserie est voisine de l'une des fréquences propres de vibration acoustique $\widehat{\lambda}_n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$) du tore $\mathbb{T}^*$, alors

$$p = \pm i\omega_a \quad (28)$$

apparaît comme un pôle de résonance acoustique du problème d'onde (15).

4 Résonance au voisinage de $p = \pm i\omega_a$

Pour faciliter l'étude de la résonance au voisinage de $p = \pm i\omega_a$, nous relevons la solution $\hat{\rho}$ du problème (15) sous la forme

$$\hat{\rho}(\cdot, p) = -p^3 \hat{Y}(p) \mathfrak{T}(\cdot) + \hat{\mathcal{G}}(\cdot, p) \hat{\omega}_0(p) + \hat{T}(\cdot, p) \quad (29)$$

où $\mathfrak{T}$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \mathfrak{T} = -v_0(\vec{x}) \text{ in } \mathbb{T}^*; \quad \vec{\nabla} \mathfrak{T} \cdot \vec{N} = \chi_{\mathbb{A}^*} \text{ sur } \partial \mathbb{T}^* \\ \int_{\mathbb{T}^*} v_0(\vec{x}) ds_x = -\text{Aire}(\mathbb{A}^*). \end{cases} \quad (30)$$

Dans (29), les fonctions $\hat{\mathcal{G}}(\cdot, p)$ et $\hat{T}(\cdot, p)$ sont respectivement solutions des problèmes

$$-\Delta \hat{\mathcal{G}} + p^2 \hat{\mathcal{G}} = 0 \text{ dans } \mathbb{T}^*; \quad \vec{\nabla} \hat{\mathcal{G}} \cdot \vec{N} = \chi_{\mathbb{A}^*} \text{ sur } \partial \mathbb{T}^* \quad (31)$$

et

$$-\Delta \hat{T} + p^2 \hat{T} = p^5 \hat{Y}(p) \mathfrak{T} - p \hat{\rho}_0^{(2)} \text{ dans } \mathbb{T}^*; \quad \vec{\nabla} \hat{T} \cdot \vec{N} = 0 \text{ sur } \partial \mathbb{T}^*. \quad (32)$$

Compte tenu de l'unicité de la solution de chacun des problèmes (31) et (32), les fonctions $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{T}$ admettent des pôles en

$$p = \pm i\hat{\lambda}_n, \quad n \in \mathbb{Z}^*. \quad (33)$$

En scrutant (24), il est clair que ces pôles propres, définis en (33), sont strictement positifs. En effet, rappelons que nous avons à étudier la résonance des ondes acoustiques au voisinage du pôle non nul $p = \pm i\omega_a$. Or le phénomène de résonance intervient lorsque ces pôles d'excitation coïncident avec les pôles propres $\pm i\hat{\lambda}_n$ où $n \in \mathbb{Z}^*$. Ainsi une condition suffisante de cette résonance est: $\hat{\lambda}_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Si nous tenons compte de la relation (29), la transformée inverse de Laplace de la fonction $\tilde{\rho}$ s'écrit

$$\tilde{\rho}_0^{(1)}(\cdot, \tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\wedge} [-p^3 \hat{Y}(p) \mathfrak{T}(\cdot) + \hat{\mathcal{G}}(\cdot, p) \hat{\omega}_0(p) + \hat{T}(\cdot, p)] e^{p\tau} dp. \quad (34)$$

Dans cette relation, $\wedge$ est une droite parallèle à l'axe des imaginaires et tracée dans $\text{Re}(p) > 0$.

Étant donné qu'on calcule cette intégrale dans un voisinage des pôles non nuls $p = \pm i\omega_a$, quel que soit le contour choisi partant de plan $\text{Re}(p) > 0$, on aura $p \neq 0$. Par conséquent la fonction $\hat{Y}(p)$ y est holomorphe. Ainsi, le calcul de la fonction $\tilde{\rho}_0^{(1)}$ définie en (34) exige la détermination de l'expression de chacune des fonctions $\hat{\mathcal{G}}(\cdot, p)$ et $\hat{T}(\cdot, p)$ au voisinage du pôle résonant $p = \pm i\hat{\lambda}_{n_0}$, en admettant que la fréquence propre $\hat{\lambda}_{n_0}$ est voisine de la seule fréquence d'excitation ω_a (la deuxième fréquence liée au profil de la route μ étant nulle). Pour cela, nous considérons le problème suivant

$$-\Delta \hat{\Phi} + p^2 \hat{\Phi} = f(\cdot, p) \text{ dans } \mathbb{T}^*; \quad \vec{\nabla} \hat{\Phi} \cdot \vec{N} = g(\cdot) \text{ on } \partial \mathbb{T}^* \quad (35)$$

où $f(\cdot, \pm i\hat{\lambda}_{n_0})$ et $g(\cdot)$ sont des fonctions régulières respectivement dans $\mathbb{T}^*$ et dans $\partial \mathbb{T}^*$. Nous énonçons alors le résultat suivant.

Théorème 4.1 Dans le problème (35), la solution $\hat{\Phi}(\cdot, p)$ vérifie au voisinage des pôles $p = \pm i\hat{\lambda}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\hat{\Phi}(\cdot, p) = \frac{\phi_{-1}^n(\cdot)}{p - i\hat{\lambda}_n} + \frac{\bar{\phi}_{-1}^n(\cdot)}{p + i\hat{\lambda}_n} + \tilde{\varphi}_n(\cdot, p) \quad (36)$$

où $\tilde{\varphi}_n$ n'admet pas de pôle en $p = \pm i\hat{\lambda}_n$ et

$$\phi_{-1}^n(\vec{x}) = \frac{1}{2i\hat{\lambda}_n} \left[\int_{\mathbb{T}^*} f(\vec{x}, p) \hat{\rho}_n^*(\vec{x}) du_x + \int_{\partial\mathbb{T}^*} g(\vec{x}) \hat{\rho}_n^*(\vec{x}) ds_x \right] \hat{\rho}_n(\vec{x}), \quad (37)$$

$\hat{\rho}_n$ étant la fonction propre associée à $\hat{\lambda}_n$.

Preuve Le système (35) admet pour problème aux valeurs propres associée le système (21). Si nous tenons compte de (25) nous pouvons écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\hat{\Phi} = \frac{\phi_{-1}^n(\cdot)}{p - i\hat{\lambda}_n} + \frac{\bar{\phi}_{-1}^n(\cdot)}{p + i\hat{\lambda}_n} + \tilde{\varphi}_n(\cdot, p). \quad (38)$$

En injectant (38) dans (35), nous obtenons

$$\begin{aligned} (p^2 + \hat{\lambda}_n^2) \phi_{-1}^n + (\hat{\lambda}_n^2 I + \Delta) \phi_{-1}^n + (p - i\hat{\lambda}_n)(-p^2 I + \Delta) \left\{ \frac{\bar{\phi}_{-1}^n}{p + i\hat{\lambda}_n} + \tilde{\varphi}_n \right\} \\ = (p - i\hat{\lambda}_n) f(\cdot, p) \end{aligned} \quad (39)$$

où I désigne l'opérateur identité. Comme $f(\cdot, p)$ est une fonction holomorphe, nous avons dans (39), lorsque $(p - i\hat{\lambda}_n)$ tend vers zéro,

$$(\hat{\lambda}_n^2 I + \Delta) \phi_{-1}^n(\cdot) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{T}^*. \quad (40)$$

De façon similaire, la condition aux limites (35) s'écrit

$$\vec{N} \cdot \vec{\nabla} \phi_{-1}^n + (p - i\hat{\lambda}_n) \left\{ \frac{\vec{N} \cdot \vec{\nabla} \bar{\phi}_{-1}^n}{p + i\hat{\lambda}_n} + \vec{N} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\varphi}_n \right\}_{|\partial\mathbb{T}} = (p - i\hat{\lambda}_n) g(\cdot). \quad (41)$$

Alors, en passant à la limite, quand $(p - i\hat{\lambda}_n) \rightarrow 0$, nous avons:

$$\vec{N} \cdot \vec{\nabla} \phi_{-1}^n(\cdot)_{|\partial\mathbb{T}^*} = 0. \quad (42)$$

Des égalités (40) et (42), compte tenu du problème aux valeurs propres (21), nous déduisons que

$$\phi_{-1}^n = K_n \hat{\rho}_n^*. \quad (43)$$

La constante K_n est déterminée en recherchant $\hat{\Phi}$ sous la forme:

$$\hat{\Phi} = K_n \frac{\hat{\rho}_n^*(\cdot)}{p - i\hat{\lambda}_n} + \frac{\bar{\phi}_{-1}^n(\cdot)}{p + i\hat{\lambda}_n} + \tilde{\varphi}_n(\cdot, p). \quad (44)$$

Grâce au théorème de la divergence, nous avons:

$$\int_{\mathbb{T}^*} [(\Delta \hat{\Phi}) \hat{\rho}_n^* - \hat{\Phi} (\Delta \hat{\rho}_n^*)] du_x = \int_{\partial\mathbb{T}^*} [(\vec{N} \cdot \nabla \hat{\Phi}) \hat{\rho}_n^* - \hat{\Phi} (\vec{N} \cdot \nabla \hat{\rho}_n^*)] ds_x. \quad (45)$$

Nous déduisons de l'égalité (45) que:

$$\int_{\mathbb{T}^*} [(\hat{\lambda}_n^2 I + \Delta) \hat{\Phi}] \hat{\rho}_n^* du_x = \int_{\partial\mathbb{T}^*} g(\vec{x}) \hat{\rho}_n^* ds_x. \quad (46)$$

En outre, à partir de l'équation (35), nous pouvons écrire:

$$\int_{\mathbb{T}^*} [(-\Delta + p^2 I) \hat{\Phi}] \hat{\rho}_n^* du_x = \int_{\mathbb{T}^*} f(\vec{x}, p) \hat{\rho}_n^* ds_x. \quad (47)$$

En additionnant (46) et (47), nous avons:

$$(p^2 + \widehat{\lambda}_n^2) \int_{\mathbb{T}^*} \widehat{\Phi} \widehat{\rho}_n^* du_x = \int_{\mathbb{T}^*} f(p, \vec{x}) \widehat{\rho}_n^* du_x + \int_{\partial \mathbb{T}^*} g(\vec{x}) \widehat{\rho}_n^* ds_x. \quad (48)$$

Alors, si nous injectons dans (48) l'expression de $\widehat{\Phi}(\cdot, p)$ définie en (44), nous obtenons:

$$K_n = \frac{1}{2i\widehat{\lambda}_n} \left[\int_{\mathbb{T}^*} f(\vec{x}, p) \widehat{\rho}_n^*(\vec{x}) du_x + \int_{\partial \mathbb{T}^*} g(\vec{x}) \widehat{\rho}_n^*(\vec{x}) ds_x \right]. \quad (49)$$

D'où le résultat.

En nous basant sur le Théorème 4.1, nous pouvons, en vertu des équations (31) et (32) énoncer les résultats suivants.

Corollaire 4.1 La fonction $\widehat{G}(\cdot, p)$ définie en (31) vérifie au voisinage de $p = \pm i\widehat{\lambda}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) la relation:

$$\widehat{G}(\cdot, p) = \frac{G_{-1}^n(\cdot)}{p - i\widehat{\lambda}_n} + \frac{\overline{G}_{-1}^n(\cdot)}{p + i\widehat{\lambda}_n} + \widetilde{G}_n(\cdot, p) \quad (50)$$

avec

$$G_{-1}^n(\vec{x}) = \frac{1}{2i\widehat{\lambda}_n} \left[\int_{\partial \mathbb{T}^*} \widehat{\rho}_n^*(\vec{x}) \chi_{\mathbb{A}^*}(\vec{x}) ds_x \right] \widehat{\rho}_n(\vec{x}) \quad (51)$$

est une fonction non nulle définie dans $\partial \mathbb{T}^*$.

Corollaire 4.2 La fonction $\widehat{T}(\cdot, p)$ définie en (32) vérifie au voisinage de $p = \pm i\widehat{\lambda}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) la relation:

$$\widehat{T}(\cdot, p) = \frac{T_{-1}^n(\cdot)}{p - i\widehat{\lambda}_n} + \frac{\overline{T}_{-1}^n(\cdot)}{p + i\widehat{\lambda}_n} + \widetilde{T}_n(\cdot, p) \quad (52)$$

avec

$$T_{-1}^n(\cdot) = \frac{1}{2} \left[\widehat{\lambda}_n^4 \widehat{Y}(i\widehat{\lambda}_n) \int_{\mathbb{T}^*} \mathfrak{T}(\cdot) \widehat{\rho}_n^*(\cdot) du_x - \int_{\mathbb{T}^*} \widetilde{\rho}_0^{(2)}(\cdot) \widehat{\rho}_n^*(\cdot) du_x \right] \widehat{\rho}_n(\cdot) \quad (53)$$

est une fonction non nulle définie dans $\mathbb{T}^*$.

Dans cette partie, nous avons supposé que la fréquence propre $\widehat{\lambda}_{n_0}$ est voisine de la fréquence d'excitation ω_a . Alors, la fonction $\widetilde{\rho}_0^{(1)}$ définie en (34) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}_0^{(1)}(\cdot, \tau) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\wedge} \left[\frac{T_{-1}^{n_0}(\cdot)}{p - i\widehat{\lambda}_{n_0}} + \frac{\overline{T}_{-1}^{n_0}(\cdot)}{p + i\widehat{\lambda}_{n_0}} + \widetilde{T}_{n_0}(\cdot, p) - p^3 \widehat{Y}(p) \mathfrak{T}(\cdot) \right] e^{p\tau} dp \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\wedge} \left(\frac{G_{-1}^{n_0}(\cdot)}{p - i\widehat{\lambda}_{n_0}} + \frac{\overline{G}_{-1}^{n_0}(\cdot)}{p + i\widehat{\lambda}_{n_0}} + \widetilde{G}_{n_0}(\cdot, p) \right) \left(\frac{A_1 e^{-pT_1}}{p - i\widehat{\lambda}_{n_0}} + \frac{A_2 e^{-pT_1}}{p + i\widehat{\lambda}_{n_0}} + \right. \\ &\left. \frac{\delta A_3 e^{-pT_1} - 1}{\delta p} \right) e^{p\tau} dp \end{aligned} \quad (54)$$

où, partant de (18) et (19), on a posé $A_1 = A_2 = \frac{2B\zeta}{\delta^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{M+m} \right)$ et $A_3 = \frac{2B\zeta}{\delta^3} \frac{m}{M+m}$.

$$\tilde{\rho}_0^{(1)}(., \tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\wedge} \left[\pi_0(., p) + \frac{\pi_1(., p)}{p - i\hat{\lambda}_{n_0}} + \frac{\pi_2(., p)}{(p - i\hat{\lambda}_{n_0})^2} \right] e^{p\tau} dp, \quad (55)$$

avec

$$\begin{aligned} \pi_0(., p) &= \left(\frac{\overline{G}_{-1}^{n_0}(.)}{p + i\hat{\lambda}_{n_0}} + \tilde{G}_{n_0}(., p) \right) \left(\frac{A_2 e^{-pT_1}}{p + i\hat{\lambda}_{n_0}} + \frac{\delta A_3 e^{-pT_1} - 1}{\delta p} \right) \\ &\quad + \frac{\overline{T}_{-1}^{n_0}(.)}{p + i\hat{\lambda}_{n_0}} + \tilde{T}_{n_0}(., p) - p^2 \mathfrak{T}(.) e^{-pT_1}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \pi_1(., p) &= T_{-1}^{n_0}(.) + G_{-1}^{n_0}(.) \left(\frac{A_2 e^{-pT_1}}{p + i\hat{\lambda}_{n_0}} + \frac{\delta A_3 e^{-pT_1} - 1}{\delta p} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\overline{G}_{-1}^{n_0}(.)}{p + i\hat{\lambda}_{n_0}} + \tilde{G}_{n_0}(., p) \right) A_1 e^{-pT_1} \end{aligned} \quad (57)$$

et

$$\pi_2(., p) = G_{-1}^{n_0}(.) A_1 e^{-pT_1}. \quad (58)$$

En calculant (55), à l'aide du théorème des résidus appliqué au voisinage du pôle $p = i\hat{\lambda}_{n_0}$, nous obtenons

$$\tilde{\rho}_0^{(1)}(., \tau) = \left[\tau \pi_2(., i\hat{\lambda}_{n_0}) + \frac{d\pi_2(., p)}{dp} \Big|_{p=i\hat{\lambda}_{n_0}} + \pi_1(., i\hat{\lambda}_{n_0}) \right] e^{i\hat{\lambda}_{n_0}\tau}. \quad (59)$$

En outre, compte tenu du Corollaire 4.1 et du fait que $M \gg m$, $G_{-1}^{n_0}(.)$ et A_1 qui sont non nuls. Nous en déduisons par conséquent que $\pi_2(., i\hat{\lambda}_{n_0}) \neq 0$. Aussi, de façon générale, nous avons pour $\tau > 0$, $z_1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_2 \in \mathbb{C}$

$$|\tau z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 \tau^2 + |z_2|^2 + 2\tau (\operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)) \quad (60)$$

où $\operatorname{Re}(z_i)$ et $\operatorname{Im}(z_i)$, ($i = 1; 2$) désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z_i .

Nous déduisons par conséquent de (59) que

$$|\tilde{\rho}_0^{(1)}(., \tau)| \underset{+\infty}{\sim} |\pi_2(., i\hat{\lambda}_{n_0})| \tau. \quad (61)$$

Nous pouvons donc conclure que l'onde acoustique croît en module de façon sinusoïdale pour des temps de plus en plus grands.

5 Conclusion

Ce travail est une contribution à l'étude de la résonance de l'onde acoustique générée dans un pneumatique en mouvement sur une chaussée. Une étude antérieure [4] ayant explicité les fréquences propres de vibration acoustique $\hat{\lambda}_n$ du pneumatique schématisé par un tore, nous avons supposé dans ce présent travail que la chaussée est suffisamment plane pour en négliger les sinuosités. Avec cette hypothèse, nous avons montré à partir du problème d'onde (1) et l'aide d'une transformation de Laplace que l'unique fréquence non nulle d'excitation $\hat{\omega}_a$ est celle liée aux oscillations du ressort de suspension liant la roue à la carrosserie. Si nous supposons en outre qu'une fréquence propre de vibration $\hat{\lambda}_{n_0}$ est voisine de la fréquence

d'excitation $\widehat{\omega}_a$, alors $p = i\widehat{\lambda}_{n_0}$ apparaît comme un pôle de résonance acoustique du problème (1). L'étude faite au voisinage de ce pôle montre qu'à la résonance, l'onde acoustique $\widetilde{\rho}_0^{(1)}$ évolue de manière sinusoïdale en croissant en module, lorsque $\tau \rightarrow \infty$. En définitive, vu le résultat de la présente étude et de celui découlant de [4], nous pouvons conclure que le phénomène de la résonance acoustique généré dans le pneumatique n'est pas exclusivement lié au profil de la chaussée.

Déclarations

Conflits d'intérêts Nous (auteurs) déclarons qu'il n'y a pas de conflits d'intérêts pour ce document!

Remerciements Les auteurs souhaitent remercier le rédacteur en chef et les référés qui ont critiqué ce manuscrit pour les pertinentes suggestions.

Open Access This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons license, and indicate if changes were made.

References

1. Adou, J.: Modelling of a resonant inertial oscillation within a torus. *Arch. Appl. Mech.* **71**(10), 695–702 (2001)
2. Adou, J.: Étude de la résonance du mode géostrophique dans un tore. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **327**(série II b), 1391–1396 (1999)
3. Adou, J., Coulibaly, A., Dakouri, N.: Modeling of the resonance of an acoustic wave in the torus. *Annales Mathématiques Blaise Pascal* **20**(2), 377–390 (2013)
4. Dakouri, N., Coulibaly, A., Okou, H., Adou, J.: On the acoustic resonance generated by an excitation frequency linked to the road. *Far East J. Appl. Math.* **94**(3), 217–230 (2016)
5. Raviart, P.A., Thomas, J.M.: Introduction à l'analyse numériques des équations aux dérivées partielles, 2nd tirage, 2nd edn. Masson, Paris (1988)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.