Journal für Mathematik-Didaktik
https://doi.org/10.1007/s13138-023-00229-x

ORIGINALARBEIT/ORIGINAL ARTICLE

Number line estimation tasks: Ein fachdidaktischer Blick auf einen in den kognitiven Neurowissenschaften prominenten Aufgabentyp

Michael Gaidoschik

Eingegangen: 25. Juli 2022 / Angenommen: 15. Dezember 2023

Zusammenfassung Zahlenstrahlen und verwandte Darstellungen sind zentrale Arbeitsmittel im Mathematikunterricht ab der Grundschule und als solche, einem breiten Konsens innerhalb der Fachdidaktik folgend, zunächst Lernstoff, ehe sie förderlich für weiteres Lernen werden können. In aktuellen fachdidaktischen Veröffentlichungen des deutschen Sprachraums sind deutlich unterschiedliche, teils einander widersprechende Empfehlungen zur *Deutung* und, davon abhängend, zur *Erarbeitung* des Zahlenstrahls zu finden. Studien dazu, welche dieser Empfehlungen in welcher Weise und Häufigkeit und mit welchem Lernerfolg auf Seiten der Kinder im Unterricht umgesetzt werden, fehlen.

Zahlreich sind hingegen vor allem neuro- und kognitionspsychologisch orientierte Studien zu einem bestimmten Typus von Aufgaben, die als *number line estimation tasks* bezeichnet werden. Dabei geht es darum, auf sonst leeren Zahlenstrecken zwischen zwei vorgegebenen Zahlen, zumeist 0 und 100 bzw. 0 und 1000, die zu einer dritten Zahl passende Markierung einzuzeichnen bzw. umgekehrt zu einer Markierung die passende Zahl anzugeben.

Der vorliegende Beitrag bemüht sich um eine stoffdidaktische Analyse der Voraussetzungen, die für den erfolgreichen Umgang mit *number line estimation tasks* erforderlich sind, und um eine begründete Einschätzung des didaktischen Werts solcher Aufgaben für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen in der Grundschule. Die daran anschließende Sichtung der weitverzweigten empirischen Forschung zu *number line estimation tasks* macht deutlich, dass die Ergebnisse der stoffdidaktischen Analyse zumindest nicht im Widerspruch mit den empirischen Befunden stehen, dass aber eine Reihe von Fragen, deren Beantwortung für die Planung von Unterrichtsmaßnahmen zentral sind, weitere empirische Forschung dringlich ma-

✉ Michael Gaidoschik
Fakultät für Bildungswissenschaften, Freie Universität Bozen – Bolzano, Regensburger Allee 16, 39042 Brixen, Bressanone, Italien
E-Mail: michael.gaidoschik@unibz.it

Published online: 11 January 2024

chen. Einige dieser Desiderate werden abschließend formuliert und zur Diskussion gestellt.

Schlüsselwörter Zahlenstrahlen · Mess-Deutung · Positionierungsaufgaben · Dezimales Stellenwertsystem · Linear-räumliche Zahlvorstellungen

MESC-Codes C30-2 · D70-2 · F30-2 · F70-2 · U60-2

Number Line Estimation Tasks: a Mathematics Education Perspective at a Task Type Prominent in the Cognitive Neurosciences

Abstract Number lines and related representations are central working tools in mathematics teaching from primary school onwards. Therefore, according to a broad consensus within mathematics education literature, children initially need to learn how to understand number lines before number lines may become conducive to their further learning. In current subject didactic publications in the German-speaking world, there are clearly different and sometimes contradictory recommendations on how to *understand* and, depending on this, how to *teach* number lines. There is a lack of research on which of these recommendations are implemented in the classroom how often, in which way, and how successfully.

On the other hand, there are numerous mostly neuropsychological and cognitive psychological-oriented studies on a particular type of task, the so-called number line estimation task. The task is to draw the appropriate marker for a third number on otherwise empty number lines between two given numbers—in most of the studies between 0 and 100 or 0 and 1000—or, conversely, to indicate the appropriate number for a given marker.

This article attempts to provide a didactic analysis of the prerequisites for the successful completion of number line estimation tasks and a well-founded assessment of the didactic value of such tasks for the development of mathematical competence in primary school. The subsequent review of the extensive empirical research on number line estimation tasks makes clear that the results of the didactic analysis at least do not contradict the empirical findings, but that a number of questions, the answers to which are central to the planning of teaching measures, make further empirical research urgently necessary. Some of these desiderata are finally formulated and put up for discussion.

Keywords Number lines · Measurement-interpretation · Number line estimation tasks · Decimal place value system · Linear-spatial number concepts

1 Einleitung

Bei Freudenthal (1999, S. 101) finden wir die bemerkenswerte Einstufung der „number line“ als „device beyond praise“. Verbreitet ist in fachdidaktischer Literatur jedoch auch der Hinweis, dass Zahlenstrahlen „für manche Kinder [...] nur schwer“

(Schipper et al. 2015, S. 62) zu verstehen seien (ähnlich Scherer und Moser Opitz 2010, S. 138; Padberg und Benz 2021, S. 81). Beides zusammen, „seine besonderen Potenziale als Arbeitsmittel über mehrere Schulstufen hinweg" (Schulz 2018, S. 1663) und die Schwierigkeiten mancher Kinder, diese Potenziale zu nutzen, machen den Zahlenstrahl und verwandte Darstellungen zu einem bedeutenden Thema fachdidaktischer Forschung.

Die Leistungen von Kindern bei Aufgaben am Zahlenstrahl – insbesondere bei einem bestimmten Typus solcher Aufgaben – erhalten in den letzten Jahrzehnten hohe Aufmerksamkeit auch seitens kognitionspsychologischer und neuropsychologischer Forschung. Im Fokus stehen dabei insbesondere „number line estimation tasks" (Schneider et al. 2018), bei denen Kinder auf sonst leeren Zahlenstrecken zwischen vorgegebenen Randzahlen (sehr oft 0 und 100 bzw. 0 und 1000) in Ziffernschreibweise vorgegebene Zahlen passend eintragen bzw. zu einer vorgegebenen Markierung die passende Zahl notieren sollen. Die „Treffsicherheit" bei solchen Aufgaben erfährt seitens der kognitiven Neurowissenschaften teils weitreichende Deutungen, während gerade dieser Aufgabentyp (im weiteren Beitrag als *NLETs* abgekürzt) in deutschsprachigen fachdidaktischen Veröffentlichungen speziell zur *Grundschule* weniger Beachtung findet (siehe aber z. B. Simon und Schindler 2021, 2022). Ebendiese Diskrepanz hat den vorliegenden Beitrag motiviert, dem es wesentlich darum geht, zu diesem Aufgabentypus vorliegende Forschung unter *fachdidaktischer* Perspektive einzuordnen.

Zu diesem Zweck werden in Abschn. 2 zunächst einige Begriffsklärungen vorgenommen, die aufgrund der Vielzahl verwandter Darstellungen und damit verbundener Aufgabentypen nötig erscheinen. Anschließend wird der Aufgabentypus *NLET* in Abschn. 3 einer bestimmten Form von linear-räumlichen Zahldarstellungen, der sogenannten *proportional number line*, und den damit verbundenen Konventionen zugeordnet. Auf dieser Basis erfolgt in Abschn. 4 eine *stoffdidaktische Analyse* von *NLETs*. Der Beitrag fokussiert dabei bewusst auf die *Grundschule*. Zwar besteht einer der Vorzüge von *number lines* gerade darin, dass sie über die Grundschule hinaus lernförderlich eingesetzt werden können (Padberg und Benz 2021, S. 92; Schulz und Wartha 2021, S. 69). Die *Grundlegung* des Verständnisses räumlich-linearer Zahldarstellungen, um die es diesem Beitrag geht, erfolgt aber in der Grundschule – oder sollte jedenfalls dort erfolgen. Der Artikel will beitragen zur Klärung der Frage, ob, wofür und in welcher Weise *NLETs* im Mathematikunterricht der Grundschule eingesetzt und welche Voraussetzungen dafür mit Kindern gezielt erarbeitet werden sollten. Antworten auf fachdidaktische Fragen wie diese, so Wittmann (2018, S. 135), „should be based on a sound mathematical and epistemological analysis"; um eine solche bemüht sich Abschn. 4.

Wie aber Kinder *number lines* im Allgemeinen, *NLETs* im Besonderen verstehen, welche typischen Missverständnisse und Schwierigkeiten dabei auftreten, welche Rolle Unterricht dabei spielt: Fragen wie diese erfordern über stoffdidaktische Überlegungen hinaus den Einbezug empirischer Forschung. In Abschn. 5 wird zu diesem Zweck die weitläufige Forschung zu *NLETs* im Bereich Natürlicher Zahlen gesichtet. Hier werden ergänzend auch einige qualitative Ergebnisse aus einer eigenen kleinen Interviewstudie mit Kindern einer dritten Grundschulklasse referiert. Vor diesem Hintergrund erfolgt in Abschn. 6 eine Einordnung der empirischen Befunde mit Blick auf den Unterricht. Der Beitrag schließt in Abschn. 7 mit der Formulierung und Begründung einiger Forschungsdesiderata. Der Fokus auf den *deutschen* Sprachraum in Abschn. 7 erfolgt deshalb, weil der Blick in andere Kulturkreise deutlich macht, dass sich Unterrichtstraditionen auch bezüglich der Verwendung von *number lines* teils deutlich unterscheiden (siehe dazu etwa Bartolini Bussi 2015). So wichtig Vergleiche sind, setzt methodisch haltbares Vergleichen voraus, dass zunächst jede Seite des Vergleichs für sich analysiert wird. Der vorliegende Beitrag versucht dies mit Bezug auf didaktische Empfehlungen in *deutschsprachigen* Veröffentlichungen, und muss auch dort eine Auswahl treffen.

2 Unterschiedliche Arten der *number line*: Begriffsklärungen

Zahlenstrahlen und damit verwandte Darstellungen unterscheiden sich in Aussehen und didaktischer Verwendung teilweise erheblich. Die Bezeichnungen für die verschiedenen Varianten sind im deutschen Sprachraum nicht einheitlich. Für den vorliegenden Beitrag erfolgt deshalb zunächst eine Klärung, mit welchen Bezeichnungen welche Arten von *number lines* in weiterer Folge angesprochen werden. Ich orientiere mich dabei an den Bezeichnungen in englischer Sprache, die Teppo und van den Heuvel-Panhuizen (2014, S. 57) vorschlagen.

Die Autorinnen unterscheiden innerhalb der „family of number line models“ fünf verschiedene Grundformen, von denen für die Grundschule und damit für diesen Beitrag allerdings nur die folgenden drei relevant sind:

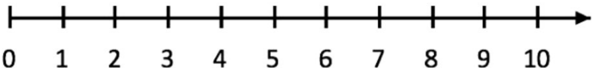
2.1 „filled number line“: eine gerade Linie mit vorgegebenen äquidistanten Markierungen. Diese sind entweder durchgehend mit fortlaufenden Natürlichen Zahlen in Ziffernschreibweise beschriftet (Abb. 1), oder aber dazu gedacht, in dieser Weise vollständig oder auch nur an einzelnen Markierungen beschriftet zu werden (Abb. 2).

In beiden Varianten werden jeweils *alle* Natürlichen Zahlen in einem bestimmten Abschnitt dargestellt. Der *Abstand* zwischen zwei benachbarten Markierungen beträgt also *jeweils eins*.

Daneben gibt es Darstellungen mit durchgängig vorgegebenen, äquidistanten Markierungen, die nicht für *aufeinanderfolgende* Natürliche Zahlen stehen, sondern etwa für *aufeinanderfolgende Zehner*- oder *Hunderter*zahlen. Teppo und van den Heuvel-Panhuizen (2014) gehen auf solche Formen nicht explizit ein. Sofern es in der weiteren Verwendung solcher *number lines* darum geht, an ihnen Zahlen darzustellen bzw. zu bestimmen, die *zwischen* den vorgegebenen Beschriftungen liegen, oder für deren Darstellung die vorgegebenen Beschriftungen nach links und/oder rechts zu *erweitern* sind (Abb. 3), würden Teppo und van den Heuvel-Panhuizen sie vermutlich der folgenden Kategorie zuordnen:

2.2 „proportional number line“: Gemeint ist in der Grundform eine Strecke oder ein Abschnitt auf einem Strahl mit beschrifteter Anfangs- und Endmarkierung, auf der die „relative position“ einer oder mehrerer dazwischenliegender Zahlen eingetragen werden soll (Teppo und van den Heuvel-Panhuizen 2014, S. 57; Abb. 4).

Abb. 1 Filled number line



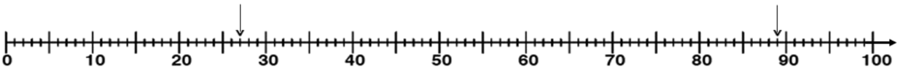


Abb. 2 Filled number line, die an den gekennzeichneten Stellen beschriftet werden soll

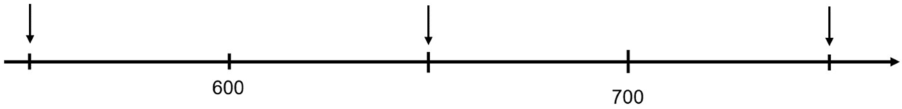


Abb. 3 Proportional number line, die an gekennzeichneten Stellen beschriftet werden soll

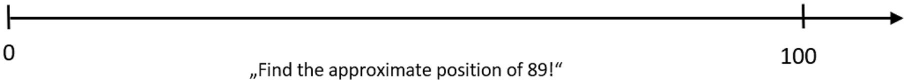


Abb. 4 Proportional number line mit typischer Aufgabe, nach Teppo und van den Heuvel-Panhuizen (2014, S. 57)

In deutschsprachiger Literatur wird diese Form, soweit ich sehe, ebenso als „leerer Zahlenstrahl“ (z. B. Lorenz 2009) bezeichnet wie die folgende, die aber von Teppo und van den Heuvel-Panhuizen (2014) begrifflich als

2.3 „empty number line“ von der *proportional number line* unterschieden wird. Diese Unterscheidung (siehe Abschn. 3) erscheint mir mit Blick auf den Unterricht wichtig und wird deshalb in diesem Beitrag übernommen. Anders als auf der *proportional* wird auf der *empty number line* die Aufmerksamkeit nämlich „solely on the order aspects of number“ (Teppo und van den Heuvel-Panhuizen 2014, S. 48) gelegt. Darstellungen dieser Art (Abb. 5) werden insbesondere verwendet, um *Rechenwege* darzustellen. In deutschsprachiger Literatur sind dafür neben der Bezeichnung „leerer Zahlenstrahl“ auch (je nach Verwendung) „Rechenstrich“ (z. B. Lorenz 2006) oder „Zahlenstrich“ (Käpnick 2014, S. 165) zu finden.

Um Missverständnisse bezüglich der jeweils gemeinten Form zu vermeiden, verwende ich im Folgenden in eigenen Ausführungen bewusst die englischsprachigen Begriffe nach Teppo und van den Heuvel-Panhuizen (2014).

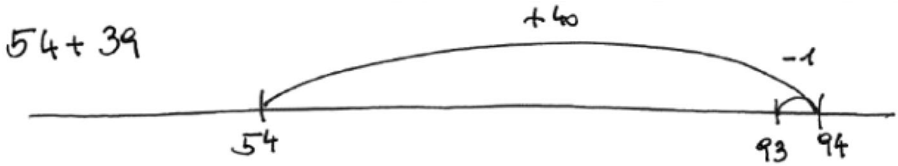


Abb. 5 Darstellung eines Rechenweges auf der empty number line

3 *Number line estimation tasks (NLETs)* als Typus von Aufgaben an *proportional number lines*

Die Form der *number line*, um die es in den in Abschn. 5 referierten Studien zu Leistungen und Strategien von Grundschulkindern bei der Bearbeitung von *NLETs* geht und die daher im Fokus dieses Beitrags steht, ist die *proportional*, nicht die *empty number line*. Denn auf letzterer, so etwa Gravemeijer (2014), sollte es nicht darauf ankommen, dass Zahlen gleicher Differenz in gleichen Abständen positioniert werden. Gravemeijer (2014, S. 469) begründet dies wie folgt: „[T]rying to strive for an exact proportional representation would severely hamper flexible use of the [empty] number line." So wäre es für den Zweck, im Rahmen einer Rechenkonferenz anhand von Darstellungen an *empty number lines* Rechenwege zu vergleichen, hinderlich, darauf achten zu müssten, etwa für +50 den Bogen zehnmal so lang zu machen wie für +5 (vgl. auch Schulz und Wartha 2021, S. 64).

In *NLETs* wird hingegen gerade erwartet, dass beispielsweise die Markierung für die Zahl 50 (möglichst) *genau in der Mitte* zwischen 0 und 100 erfolgt. Dem „order aspect", der auf der *empty number line* im Vordergrund steht (siehe 2.3), wäre auch Genüge getan mit dem Eintrag der 50 an irgendeiner Position zwischen 0 und 100. Für *NLETs* ist dies nicht ausreichend: Verlangt wird bei diesen nicht nur, dass größere Zahlen *weiter rechts* stehen, sondern auch, dass Zahlenpaare gleicher Differenz im gleichen Abstand zueinander positioniert werden (etwa Schulz und Wartha 2021, S. 29). Dies wird auf der *filled number line* vorgegeben und auf der *proportional number line* gefordert.

Die Gegenüberstellung macht deutlich, dass der kompetente Umgang mit den verschiedenen Varianten von *number lines* jedenfalls auch die Kenntnis und Einhaltung einer Fülle von Konventionen erfordert. Aus fachdidaktischer Perspektive sind diese ebenso Lernstoff wie das Wissen über Zahlen, das dabei verlangt ist. Dieser spezifische Lernstoff wird im folgenden Abschnitt näher analysiert.

4 Stoffdidaktische Analysen von *filled* und *proportional number line*

4.1 Mögliche Interpretationen der *filled number line*

Die Analyse beginnt bei der *filled number line* (vgl. oben Abb. 1). Gemäß Scherer und Moser Opitz (2010, S. 138) könne diese einerseits „kardinal (Anzahl der Einheiten, d.h. der Abstände), andererseits aber auch ordinal (Ordnung der Zahlen entsprechend der Markierungsstriche) gedeutet werden"; für ihr Verständnis müssten der „ordinale und kardinale Zahlaspekt in Verbindung gebracht werden" (ähnlich Padberg und Benz 2021, S. 81). Betrachten wir zur Verdeutlichung dieser Herausforderung die von 0 bis 10 reichende *filled number line* in Abb. 1.

4.1.1 Ordinale Deutung

Bei *ordinaler* Deutung ist darauf beispielsweise die Zahl Sieben als jener *Punkt* bzw. *Markierungsstrich* dargestellt, unter dem die Ziffer 7 geschrieben steht. Schipper et al. (2015) erklären dies zur *einzig korrekten* Interpretation:

> Der Zahlenstrahl selbst ist ein Modell des ordinalen Aspekts. [...] Jeder natürlichen Zahl entspricht damit ein ganz bestimmter Punkt des Zahlenstrahls, nicht ein Abschnitt bestimmter Länge (Maßzahlaspekt), erst recht nicht der [sic] Anzahl der Punkte bzw. Striche auf dem Zahlenstrahl (Kardinalzahlaspekt) (Schipper et al. 2015, S. 63).

Zur Beurteilung dieser eindeutigen Festlegung auf eine ordinale Deutung sei zunächst an die gerade auch von Schipper wiederholt akzentuiert vertretene Position erinnert, dass Anschauungsmittel grundsätzlich nicht „selbstredend" sind (Schipper und Hülshoff 1984), sondern von Kindern wie Erwachsenen *interpretiert* werden müssen, um Bedeutung zu erlangen. Auf *number lines* bezogen, sind diese nicht einfach Modell welchen Zahlaspekts auch immer, sondern werden allenfalls zu einem solchen durch die Deutung, die sie von Individuen erfahren.

Davon getrennt kann gefragt werden, ob die eine oder andere Deutung aufgrund von physischen Eigenschaften der Darstellung und/oder aufgrund von Vorerfahrungen der Deutenden mehr oder weniger naheliegend ist. Dazu merken etwa Scherer und Moser Opitz (2010, S. 85) an, dass an der *filled number line* der „ordinale Zahlaspekt im Vordergrund" stehe (ähnlich Hasemann und Gasteiger 2014, S. 115f.). Empirisch belastbare Studien dazu, welche Deutungen Kinder (und Lehrkräfte) zu Zahldarstellungen an (*filled) number lines* in welcher Häufigkeit (und bei welchen Aufgaben) tatsächlich aktivieren, konnte der Autor nicht finden; manche der Studien, auf die in Abschn. 5 eingegangen wird, liefern dazu aber einige Hinweise.

Eine nochmals andere Frage ist, ob eine bestimmte Deutung im Unterricht angestrebt werden sollte. Ebendies wird in weiterer Folge geprüft. Zunächst ist festzuhalten, dass neben der ordinalen Deutung der *filled number line* auch eine andere zumindest widerspruchsfrei möglich ist, die im Folgenden als „Mess-Deutung" näher erläutert wird.

4.1.2 Mess-Deutung

Im Sinne der Mess-Deutung (z.B. Diezmann et al. 2010; Fuson 1984; Gaidoschik 2020; Gravemeijer 2014; Lorenz 2010) wird beispielsweise die Zahl Sieben an der *filled number line* als Länge gedeutet. Sieben ist demgemäß zunächst die Länge des Segments zwischen den beiden mit 0 bzw. 7 beschrifteten Markierungen (Abb. 6).

Segmente der Länge sieben sind etwa auch zwischen den Markierungen 1 und 8, 2 und 9, 7 und 14 usw. zu finden. Segmente dieser Länge lassen sich stets in zwei Segmente der Längen sechs und eins, fünf und zwei usw. zerlegen. Sie sind um eins länger als Segmente der Länge sechs, halb so lang wie Segmente der Länge vierzehn, usw. Zahlbeziehungen werden also, dieser Deutung gemäß, an der *filled number line* als Beziehungen gemessener Größen (Längen) dargestellt (Gaidoschik 2020).

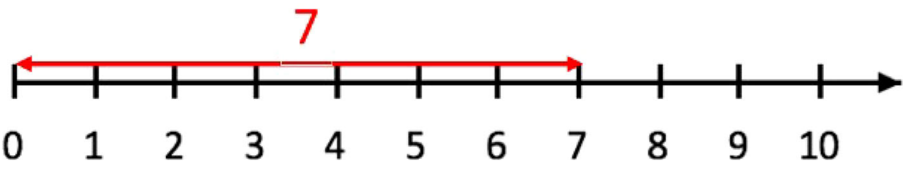


Abb. 6 Deutung der Zahl Sieben als Länge

Diese Deutung entspricht meinem Verständnis nach jener von u.a. Freudenthal (1999, S. 101: „The device beyond praise that visualises magnitudes and at the same time the natural numbers articulating them is the number line."), Fuson (1984, S. 218: „number line is a measure model, not a count model") oder auch Gravemeijer (2004; 2014). Im deutschen Sprachraum vertritt u.a. Lorenz explizit die Position, dass „der (leere) Zahlenstrahl als Messwerkzeug für die Anzahl" (2010, S. 10) erarbeitet werden solle. Ähnlich schreibt Sprenger (2018, S. 53): „Der Aufbau der Zahlengeraden basiert auf der fundamentalen Idee des Messens [...]." Sprenger stellt der Interpretation der Zahl (im Kontext ihrer Dissertation des Dezimalbruchs) als Strecke in weiterer Folge deren ordinale Interpretation als Ort/Punkt als eine *zweite* Deutung gegenüber. Im Folgenden soll hingegen gezeigt werden, dass es nicht um ein Nebeneinander oder gar Konkurrieren verschiedener Deutungen geht, sondern dass im Rahmen der Mess-Deutung vielmehr der ordinale wie auch der kardinale Zahlaspekt im Hegelschen Sinne „aufgehoben" sind.

Bezüglich des kardinalen Zahlaspekts ist zunächst festzuhalten, dass es bei der Mess-Deutung nicht, wie von Schipper et al. (2015, S. 63) als nicht tragfähige Interpretation zurückgewiesen, um die „Anzahl der Punkte bzw. Striche" geht. Sofern alle Einer-Markierungen und nur diese eingezeichnet sind, ergibt die Zählung der „Striche" zwischen 0 und 7 unter Einrechnung der Endpunkte acht, bei Zählung der dazwischenliegenden Striche wiederum nur sechs. Tatsächlich sorgt dieser Unterschied zwischen der Anzahl der Markierungen und der Anzahl der Einer-Segmente, die von diesen Markierungen eingefasst werden, bei manchen Kindern zumindest anfangs für Verständnisprobleme (Gaidoschik 2017, S. 83 f.; Höhtker und Selter 1995, S. 124).

Mess-Deutung heißt aber nicht „Zählen von Strichen". Messen als eine der „fundamentalen" (Vohns 2005) oder „zentrale[n] Ideen des Mathematikunterrichts" (Heymann 2013, S. 173) ist grundlegend der „Vergleich des zu Messenden mit einer definierten *Einheit*" (Heymann 2013, S. 173; meine Hervorhebung). Diese Einheit ist grundsätzlich frei wählbar, muss aber, wenn definiert, dann auch „wiederholt benutzt und dabei gezählt werden, wenn das zu Messende größer ist als die Maßeinheit" (Peter-Koop und Nührenbörger 2007, S. 92). Für die Mess-Deutung der *filled number line* im Bereich der natürlichen Zahlen heißt das, dass der beim Zeichnen einer *number line* gewählte Abstand von 0 bis zur Markierung 1 die Länge der Einheit „Einer" für diese *number line* vorgibt. Das Zehnfache dieser Länge ist als „Zehner-Abstand" ebenso konsequent einzuhalten wie das Hundertfache als „Hunderter-Abstand", und so weiter. Wird hingegen die Strecke von 0 bis 10 oder 0 bis 100 vorgegeben, kann daraus umgekehrt die Länge des Einer- bzw. Zehner-Abstands durch Teilung durch 10 bzw. 100 ermittelt werden. Nur auf Basis der Mess-

Deutung ergibt sich eine schlüssige Erklärung dafür, dass an *filled* und *proportional number lines* die Markierungen für Zahlen gleicher Differenz gleich weit voneinander entfernt sind – rein ordinal betrachtet, könnte 7 an beliebiger Stelle zwischen 6 und 8 stehen – und bei *NLETs* auf Proportionalität der Eintragungen zu achten ist. Nur auf Basis dieser Proportionalität wiederum eignen sich Darstellungen an *number lines* zur Verdeutlichung von *Zahlrelationen*, die über Vorher-Nachher/Kleiner-Größer hinausgehen.

Wie bereits angedeutet, steht die Mess-Deutung nicht im Widerspruch dazu, dass an *number lines* immer auch Zuordnungen zwischen Zahlen und *Positionen* erfolgen. Die Mess-Deutung schließt diese Zuordnungen vielmehr ein und *integriert* dabei ordinale und kardinale Deutungen. So zeigt etwa die an der *filled number line mit 7* beschriftete Position an, bis wohin sieben Einer reichen, wenn von 0 ausgehend nach rechts gemessen wird. Diese *eine* Position, die *ordinal* vor der mit 8 und nach der mit 6 markierten Position steht, ergibt sich durch fugenloses Aneinanderreihen von sieben *(kardinal)* im Sinne der Mess-Deutung als *Maßeinheiten* zu denkenden Einer-Segmenten.

Dass eine tragfähige Interpretation von *number lines* die „stete Verknüpfung ordinaler und kardinaler Zahlvorstellungen" fordert, halten etwa auch Götze, Selter und Zannetin (2019, S. 35) als eine Herausforderung für Lernende fest. Gravemeijer (2004, S. 119) berichtet in diesem Zusammenhang über Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern „to resolve among themselves whether a hash mark with number, say 38 for example, should be thought of as signifying 38 objects [...] or the thirty-eighth object". Das gezielte Erarbeiten einer Mess-Deutung der *number line* betrachten Gravemeijer und van Eerde (2009), gestützt auf Unterrichtserprobungen, als Hilfe zur Überwindung gerade auch solcher Schwierigkeiten: „Measuring may also be seen as a means of support in that cardinal and ordinal number aspects get integrated in the context of measuring" (Gravemeijer und van Eerde 2009, S. 518).

Soweit eine erste Gegenüberstellung von zwei möglichen, deutlich unterschiedlichen idealtypischen Deutungen von Zahldarstellungen, zunächst an der *filled number line,* samt ersten Argumenten, die aus Sicht des Autors für die Erarbeitung der Mess-Deutung im Unterricht sprechen. Im Folgenden soll in Abschn. 4.2 gezeigt werden, dass sich die Mess-Deutung insbesondere auch beim Lösen von *NLETs* an der *proportional number line* bewährt.

4.2 Stoffdidaktische Einordnung von *NLETs*

NLETs verlangen in der einen Variante („number-to-position", Siegler und Opfer 2003, S. 238) das Eintragen von Markierungen für Zahlen auf einer sonst leeren *proportional number line* zwischen zwei vorgegebenen Randzahlen. In dazu veröffentlichten Studien mit Probandinnen und Probanden im Grundschulalter ist die kleinere Randzahl zumeist 0 (bei Ebersbach et al. 2015 aber 1), die größere zumeist 100 und/oder 1000 (z. B. Ashcraft und Moore 2012; Barth und Paladino 2011; LeFevre et al. 2013; Peeters et al. 2017; Siegler und Opfer 2003), in einzelnen Studien auch 20 (White und Szücs 2012) oder 200 (Peeters et al. 2016). Bei der inversen Aufgabenvariante sind auf sonst leeren *number lines* zwischen zwei vorgegebenen Randzahlen Markierungen vorgegeben, die passend mit Zahlen in Ziffernschreibweise beschriftet werden müssen („position-to-number", Siegler und Opfer 2003, S. 238).

Welche Überlegungen sind aus stoffdidaktischer Sicht geeignet und welche Kompetenzen und Einsichten solchen Überlegungen vorausgesetzt, um *NLETs* dieser Art ohne Verwendung von Messinstrumenten befriedigend genau zu lösen? Welche Strategien für *NLETs* sind überhaupt denkbar, wie tragfähig (im Sinne passender Eintragungen) sie auch sein mögen? Im Folgenden wird dazu zunächst eine theoretisch gestützte Unterscheidung vorgeschlagen, ehe in Abschn. 5 auf empirische Studien zu *NLETs* eingegangen wird.

4.2.1 Strategien auf Basis von (fortgesetztem) Halbieren

Betrachten wir dafür zunächst die „number-to-position"-Variante, zunächst am Beispiel der Einordnung einer zweistelligen Zahl zwischen 0 und 100. Stoffdidaktisch betrachtet, ist diese Einordnung je nach Zahl unterschiedlich schwierig. Um beispielsweise 50 einzutragen, sollte die Mitte zwischen 0 und 100 gefunden werden. Das erfordert in der Durchführung jedenfalls räumliche und visuo-motorische Fähigkeiten[1]. Im Idealfall ist die Eintragung der Markierung für 50 in der Mitte zwischen 0 und 100 verbunden mit der Einsicht, dass 50 die Hälfte von 100 ist. Denkbar ist allerdings, dass ein Kind die Position von 50 in der Mitte zwischen 0 und 100 im Gedächtnis abgespeichert hat und passend einträgt, ohne über die Beziehung der Zahlen 50 und 100, die Entbündelung von 1 Hunderter zu 10 Zehnern etc. nachzudenken bzw. sich dieser Beziehungen bewusst zu sein: Eintragungen, die (wie vielleicht die Mitte zwischen 0 und 100) im Unterricht häufig(er als andere) thematisiert werden, können vermutlich auch ohne tieferes konzeptuelles Wissen gemerkt werden.

Passende Einordnungen allein auf Basis visuell gemerkter Positionen relativ zu den Randzahlen werden umso schwieriger, je mehr Schritte gesetzt werden müssten, wollte man planvoll zu befriedigenden Eintragungen gelangen. 25 etwa ist ein Viertel von 100. Um die passende Markierung für 25 zu finden, ist deshalb zielführend, die Strecke von 0 bis 50 zu halbieren. Um auf diese Idee zu kommen oder sie zumindest nachvollziehen zu können, muss zum einen 25 als Hälfte von 50 gewusst oder ermittelt werden. Empirische Befunde weisen dies als eine erste, beträchtliche Hürde aus: Kinder mit Defiziten im Verständnis des Bündelungsprinzips sind mitunter über das zweite Schuljahr hinaus nicht in der Lage, reine Zehnerzahlen mit ungerader Anzahl von Zehnern zu halbieren (Gaidoschik 2015b; Alton 2021).

Zum anderen ist für ein planvoll-verständiges Vorgehen dieser Art die zumindest implizite Mess-Deutung der *number line* vorausgesetzt[2]. Erst auf Basis dieser Deu-

[1] Die stoffdidaktische Analyse liefert damit einen *inhaltsspezifischen Grund* für die in Studien der kognitiven Neurowissenschaften ermittelten Korrelationen von „number estimation task performance" und „spatial skills" (Gunderson et al. 2012) sowie „visuomotor integration" (Simms et al. 2016).

[2] Mit *„implizit"* soll verdeutlicht werden, dass jemand, der an der *number line* über *Abstände* nachdenkt, diese als *Differenz* von zu *Markierungen* notierten *Zahlen* ermittelt, sie dann *halbiert* und zu anderen Abständen *hinzufügt* usw., dies alles auch tun kann, ohne sich auf einer *Meta-Ebene* dessen bewusst zu sein, welche Deutung der number line er/sie dabei *praktisch* anwendet – nämlich die Mess-Deutung, die in 4.1.2 *explizit* herausgearbeitet wurde.

tung kann jedenfalls verstanden und begründet werden, warum die arithmetischen Beziehungen (50 ist die Hälfte von 100, 25 die Hälfte von 50) in geometrischer Analogie als wiederholtes Halbieren von Strecken umgesetzt werden können (vgl. Schulz 2018, S. 1664). Für das planvolle Eintragen von 75 ist dann zusätzlich das Wissen gefordert, dass 75 um 25 mehr ist als 50 und daher zum Segment von 0 bis 50 noch ein Segment der Länge 25 hinzugefügt werden muss. Sich all diese Verfahrensschritte ohne die angesprochenen Einsichten „einfach zu merken", ist bei entsprechender Übung nicht unmöglich, aber jedenfalls schwieriger als das Merken der Markierung für 50. Zu erwarten ist deshalb, dass Kinder, die über diese Einsichten (zumindest implizite Messdeutung; Wissen, wie 100, dann 50 halbiert werden kann; Wissen, wie 25 zu 50 addiert oder von 100 subtrahiert werden kann ...) nicht verfügen, die Eintragungen für 25 und 75 nicht in der oben skizzierten Weise durch zweifaches Halbieren vornehmen.

4.2.2 Strategien auf Basis des Zehntelns und/oder des Zählens in Zehner- und größeren Schritten

Wie für jede beliebige Zahl zwischen 0 und 100, können Eintragungen für 25 wie 75 auch dadurch ermittelt werden, dass das Segment von 0 bis 100 zunächst in zehn (möglichst) gleich große Teilsegmente unterteilt wird (vgl. Mosandl und Nührenbörger 2014, S. 45).

Diese Strategie setzt voraus, dass 100 mit zehn Zehnern oder zehnmal zehn oder zehn Zehnerschritten gleichgesetzt wird. Diese drei unterschiedlichen Formulierungen verweisen auf unterschiedliche Grade der Einsicht ins Bündelungsprinzip, die dem Versuch, die Strecke in zehn gleich große Teile zu teilen, zugrunde liegen mögen; dazu mehr im nächsten Absatz. Die geometrische Umsetzung (Zehntelung einer vorgegebenen Strecke) ist räumlich-visuell ohne normierte Messinstrumente anspruchsvoller als (fortgesetztes) Halbieren.

Analoge Strategien helfen bei der Bewältigung von *NLETs* auch in höheren Zahlenräumen. Aus stoffdidaktischer Sicht ist aber anzumerken, dass das Analogon der Strategievariante „Zählen in Zehner-Schritten" (ohne *bewusstes Entbündeln* des als Gesamtlänge identifizierten Hunderters) umso schwieriger wird, je variantenreicher *NLETs* durch Ausdehnung auf größere Zahlenräume werden: Für Einordnungen zwischen 0 und 1000 müsste in Hunderterschritten, zwischen 0 und 10.000 in Tausenderschritten, zwischen 0 und 100.000 in Zehntausenderschritten gezählt werden, usw. Wird aber bei wechselnden Endzahlen nicht jeweils *planvoll* der jeweilige Stellenwert der Endzahl gedanklich entbündelt, bleibt nur ein *probierende Hochzählen* in Schritten von je 10 oder 100 oder 1000 usw. Bei variierenden rechten Randzahlen ist zu erwarten, dass nicht immer gleich der erste Versuch aufgeht. Zudem ist mit Stellenwertfehlern zu rechnen, wenn die Endkontrolle, ob die probeweise gewählte Schrittlänge bei zehnmaliger Anwendung auch wirklich bis zur Endzahl führt, unterbleibt oder mangels Einsicht ins Bündelungsprinzip nicht durchgeführt werden kann.

4.2.3 Zwischenfazit zur Bedeutung von Einsicht ins Dezimalsystem für tragfähige NLET-Strategien

Strategien für *NLETs,* die auch in höheren Zahlenräumen (und analog auch für Dezimalbrüche) in der dargestellten Weise *tragfähig* sind, setzen also neben der (siehe oben: zumindest *impliziten*) Mess-Deutung der *number line* auch Einsichten ins Dezimale Stellenwertsystem voraus: Die in dezimaler Stellenwertschreibweise notierte rechte Randzahl muss (bei *NLETs* mit 0 als linker Randzahl) für solche tragfähigen Strategien entbündelt werden, um die Länge der Abschnitte bei Zehntelung oder Halbierung des vorgegebenen Gesamtabstands zu ermitteln; für nochmaliges Halbieren muss erneut entbündelt werden; beim Addieren und Subtrahieren von Abständen muss stellengerecht vorgegangen werden.

4.2.4 Zählen in Einerschritten

Kehren wir noch einmal zurück zur Frage nach *alternativen* Vorgehensweisen für *NLETs* bis 100 – zu möglichen Strategien, die *nicht* in der erläuterten Weise auf Einsichten ins Dezimale Stellenwertsystem aufbauen. Denkbar ist, dass ein Kind Eintragungen vornimmt, indem es in kleineren Schritten als zehn *zählend* vorgeht. Für zum Beispiel 25 könnte es 25 mal um eins von 0 nach rechts rücken. Die Schwierigkeit bei *NLETs* besteht nun aber darin, dass keine Markierungen und damit auch keine Abstände vorgegeben sind, die gezählt werden könnten. Wäre dem Kind bewusst, dass zwischen 0 und 100 genau hundert Einer-Abstände gleicher Länge untergebracht werden müssen – verfügte es also über eine zumindest implizite Mess-Deutung der *number line* –, stünde es vor der Herausforderung, den hundertsten Teil dieser Gesamtstrecke zu *schätzen*. Um dann zu *überprüfen*, ob die Schätzung auch passend war, müsste das Kind den als Einer ermittelten Abstand hundertmal mitzählend abtragen, um zu sehen, ob es auf diese Weise auch tatsächlich bis 100 gelangt. Je nach Größe und Art des (bei solchem Vorgehen sehr wahrscheinlichen) Schätzfehlers müsste es aus diesem den richtigen Schluss ziehen, ob nämlich für einen zweiten, besseren Versuch die ursprünglich ermittelte Länge für den Einer vergrößert oder verkleinert werden muss, und um wie viel.

Tatsächlich ist wohl kaum damit zu rechnen, dass ein bei *NLETs* in Einerschritten zählendes Kind solche Überlegungen anstellt: Wäre es dazu in der Lage, fände es vermutlich auch eine weniger aufwändige Strategie. Wenn es aber einerseits in Einerschritten zählend vorgeht, andererseits die erläuterten Überlegungen und nachfolgenden Überprüfungen und gegebenenfalls Nachjustierungen nicht anstellt, dann ist zu erwarten, dass die Eintragungen jedenfalls ungenauer ausfallen als bei einem Kind, das in Zehnerschritten zählend vorgeht oder eine andere der oben erläuterten, in höherem Maß tragfähigen Strategien anwendet.

Weiter ist bei einem in Einerschritten zählenden Vorgehen zu erwarten, dass die Eintragungen umso deutlicher von der jeweils passenden Position abweichen, je größer die Differenz zwischen der einzutragenden Zahl und der Zahl/Markierung ist, von der ausgehend gezählt wird, denn diese Differenz bestimmt die Anzahl der Zählschritte.

Diesbezüglich sind Varianten zählenden Vorgehens möglich: nicht von 0 ausgehend, sondern rückwärtszählend von 100 (bei Zahlen größer 50 vorteilhaft im Vergleich zum zählenden Vorgehen von 0 aus); von 50 ausgehend vorwärts- oder rückwärts, in Einer- oder auch in Zehnerschritten. Wie erwähnt, kann dabei 50 als Mitte zwischen 0 und 100 eventuell auch nur „gemerkt" worden sein. Die Wahl von 50 als Ausgangspunkt für weiter- oder rückwärtszählendes Vorgehen setzt also nicht schon das bewusste Entbündeln von einem Hunderter in zehn Zehner voraus.

4.2.5 Zum didaktischen Wert von NLETs

Soweit eine kurze stoffdidaktische Analyse möglicher Überlegungen, Vorgehensweisen und der diesen jeweils vorausgesetzten Einsichten und Fertigkeiten, die beim Bearbeiten von *NLETs* zum Tragen kommen können. Dabei lag der Fokus bewusst auf jenen Varianten solcher Aufgaben, die in den meisten der im folgenden Abschn. 5 referierten Studien verwendet wurden; also Zuordnungen „number-to-position" bzw. „position-to-number" auf *proportional number lines* zwischen 0 und 100 bzw. 0 und 1000. Gemäß der in Abschn. 1 erläuterten Zielsetzung dieses Beitrags scheinen an dieser Stelle noch einige Überlegungen zum didaktischen Wert solcher Aufgaben angebracht, also zur Frage, was Kinder lernen können, wenn Sie Aufgaben dieser Art bearbeiten und dabei im Idealfall auch kompetente Lernbegleitung erfahren.

Der oben ausgeführten Analyse folgend kann dieser Wert einerseits darin gesehen werden, dass solche Aufgaben das Nachdenken über Stellenwerte und deren Beziehungen anregen. Das Anwenden der unter 4.2.1 erläuterten Strategien erfordert das Halbieren, Vierteln, Zehnteln zuvor planvoll ermittelter Abstände, dabei das Denken in Stellenwerten und Nachdenken über Stellenwerte, insbesondere das Nachdenken über Entbündelungen. Deshalb liefern umgekehrt die Bearbeitungen der Kinder auch wertvolle Rückmeldungen über ihr aktuelles Stellenwertverständnis. Das gilt umso mehr, je größer die Zahlenräume und damit auch variantenreicher solche Aufgaben werden. Denn probierend in Schritten zählende Zugänge sind dann angesichts der Vielzahl möglicher Zählarten (Einer-, Zehner-, Hunderterschritte ...) zumindest mühsam, und Versuche, sich Lösungen gedächtnismäßig einzuprägen, wenig erfolgversprechend.

Andererseits kann vermutet werden[3], dass *NLETs* Kinder dabei unterstützen können, über die einzelne Lösung hinaus dezimal strukturierte linear-räumliche Vorstellungen zu Zahlen auszuprägen und zu festigen. Solche linear-räumlichen Vorstellungen zu Zahlen sind für eine Vielzahl von Anwendungen nützlich und daher aus didaktischer Sicht erstrebenswert (vgl. Gaidoschik 2015a). Dafür nur zwei Beispiele:

- Wer bei 701–698 die Vorstellung einer *number line* aktiviert, auf der 698 „knapp vor" und 701 „knapp hinter" 700 eingetragen ist, hat damit die Differenz drei („den Abstand") im Grunde schon mitgedacht. Er/sie wird dafür keine schriftliche Subtraktion bemühen; anders als etwa ein großer Teil der Kinder, die Selter (2000) zu ihren Rechenwegen unter anderem bei dieser Aufgabe befragt hat.

[3] Auch dabei handelt es sich aktuell nur um eine – aus stoffdidaktischer Sicht plausible – *Vermutung*; siehe Abschnitt 7.

- Wer für die Aufgabe 355 + _ = 1000 gedanklich den „Weg" auf einer *number line* von der Markierung 355 zur Markierung 1000 „durchwandert" (erst 5 bis 360, dann 40 bis 400, dann 600 bis 1000), ist gefeit vor einem dokumentierten Fehlertypus, der für diese Aufgabe zur Lösung 755 führt (isoliertes Ergänzen von 3, 5, und 5 jeweils auf 10; vgl. Schipper et al. 2017, S. 83).

Gerade auch für die zweite Aufgabe gilt, dass die Vorstellung einer *number line* zur Lösung nur hilfreich ist, wenn sie, getragen von Stellenwertverständnis, dezimal strukturiert ist (Gaidoschik 2015a). Sollte ein Kind hingegen 355 nur „weiter links" und 1000 „weiter rechts" denken, wird ihm dies für die Ermittlung der Differenz wenig helfen.

Soweit beispielhaft zu der über den Umgang mit *NLETs* hinausreichenden Nützlichkeit von dezimal-strukturierten linear-räumlichen Zahlvorstellungen[4]. Diese wird nicht unwesentlich gesteigert durch den Umstand, dass derartige Vorstellungen auch für den Umgang mit Zahlen hilfreich sind, bei denen andere Vorstellungen (und zuvor Darstellungen) an Grenzen geraten oder versagen, sei es im Bereich vielstelliger Natürlicher Zahlen, sei es bei Rationalen und Negativen Zahlen (Padberg und Benz 2021, S. 92; Schulz und Wartha 2021, S. 27).

4.3 Zwischenfazit

Ziel der bisherigen Ausführungen war, sogenannte *NLETs*, einen Aufgabentyp, der in zahlreichen empirischen Studien insbesondere der Neuro- und kognitiven Psychologie Verwendung findet, aus stoffdidaktischer Perspektive zu beleuchten. Es sollte gezeigt werden,

- dass für ein planvolles Lösen von *NLETs* eine zumindest implizite Mess-Deutung der bei solchen Aufgaben unterstellten *proportional number line* zumindest hilfreich ist;
- dass tragfähige Strategien für *NLETs* das Halbieren, Vierteln, eventuell Zehnteln von Zahlen erfordern, was spätestens bei *NLETs* zwischen 0 bis 100 Einsichten ins Dezimale Stellenwertsystem erfordert, in dem diese Zahlen notiert werden;
- dass gerade auch dieses Erfordernis für den gezielten Einsatz von *NLETs* im Mathematikunterricht spricht, weil Kinder auf diese Weise angeregt werden können, über Stellenwerte und deren Beziehung (Bündeln, Entbündeln) nachzudenken;
- dass schließlich, verbunden mit diesem Nachdenken über Stellenwerte und deren Beziehung, der gezielte Einsatz von *NLETs* im Mathematikunterricht vermutlich dazu beitragen kann, dass Kinder dezimal-strukturierte linear-räumliche Zahlvorstellungen ausprägen und festigen, die über *NLETs* hinaus vielfältig hilfreich im Umgang mit zwei- und mehrstelligen Zahlen sind.

[4] Die gedankliche dezimale Strukturierung ist auch an der *empty number line* wichtig. An dieser geht es zwar nicht um *Proportionalität* der Darstellungen, für ihren förderlichen Einsatz ist aber sehr wohl gefordert, dass Kinder beim Eintragen von „Sprüngen" *dezimale Einheiten* nicht nur *unterscheiden*, sondern z. B. bei Verwendung von Hilfsaufgaben auch in ihrem *Zusammenhang* denken (+19 als +20-1, etc.).

Insgesamt lässt die Analyse erwarten, dass sich Defizite im Verständnis von Bündelungs- und Positionsprinzip negativ auf die Leistungen bei *NLETs* auswirken. Ebenso ist zu vermuten, dass Kinder ihr allenfalls vorhandenes Wissen über Zahlbeziehungen in einem bestimmten Zahlenraum nicht oder nicht adäquat für die Lösung solcher Aufgaben einsetzen können, sofern sie *number lines* nicht im Sinne der Mess-Deutung interpretieren. Wie weit lassen sich diese stoffdidaktisch begründeten Annahmen empirisch stützen?

5 Empirische Befunde zu *number line estimation tasks*

5.1 Zum Grund für das Interesse an *NLETs* in psychologischer Forschung

Für eine Metaanalyse haben Schneider et al. (2018) nicht weniger als 41 Studien (peer-reviewed, in englischer Sprache) berücksichtigt, die folgende Bedingung zu erfüllen hatten: „The study reported at least one standardized effect size of the strength and the direction of the bivariate relation between number line estimation proficiency and mathematical competence“ (Schneider et al. 2018, S. 1471). Seither sind zahlreiche weitere Studien dieser Art hinzugekommen (etwa Vasilyeva et al. 2023; Xing et al. 2021).

Im obigen Zitat ist der Grund für das große Interesse psychologischer Forschung an *NLETs* angesprochen: In frühen Studien (etwa Siegler und Booth 2004) wurden statistisch signifikante Korrelationen zwischen Leistungen von Kindern in *NLETs* auf der einen, ihrer (unterschiedlich operationalisierten) „mathematischen Kompetenz“ auf der anderen Seite ermittelt. Dahinter wurde ein kausaler Zusammenhang vermutet derart, dass mit solchen Aufgaben „a central component of mathematical thinking“ (Schneider et al. 2018, S. 1468) gemessen werde, welche ihrerseits, über die Bewältigung von *NLETs* hinausgehend, entscheidend sei für die Entwicklung weiter gefasster mathematischer Fähigkeiten. Schneider et al. (2018, S. 1468) halten dies als „a widely accepted theoretical explanation for the correlation between number line estimation task and mathematical competence“ fest. Noch unklar sei aber, worin diese durch *NLETs* erfasste „zentrale Komponente“ tatsächlich bestehe (so auch Xing et al. 2021).

5.2 *NLETs* als Indikatoren für die mentale Zahlenrepräsentation

Ein Teil der damit befassten Autoren und Autorinnen sieht die Differenz zwischen den von Probandinnen und Probanden vorgenommenen Eintragungen und den (im Sinne der *proportional number line*) exakten Positionen als Indikator für die Güte der mentalen „representation of numerical magnitudes“ von Zahlen (Schneider et al. 2018, S. 1648). Diese Interpretation fußt auf den theoretischen Annahmen des „Triple Code Modells“ von Dehaene (1992), wonach die bedeutungshaltige Verarbeitung von Zahlen im Gehirn von Erwachsenen verbunden sei mit deren Einordnung entlang einer „mental number line [...] with smaller numbers on the left and larger numbers on the right“ (Landerl 2019, S. 10). Eine verzögerte oder nachhaltig gestörte Entwicklung dieser „mentalen Größenrepräsentation“ äußere sich dieser Interpretation zufolge in – gemessen am Altersdurchschnitt – größeren Abweichungen bei *NLETs* und wirke sich als reduzierter oder gestörter „number sense" (Dehaene 1997) insgesamt negativ auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen aus (Schneider et al. 2018, S. 1468).

Auf Grundlage dieser Deutung wurden *NLETs* für psychologische Forschung einerseits interessant als möglicher „Prädiktor" späterer Mathematikleistungen (z.B. Booth und Siegler 2006) und von „Dyskalkulie" (z.B. Geary et al. 2007). Andererseits wurden Interventionsstudien durchgeführt (vgl. Moeller et al. 2015) in der Annahme, dass Training in *number line estimation* auch Rechenleistungen verbessere[5] (z.B. Kucian et al. 2011).

5.3 Empirische Befunde zu *Strategien* beim Bearbeiten von *NLETs*

Andere Autoren und Autorinnen wie LeFevre et al. (2013, S. 2) halten dagegen: „It is not necessary to postulate direct connections to an internal mental number line to understand performance [in *NLETs*]". LeFevre und Kolleginnen schließen aus ihrer Längsschnittstudie mit 101 kanadischen Kindern (zweite bis vierte Klasse), dass vielmehr das Verständnis der „place value structure between 100 and 1000" in Kombination mit räumlichen Fähigkeiten entscheidend sei für die Leistung in *NLETs* mit geforderten Einordnungen zwischen 0 und 1000. Vorsicht sei hingegen geboten gegenüber „training in number line task performance with the expectation that it will transfer to improved calculation skills" (S. 8). Die Autorinnen resümieren:

> It may be more useful to view the number line task as a measure of children's ability to skilfully assemble an array of relevant knowledge to perform a complex and (often) novel numerically-relevant task (LeFevre et al. 2013, S. 9).

So wie LeFevre et al. (2013) erheben zahlreiche weitere Studien zusätzlich zur Performanz in *NLETs* verschiedene *Elemente des Wissens* der Kinder über Zahlen und Stellenwertsystem (z.B. Ebersbach et al. 2015), erfassen das *Lösungsverhalten* durch Interviews (z.B. Peeters et al. 2016; Petitto 1990) und/oder *Eye Tracking* (z.B. van't Noordende et al. 2016), variieren *Aufgabenformate* (z.B. Peeters et al. 2016) und *Methoden der statistischen Analyse* (z.B. Rouder und Geary 2014; Xing et al. 2021) und generieren auf diesen Wegen Aussagen auch über *die Strategien* der Kinder beim Bearbeiten von *NLETs*. Auf einige solcher Studien wird im Folgenden näher eingegangen. Die Auswahl erhebt nicht den Anspruch, diesen äußerst umfassenden Forschungszweig repräsentativ abzubilden. Die ausgewählten Studien scheinen mir im Hinblick auf die Frage, ob und wie *NLETs* im Unterricht thematisiert werden sollten (siehe 4.5) besonders interessant, da ihnen Hinweise auf Zusammenhänge zwischen Strategien, Wissen und Erfolg bei *NLETs* zu entnehmen sind. Für einen umfassenderen Überblick sei verwiesen auf Schneider et al. (2018).

[5] Der Forschungsstand dazu ist uneinheitlich. Schneider et al. (2018) verweisen auf methodische Limitationen veröffentlichter Interventionsstudien und halten als ein wesentliches Ergebnis ihrer Metastudie fest, dass „more direct evidence on the strength and direction of any causal relations between number line estimation and broader mathematical competence" nötig sei; siehe dazu auch im Folgenden die Einschätzung von LeFevre et al. 2013 (Abschn. 5.3).

Zunächst konvergieren Befunde vorliegender Studien dahingehend, dass die Strategien bei *NLETs* zum einen vom Alter abhängen in der Weise, dass Erwachsene und ältere Kinder sich eher an „Referenzpunkten" wie der Mitte oder Vierteln (siehe 4.2.1) orientieren als Schülerinnen und Schüler der ersten Grundschulklassen (z. B. Ashcraft und Moore 2012; Doritou und Gray 2006; Ebersbach et al. 2015; Peeters et al. 2017; Petitto 1990). Für die im Grundschulalter untersuchten Kinder waren solche Referenzpunkte, sofern überhaupt verwendet, im Wesentlichen die Endmarkierung bzw. die Mitte, kaum jedoch ein Viertel oder drei Viertel der Gesamtstrecke (Doritou und Gray 2006; Fromme 2017; Peeters et al. 2016; Petitto 1990).

Zum anderen zeigte sich ein Zusammenhang von Strategien, Passung der Eintragungen und mathematischen Kompetenzen: Kinder, die in Mathematik als „lernschwach" eingestuft wurden, orientieren sich (noch) seltener an der Mitte oder auch nur der Endmarkierung (Simon und Schindler 2022; van't Noordende et al. 2016) und gelangen zu signifikant weniger passenden Eintragungen (van't Noordende et al. 2016). Die Orientierung an Referenzpunkten korreliert signifikant positiv mit Leistungen in standardisierten Schulmathematiktests (Peeters et al. 2016; Xing et al. 2021), mit Testwerten im Konstrukt „familiarity with numbers" (Fähigkeit, von einer zweistelligen Zahl aus bis über die nächste Zehnerzahl hinaus weiterzuzählen; Ebersbach et al. 2015) wie auch mit Testleistungen im Konstrukt „numeration" (u. a. die Fähigkeit, dreistellige Zahlen nach Größe zu ordnen; LeFevre et al. 2013). Werden Kindern (nicht beschriftete) Referenzpunkte *vorgegeben*, erhöht dies die Genauigkeit der Eintragungen nur bedingt (Peeters et al. 2016); entscheidend scheint, dass Kinder *von sich* aus eine Orientierung (etwa an der Mitte) vornehmen (Xing et al. 2021).

Sofern Kinder sich *nicht* an Referenzpunkten orientieren, aber auch in Kombination mit der Nutzung solcher Referenzpunkte, wurden ihre Strategien in vorliegenden Studien als „counting" (etwa Petitto 1990, S. 66) oder „Zählen" (Fromme 2017, S. 129) beschrieben. Doritou und Gray (2006) halten fest, dass Kinder der Klassen 2 bis 5 bei 45 % der zwischen 0 und 100 gemachten Eintragungen von 0 ausgehend in Einerschritten zählten und bei jedem Zahlwort eine Markierung anbrachten. Weitere 45 % der Eintragungen seien gleichfalls zählend erfolgt, ohne dass die Kinder Markierungen anbrachten; vermutlich haben sie dabei Auge und Stift entlang der *number line* in gedachten Einer- oder auch Zehnerschritten nach rechts (oder mit Ausgangspunkt 100 nach links) geführt, wie dies etwa auch Fromme (2017, S. 129) für „einige Kinder" beschreibt.

5.4 Ergänzende Befunde aus einer eigenen Interviewstudie

In einer eigenen explorativen Studie wurden acht Kinder einer 3. Klasse mit *NLETs* konfrontiert. Laut Auskunft der Lehrerin hatten diese Kinder in der 2. Klasse den vollständig markierten, mit Zehnerzahlen beschrifteten Zahlenstrahl kennengelernt, auf dem Zahlen gesucht und eingetragen werden sollten. In weiterer Folge seien auf durchgehend markierten, aber nur mit Zehnerzahlen beschrifteten Hunderterstrahlen zu vorgegebenen Zahlen Zehnernachbarn bestimmt worden. Das Einordnen von Zahlen an leeren Zahlenstrecken (*proportional number line*, siehe 2.2.2) sei kein Thema gewesen. Der Zahlenstrahl sei in der 2. Klasse kaum noch verwendet worden, wohl aber der Rechenstrich (*empty number line*, siehe 2.2.3) beim Addieren und Subtrahieren.

Zum Zeitpunkt der Interviews, im Februar des dritten Schuljahres, hatten die Kinder die *empty number line* auch für Rechnungen bis 1000 verwendet. Ein durchgehend markierter Zahlenstrahl (*filled number line,* siehe 2.2.1) sei kurz bei Erweiterung des Zahlenraums auf 1000 im Herbst der 3. Klasse eingesetzt worden. Eintragungen an leeren Zahlenstrecken seien auch im 3. Schuljahr nicht behandelt worden.

Zu ebensolchen Aufgaben wurden nun einige Kinder dieser Klasse interviewt. Dazu wurden ihnen, mittig angeordnet auf einem DIN A4-Bogen im Querformat, *number lines* von 0 bis 100 bzw. 0 bis 1000 vorgelegt, mit 21 cm Abstand zwischen den beiden beschrifteten Markierungen. Darauf sollten sie je 5 Zahlen (49, 76, 23, 91, 19 bzw. 519, 951, 249, 751, 99) eintragen („Wo ungefähr muss die Markierung für ... sein?"). Unmittelbar nach Eintragung wurden sie zu ihrem Vorgehen und ihren Überlegungen befragt.

Es folgen zwei kurze Transkripte, die mir als Ergänzung zu den referierten Studien deshalb relevant erscheinen, weil sie über die in veröffentlichten Studien durch Beobachtung (Petitto 1990), *Eye tracking* (Simon und Schindler 2021; 2022; Van't Noordende et al. 2016) oder auch verbale Protokolle (Peeters et al. 2016; Simon und Schindler 2021; bei Doritou und Gray 2006 „not focused upon" [S. 70]) erfassten *Vorgehensweisen* (zählendes Vorgehen, Orientierung an Referenzpunkten ...) hinaus zumindest in Ansätzen und exemplarisch auch Einblick in zugrundeliegende *Denkweisen* von Kindern geben. Die explorative Studie, der sie entnommen sind, erlaubt keine generalisierbaren Aussagen; die Beispiele scheinen mir aber die Dringlichkeit gerade auch solcher Erhebungen in umfangreicherer und methodisch kontrollierter Form zu belegen (siehe Abschn. 7).

Marco[6] hat soeben 23 zwischen 0 und 100 etwa dort eingetragen, wo tatsächlich 40 passend gewesen wäre. Er erläutert sein Vorgehen nachträglich wie folgt:

> Marco (1): Da habe ich mir gedacht, ungefähr **hier** *[zeigt dabei auf die* ***Position****, die etwa 15 entspricht, ohne sie zu markieren]* oder **hier** *[zeigt nun auf die* ***Position****, die etwa 20 entspricht]* ist zehn, und dann zwanzig *[geht mit dem Stift weiter nach rechts, etwa auf die Position von tatsächlich 35],* und dann noch drei *[geht in* ***einer*** *Bewegung mit dem Stift noch etwas weiter nach rechts an die zuvor gesetzte Markierung].*
> Interviewer: *Und wie kommst du drauf, dass* **da** *[zeigt etwa auf die* ***Position****, bei der das Kind zuvor „oder hier ist zehn" gesagt hat] zehn ist?*
> Marco (2): Weil ungefähr **so** lang *[zeigt dabei den von ihm gewählten* ***Abstand****, indem er mit der Bleistiftspitze hin und her pendelt]* zehn ist.
> Interviewer: *Woher weißt du, dass zehn so lang ist?*
> Marco (3): Weil wir haben ja schon oft mit einem Lineal abgemessen, da war es auch ungefähr **hier** *[zeigt in etwa auf die Position, die er zuvor im zweiten Versuch als 10 bezeichnet hatte].*

[6] Name verändert, so auch im Folgenden.

Marco wechselt in seinen Erläuterungen zwischen *ordinaler* Sprechweise („da", „hier", mit entsprechenden Gesten) in (1) und (3) einerseits und andererseits verbalen Äußerungen und Gesten, die Gedanken ans *Messen* vermuten lassen, wenn er (2) von „Abstand" spricht und dabei simultan auf einen solchen deutet und seine Eintragung in (3) explizit unter Verweis auf Erfahrungen mit dem Abmessen mit einem Lineal begründet. Ein planvolles Erschließen der Länge von „zehn" aus dem vorgegebenen Segment von 0 bis 100 ist nicht erkennbar. Es bleibt unklar, ob er sich dessen bewusst ist, dass zehn Zehner(-Abstände) so lang sein müssen wie der Hunderterabstand, der mit der Strecke zwischen 0 und 100 vorgegeben ist. Er überprüft jedenfalls nicht, ob zehn „ungefähr so lange" Abstände bis 100 passen. Er führt das Abtragen der von ihm als „zehn" erklärten Abstände nicht über die von ihm für 23 ermittelte Markierung weiter. Es kann aber vermutet werden, dass er die Abstände („**so** lang") bzw. Positionen („ungefähr **hier**") nicht willkürlich wählt. Seine Äußerungen lassen vielmehr darauf schließen, dass er dabei auf sein visuelles Gedächtnis zurückgreift: Er habe die Länge seiner Zehner-Abstände (bzw. die Position der Markierung 10) in Erinnerung an das Lineal gewählt. Freilich ist die ihm vorliegende *number line* so dimensioniert, dass ihre Zehner nicht 10, sondern 21 mm lang sind; die von ihm im zweiten Versuch für 10 gewählte, tatsächlich 20 entsprechende Markierung ist also ca. 42 mm von 0 entfernt. Marco spricht auch nur von „zehn" und nicht von „zehn Millimetern" oder „zehn Zentimetern". Im Interview wird nicht überprüft, mit welcher Länge Marco *einen* Millimeter oder einen Zentimeter assoziiert. Er erweckt aber auch nicht den Eindruck, dass es ihm auf Genauigkeit seiner Eintragung ankommt: In der kurzen Sequenz verwendet er dreimal das Wörtchen „ungefähr", welches auch in der Aufgabenstellung vorkommt.

Vergleichen wir Marcos Vorgehen und Argumentieren mit dem von Lena. Abb. 7 zeigt, an welcher Stelle zwischen 0 und 1000 sie 519 eingetragen hat. Zu ihrem Vorgehen befragt, erklärt Lena, sie habe zunächst 500 gesucht:

> Lena: Da musste man hier ungefähr **messen**, aus dem Gedächtnis. Ich habe mir zuerst gedacht, jeder einzelne Finger ist ungefähr, für mich, hundert. Dann war ich **hier** *[zeigt auf die in* Abb. 7 *schwach ausgeprägte Markierung bei etwa einem Drittel der Strecke].* Aber weil das dann **so viel Abstand** auf tausend *[zeigt auf die verbleibende Strecke]* geben würde, hätte ich eigentlich die Mitte müssen sollen [sic]. Also habe ich **da** die 500 hingetan *[zeigt dabei in etwa auf die Mitte zwischen 0 und 1000].* Dann ist **da** 510 *[legt den kleinen Finger der rechten Hand rechts von der zuvor gezeigten Mitte und deutet mit dem Kinn auf die Position ein Fingerbreit rechts der Mitte].* Dann ist **da** 519 *[versetzt den kleinen Finger etwa um eine Fingerbreite nach rechts und dann gleich wieder um ein kleines Stück nach links].*

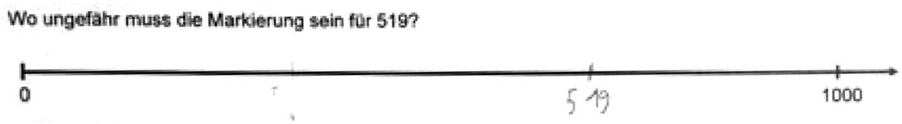


Abb. 7 Lenas Eintrag für 519 zwischen 0 und 1000; etwa in der Mitte zwischen 0 und diesem Eintrag sieht man schwach Lenas ersten, von ihr später korrigierten Versuch, 500 einzutragen

> Interviewer: Du hast jetzt deinen kleinen Finger hergenommen, was hast du dir dabei gedacht?
> Lena: Ich habe gedacht, wenn **dieser Abstand** *[zeigt den kleinen Finger]* ungefähr 10 sein würde – ich habe mir den kleinen Finger genommen, weil das der schmalste ist, und dann habe ich mir gedacht, ein bisschen mehr, oder 520, und dann 1.

Auch Lenas Tun und Äußerungen lassen an mehreren Stellen eine implizite Mess-Deutung der *number line* vermuten: Ihren ersten Versuch, 500 durch fünfmaliges Aneinanderfügen einer Fingerbreite zu erhalten (erster Hinweis auf eine Mess-Deutung), korrigiert sie, als sie erkennt, dass die verbleibende Strecke bis 1000 zu lang ist (Hinweis 2). Nun bringt sie ihr Wissen ein, dass 500 die Hälfte von 1000 ist, und verbindet das mit dem Gedanken an eine Streckenhalbierung (Hinweis 3). Von 500 ausgehend will sie sodann zwei Zehner-Abstände nach rechts messen. Sie unterscheidet also in der Zifferndarstellung 519 die Dezimalstellen korrekt und weiß, dass 519 um fast zwei Zehner mehr als 500 ist. Sie weiß auch, dass die für Zehner verwendete Maßeinheit kleiner sein muss als die für Hunderter, weshalb sie den „schmalsten" Finger verwendet (Hinweis 4). Dass die Strecke für Zehner aber zehnmal in die für Hunderter passen müsste, bedenkt sie zumindest nicht, und landet damit bei einer deutlich unpassenden Markierung.

Lenas Vorgehen ist, mit allen Unzulänglichkeiten, ein Beispiel für die in zahlreichen Studien festgehaltene „midpoint-strategy" (etwa Petitto 1990, S. 67; siehe 5.3). Diese nutzten alle acht aus Lenas Klasse interviewten Kinder für das Eintragen von 49 zwischen 0 und 100, vier auch für das Eintragen von 519 zwischen 0 und 1000. *Kein Kind* verwendete weitere Referenzpunkte, obwohl vier der einzutragenden Zahlen (76 und 23 bzw. 751 und 249) bewusst gewählt worden waren, um solche Strategien hervorzulocken.

6 Diskussion der empirischen Befunde mit Blick auf den Unterricht

6.1 Der Unterricht zu *NLETs* als weitgehend Unbekannte

Für die acht von mir interviewten Kinder ergibt die Befragung der Lehrkraft, dass im Unterricht nie darüber gesprochen worden sei, welche Zahlen bei einem bzw. drei Viertel der Zahlenstrecke zwischen 0 und 100 bzw. 0 und 1000 einzutragen sind, und warum. *NLETs* und Strategien zu deren Lösung seien nicht Gegenstand des Unterrichts dieser Kinder gewesen, wie auch, so die Lehrkraft, nicht gezielt auf eine Mess-Deutung von *number lines* hingearbeitet bzw. überhaupt darüber gesprochen worden sei, wie die Kinder Darstellungen an *number lines* verstehen.

Es ist zu vermuten, dass all dies auch auf zumindest einen beträchtlichen Teil der Kinder zutrifft, die im Rahmen der im Abschn. 5.3 referierten Studien befragt wurden. Eine Vermutung muss das deshalb bleiben, weil in den meisten dieser Studien auf den Unterricht nicht eingegangen wird. Peeters et al. (2016, S. 121) halten aber explizit fest, dass in den von ihnen erfassten Klassen *NLETs* zuvor nicht systematisch behandelt worden seien, und LeFevre et al. (2013, S. 9) vermerken in der Diskussion ihrer Ergebnisse, dass *number line estimation* für Kinder „complex and (often) novel" sei.

Nun hat aber die Analyse in Abschn. 4 deutlich gemacht, dass *number line estimation* ein Lernstoff ist. Als wichtige Erkenntnis aus den in Abschn. 5.3 referierten Studien und den ergänzenden Befunden aus 5.4 lässt sich aus fachdidaktischer Perspektive festhalten, dass viele Kinder, jedenfalls in der Grundschule, Schwierigkeiten mit diesem Lernstoff haben, bei *NLETs* wenig effektive Strategien anwenden und infolgedessen zu wenig passgenauen Eintragungen kommen.

6.2 Konvergenz eines Teils der empirischen Forschung mit Erwartungen auf Basis stoffdidaktischer Analysen

Für einen Teil der empirischen Forschung zu *NLETs* liegt der Grund dieser Schwierigkeiten *in den Kindern* selbst: Ihr noch nicht oder nicht ausreichend entwickelter oder (im Fall einer „Dyskalkulie") grundsätzlich defizitärer *number sense* sei dafür verantwortlich (z. B. Booth und Siegler 2006; Geary et al. 2007). Umgekehrt werden *NLETs* als Maßnahmen zur Förderung von *number sense* und damit verbunden auch von Rechenfähigkeiten vorgeschlagen (etwa Kucian et al. 2011).

Andere Studien kommen zum Ergebnis, dass *number line estimation* sich nicht besser als statistischer Prädiktor für Rechenleistungen eignet als umgekehrt (LeFevre et al. 2013), dass also *Korrelationen* zwischen diesen Bereichen messbar sind, damit aber über *Kausalität* nichts gesagt ist (Schneider et al. 2018; Xing et al. 2021), und gelangen auf unterschiedlichen Wegen zum Schluss, dass wohl beides von anderen Faktoren abhängt. Das scheint aktuell die Mehrheitsposition innerhalb der kognitiven Psychologie zu sein, wie sie etwa auch von Mulligan et al. (2018, S. 159) in ihrem Überblicksartikel zusammengefasst wird. Von kognitionspsychologischer Seite werden solche Faktoren unter anderem als „familiarity with numbers" (Ebersbach et al. 2015), „understanding of numbers" (van't Noordende et al. 2016) oder auch spezifischer als „grasp of place value structure" (LeFevre et al. 2013) gefasst.

Die stoffdidaktische Analyse in Abschn. 4 erlaubt, als wesentliche „andere Faktoren" im Sinne einer Forschungshypothese die folgenden abzuleiten: Tragfähige Strategien für *NLETs* fordern zum einen (zumindest implizit) eine Mess-Deutung der proportional number line. Aus Positionen müssen Abstände ermittelt, diese im Sinne des Messens mit dem Gedanken an eine Maßeinheit (ob Einer oder Zehner oder auch Fünfziger ...) in Verbindung gebracht werden (siehe Abschn. 4.1.2). Zum anderen sollte für Aufgaben, auf denen Einordnungen zwischen 0 und 100 oder 0 und 1000 vorgenommen werden müssen, das Entbündeln dezimaler Einheiten im jeweiligen Zahlenraum geläufig sein, um eine als 100 oder 1000 etc. ermittelte Gesamtstrecke (fortgesetzt) halbieren oder zehnteln zu können (siehe Abschn. 4.2.3).

Zu betonen ist zudem, dass damit lediglich zwei wesentliche Bereiche von vermutlich günstigen Voraussetzungen benannt sind. Auch bei Vorliegen derselben erfordert es noch eigenständige gedankliche Konstruktionen, damit Kinder auf Basis dieser Voraussetzungen auch tragfähige Strategien für *NLETs* entwickeln. Dass dabei Unterricht hilfreich sein kann, scheint mir eine weitere plausible Vermutung zu sein; dazu mehr in Abschn. 7.

6.3 Ein vertiefter Blick auf zählende Strategien

Die in Abschn. 5.3 referierten Studien liefern Hinweise dafür, dass ein Teil der untersuchten Kinder – nämlich der bei solchen Aufgaben erfolgreichere Teil – die *number line* zumindest implizit im Sinne der Mess-Deutung (Orientierung an der Mitte, seltener auch an einem und drei Viertel der Strecke) interpretiert und auf dieser Basis zu vergleichsweise passenden Eintragungen gelangt (z. B. Ebersbach et al. 2015; Peeters et al. 2016; van't Noordende et al. 2016; Xing et al. 2021). Umgekehrt werden für Kinder mit wenig passenden Eintragungen Strategien beschrieben, bei denen das Zählen im Vordergrund steht (z. B. Doritou und Gray 2006; Fromme 2017; Petitto 1990). Was genau aber zählen diese Kinder? Mit welcher Deutung der *number line* zählen sie?

Wie in Abschn. 4.1 erläutert, kann ein Kind auf einer *filled number line* die Markierungen zählen oder aber die Abstände zwischen den Markierungen. Es kann – auch wenn es die Markierungen zählt – dabei eine Mess-Deutung vornehmen (indem es z. B. von 0 ausgehend die Markierungen bis 7 zählt, damit aber den Gedanken verbindet, dass bis 7 sieben Einer-Abstände reichen; siehe 4.1.2). Zählendes Vorgehen kann auch mit rein ordinaler Deutung verbunden sein, wenn ein Kind dabei die mit 7 beschriftete Markierung gedanklich mit Sieben gleichsetzt und die Zahl zumindest in diesem Zusammenhang als Name für eine Position versteht (Gaidoschik 2017, S. 83 f.).

Auf der *proportional number line* gibt es aber außer den beschrifteten Endpunkten und allenfalls einzelnen vorgegebenen Referenzpunkten keine weiteren Markierungen. Wenn ein Kind auf einer solchen *number line* beim Eintragen einer Zahl zählend vorgeht, muss es also das, was es zählen will, selbst produzieren. Ob es dabei in ordinaler Deutung das Zählen von gedachten Markierungen im Sinn hat oder im Sinne einer Mess-Deutung das Abtragen mitgedachter Abstände, ist der Handlung (mit dem Finger, Bleistift, Auge ...) selbst nicht klar zu entnehmen. Um eine weitere Markierung anzubringen oder auch nur zu denken, muss nun einmal ein Abstand eingehalten werden.

Als Hinweis dafür, dass einem Kind dabei die Abstände wichtig sind, könnte aber gewertet werden, wenn es sich erkennbar darum bemüht, dass die Abstände jeweils gleich lang sind. Fromme (2017, S. 129) berichtet dies für „einige" der von ihr interviewten Kinder, merkt aber zugleich an, dass in weiterer Folge „dieser Prozess [...] ohne Orientierung an weiteren Punkten" stattgefunden habe. Erst durch „Orientierung an weiteren Punkten" werden aber Abstände tatsächlich zu Einheiten im Sinne der Mess-Deutung (s. 4.1.2). Ein in diesem Sinne gezieltes Ermitteln von Zehnerabständen durch Strukturieren der Gesamtstrecke „in 10 gleich große Teile" hält Fromme (2017, S. 129) für „viele" der von ihr befragten Kinder fest. Im Widerspruch dazu, dass dabei wirklich bewusst an ein Messen gedacht wurde, steht aber die weitere Beobachtung Frommes, dass von den Kindern „oft" nicht überprüft worden sei, ob denn auch wirklich zehn Abstände der als Zehner gewählten Länge zwischen 0 und 100 Platz finden.

Petitto (1990) berichtet, dass die bei *NLETs* zählend vorgehenden Kinder die zuletzt erreichte Position in keinem einzigen Fall („never") ins Verhältnis zu den bekannten Positionen von 0 und 100 gesetzt hätten, um das Ergebnis ihres Zählens zu überprüfen oder anzupassen („to check or to adjust the result of the count“, Petitto 1990, S. 67). Die Analyse der Handlungen und verbalen Äußerungen der beiden von mir interviewten Kinder (siehe 5.4) ergibt, dass diese im Zuge ihres teilweise zählenden Vorgehens bei *NLETs* zwar in *Ansätzen* auch Ideen des Messens aktivieren, diese aber nicht konsequent weiterführen bzw. diese nicht mit ihrem in den Interviews deutlich werdenden Wissen über Bündelungsbeziehungen verknüpfen.

6.4 Zusammenfassung

Insgesamt stehen die in den Abschn. 5.3 und 5.4 referierten empirischen Befunde zumindest nicht im Widerspruch zu den Erwartungen, die in Abschn. 4 aus der stoffdidaktischen Analyse abgeleitet wurden: Vorliegende Studien liefern zum einen empirische Hinweise dafür, dass sich im Lösungsverhalten bei *NLETs* das Wissen und Können der Probandinnen und Probanden im Bereich des dezimalen Stellenwertsystems im jeweiligen Zahlenraum niederschlägt. Zum anderen zeigt sich die Abhängigkeit der Leistungen bei *NLETs* von den dabei angewandten Strategien. Der stoffdidaktischen Analyse zufolge fließt in diese Strategien auch ein, wie Kinder Zahldarstellungen an *number lines* interpretieren. Diese Interpretationen und die darauf aufbauenden Strategien bei *NLETs* wiederum hängen, so kann vermutet werden, ebenso vom Unterricht ab, wie es ihr Stellenwertverständnis tut. *Diese* Seite der Medaille wurde aber bislang empirisch kaum untersucht.

7 Desiderate empirischer Forschung zur *number line estimation*

Es fehlt meinem besten Wissen nach aktuell zumindest im deutschsprachigen Raum an repräsentativen Studien darüber, wie *number lines* im Unterricht der Grundschule erarbeitet und in weiterer Folge – etwa auch in *NLETs* – verwendet werden. Unklar ist daher auch, ob Empfehlungen, die es dazu in fachdidaktischer Literatur gibt, in der Praxis Beachtung finden. Dabei ist zu beachten, dass diese Empfehlungen sich zum Teil deutlich unterscheiden. So treten Schipper et al. (2015), wie in 4.1 erläutert, sehr entschieden für die Erarbeitung einer ordinalen Deutung ein, und dies nicht vor dem zweiten Schuljahr (Schipper et al. 2015, S. 43). Lorenz hingegen empfiehlt (2010, S. 10) den „(leeren) Zahlenstrahl als Messwerkzeug für die Anzahl“ als zentrales Arbeitsmittel schon ab den ersten Schulwochen. Wir wissen nicht, welche dieser und weiterer Empfehlungen in welcher Häufigkeit und Weise in der Praxis umgesetzt werden.

Es fehlen zudem Evaluationsstudien, die über die stoffdidaktische Analyse hinaus empirische Anhaltspunkte liefern könnten für die Beurteilung der unterschiedlichen Empfehlungen. Im vorliegenden Beitrag wurden stoffdidaktische Argumente dafür vorgebracht, für die *filled* und dann auch *proportional number line* gezielt eine Mess-Deutung zu erarbeiten. Eine Skizze dafür, wie letzteres im *zweiten Schuljahr* umgesetzt werden könnte, liefert Gaidoschik (2020). Lorenz (2007) hingegen hat in dem von ihm herausgegebenen Schulbuch „Mathematikus 1“ detaillierte Vorschläge zur Erarbeitung einer Mess-Deutung bereits im Anfangsunterricht der *ersten Klasse* vorgelegt. Vergleichende Evaluationen zwischen diesen Varianten der Erarbeitung einer Mess-Deutung fehlen ebenso wie von Maßnahmen, die eine ordinale Deutung (etwa Schipper et al. 2015) anstreben, oder solchen, die dem im deutschen Sprachraum vielzitierten Erarbeitungsvorschlag „von der Hunderterkette zum Zahlenstrahl" (Höhtker und Selter 1995) folgen.

Zur Einordnung dieses Vorschlags in die hier vorgelegte Analyse ist festzuhalten, dass die Hinführung über die Hunderterkette implizit auf eine Mess-Deutung hinausläuft. Kinder sollen nämlich gemäß Höhtker und Selter (1995) lernen, zum Beispiel 50 zunächst an der konkreten Hunderterkette zu verstehen als die Markierung, bis zu welcher (von 0 ausgehend) 50 Perlen liegen. Als Vorbereitung der *filled number line* ist das stimmig nur dann, wenn Perlen gleichen Durchmessers möglichst nahtlos aneinandergefügt werden, und nur deshalb, weil in dieser Weise die Perlen (genauer: deren Durchmesser) als Maßeinheiten zum Ausmessen einer Länge verwendet werden. Dies wird jedoch weder bei Höhtker und Selter (1995) noch in Veröffentlichungen, die diesen Vorschlag zustimmend aufgreifen (u. a. Freesemann 2014, S. 107–110; Mosandl und Nührenbörger 2014, S. 44 f.), explizit als Messen angesprochen. Auf der gleichfalls diesem Vorschlag folgenden primakom-Seite wird aber auf einen „Knackpunkt" bzw. eine „mögliche Fehlerquelle" hingewiesen: „Die erste Kugel ist die Eins. Der erste Strich auf dem Zahlenstrahl ist jedoch die Null" (primakom.dzlm.de/node/329). Zum Problem kann dies werden, wenn die Kugeln der Hunderterkette nicht als Maßeinheiten verstanden werden, sondern ordinal als Träger von Nummern. Bei ordinaler Deutung der Kugeln erschließt sich auch nicht, warum z. B. die Markierung 10 nicht im Mittelpunkt der zehnten Kugel, sondern zwischen der zehnten und elften Kugel anzubringen ist. Als Erklärung dafür soll gemäß diesem Erarbeitungsvorschlag die Anzahl (kardinal) der Kugeln zwischen den Markierungen für 0 und 10 dienen. Es wird dabei von den Kindern also der Wechsel zwischen ordinalen („Die erste Kugel ist die Eins.") und kardinalen Deutungen gefordert, ohne dass die Idee des Messens explizit als Vermittlung zwischen diesen beiden Deutungen herausgearbeitet wird, wie es bei *gezielter* Erarbeitung der Mess-Deutung angestrebt würde (vgl. Gaidoschik 2020; Gravemeijer 2004; Gravemeijer und van Eerde 2009; s. dazu Abschn. 4.1.2).

Der Weg „von der Hunderterkette zum Zahlenstrahl" scheint also stoffdidaktisch stimmig nur auf Basis einer Mess-Deutung, er zielt jedoch nicht explizit auf diese ab. Die in Abschn. 4 vorgelegte Analyse legt aber nahe, dass gerade das *Bewusstmachen* des Zusammenhangs von Messen und der Zahldarstellung an *filled* bzw. *proportional number lines*, also die explizite Erarbeitung von *number lines* über Messhandlungen und das gezielte Hinarbeiten auf eine den Kindern bewusste und dabei dezimalstrukturierte Mess-Deutung, die „Wahrscheinlichkeit für besseres Lernen und Lehren" (Krauthausen 2009, S. 114) dieser Darstellungen entschieden erhöhen würde – einschließlich des Lernens und Lehrens von tragfähigen Strategien für *NLETs*. Die Überprüfung dieser und anderer im vorliegenden Beitrag formulierten Vermutungen fordert empirische Forschung der in Abschn. 7 charakterisierten Art, also unter Einbeziehung des Unterrichts. Dass dabei neben den beobachtbaren Handlungen der Kinder auch ihr Wissen über das Dezimalsystem, ihre Deutungen von Zahldarstellungen an *number lines* und ihre Denkweisen und Strategien beim Lösen von

Aufgaben an *number lines* so weit möglich erhoben werden müssen, scheinen mir die in 5.3 und 5.4 dargestellten Befunde deutlich zu machen[7].

Funding Open access funding provided by Libera Università di Bolzano within the CRUI-CARE Agreement.

Interessenkonflikt M. Gaidoschik gibt an, dass kein Interessenkonflikt besteht.

Literatur

Alton, G. (2021). *Stellenwertverständnis und Mehrsprachigkeit: Fallstudie an einer ladinischen Grundschule*. Bozen: Freie Universität. Unveröffentlichte Masterarbeit

Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2012). Cognitive processes of numerical estimation in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *111*(2), 246–267. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2011.08.005.

Barth, H. C., & Paladino, A. M. (2011). The development of numerical estimation. Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, *14*(1), 125–135. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2010.00962.x.

Bartolini Bussi, M. G. (2015). The number line: a "western" teaching aid. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Hrsg.), *Conference proceedings of the ICMI study 23: Primary mathematics study on whole numbers* (S. 298–306). University of Macau. http://www.umac.mo/fed/ICMI23/doc/Proceedings_ICMI_STUDY_23_final.pdf. Gesehen 21. November 2023.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, *42*(1), 189–201. https://doi.org/10.1037/0012-1649.41.6.189.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*(1–2), 1–42. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90049-n.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Diezmann, C. M., Lowrie, T., & Sugars, L. A. (2010). Primary students' success on the structured number line. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15*(4), 24–28.

Doritou, M., & Gray, E. (2006). Estimating on a number line: an alternative view. In A. Simpson (Hrsg.), *Retirement as process and concept. A festschrift for Eddie Gray and David Tall* (S. 67–76). Prag: Karlova Univerzita v Praze, Pedagogická Fakulta.

Ebersbach, M., Luwel, K., & Verschaffel, L. (2015). The relationship between children's familiarity with numbers and their performance in bounded and unbounded number line estimations. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(2–3), 136–154. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016813.

Freesemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen*. Wiesbaden: Springer.

[7] Die Studie von Simon und Schindler (2021) liefert zudem starke Argumente dafür, in solchen Studien sorgfältig geführte qualitative Interviews mit *Eye-tracking* zu kombinieren.

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen*. Wiesbaden: Springer.

Fuson, K. (1984). More complexities in subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 214–225. https://doi.org/10.2307/748350.

Gaidoschik, M. (2015a). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraums". *Journal für Mathematik-Didaktik*, *36*(1), 163–190. https://doi.org/10.1007/S13138-015-0071-3.

Gaidoschik, M. (2015b). Vermeidbare und unvermeidbare Hürden beim Erlernen des Rechnens bis 100. In A. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter* (S. 25–38). Bamberg: University of Bamberg Press.

Gaidoschik, M. (2017). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung* (10. Aufl.). Horneburg: Persen.

Gaidoschik, M. (2020). Ist der Zahlenstrahl eine ordinale Darstellung? Besser nicht! In H.-S. Siller, W. Weigel & J.F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 313–316). Münster: WTM.

Geary, D.C., Hoard, M.K., Byrd-Craven, J., Nugent, L., & Numtee, Ch (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, *78*(4), 1343–1359. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x.

Götze, D., Selter, C., & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Hannover: Klett-Kallmeyer.

Gravemeijer, K. (2004). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105–128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3.

Gravemeijer, K. (2014). Number lines in mathematics education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of mathematics education* (S. 466–470). Dordrecht: Springer.

Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 510–524. https://doi.org/10.1086/596999.

Gunderson, E.A., Ramirez, G., Beilock, S.L., & Levine, S.C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: the role of the linear number line. *Developmental Psychology*, *48*(5), 1229–1241. https://doi.org/10.1037/a0027433.

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Heymann, H.W. (2013). *Allgemeinbildung und Mathematik* (2., überarbeitete und neu ausgestattete Aufl.). Weinheim, Basel: Beltz.

Höhtker, B., & Selter, C. (1995). Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl. In G. Müller & E.C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 122–137). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Krauthausen, G. (2009). Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (2. Aufl. S. 100–117). Weinheim, Basel, Berlin: Beltz.

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Gälli, M., Martin, E., & von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, *57*(3), 782–795. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.01.070.

Landerl, K. (2019). Neurocognitive perspective on numerical development. In A. Fritz, V. Haase & P. Räsänen (Hrsg.), *The international handbook of math learning difficulties: from the lab to the classroom* (S. 9–24). Cham: Springer.

LeFevre, J.-A., Jimenez Lira, C., Sowinski, C., Cankaya, O., Kamawar, D., & Skwarchuk, S.-L. (2013). Charting the role of the number line in mathematical development. *Frontiers in Psychology*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00641.

Lorenz, J.H. (2006). Rechnen mit dem Rechenstrich. Zahlensinn mit dem leeren Zahlenstrahl entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift*, *20*(191), 10–15.

Lorenz, J.H. (Hrsg.). (2007). *Mathematikus 1. Lehrermaterialien*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Lorenz, J.H. (2009). Der „leere Zahlenstrahl" – eine hilfreiche Lernumgebung für die diagnostische Tätigkeit in der Grundschule. In A. Peter-Koop, G. Lilitakis & B. Spindeler (Hrsg.), *Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 201–211). Offenburg: Mildenberger.

Lorenz, J.H. (2010). Der leere Zahlenstrahl. *Mathematik differenziert*, *1*(2), 10–12.

Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H.-C., & Cress, U. (2015). Computers in mathematics education – Training the mental number line. *Computers in Human Behavior*, *48*, 597–607. https://doi.org/10.1016/j.chb.2015.01.048.

Mosandl, C., & Nührenbörger, M. (2014). Zahlen ordnen und vergleichen. In C. Selter, S. Prediger, M. Nührenbörger & S. Hußmann (Hrsg.), *Mathe sicher können: Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen* (S. 40–67). Berlin: Cornelsen.

Mulligan, J., Verschaffel, L., Baccaglini-Frank, A., Coles, A., Gould, P., He, S., Ma, Y., Milinković, J., Obersteiner, A., Roberts, N., Sinclair, N., Wang, Y., Xie, S., & Yang, D. (2018). Whole number thinking, learning and development: neuro-cognitive, cognitive and developmental approaches. In M.G. Bartolini Bussi & X.H. Sun (Hrsg.), *Building the foundation: whole numbers in the primary grades. The 23rd ICMI study* (S. 137–168). Cham: Springer.

Padberg, F., & Benz, Ch (2021). *Didaktik der Arithmetik* (5.., überarbeitete Aufl.). Heidelberg: Springer.

Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education*, *31*(2), 117–134. https://doi.org/10.1007/s10212-015-0251-z.

Peeters, D., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2017). Benchmark-based strategies in whole number line estimation. *British Journal of Psychology*, *108*(4), 668–686. https://doi.org/10.1111/bjop.12233.

Peter-Koop, A., & Nührenbörger, M. (2007). Größen und Messen. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 89–117). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Petitto, A.L. (1990). Development of numberline and measurement concepts. *Cognition and Instruction*, *7*(1), 55–78. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0701_3.

Rouder, J.N., & Geary, D.C. (2014). Children's cognitive representation of the mathematical number line. *Developmental Science*, *17*(4), 525–536. https://doi.org/10.1111/desc.12166.

Scherer, P., & Opitz, M.E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: a meta-analysis. *Child Development*, *89*(5), 1467–1484. https://doi.org/10.1111/cdev.13068.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Schipper, W., Ebeling, A., & Dröge, R. (2017). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Schipper, W., & Hülshoff, A. (1984). Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? *Grundschule*, *16*(4), 54–56.

Schulz, A. (2018). Orientierung am Zahlenstrahl – Funktionen und Deutung. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1663–1666). Münster: WTM.

Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe. Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Berlin: Springer.

Selter, Ch (2000). Vorgehensweisen von Grundschülerinnen bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematikdidaktik*, *21*(2), 227–258. https://doi.org/10.1007/BF03338920.

Siegler, R.S., & Booth, J.L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, *75*(2), 428–444. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x.

Siegler, R.S., & Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations. *Psychological Science*, *14*(3), 237–243. https://doi.org/10.1111/1467-9280.02438.

Simms, V., Clayton, S., Cragg, L., Gilmore, C., & Johnson, S. (2016). Explaining the relationship between number lines estimation and mathematical achievement: the role of visuomotor integration and visuospatial skill. *Journal of Experimental Child Psychology*, *145*, 22–33. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.12.004.

Simon, A.S., & Schindler, M. (2021). A comparative analysis of eye tracking and thinking aloud in number line estimation tasks: a study on students with and without mathematical difficulties. In M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Hrsg.), *Proceedings of the 44th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Bd. 4, S. 65–72). Khon Kaen: PME.

Simon, A.S., & Schindler, M. (2022). Strategy use in number line tasks of students with mathematical difficulties: an eye-tracking study. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Hrsg.),

Proceedings of the 45th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Bd. 4, S. 3–10). Alicante: PME.
Sprenger, L. (2018). *Zum Begriff des Dezimalbruchs. Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis aus inferentialistischer Perspektive*. Wiesbaden: Springer.
Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM Mathematics Education*, *46*(1), 45–58. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0518-2.
Van't Noordende, J.E., van Hoogmoed, A.H., Schot, W.D., & Kroesbergen, E.H. (2016). Number line estimation strategies in children with mathematical learning difficulties measured by eye tracking. *Psychological Research*, *80*(3), 368–378. https://doi.org/10.1007/s00426-015-0736-z.
Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *26*(1), 52–79. https://doi.org/10.1007/BF03339006.
White, S., & Szücs, D. (2012). Representational change and strategy use in children's number line estimation during the first years of primary school. *Behavioral and Brain Functions*. https://doi.org/10.1186/1744-9081-8-1.
Wittmann, E.Ch (2018). Structure-genetic didactical analyses. Empirical research "of the first kind". In P. Błaszczyk & B. Pieronkiewicz (Hrsg.), *Mathematical Transgressions 2015* (S. 133–150). Kraków: universitas.
Vasilyeva, M., Laski, E. V., Casey, B. M., Lu, L., Wang, M., & Cho, H. Y. (2023). Spatial–numerical magnitude estimation mediates early sex differences in the use of advanced arithmetic strategies. *Journal of Intelligence*, *11*(5), 97. https://doi.org/10.3390/jintelligence11050097.
Xing, Ch , Zax, A., George, E., Taggart, J., Bass, I., & Barth, H. (2021). Numerical estimation strategies are correlated with math ability in school-aged children. *Cognitive Development*, *60*(101089), 1–20. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2021.101089.

Hinweis des Verlags Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.