



Neue Berechnungsmethode für die Bestimmung auftretender Zahnfußspannungen in evolventischen flankenzentrierten Zahnwellenverbindungen

Christian Spura¹ · Klaus Pantke¹

Eingegangen: 20. September 2022 / Angenommen: 3. Juli 2023 / Online publiziert: 3. August 2023
© Der/die Autor(en) 2023

Zusammenfassung

Zur Übertragung hoher Drehmomente wird in der Antriebstechnik am häufigsten die Zahnwellenverbindung eingesetzt. Bezeichnende Einsatzgebiete sind der Gelenkwellen- und Getriebebau, die Lenkungstechnik sowie die Koppelung unterschiedlicher Antriebseinheiten, wie z. B. Motor und Getriebe. Infolge der geometrischen Form kommt es bei Belastung zu einem flächenförmigen Zahnflankenkontakt zwischen Wellen- und Nabenverzahnung. Als lebensdauerbeeinflussende und für die konstruktive Auslegung wichtigste Parameter sind u. a. die Zahnflankenpressung und die Zahnfußspannungen zu nennen. Die Berechnung der auftretenden Zahnfußspannungen war und ist Gegenstand gängiger Literatur. In diesem Beitrag wird die Zahnfußspannung für Zahnwellen nach DIN 5480 mit ihren geometrischen Größen mithilfe der Finite-Elemente-Simulation untersucht. Anschließend wird auf Basis der Simulationsergebnisse eine Berechnungsmethode mittels Einflusszahlen abgeleitet und mit experimentellen Versuchsergebnissen aus der gängigen Literatur abgeglichen. Die abgeleitete Berechnungsmethode enthält Analogien der aus dem Bereich der Laufverzahnungen bekannten Zahnfußspannungsberechnung nach ISO 6336-3 Methode C. Die berechneten Zahnfußspannungen führen im Allgemeinen zu geringfügig höheren Zahnfußspannungen und liegen damit auf der sicheren Seite. Die Berechnungsmethode ist somit ohne großen Aufwand direkt für die praktische Anwendung einsetzbar und kann im Weiteren für den Einzug in eine Berechnungsrichtlinie genutzt werden.

✉ Christian Spura
christian.spura@hshl.de

Klaus Pantke
klaus.pantke@hshl.de

¹ Hochschule Hamm-Lippstadt, Marker Allee
76–78, 59063 Hamm, Deutschland

New calculation method for the determination of occurring tooth root stresses in involute side fit splined connections

Abstract

Toothed shaft connections are most frequently used in drive technology to transmit high torques. Typical areas of application are cardan shaft and gearbox construction, steering technology and the coupling of different drive units, such as motors and gearboxes. As a result of the geometric design, there is a surface contact between the shaft and hub tooth flanks under load. The parameters that influence service life and are most important for the design include tooth flank pressure and tooth root stresses. The calculation of the tooth root stresses that occur has been and is still the subject of common literature. In this paper, the tooth root stress for splined shafts according to DIN 5480 with its geometric quantities is investigated with the aid of finite element simulation. Subsequently, a calculation method is derived on the basis of the simulation results using influence numbers and compared with experimental test results from the established literature. The derived calculation method contains analogies of the tooth root stress calculation according to ISO 6336-3 method C, which is known from the field of running gears. The calculated tooth root stresses generally lead to slightly higher tooth root stresses and are therefore on the safe side. The calculation method can therefore be used directly for practical applications without much effort and can be used further on for inclusion in a calculation guideline.

1 Einleitung

Zur Übertragung von Drehmomenten bei gleichzeitiger axialer Verschiebbarkeit von Welle und Nabe werden im Maschinenbau und der Antriebstechnik sehr häufig Zahnwellenverbindungen mit Evolventenflanken nach DIN 5480 [1, 2] eingesetzt. Die große Anzahl im Eingriff befindlicher Zahnpaare ermöglicht die Übertragung hoher Drehmomente bei relativ geringen Nabenaußendurchmessern. Zudem sind die Abmessungen der Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 [1] sind auf die genormten Wälzlager-Bohrungsdurchmesser abgestimmt.

Die an Zahnwellenverbindungen auftretenden Schadensfälle können im Allgemeinen in zwei Kategorien unterteilt werden:

- **Zahnflankenverschleiß:** Durch Relativbewegungen zwischen Welle und Nabe induzierte Verschleißvorgänge, welche zum Abtrag der Zahnflanke führen.
- **Bruch:** Durch eine Überbelastung hervorgerufener Bruch, welcher in Abhängigkeit der Verbindungsgeometrie und der Belastung entweder zum Bruch der Welle, zum Abscheren der Zähne in Höhe des Teilkreises, zum Zahnbruch in der Zahnfußebene oder zum Platzen der Nabe führt.

Abweichend vom klassischen Auslegungsansatz der zulässigen Flächenpressung, ist die Zahnfußspannung im Zahnfuß der Lastflanke der Welle der typischerweise kritische Nachweispunkt, wenn es zum Zahnfußbruch kommt, vgl. hierzu u. a. [3, 4].

Im Vergleich zur Laufverzahnung, z. B. nach DIN 867 [5], besitzt die Zahnwellenverbindung nach DIN 5480 [1] geringere Zahnkopf- und Zahnfußhöhen, wodurch das Zahnprofil wesentlich gedrungener ist. Weiterhin ist durch die große Anzahl im Eingriff befindlicher Zahnpaare der

Zahnwellenverbindung eine von der Laufverzahnung abweichende Lasteinleitung vorliegend. Aufgrund dieser Unterschiede (Flankenbelastung, Lasteinleitung, Zahnhöhe) ist u. a. nach [6] eine Übertragung der Berechnungsverfahren von Laufverzahnungen zur Bestimmung der auftretenden Zahnfußspannungen in Zahnwellenverbindungen nicht möglich. Somit wird in der Literatur keine weitere Aufbereitung und Ableitung von Berechnungsmethoden der Laufverzahnungen zur Übertragung auf Zahnwellenverbindungen vorgenommen.

Des Weiteren ist es bei Zahnwellen schwierig das polare Trägheitsmoment des durch die Zahnlücken geschwächten Querschnitts zu bestimmen, welches für die Berechnung der auftretenden Torsionsspannung notwendig ist. Es wird sich damit beholfen, einen imaginären Ersatzdurchmesser d_{hi} einer glatten Welle zu definieren, welcher das gleiche polare Trägheitsmoment wie die Zahnwelle besitzt. Die sehr oft verwendeten Näherungsgleichungen gehen auf Nakazawa [7] zurück. Wie von Daryusi [8] dargelegt wird, kann die Ergebnissenauigkeit dieser Näherungsgleichungen um bis zu 35 % abweichen. Die Grundlage für die Bestimmung der Zahnfußspannungen von Welle und Nabe in der Tragfähigkeitsberechnung nach DIN 5466 [9, 10], welche u. a. in wesentlichen Teilen auf der Arbeit von Wesolowski [11] beruht, verwendet u. a. ebenfalls den imaginären Ersatzdurchmesser d_{hi} . Zusätzlich kommen in DIN 5466 [9, 10] insgesamt weitere sieben Einfluss-, Korrektur- und Formfaktoren zum Einsatz, um die resultierenden Zahnfußspannungen bei reiner Torsionsbelastung bestimmen zu können.

In diesem Beitrag soll gezeigt werden, dass die Berechnungsmethoden der Zahnfußspannung an Laufverzahnungen durchaus geeignet sind, um die auftretenden Zahnfußspannungen an Zahnwellenverbindungen zu berechnen. Auf die Verwendung von imaginären Ersatzdurchmessern kann dabei gänzlich verzichtet werden. Zudem wird bei Aufstel-

lung der neuen Berechnungsmethode verstärkt darauf geachtet, dass die Berechnung ohne großen Aufwand in der Praxis direkt anwendbar ist.

2 Stand der Technik

Die Analyse der auftretenden Zahnfußspannungen wird von Schöpf [12] und Kohl [6] mithilfe spannungsoptischer Untersuchungen durchgeführt. In [12] werden spannungsoptische Untersuchungen mittels Erstarrungsverfahren (Einfrierverfahren) und einer Isochromatenvervielfachung an den beiden Verzahnungen DIN 5480 – $40 \times 2 \times 18$ und DIN 5480 – $60 \times 3 \times 18$ durchgeführt, um die Spannungsverteilung zu untersuchen und Kerbformzahlen abzuleiten. Ein Abgleich zwischen ebenen und räumlichen spannungsoptischen Versuchen und FE-Simulationen an flankenzentrierten Zahnwellen zur Auswertung der Zahnfußspannungen erfolgt in [6] an den beiden Verzahnungen DIN 5480 – $60 \times 6 \times 8$ und DIN 5480 – $170 \times 5 \times 32$. Hierbei zeigt sich zum einen ein parabolischer Verlauf der Flankenpressung über der Zahnhöhe. Dieser parabolische Verlauf wird auch mit analytischen Berechnungsmethoden von Dietz [13] nachgewiesen und kann damit bestätigt werden. Zum anderen ist die Größe der auftretenden Zahnfußspannungen proportional zur Flankenpressung. Von Kohl [6] durchgeführte Finite-Elemente-Simulationen zeigen gute Übereinstimmungen mit den spannungsoptischen Untersuchungen in [6, 12]. Darüber hinaus werden in [6] Teil- und Gesamtformzahlen ermittelt, um mit entsprechenden Gleichungen die maximal auftretende Zahnfußvergleichsspannung für die Zug- und Druckseite eines Zahnes zu bestimmen.

Villmer [14] verifiziert das auf analytischem Weg berechnete Verhalten der Lastverteilung über der Verbindungslänge (Zahnbreitenrichtung) mit experimentellen Versuchen an Zahnwellen mithilfe applizierter Dehnungsmessstreifen. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung. Der Verlauf der Flankenpressung und der Zahnfußspannungen sind über der Verbindungslänge ungleichmäßig verteilt, wobei die Maximalwerte von Flankenpressung und Zahnfußspannung bei Torsionsbelastung am Verbindungsanfang auftreten. Diese am Verbindungsanfang vorhandene Lastüberhöhung ist vom Verhältnis b/d_B (Breite zu Bezugsdurchmesser) abhängig und nimmt bis zum Grenzwert von $b/d_B \approx 0,5$ ab. Für größere Verbindungslängen lässt sich die maximal auftretende Zahnfußspannung nicht weiter reduzieren. Diese Ergebnisse führen zur Aufstellung des Tragbreitenfaktors k_b . Zudem zeigen die Ergebnisse der Untersuchungen, dass bei konstantem Bezugsdurchmesser kleine Moduln zu steiferen und große Moduln zu nachgiebigeren Verzahnungen führen.

In [11] werden die durchgeführten FE-Simulationen ebener Zahnscheiben und 3D-Modellen zur Ermittlung des dreidimensionalen Beanspruchungszustandes im Zahnfuß mit experimentellen Versuchen an der Verzahnung DIN 5480 – $60 \times 6 \times 8$ sowie aus Literaturangaben verifiziert. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung. Zudem werden durch die Ergebnisse der FE-Simulationen die Auswirkungen der Nabenlänge (Verhältnis b/d_B) auf die Lastüberhöhung, welche in [12, 14] gezeigt werden, mit $b/d_B \approx 0,6$ bestätigt. Darüber hinaus werden mithilfe verschiedener Einfluss-, Form- und Korrekturfaktoren sowie imaginären Durchmesser Gleichungen zur Ermittlung der maximalen Zahnfußvergleichsspannung für die Zug- und Druckseite eines Zahnes angegeben. Diese Gleichungen gehen in die Tragfähigkeitsberechnung nach DIN 5466 [9, 10] ein.

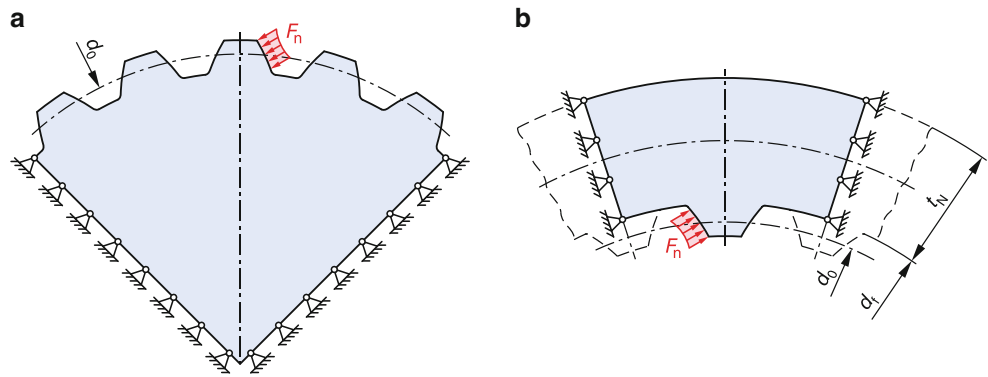
Im Bereich der Zahnwellenverbindungen finden sich noch weitere Arbeiten, wie z. B. von Daryusi [15]. Hier liegt der Fokus jedoch auf der Kerbwirkung am Übergangsquerschnitt von der glatten Welle in die Zahnwellenverbindung. Jeweils für Zahnwellenverbindungen mit freiem wie auch gebundenem Auslauf. Eine explizite Auswertung der Zahnfußspannungen findet sich in diesen Literaturquellen leider nicht. Daher werden im weiteren Verlauf diese Literaturquellen nicht weiter berücksichtigt.

3 FEM-Simulationsmodelle

Zur Ermittlung der Zahnfußspannungen werden umfangreiche Finite-Element-Simulationen (FE-Simulationen) unter der Voraussetzung eines linear-elastischen Materialverhaltens mit dem Programm Ansys 2020 R2 durchgeführt. Die Werkstoffparameter sind: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,3$, $G = 80.769,2 \text{ N/mm}^2$. Für die geometrischen Abhängigkeiten gelten die Zusammenhänge nach DIN 5480-1 [1]. Als Zentrierung wird die Flanken-zentrierung verwendet. Die Belastung erfolgt durch reines Drehmoment (ohne Biegemoment sowie ohne Quer- und Axialkraft) und entspricht damit nach DIN 5466-1 [9] dem Betriebszustand III für flankenzentrierte Zahnwellenverbindungen.

Das FE-Modell der Welle besteht aus einem Ausschnitt der gesamten Verzahnung und besitzt fünf Zähne, siehe Abb. 1a. Durch die Verwendung von fünf Zähnen findet der Verformungs-/Steifigkeitseinfluss benachbarter Zähne Berücksichtigung. Der Einsatz eines solchen Simulationsmodells hat sich bei Laufverzahnungen etabliert, vgl. z. B. [16]. Für die Einspannung der 2D-Scheibenmodelle werden die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Knoten an den Rändern des Simulationsmodells der Wellenverzahnung zu Null gesetzt, siehe Abb. 1. Die Belastung wird als parabolischer Verlauf entlang der Zahnhöhe aufgebracht und entspricht einer äquivalenten Einzelkraft von

Abb. 1 2D-FEM-Scheibenmodelle zur Ermittlung der Zahnfußspannungen mit den zugehörigen Belastungen und Einspannoptionen: **a** Welle, **b** Nabe



$F_n = 1000\text{ N}$. Bei den 3D-Modellen wird die Stirnseite der Welle fest eingespannt und zusätzlich wird der Wellenmittelpunkt als zylindrische Lagerung (rotierendes Scharnier) ausgeführt. Die Belastung wird durch die Nabe eingeleitet.

Das FE-Modell der Nabe hingegen besteht aus einem Kreisringsegment der Länge zweier Zahnteilungen, siehe Abb. 1b. Der linke und rechte Rand endet jeweils in Zahnmitte, wobei nur der in der Mitte des Simulationsmodells zu betrachtende Zahn ausgeformt und mit der identischen Belastung wie bei der Welle ($F_n = 1000\text{ N}$) beaufschlagt wird. Die beiden an den Rändern befindlichen halben Zähne werden im FE-Modell vernachlässigt. Dieser Modellaufbau entspricht dem mechanischen Ersatzbild eines Balkens auf zwei Stützen. Die radiale Nabenaufweitung bleibt unberücksichtigt. Anwendung findet diese Vorgehensweise der FE-Simulation bei Zahnkupplungen (vgl. z. B. [17]) als auch bei Zahnwellen (vgl. z. B. [13, 18]). Zudem wird durch den Kreisringausschnitt die Wellung des Zahnkranzes miterfasst. Die Nabenwandstärke beträgt $t_N = 7 \cdot m$, da Untersuchungen von [14] zeigen, dass der Nabenwand Einfluss bei $t_N = 7 \cdot m$ zum Erliegen kommt. Auch hier werden bei den 2D-Scheibenmodellen die horizontalen und vertikalen Verschiebungen der Knoten an den Rändern der Simulationsmodelle zu Null gesetzt (siehe Abb. 1). Bei den 3D-Modellen wird der Außendurchmesser der Nabe als zylindrische Lagerung (rotierendes Scharnier) gelagert (freie Rotation bei gleichzeitiger Unterdrückung von horizontalen und vertikalen Verschiebungen) und die Belastung wird als Drehmoment über den Außendurchmesser eingeleitet.

Zur Plausibilitätsprüfung der FE-Simulationen werden 3D- und 2D-Modelle eingesetzt. Die anschließende Bestimmung der Zahnfußspannungen wird, ähnlich wie in [11] beschrieben, an den 2D-Zahn- und Nabenscheiben sowie an 3D-Modellen (Tortenschnitt) durchgeführt. Die Wellen- und Nabenverzahnungen der 2D-Scheibenmodelle werden getrennt voneinander untersucht. Die auf der Zahnflanke vorhandene symmetrisch parabolische Lastverteilung entlang der Zahnhöhe bei Normaltragen ist aus verschiedenen Untersuchungen, z. B. [6, 12, 13], bekannt. Bei den durch-

zuführenden 2D-FE-Simulationen wird für die Lastverteilung das Normaltragen mit symmetrisch parabolischer Lastverteilung vorausgesetzt, siehe Abb. 1. Bei den 3D-FEM-Simulationen werden die in Abb. 1 dargestellte Wellenverzahnung mit fünf Zähnen und die Nabenverzahnung mit einem Zahn miteinander gepaart, sodass ein Flankenkontakt vorhanden ist. Im Rahmen der FE-Simulationen wird dazu die Kontaktbedingung Oberfläche zu Oberfläche mit einem Reibungskoeffizienten von 0,08 verwendet.

Im weiteren Verlauf dieses Beitrags wird zudem auch der Einfluss dünnerer Wandstärken auf die Zahnfußspannungen untersucht. Der Modellaufbau und die Einspannung bleiben bestehen und es wird lediglich die Wandstärke t_N variiert.

3.1 Plausibilitätsprüfung der FE-Simulationen

Zur Plausibilitätsprüfung der FE-Simulationen werden verschiedene Ergebnisse aus der Literatur herangezogen. Die Ergebnisse der genannten Arbeiten werden mit den in diesem Beitrag verwendeten FE-Simulationsmodellen im Vorfeld nachgebildet, um die Aussagekraft und die Plausibilität der verwendeten Modelle zu bestätigen. Der Abgleich zeigt eine gute Übereinstimmung. Als exemplarische Beispiele der Plausibilitätsprüfungen dienen die in Abb. 2 und 3 dargestellten Ergebnisse der Spannungsüberhöhung entlang der Zahnwellenverbindung (vgl. [12]) sowie der Spannungsverteilung entlang der abgewinkelten Zahnkontur der ebenen Zahnscheibe (vgl. [6, 11, 14]). Die hier dargestellten Ergebnisse passen zu den aus der Literatur gewonnenen Ergebnissen und Erkenntnissen. Der in Abb. 2 aufgeführte Verlauf der Spannungsüberhöhung entlang der glatten Welle und der daran anschließenden Verzahnung (mit freier Verzahnung sowie vorhandener Nabenuberdeckung) entspricht den spannungsoptischen Ergebnissen aus [12]. Hierbei wird die Spannungsüberhöhung als Verhältnis der maximal auftretenden Zahnfußvergleichsspannung zur vorhandenen Torsionsbeanspruchung der glatten Welle angegeben. Die in [12] verwendete Bezugsgröße ist das Verhältnis von maximaler Zahnfußvergleichsspannung zur Torsionsspannung des fiktiven (effektiven) Ersatzdurchmes-

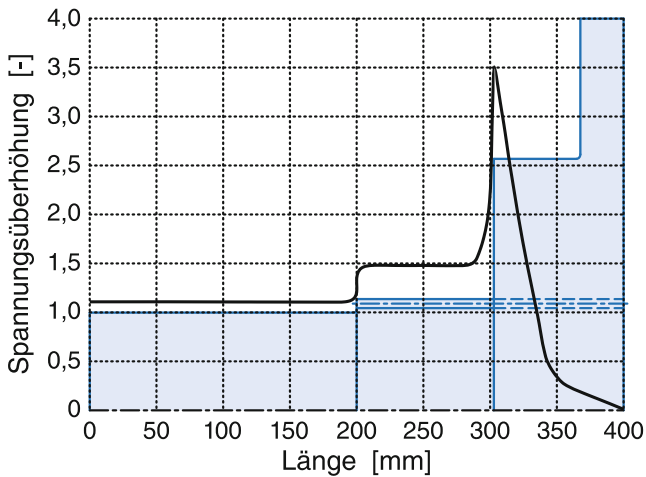
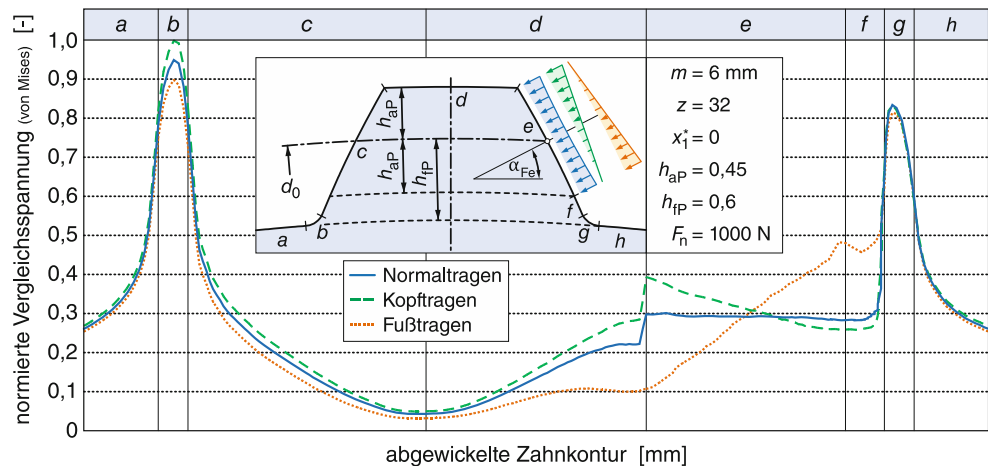


Abb. 2 Verlauf der Spannungsüberhöhung entlang der Zahnwellenverbindung DIN 5480 – 160×6×25. Ergebnis der 3D-FEM-Simulation. Auswertung auf der Oberfläche der glatten Welle (Bereich: 0...200 mm) sowie im Zahnfuß der Zahnwelle (Bereich: 200...400 mm). Bezugswert für die Spannungsüberhöhung ist der fiktive Ersatzdurchmessers d_{h1}

sers (d_{h1}) gleicher Verdrehsteifigkeit einer verzahnten zu einer glatten (effektiven) Welle. Da im verwendeten Simulationsmodell der glatte Wellendurchmesser kleiner als der fiktive Ersatzdurchmessers d_{h1} ist, ergibt sich im Bereich der glatten Welle eine Spannungsüberhöhung von größer als 1,0. Die auftretende maximale Spannungsüberhöhung am Beginn der Nabenverzahnung entspricht dem in [12] angegebenen Wert von $\approx 3,5$.

Beim FE-Ergebnis der 2D-Zahnscheibe in Abb. 3 sind auf der Zugseite (Bereich g) nahezu keine Unterschiede der Zahnfußvergleichsspannung in Abhängigkeit des Tragverhaltens (Kopf-, Normal-, Fußträger) vorhanden. Hingegen ist auf der Druckseite (Bereich b in Abb. 3) die Zahnfußspannung beim Kopfträger am größten und beim Fußträger am kleinsten. Zu gleichen Ergebnissen kommen auch [6, 11].

Abb. 3 Verteilung der Vergleichsspannung in normierter Form entlang der abgewickelten Zahnkontur des Einzelzahnes (Welle) bei unterschiedlicher Belastung entsprechend dem Tragverhalten (Belastungen: Normaltragen blau, Kopftragen grün, Fußtragen orange)



3.2 Simulationsdurchführung

In DIN 5480-1 wird in Abhängigkeit des jeweils verwendeten Fertigungsverfahrens zwischen unterschiedlichen Zahnfußhöhen und Fußrundungsradien des Bezugsprofils unterschieden. Für die spanende Bearbeitung ist ein Zahnfußrundungsradius von $\rho_{FP}=0,16 \cdot m$ und für die umformende Herstellung ein Zahnfußrundungsradius von $\rho_{FP}=0,54 \cdot m$ vorgesehen:

- Räumen: $h_{FP}=0,55 \cdot m$ ($\rho_{FP}=0,16 \cdot m$)
- Wälzfräsen: $h_{FP}=0,60 \cdot m$ ($\rho_{FP}=0,16 \cdot m$)
- Wälzstoßen: $h_{FP}=0,65 \cdot m$ ($\rho_{FP}=0,16 \cdot m$)
- Kaltwalzen: $h_{FP}=0,84 \cdot m$ ($\rho_{FP}=0,54 \cdot m$)

Bei den drei erstgenannten Zerspanungsverfahren beträgt der Zahnfußrundungsradius $\rho_{FP}=0,16 \cdot m$. Lediglich die Zahnfußhöhe unterscheidet sich bei diesen drei Fertigungsverfahren. Die Variation der Zahnfußhöhe und der damit einhergehende Einfluss auf die Zahnfußspannungen werden im weiteren Verlauf dieses Beitrags gesondert untersucht.

Die durchzuführenden 2D-FE-Scheibenmodelle weisen eine Dicke von 1 mm auf und werden mit einer symmetrisch parabolischen Lastverteilung belastet, welche einer äquivalenten Normalkraft von $F_n=1000\text{ N}$ entspricht. Es werden vergleichende Simulationen mit einem Kontaktmodell (Zahnflanke von Welle und Nabe berühren sich) sowie Einzelmodellen (Welle und Nabe werden getrennt voneinander behandelt) simuliert. Die damit gewonnenen Ergebnisse der Zahnfußspannungen zeigen keine nennenswerten Unterschiede. Weder qualitativ noch quantitativ. Daher werden im Weiteren die Simulationen mithilfe der Einzelmodelle durchgeführt, welche in Abb. 1 dargestellt sind. Für diese Einzelmodelle ergeben sich die folgenden vier FE-Simulationsmodelle:

- Welle: $h_{FP}=0,60 \cdot m$ und $\rho_{FP}=0,16 \cdot m$
- Nabe: $h_{FP}=0,60 \cdot m$ und $\rho_{FP}=0,16 \cdot m$

- Welle: $h_{FP} = 0,84 \cdot m$ und $q_{FP} = 0,54 \cdot m$
- Nabe: $h_{FP} = 0,84 \cdot m$ und $q_{FP} = 0,54 \cdot m$

Ausgehend von den Erkenntnissen aus [14, 19, 20] sind in Bezug auf die Beanspruchungen und das Verschleißverhalten kleinmodulige Verzahnungen mit großer Zähnezahl günstiger als großmodulige Verzahnungen mit kleiner Zähnezahl. Nach [21] sollen zudem Verbindungen mit Zähnezahlen $z \leq 13$ vermieden werden. Die Kombination von Modul m und Zähnezahl z ist nach [22] so zu wählen, dass bei der Auslegung von Zahnwellen eine mittlere Zähnezahl von ca. $z = 30$ anzustreben ist. Weiterhin ist nach [22] eine Verbindungsbreite von $0,6 \dots 0,8 \cdot d_b$ zu empfehlen.

Bezugnehmend auf die in DIN 5480-2 aufgeführten Zahnwellenverbindungen wird für die weiteren FE-Simulationen ein Zähnezahlbereich von 10 bis 82 gewählt. Die innerhalb dieses Zähnezahlbereichs vorhandenen Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480-2 [2] werden alle mit den vorgestellten 2D-FE-Scheibenmodellen simuliert und ausgewertet. Zusätzlich erfolgt eine Variation des Profilverschiebungsfaktors im Bereich von 0 bis 0,45. Um den Einfluss des Profilverschiebungsfaktors besser darzustellen, wird der Bereich gleichmäßig in den Stufen $x_1^* = 0$; $x_1^* = 0,11667$; $x_1^* = 0,28333$ und $x_1^* = 0,45$ unterteilt.

Daran anschließend erfolgen die Simulationen mit den 3D-FE-Modellen, um von den Ergebnissen der 2D-Berechnungen auf reale Zahnwellenverbindungen schließen zu können. Entscheidend hierbei ist das Tragverhalten über der Verbindungsbreite und der damit einhergehende Tragbreitenfaktor k_b .

Da die nach DIN 5480 [1] vorhandene Verzahnungsgeometrie auf dem Modul m basiert, welcher eine teilungsbhängige Größe ist und alle übrigen Verzahnungsgrößen sich darauf beziehen, sind die erhaltenen Simulationsergebnisse der verschiedenen Modulreihen identisch. Dies wird u. a. in [11] bei den durchgeführten FE-Untersuchungen bestätigt. Somit werden nachfolgend die Simulationsergebnisse exemplarisch für die Modulreihe $m = 6$ mm vorgestellt, da in dieser Modulreihe der gesamte Zähnezahlbereich von 10 bis 82 enthalten ist.

4 Ableitung einer praxisorientierten Berechnungsmethode

Die nachfolgend vorzustellende Berechnungsmethode beinhaltet Analogien der aus dem Bereich der Laufverzahnungen bekannten Zahnfußspannungsberechnung nach ISO 6336-3 [23] (vormals DIN 3990-3 [24]) Methode C. Gleichwertig ist, dass die Berechnungen ohne EDV-Programm durchgeführt werden können und die Ergebnisse im Allgemeinen zu geringfügig höheren Zahnfußspannungen führen und damit auf der sicheren Seite liegen. Die Berechnungs-

methode lässt sich somit ohne großen Aufwand direkt in der Praxis umsetzen und kann im Weiteren für den Einzug in eine Berechnungsrichtlinie genutzt werden.

Die hier vorzustellende Berechnungsmethode basiert auf der (von Mises) Vergleichsspannung σ_V der ebenen Zahn- bzw. Nabenscheibe, welche durch die Einflusszahl α_k , dem Fußhöhen Einflussfaktor Y_{hFP} , dem Faktor der Nabendwandstärke Y_{tN} und dem Tragbreitenfaktor (kurz: Breitenfaktor) k_b korrigiert werden:

$$\sigma_{F,z} = \sigma_{V,z} \cdot \alpha_{k,z} \cdot Y_{hFP,z} \cdot Y_{tN,z} \cdot k_b \quad (1)$$

$$\sigma_{F,d} = \sigma_{V,d} \cdot \alpha_{k,d} \cdot Y_{hFP,d} \cdot Y_{tN,d} \cdot k_b \quad (2)$$

Infolge der unterschiedlich hohen Zahnfußspannungen auf der Zug- $\sigma_{F,z}$ und Druckseite $\sigma_{F,d}$ ist die Berechnung für beide Seiten gesondert durchzuführen. Hierbei und in den folgenden Gleichungen steht der Index „z“ für die Zugseite und der Index „d“ für die Druckseite. In den nachfolgenden Unterkapiteln werden die einzelnen Koeffizienten der Gln. 1 und 2 gesondert behandelt.

4.1 Geometrische Größen der Verzahnung

Die für die Berechnung der Zahnfußspannung notwendigen geometrischen Verzahnungsgrößen basieren auf den Angaben nach DIN 5480-1 [1] und werden nachfolgend vorgestellt. Zudem sind die geometrischen Verzahnungsgrößen exemplarisch in Abb. 4 dargestellt.

Grundkreisdurchmesser d_b [1]:

$$d_b = m \cdot z \cdot \cos \alpha_0 \quad (3)$$

Teilkreisdurchmesser d [1]:

$$d = mz \quad (4)$$

Zahndicke s am Teilkreisdurchmesser [1]:

$$s = \frac{\pi \cdot m}{2} + 2 \cdot x^* \cdot m \cdot \tan \alpha_0 \quad (5)$$

Mittlerer Durchmesser für den Zahnflankenkontakt d_M :

$$d_M = m \cdot (z + 2 \cdot x^*) \quad (6)$$

Der mittlere Durchmesser d_M ist der um die Profilverschiebung ergänzte Teilkreisdurchmesser. Am Durchmesser d_M befindet sich der mittlere Zahnflankenkontakt. Ober- und unterhalb dieses Durchmessers wird der Zahnflankenkontakt durch die Kopfkreise der Wellen- und Nabenzahnung (Abstand um jeweils $0,45 \cdot m$ vom mittleren Durchmesser d_M) begrenzt. Der mittlere Durchmesser d_M wird für

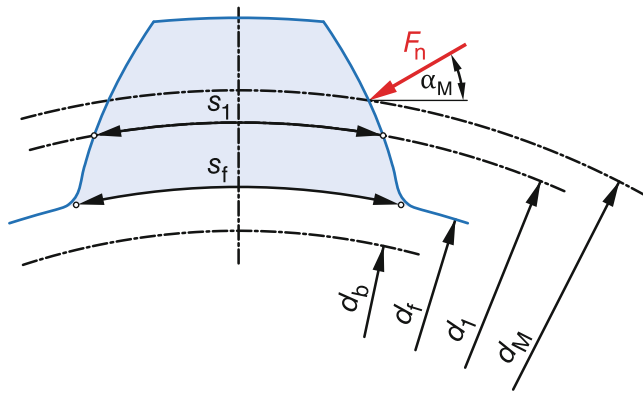


Abb. 4 Geometrische Größen an der Wellenverzahnung (dargestellte Verzahnung: $m = 6 \text{ mm}$, $z = 10$, $x_1 = 0 \cdot m$, $h_{aP} = 0,45 \cdot m$, $h_{fP} = 0,6 \cdot m$)

die Belastung durch die äquivalente Einzelkraft F_n verwendet.

Eingriffswinkel α_M am mittleren Durchmesser d_M nach DIN 3960 [25]:

$$\alpha_M = \arccos\left(\frac{d_b}{d_M}\right) \tag{7}$$

Die Fußkreisdurchmesser der Wellen- d_{f1} und Nabenverzahnung d_{f2} beziehen sich auf das Fertigungsverfahren Wälzfräsen mit einem Fußhöhenfaktor von $h_{fP} = 0,6 \cdot m$ [1]:

$$d_f = m \cdot (z + 2 \cdot x^* - 2 \cdot 0,6) \tag{8}$$

Zahndicken am Fußkreisdurchmesser der Wellen- s_{f1} und Nabenverzahnung s_{f2} nach DIN 3960 [25]:

$$s_f = d_f \cdot \left[\frac{s}{d} + \text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\left(\arccos\frac{d_b}{d_f}\right) \right] \tag{9}$$

4.2 Vergleichsspannung

Übliche Werkstoffe für Zahnwellenverbindungen besitzen i. d. R. duktilen Werkstoffverhalten, weshalb die verwendete Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) angewendet wird. Die Vergleichsspannung der Zugseite $\sigma_{V,z}$ und der Druckseite $\sigma_{V,d}$ berechnen sich wie folgt:

$$\sigma_{V,z} = \sqrt{(\sigma_b - \sigma_d)^2 + 3 \cdot \tau_S^2} \tag{10}$$

$$\sigma_{V,d} = \sqrt{(\sigma_b + \sigma_d)^2 + 3 \cdot \tau_S^2} \tag{11}$$

Darin enthalten ist die Biegespannung σ_b der Wellenverzahnung:

$$\sigma_{b,W} = F_n \cdot \cos \alpha_{M1} \cdot \frac{d_{M1} - d_{f1}}{2} \cdot \frac{6}{b_{z1} \cdot s_{f1}^2} \tag{12}$$

Und abweichend dazu die Biegespannung der Nabenverzahnung:

$$\sigma_{b,N} = \begin{cases} F_n \cdot \cos \alpha_{M2} \cdot \frac{-d_{f2} + \frac{z \cdot m}{2} + d_{M2}}{2} \cdot \frac{6}{b_{z2} \cdot s_{f2}^2} & \text{wenn: } t_N > 7 \cdot m \\ F_n \cdot \cos \alpha_{M2} \cdot \frac{-d_{f2} + \frac{t_N}{2} + d_{M2}}{2} \cdot \frac{6}{b_{z2} \cdot s_{f2}^2} & \text{wenn: } t_N \leq 7 \cdot m \end{cases} \tag{13}$$

Die Druckspannung σ_d berechnet sich für die Wellen- und Nabenverzahnung zu:

$$\sigma_d = \frac{F_n \cdot \sin \alpha_M}{b_z \cdot s_f} \tag{14}$$

Für die Schubspannung τ_S von Welle und Nabe gilt:

$$\tau_S = \frac{F_n \cdot \cos \alpha_M}{b_z \cdot s_f} \tag{15}$$

Die Zahnnormalkraft F_n in den jeweiligen Spannungsteilen folgt durch:

$$F_n = \frac{2 \cdot T}{d_M \cdot z \cdot \cos \alpha_M} \tag{16}$$

Der darin enthaltene Eingriffswinkel am mittleren Durchmesser α_M wird nach Gl. 7 berechnet.

4.3 Einflusszahl

Die in den Gln. 1 und 2 enthaltene Einflusszahl α_k entspricht nicht einer Formzahl im klassischen Sinn, lässt sich jedoch ingenieurmäßig wie eine Formzahl handhaben. Mithilfe der Ergebnisse der Zahnfuß-Vergleichsspannung der FE-Simulationen $\sigma_{V,FEM}$ nach Kap. 3 und der jeweils nach Gl. 10 bzw. 11 berechneten Vergleichsspannung σ_V wird die Einflusszahl α_k wie folgt definiert:

$$\alpha_{k,z} = \frac{\sigma_{V,z,FEM}}{\sigma_{V,z}} \quad \alpha_{k,d} = \frac{\sigma_{V,d,FEM}}{\sigma_{V,d}} \tag{17}$$

Die Ergebnisse der Einflusszahl α_k der FE-Simulationen nach Gl. 17 und der Näherungsgleichung. 18 sind in den Diagrammen Abb. 5, 6, 7, 8 aufgeführt. Auf der linken Seite der Diagramme ist immer die Zugseite und auf der rechten Seite die Druckseite dargestellt. Zudem sind jeweils

Abb. 5 Einflusszahl α_k der Wellenverzahnung mit Fußbrun-
dungsradius $\varrho_{FP} = 0,16 \cdot m$

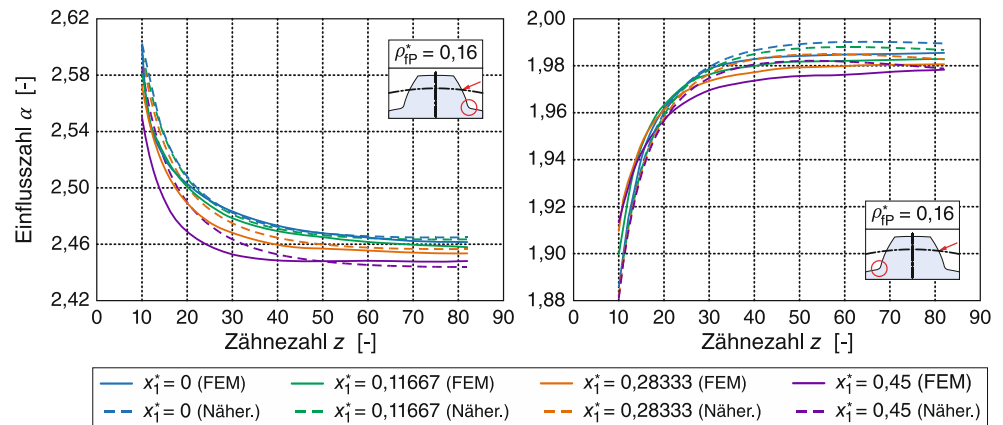


Abb. 6 Einflusszahl α_k der Nabenverzahnung mit Fußbrun-
dungsradius $\varrho_{FP} = 0,16 \cdot m$ und
Nabenwandstärke $t_N = 7 \cdot m$

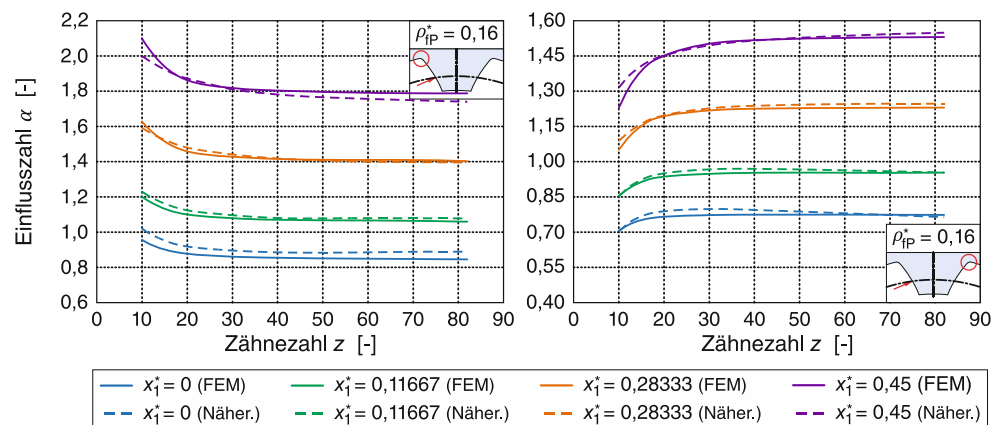
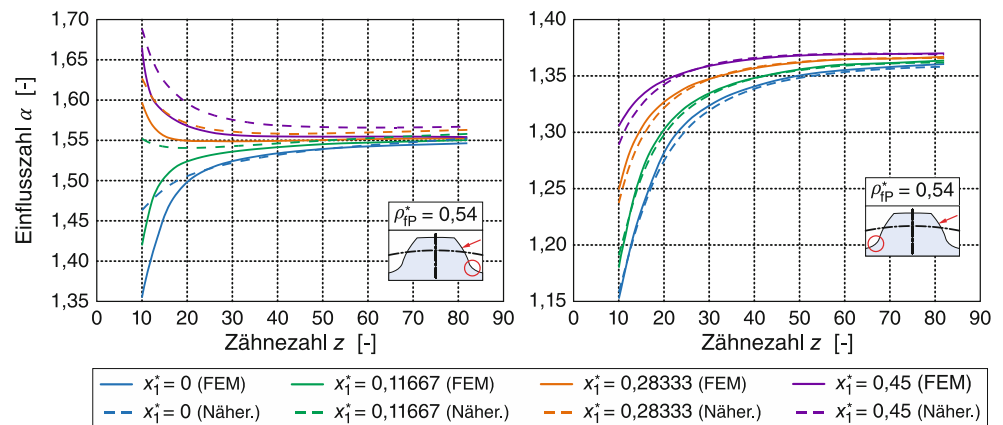


Abb. 7 Einflusszahl α_k der Wellenverzahnung mit Fußbrun-
dungsradius $\varrho_{FP} = 0,54 \cdot m$



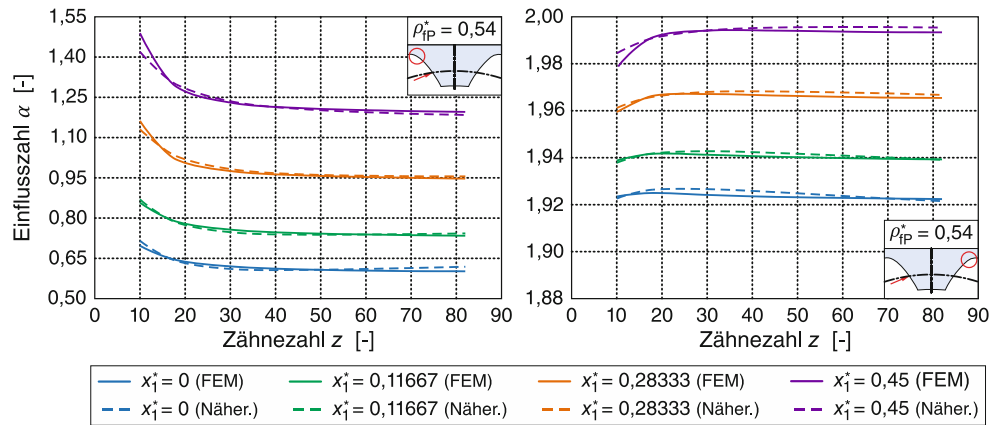
die Wellen- und Nabenverzahnung getrennt abgebildet und es wird nochmals zwischen den beiden in DIN 5480 [1] aufgeführten Zahnfußbrun-
dungsradien von $\varrho_{FP} = 0,16 \cdot m$ und $\varrho_{FP} = 0,54 \cdot m$ unterschieden. Die Nabenwandstärke beträgt bei allen Modellen $t_N = 7 \cdot m$. Der Einfluss dünnerer Wand-
stärken wird in Abschn. 4.5 behandelt.

Basierend auf den durchgeführten zahlreichen FE-Simu-
lationen der Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 [1] lässt sich folgende Gleichung anhand der Ergebnisse ablei-
ten:

$$\alpha_k = A + \frac{B}{C + z} + D \cdot z^E + F \cdot z^G x_1^H \quad (18)$$

Infolge der modulabhängigen Verzahnungsgrößen und der damit verbundenen geometrischen Skalierung, kann der Modul m in dieser Gleichung vernachlässigt werden. Ledig-
lich die Zähnezah z und der Profilverschiebungsfaktor x_1 besitzen einen signifikanten Einfluss auf die Einflusszahl α_k . Die in Gl. 18 einzusetzenden Koeffizienten A bis H sind in Tab. 1 aufgeführt.

Abb. 8 Einflusszahl α_k der *Nabenverzahnung* mit Fußbrunnungsradius $\varrho_{FP} = 0,54 \cdot m$ und Nabenwandstärke $t_N = 7 \cdot m$



Die Ergebnisse der Einflusszahl α_k zwischen der Näherungsgleichung 18 und den FE-Simulationen nach Gl. 17 stimmen sehr gut überein. Die Abweichungen auf der Druckseite der Wellenverzahnungen sowie bei allen Nabenverzahnungen liegen zum Großteil im Bereich kleiner 2%. Speziell bei der nach [22] anzustrebenden mittleren Zähnezahl von ca. $z = 30$ kommt es in einzelnen Fällen zu einer Überschätzung der Einflusszahl α_k . Dies führt bei der Zahnfußspannungsberechnung in einzelnen Fällen zu höheren Spannungswerten von maximal 7%. Die Ergebnisse liegen somit auf der sicheren Seite.

4.4 Einfluss des Fußhöhenfaktors

In den nachfolgenden beiden Diagrammen Abb. 9 und 10 ist die Einflusszahl α_k nach Gl. 17 in Abhängigkeit der drei unterschiedlichen Zahnfußhöhen ($h_{FP} = 0,55 \cdot m$, $h_{FP} = 0,60 \cdot m$, $h_{FP} = 0,65 \cdot m$) dargestellt. Die hier aufgeführten Ergebnisse waren so zu erwarten. Durch eine Vergrößerung der Zahnfußhöhe von $h_{FP} = 0,60 \cdot m$ auf $h_{FP} = 0,65 \cdot m$ kommt es zu einer Vergrößerung des Biegehebelarms in Gl. 12 bzw. 13, wodurch der Biegespannungsanteil vergrößert und dadurch die Einflusszahl α_k geringer ausfällt. Gleiches mit entgegengesetztem Verhalten bei Verringerung der Zahnfußhöhe von $h_{FP} = 0,60 \cdot m$ auf $h_{FP} = 0,55 \cdot m$.

Anhand der FE-Ergebnisse lässt sich die durch die Näherungsgleichung 18 berechnete Einflusszahl α_k mithilfe eines Fußhöhenfaktors Y_{hFP} korrigieren. Da als Ausgangsbasis die Näherungsgleichung 18 für eine Zahnfußhöhe von $h_{FP} = 0,60 \cdot m$ gilt, beträgt bei dieser Geometrie für die Zug- und Druckseite der Faktor $Y_{hFP} = 1,0$. Abgeleitet aus den FE-Ergebnissen ergeben sich für die übrigen Zahnfußhöhen die in Tab. 2 aufgeführten Werte für den Fußhöhenfaktor Y_{hFP} .

4.5 Einfluss der Nabenwandstärke

In der praktischen Anwendung kommen sehr häufig Zahnwellenverbindungen mit geringeren Nabenwandstärken als $t_N = 7 \cdot m$ zum Einsatz. Entsprechend wird nachfolgend bei dem in Abb. 1b bzw. Abb. 11 gezeigten FE-Modell die Wandstärke t_N variiert. Die weiteren Parameter (Werkstoffverhalten, Verzahnungsgeometrie, Einspannung usw.) bleiben unverändert.

Die in den Abb. 12, 13, 14, 15 aufgeführten Ergebnisse der Einflusszahl α_k zeigen, dass sich mit abnehmender Wandstärke die Einflusszahl auf der Zugseite verringert und auf der Druckseite erhöht. Zudem kommt es im Zähnezahlbereich $z > 20$ tendenziell zu einem reinen Versatz des Verlaufs (Offset), welcher mit einem konstanten Korrekturfaktor berücksichtigt werden kann. Des Weiteren kommt es im Bereich kleinerer Zähnezahlen $z \leq 20$ teilweise zu größte-

Tab. 1 Koeffizienten zur Berechnung der Einflusszahl α_k nach Gl. 18

	Welle: $\varrho_{FP}^* = 0,16$ Zugseite	Welle: $\varrho_{FP}^* = 0,16$ Druckseite	Nabe: $\varrho_{FP}^* = 0,16$ Zugseite	Nabe: $\varrho_{FP}^* = 0,16$ Druckseite	Welle: $\varrho_{FP}^* = 0,54$ Zugseite	Welle: $\varrho_{FP}^* = 0,54$ Druckseite	Nabe: $\varrho_{FP}^* = 0,54$ Zugseite	Nabe: $\varrho_{FP}^* = 0,54$ Druckseite
A	2,688	1,89	0,71	0,07	0,92	0,68	1,043	0,83
B	2,55	-2,27	2,6	-3,2	-0,55	-3,6	3,1	-1,2
C	0	0	0,42	-0,08	0	0	-0,6	0,35
D	-0,45	0,4	0,02	1,3	0,56	0,9	-0,9	-0,04
E	-0,13	-0,26	0,46	-0,13	0,03	-0,05	-0,15	0,37
F	-0,07	-0,0007	2,97	1,07	7,8	6,3	2,2	0,87
G	0,1	0,8	-0,08	0,12	-1,3	-1,3	-0,1	0,09
H	2	1	1,13	1,05	0,7	0,8	1,15	1,06

Abb. 9 Einflusszahl α_k in Abhängigkeit des Fußhöhenfaktors h_{fP} der Wellenverzahnung mit Fußrundungsradius $\rho_{fP} = 0,16 \cdot m$

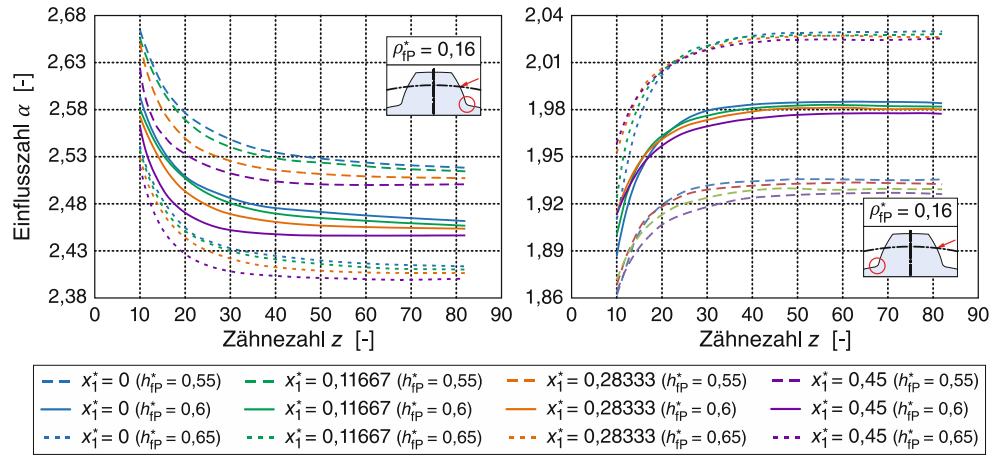
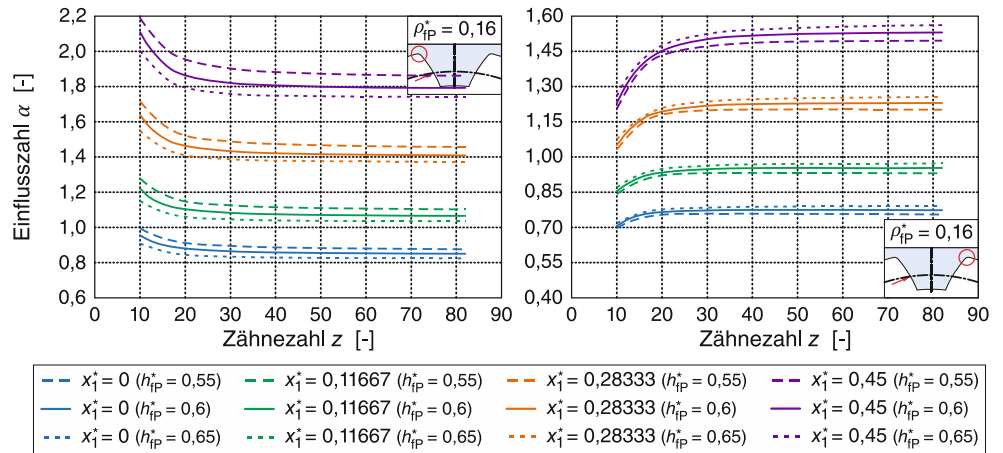


Abb. 10 Einflusszahl α_k in Abhängigkeit des Fußhöhenfaktors h_{fP} der Nabenverzahnung mit Fußrundungsradius $\rho_{fP} = 0,16 \cdot m$ und Nabenwandstärke $t_N = 7 \cdot m$



ren Änderungen der Einflusszahl α_k , siehe Abb. 13 und 15. Aufgrund dieser größeren Abweichungen des qualitativen Verlaufs der Einflusszahl α_k lässt sich dies nicht mehr mit einem konstanten Korrekturfaktor kompensieren.

Prinzipiell lässt sich anhand dieser Ergebnisse zeigen, dass der Einfluss der Wandstärke für Zähnezahlen $z > 20$ bis zu einer Wandstärke von $t_N \geq 3 \cdot m$ mithilfe eines konstanten Korrekturfaktors berücksichtigen lässt. Bei kleinen Zähnezahlen $z \leq 20$ und dünner Wandstärke $t_N < 3 \cdot m$ weichen die Ergebnisse der Korrektur mit konstantem Faktor recht stark ab, weshalb dieser Bereich von der Korrektur im weiteren Verlauf dieses Beitrags nicht empfohlen wird. Ins-

gesamt lässt sich damit der folgende Gültigkeitsbereich für die Korrektur angeben: für Zähnezahlen $z > 20$ mit Wandstärke der Nabe von $t_N \geq 3 \cdot m$.

Für den hier betrachteten Bereich ($z > 20$; $7 \geq t_N/m \geq 1$) ist der (Korrektur-)Faktor der Nabenwandstärke Y_{fN} über dem dimensionslosen Faktor der Nabenwandstärke t_N/m in Abb. 16 dargestellt. Hieran abgeleitet lässt sich der Faktor

Tab. 2 Einfluss des Fußhöhenfaktors

	$Y_{h_{fP},z}$	$Y_{h_{fP},d}$
Welle: $\rho_{fP}^* = 0,16, h_{fP} = 0,55$	1,026	0,976
Welle: $\rho_{fP}^* = 0,16, h_{fP} = 0,6$	1,0	1,0
Welle: $\rho_{fP}^* = 0,16, h_{fP} = 0,65$	0,98	1,023
Nabe: $\rho_{fP}^* = 0,16, h_{fP} = 0,55$	1,043	0,983
Nabe: $\rho_{fP}^* = 0,16, h_{fP} = 0,6$	1,0	1,0
Nabe: $\rho_{fP}^* = 0,16, h_{fP} = 0,65$	0,97	1,012
Welle: $\rho_{fP}^* = 0,54, h_{fP} = 0,84$	1,0	1,0
Nabe: $\rho_{fP}^* = 0,54, h_{fP} = 0,84$	1,0	1,0

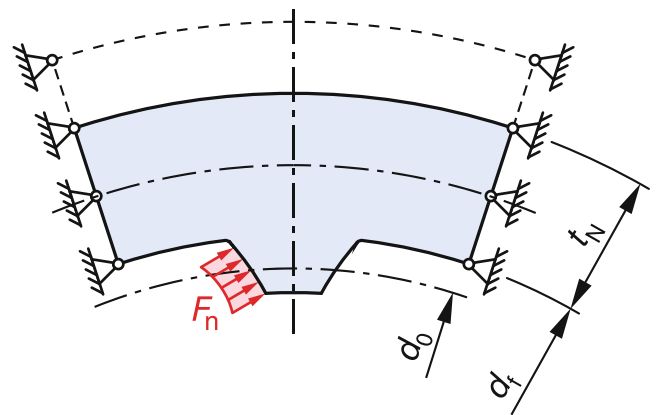
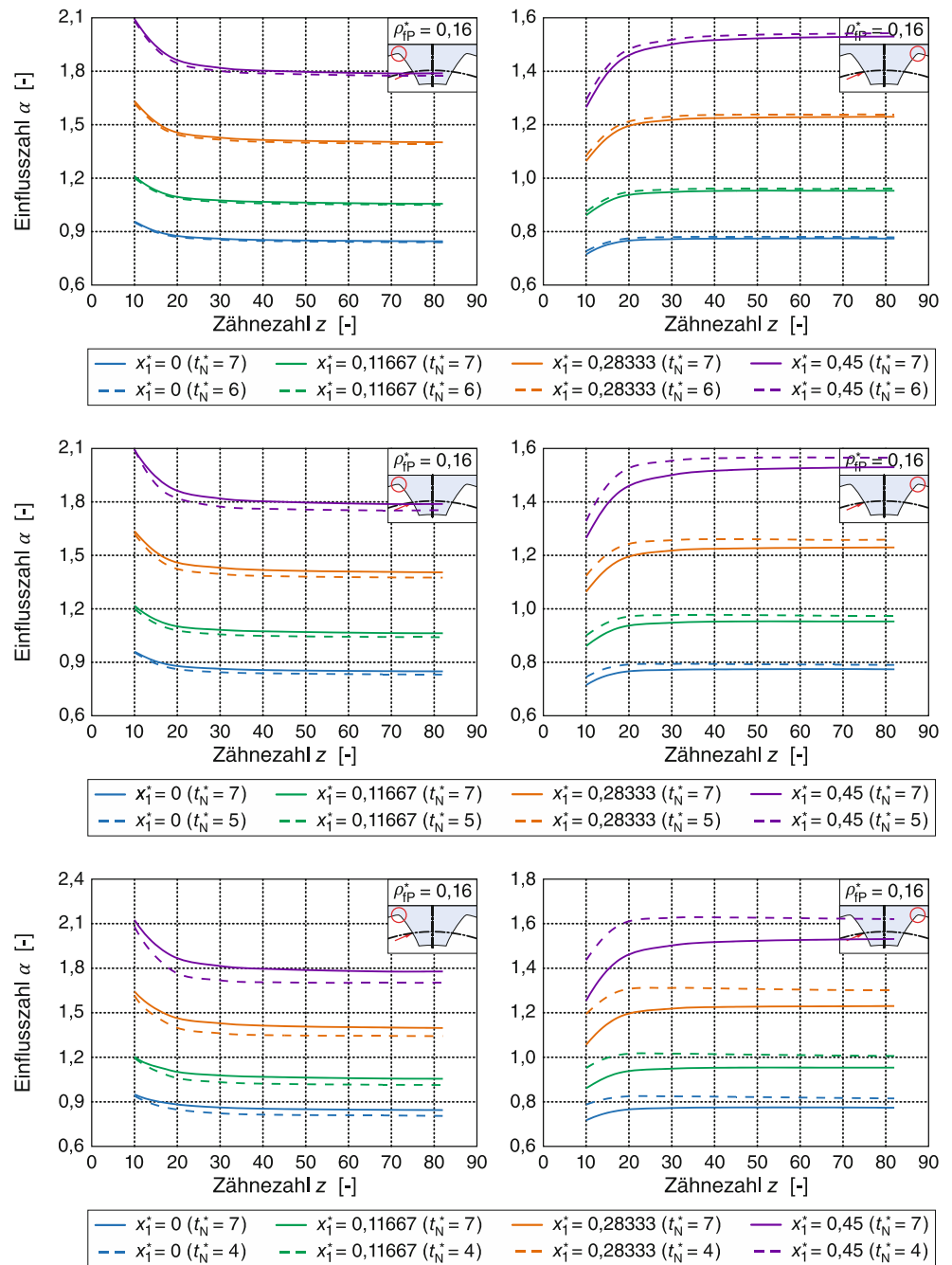


Abb. 11 2D-FEM-Scheibenmodell der Nabe mit Variation der Wandstärke t_N

Abb. 12 Vergleich zwischen den Ergebnissen der FEM-Simulationen der Zahnfußspannungen der *Nabenverzahnung* mit Fußrundungsradius $\rho_{FP} = 0,16 \cdot m$ und variierender Nabenwandstärke $t_N = 7, 6, 5, 4$



der Nabenwandstärke Y_{tN} näherungsweise im angegebenen Gültigkeitsbereich wie folgt berechnen:

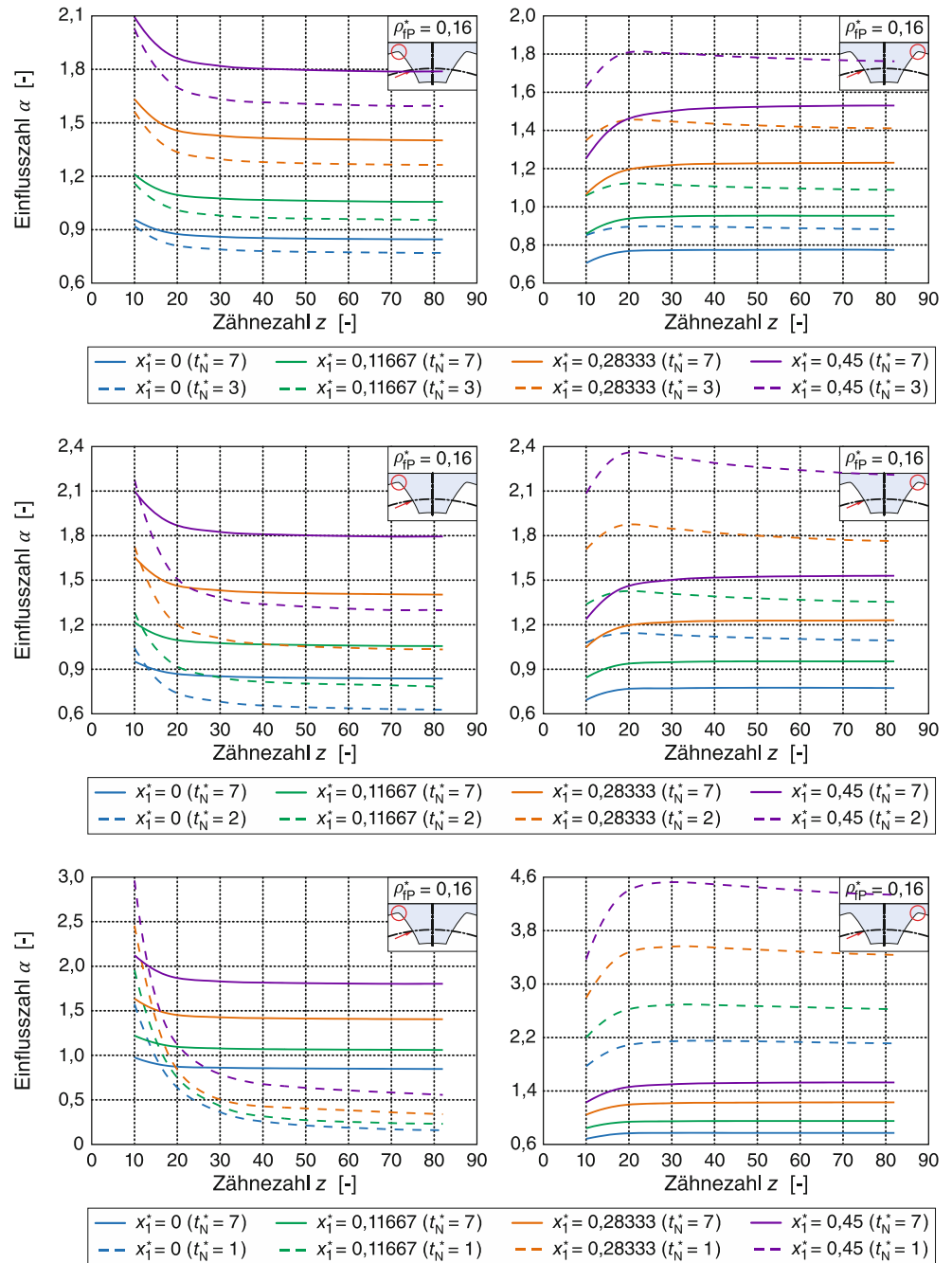
Für die Wellenverzahnung sowie für die Nabenverzahnung mit $t_N/m \geq 7$ gilt:

$$Y_{tN,z} = Y_{tN,d} = 1,0 \tag{19}$$

Für die Nabenverzahnung mit Zähnezahl $z > 20$ und $7 > t_N/m \geq 3$ gilt:

$$Y_{tN,z} = 0,052 \cdot \frac{t_N}{m} + 0,694 \tag{20}$$

Abb. 13 Vergleich zwischen den Ergebnissen der FEM-Simulationen der Zahnfußspannungen der *Nabenverzahnung* mit Fußrundungsradius $\rho_{FP} = 0,16 \cdot m$ und variierender Nabenwandstärke $t_N = 7, 3, 2, 1$



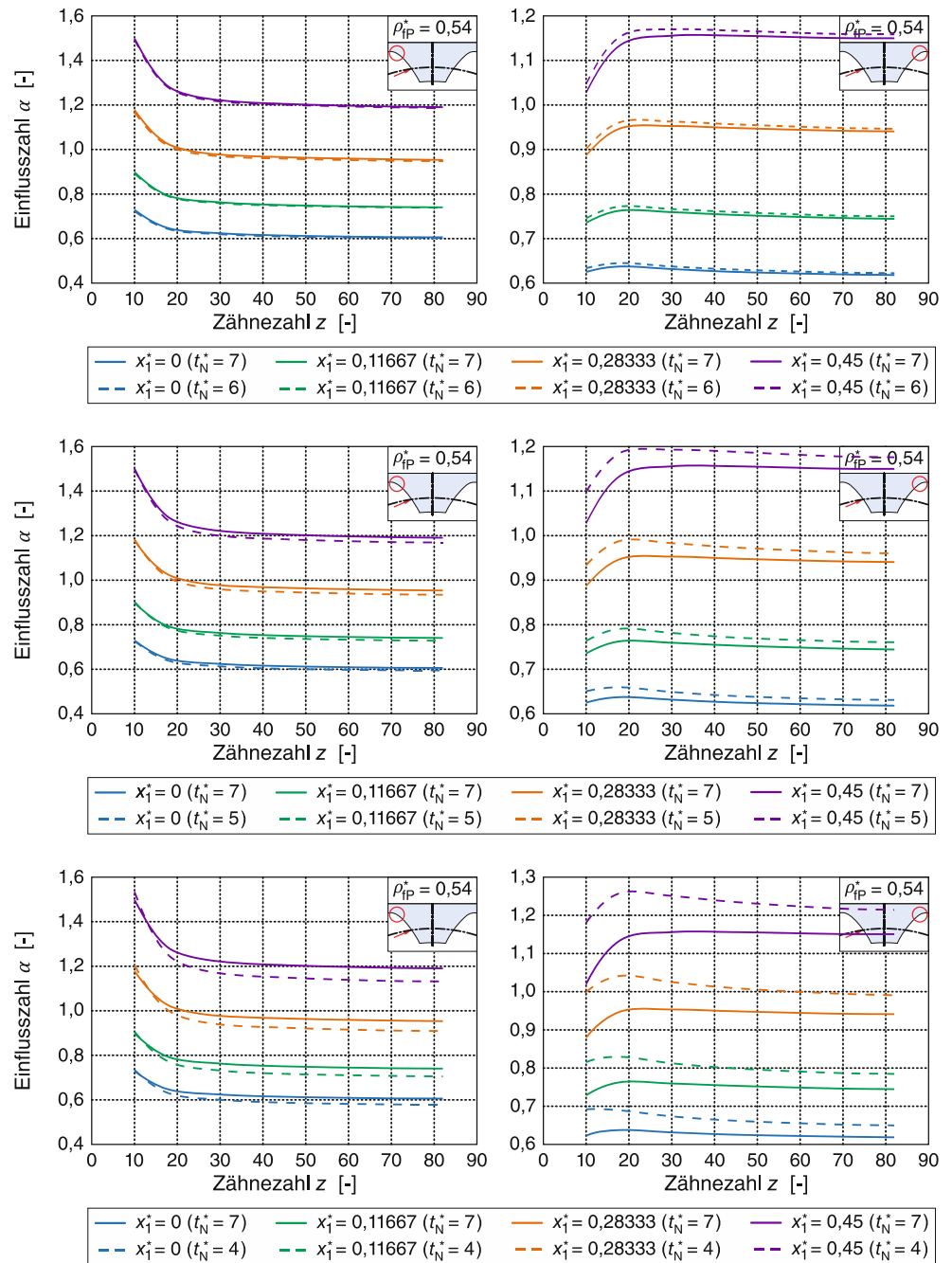
$$\begin{aligned}
 Y_{tN,d} = & -0,0026 \cdot \left(\frac{t_N}{m}\right)^5 + 0,062 \cdot \left(\frac{t_N}{m}\right)^4 \\
 & - 0,582 \cdot \left(\frac{t_N}{m}\right)^3 + 2,679 \cdot \left(\frac{t_N}{m}\right)^2 \\
 & - 6,14 \cdot \left(\frac{t_N}{m}\right) + 6,783
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Die Anwendung der Korrektur für dünne Wandstärken im Bereich $t_N < 3 \cdot m$ wird nicht empfohlen. Speziell bei Zähnezahlen von $z < 40$ weichen die Ergebnisse bei dünner Wandstärke $t_N < 3 \cdot m$ stark ab.

4.6 Einfluss der Nabenbreite (Breitenfaktor)

Die maximale Flankenpressung einer Zahnwellenverbindung berechnet sich nach DIN 5466-2 [10] aus der maximalen Pressung der 2D-Verbindungsscheibe multipliziert mit dem Breitenfaktor k_b . Da durch [6] bekannt ist, dass die Größe der auftretenden Zahnfußspannungen proportional zur Flankenpressung ist, lässt sich auch die maximale Zahnfußspannung durch die Multiplikation der Zahnfußspannung der 2D-Verbindungsscheibe mit dem Breitenfaktor k_b ermitteln.

Abb. 14 Vergleich zwischen den Ergebnissen der FEM-Simulationen der Zahnfußspannungen der *Nabenverzahnung* mit Fußrundungsradius $\rho_{FP} = 0,54 \cdot m$ und variierender Nabenwandstärke $t_N = 7, 6, 5, 4$

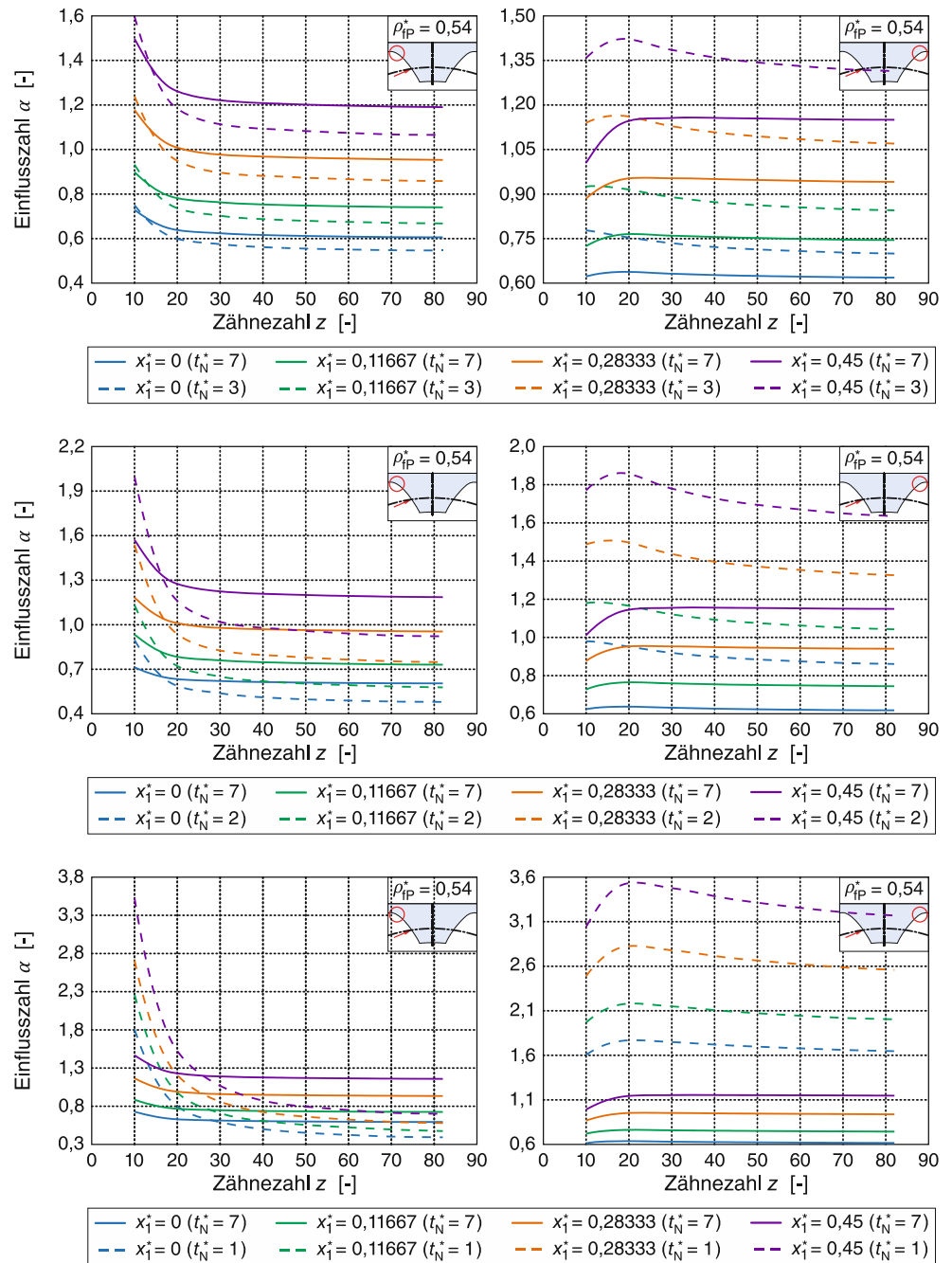


Der Breitenfaktor k_b berücksichtigt dabei nur die Belastung durch reines Drehmoment. Einflüsse aus Axial- und Querkraft, Biegung sowie Flankenabweichungen bleiben unberücksichtigt. Der darin enthaltene Zahlenwert $k_{b0,6}$ kennzeichnet den in [14] aufgestellten und in [11] bestätigten Breitenfaktor für das Verhältnis Breite zu Bezugsdurchmesser von $b/d_B = 0,6$. Für größere Verbindungsängen lässt sich die maximale Zahnfußspannung nicht weiter reduzieren, weshalb bei der Berechnung ab dem Verhältnis $b/d_B \geq 0,6$ von einer konstanten maximalen Zahnfußspannung ausgegangen wird.

Zu beachten ist, dass sich der Breitenfaktor auf neuwertige Zahnwellenverbindungen bezieht. Da sich die maximale Spannung lediglich auf einen eng begrenzten Bereich am Verbindungsanfang (vgl. Abb. 2) bezieht, kann durch einen Einlauf- wie auch Betriebsverschleiß die Spannungsüberhöhung und damit der Wert des Breitenfaktors im Betrieb reduziert werden.

Anhand der durchgeführten FEM-Simulationen ließ sich der in Abb. 17 dargestellte Breitenfaktor k_b über dem Verhältnis (Verzahnungs-)Breite b zu Bezugsdurchmesser d_B ableiten. Obwohl sehr unterschiedliche Bezugsgrößen in

Abb. 15 Vergleich zwischen den Ergebnissen der FEM-Simulationen der Zahnfußspannungen der *Nabenverzahnung* mit Fußrundungsradius $\rho_{FP} = 0,54 \cdot m$ und variierender Nabenwandstärke $t_N = 7, 3, 2, 1$



der hier vorgestellten Berechnungsmethode im Vergleich zur DIN 5466-2 [10] vorhanden sind, ist der qualitative wie auch quantitative Verlauf des Breitenfaktors in Abb. 17 fast mit den Angaben nach [10] identisch.

In Bezug auf die aus Abb. 17 abzuleitende Berechnung sind die Zahlenwerte des ersten und letzten Faktors in der nachfolgenden Gl. 22 leicht unterschiedlich zu [2]. Die weitere Berechnung mittels Gl. 23 entspricht [2].

$$k_{b0,6} = 14,7 \cdot \left[1 - e^{\left(\frac{-z+95}{34,8+16 \cdot x_1^*} \right)} \right] - 11 \tag{22}$$

$$k_b = \begin{cases} 1 + \left(\frac{k_{b0,6}}{0,6} - \frac{2}{0,6} \right) \cdot \left(\frac{b}{d_B} \right) + \left[\frac{1}{0,6} \cdot \left(\frac{b}{d_B} \right) \right]^2 & \text{wenn: } \frac{b}{d_B} \leq 0,6 \\ \frac{k_{b0,6}}{0,6} \cdot \left(\frac{b}{d_B} \right) & \text{wenn: } \frac{b}{d_B} > 0,6 \end{cases} \tag{23}$$

Abb. 16 Darstellung des Einflussfaktors Y_{IN} anhand der Ergebnisse der FEM-Simulationen in Abhängigkeit des Nabenwandstärkenfaktors t_N/m

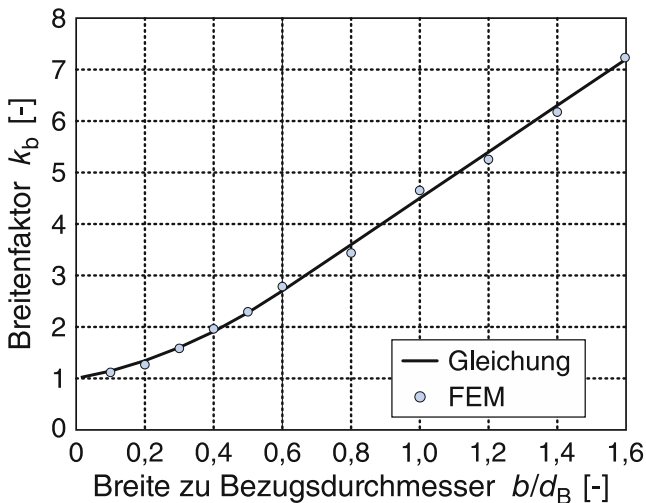
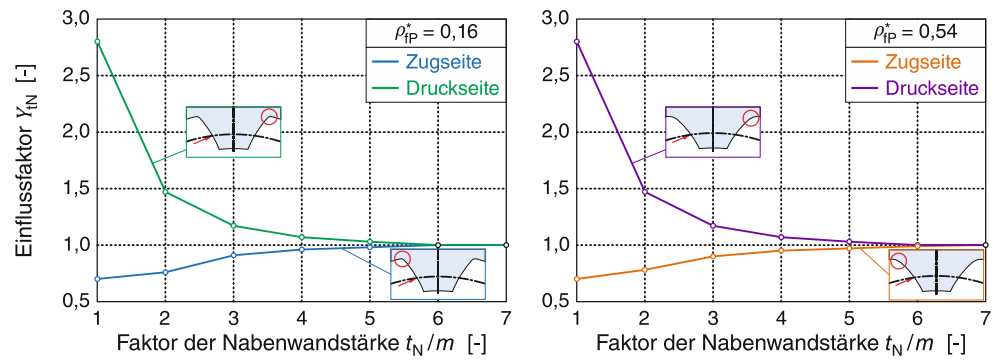


Abb. 17 Darstellung des Breitenfaktors k_b anhand der Ergebnisse der FEM-Simulationen in Abhängigkeit des Verhältnisses Breite zu Bezugsdurchmesser b/d_B

5 Vergleich mit Versuchsergebnissen aus der Literatur

Nachfolgend sollen die Ergebnisse der vorgestellten Berechnungsmethode mit Versuchsergebnissen aus der Literatur verglichen werden. Hierzu werden die schon vorgestellten Literaturquellen [6, 11, 12] herangezogen. In Tab. 3

sind die wesentlichen Verzahnungsangaben, die Drehmomentbelastung und die daraus resultierende Zahnfußspannung angegeben. Bei der Größe σ_{max} handelt es sich um die in der jeweiligen Literatur angegebenen Zahnfußspannung. Die Größe $\sigma_{F,z}$ ist die anhand der hier vorgestellten Berechnungsmethode nach Gl. 1 ermittelte Zahnfußspannung. Mit $\sigma_{v1,z,a}$ ist die mithilfe von DIN 5466 [9, 10] berechnete Zahnfußspannung gekennzeichnet. Die beiden Werte von $\sigma_{F,z}$ und $\sigma_{v1,z,a}$ sind jeweils die maximalen Zahnfußspannungen am Verbindungsanfang (vgl. hierzu den Maximalwert in Abb. 2).

Anhand der Ergebnisse ist zu erkennen, dass mithilfe der vorgestellten Berechnungsmethode eine gute Übereinstimmung mit den aus der Literatur angegebenen Spannungswerten vorliegt. Bei einer eher tendenziell geringen Zähnezahl von $z=18$ liegt die berechnete Zahnfußspannung der Zahnwellenverbindung mit Modul $m=2$ mm leicht unter der in [12] ermittelte Zahnfußspannung und bei Modul $m=3$ mm entspricht sie sehr genau dem angegebenen Wert. Die in [6, 11] aufgeführte Zahnwellenverbindung entspricht einer idealen Verzahnung. Die in [6] ebenfalls untersuchte Verzahnungen DIN 5480 – $60 \times 6 \times 8$ wird nicht für einen Vergleich herangezogen, da die Zähnezahl mit $z=8$ unterhalb des in Kap. 3 definierten Zähnezahlbereichs liegt und damit ebenso für die praktische Anwendung eher untypisch ist.

Tab. 3 Vergleich zwischen Versuchsergebnissen aus der Literatur und der vorgestellten neuen Berechnungsmethode

Verzahnung	–		$40 \times 2 \times 18 \times 7H6g$	$60 \times 3 \times 18 \times 7H6g$	$170 \times 5 \times 32$
Literatur	–		[12]	[12]	[6, 11]
Fertigungsart	–		Wälzgefräst	Wälzgefräst	Ideale Verzahnung
Verzahnungsbreite	b	[mm]	26,5	47,5	1
Breitenverhältnis	b/d_B	[–]	0,663	0,792	0,006
Nabenwandstärke	t_N	[mm]	7,1	10,6	35
Einflusszahl	α_k	[–]	3,7 nach [12]	3,43 nach [12]	–
Drehmoment	T	[Nm]	1635	1635	1400
Zahnfußspannung					
Nach Literatur	σ_{max}	[MPa]	649,0	178,3	201,0
Nach Gl. 1	$\sigma_{F,z}$	[MPa]	599,8	178,1	231,8
DIN 5466-2E	$\sigma_{v1,z,a}$	[MPa]	952,8	362,5	197,0

Ein weiterer Vergleich mit der in DIN 5466 [9, 10] aufgeführten Berechnungsmethode zeigt, verglichen mit der Literatur, in Tab. 3 doch recht starke Abweichungen und kommt auf sehr hohe Werte für die maximale Zahnfußspannung. Diese Werte konnten mit den durchgeführten FEM-Simulationen nicht bestätigt werden.

6 Zusammenfassung

Die bisherige Berechnung der auftretenden maximalen Zahnfußspannung basiert auf der Verwendung eines imaginären Ersatzdurchmessers, welcher mithilfe verschiedener Einfluss-, Korrektur- und Formfaktoren multipliziert wird. Diese Faktoren wiederum basieren auf verschiedenen Geometriegrößen der Verzahnung (m , z , x , b , d_B , ϱ). Sehr simpel ausgedrückt, wird mit dem Ersatzdurchmesser eine Spannung berechnet, welche mittels der diversen Faktoren erweitert bzw. korrigiert wird, um dadurch die auftretende maximale Zahnfußspannung zu erhalten. Dabei sei auf die Ausführungen in [8] aufmerksam gemacht, in welcher es bei der Verwendung des imaginären Ersatzdurchmessers zu Abweichungen bei der Zahnfußspannungsberechnung von bis zu 35 % kommen kann.

Die in diesem Beitrag aufgeführte neue Berechnungsmethode basiert auf den Zusammenhängen der Zahnfußspannungsberechnung im Bereich der Laufverzahnungen. Hierbei wird die analytisch bestimmte Zahnfußvergleichsspannung mithilfe der Einflusszahl (α_k) und den Korrekturfaktoren (Y_{hFP} , Y_{tN} , k_b) auf die auftretende maximale Zahnfußspannung umgerechnet. Der Vorteil dieser neuen Methode ist zum einen, dass kein imaginärer Ersatzdurchmesser bestimmt werden muss und es damit nicht mehr zu den in [8] aufgeführten Abweichungen kommt. Zum anderen sind die Zusammenhänge bei der Ermittlung der Zahnfußvergleichsspannung für die praktische Anwendung wesentlich besser nachvollziehbar. Ferner sind die Abweichungen zwischen Berechnungsergebnis und an Verzahnungen gemessenen Zahnfußspannungen deutlich geringer als bei der bisherigen Methode nach DIN 5466 [9, 10].

Schlussfolgernd kann festgehalten werden, dass die Aussage nach [6] „eine Übertragung der Berechnungsverfahren von Laufverzahnungen zur Bestimmung der auftretenden Zahnfußspannungen in Zahnwellenverbindungen ist nicht möglich“ widerlegt ist. Mit dem vorgestellten Berechnungsverfahren ist die Bestimmung der auftretenden Zahnfußspannungen in Zahnwellenverbindungen mit den Berechnungsverfahren von Laufverzahnungen durchaus möglich. Des Weiteren ist das neue Berechnungsverfahren so aufgebaut, dass es direkt in der praktischen Anwendung umgesetzt und durchaus in Richtlinien und Normen Verwendung finden kann.

7 Formelzeichen

Die verwendeten Formelzeichen sind in Tab. 4 und die zugehörigen Indizes sind in Tab. 5 aufgeführt.

Tab. 4 Formelzeichen

$A \dots H$	[-]	Polynomkoeffizienten
b, b_z	[mm]	Gemeinsame Verzahnungsbreite
d, d_0	[mm]	Teilkreisdurchmesser
D_a	[mm]	Kopfkreisdurchmesser
d_B	[mm]	Bezugsdurchmesser
D_b	[mm]	Grundkreisdurchmesser
D_f	[mm]	Fußkreisdurchmesser
d_{h1}	[mm]	Ersatzdurchmesser
d_M	[mm]	Mittlerer Kopfkreisdurchmesser
h_{aP}	[mm]	Zahnkopfhöhe
h_{fP}	[mm]	Zahnfußhöhe
E	[N/mm ²]	Elastizitätsmodul
F_n	[N]	Normalkraft
G	[N/mm ²]	Schubmodul
k_b	[-]	Tragbreitenfaktor
$k_{b0,6}$	[-]	Tragbreitenfaktor für das Verhältnis $b/d_B=0,6$
m	[mm]	Modul
s	[mm]	Zahndicke am Teilkreis
S_f	[mm]	Zahndicke am Fußkreis
T	[Nm]	Drehmoment
t_N^*	[-]	Nabenwandstärkenfaktor
t_N	[mm]	Nabenwandstärke
x_1^*	[-]	Profilverschiebungsfaktor
x_1	[mm]	Profilverschiebung
Y_{hFP}	[-]	Fußhöeheneinflussfaktor
Y_{tN}	[-]	Nabenwandstärkenfaktor
z	[-]	Zähnezahl
α_0	[rad]	Eingriffswinkel
α_k	[-]	Einflusszahl
α_M	[rad]	Eingriffswinkel am mittleren Durchmesser d_M
ν	[-]	Querkontraktionszahl
q_{fP}^*	[-]	Faktor des Zahnfußrundungsradius
q_{fP}	[mm]	Zahnfußrundungsradius
σ_b	[N/mm ²]	Biegespannung
σ_d	[N/mm ²]	Druckspannung
σ_F	[N/mm ²]	Auftretende maximale Zahnfußvergleichsspannung
σ_{max}	[N/mm ²]	Auftretende maximale Zahnfußvergleichsspannung nach Literaturquelle
σ_V	[N/mm ²]	Zahnfußvergleichsspannung
$\sigma_{v1,z,a}$	[N/mm ²]	Auftretende maximale Zahnfußvergleichsspannung nach DIN 5466
τ_S	[N/mm ²]	Schubspannung

Tab. 5 Indizes

1, W	Wellenverzahnung
2, N	Nabenverzahnung
FEM	FEM-Berechnungsergebnis
d	Druckseite
z	Zugseite

Funding Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

Interessenkonflikt C. Spura und K. Pantke erklären, dass keine potenziellen Interessenkonflikte in Bezug auf die Forschung, die Urheberschaft und/oder die Veröffentlichung dieses Artikels bestehen.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

- DIN 5480-1 (2006) Passverzahnungen mit Evolventenflanken und Bezugsdurchmesser – Teil 1: Grundlagen. Beuth Verlag, Berlin
- DIN 5480-2 (2006) Passverzahnungen mit Evolventenflanken und Bezugsdurchmesser – Teil 2: Nennmaße und Prüfmaße. Beuth Verlag, Berlin
- Schäfer G (2014) Zahnwellen-Verbindung – Auslegung, Potentiale und Festigkeitsnachweis von Passverzahnungen. IMW-Institutsmittteilung, Nr. 39. TU Clausthal, Clausthal, S 947–2274
- Schäfer G (2016) Kerbspannungen von Passverzahnungen auf Hohlwellen. IMW-Institutsmittteilung, Nr. 41. TU Clausthal, Clausthal, S 21–28
- DIN 867 (1986) Bezugsprofile für Evolventenverzahnungen an Stirnrädern (Zylinderrädern) für den allgemeinen Maschinenbau und den Schwermaschinenbau. Beuth Verlag, Berlin
- Kohl G (1986) Ein Ansatz zur Berechnung der Zahnfußspannungen an Zahnwellenverbindungen. Dissertation, Technische Universität Clausthal
- Nakazawa H (1959) On the torsion of splined shafts. *Trans Jap Soc Mec Eng* 25:643–658
- Daryusi A, Jung S (2014) Der Ersatzdurchmesser d_{h1} nach DIN 5466 unter der Lupe. 6. VDI-Fachtagung Welle-Nabe-Verbindungen, Tagungsband, S 261–265. ISBN 978-3-18-092238-6.
- DIN 5466-1 (2000) Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen – Teil 1: Grundlagen. Beuth Verlag, Berlin
- DIN 5466-2E (2002) Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen – Teil 2: Zahnwellen-Verbindungen nach DIN 5480. Entwurf, zurückgezogen, Beuth Verlag, Berlin
- Wesolowski K (1997) Dreidimensionale Beanspruchungszustände und Festigkeitsnachweis drehmomentbelasteter Zahnwellen-Verbindungen unter elastischer und teilplastischer Verformung. Dissertation, Technische Universität Clausthal. Fortschrittberichte VDI, Reihe 1, Nr. 286, VDI Verlag GmbH, ISBN 3-18-328601-7
- Schöpf H-J (1976): Festigkeitsuntersuchung an Zahnwellen-Verbindungen mit Spannungsoptik und Dauerschwingversuchen. Dissertation, TU München
- Dietz P (1978) Die Berechnung von Zahn- und Keilwellenverbindungen. Selbstverlag des Verfassers, Büttelborn
- Villmer F-J (1984) Zum Mechanismus der Lastverteilung in Zahnwellenverbindungen. Dissertation, Technische Universität Clausthal
- Daryusi A (2009) Beitrag zur Ermittlung der Kerbwirkung an Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf. Dissertation, Technische Universität Dresden
- Langheinrich A (2014) Geometrie, Beanspruchung und Verformung asymmetrischer Stirnradverzahnungen. Dissertation, TU München
- Benkler H (1970) Der Mechanismus der Lastverteilung an bogenverzahnten Zahnkupplungen. Dissertation, TH Darmstadt
- Spura C (2012) Tragfähigkeitsberechnung und Verschleißanalyse von bombierten Zahnwellenverbindungen. Dissertation, RWTH Aachen
- Mendel J (1990) Das Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellen-Verbindungen mit Schiebeseitz. Dissertation, TU Clausthal. ISSN 0947-2274
- Zapf, R (1986) Betriebs- und Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellenverbindungen mit Schiebeseitz. Dissertation, Technische Universität Clausthal
- Schäfer G (1995) Der Einfluß von Oberflächenbehandlungen auf das Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellenverbindungen mit Schiebeseitz. Dissertation, TU Clausthal
- Schäfer G (2019) Zahnwelle 3.0. IMW-Institutsmittteilung, Nr. 44. TU, Clausthal
- ISO 6336-3 (2006): Calculation of load capacity of spur and helical gears—Part 3: Calculation of tooth bending strength. International Standard, 2nd Edition, 2006-09-01
- DIN 3990-3 (1987): Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern – Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit. Deutsche Norm, Dezember
- DIN 3960 (1987): Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. Deutsche Norm, März