Berücksichtigung von Wärmeleitungswiderständen in den Speichermassen von Regeneratoren

Wilfried Roetzel¹ · Chakkrit Na Ranong²

Eingegangen: 26. August 2019 / Online publiziert: 26. Juni 2020
 © Der/die Autor(en) 2020

Zusammenfassung

Es wird ein konsistentes analytisches Berechnungsverfahren vorgestellt zur näherungsweisen Berücksichtigung von Wärmeleitungswiderständen in der Speichermasse von Regeneratoren. Die nach dem Verfahren berechneten zusätzlichen effektiven Wärmewiderstände stimmen exakt mit den nach Hausen berechneten und im VDI-Wärmeatlas angegebenen Werten überein. Das Berechnungsmodell ergibt ferner, dass für die Berechnung des Regeneratorprozesses entgegen der üblichen Praxis bei endlicher Wärmeleitfähigkeit der Speichermasse deren Wärmekapazität auf einen verkleinerten, effektiven Wert reduziert werden muss. Zur Berechnung der effektiven Speicherkapazität werden einfache Näherungsgleichungen angegeben.

Consideration of heat conduction resistances in the solid matrices of regenerators

Abstract

A consistent analytical calculation method is presented for the approximate consideration of thermal conduction resistances in the solid matrix of regenerators. The additional effective thermal resistances calculated using the method correspond exactly to the values calculated according to Hausen and specified in the VDI Heat Atlas. The calculation model also shows that, for the calculation of the regenerator process, contrary to the usual practice, with finite thermal conductivity of the solid matrix, its heat capacity must be reduced to a lower effective value. Simple approximation equations are given to calculate the effective capacity of the solid matrix.

Formelzeichen

Lateinische Buchstaben

A	Oberfläche (Speicherelement), m^2
a	Temperaturleitzahl, m^2/s , $a = \lambda / (\rho c_p)$
c	spezifische Wärmekapazität, $\text{J}/(\text{kg K})$
F	Korrekturfaktor, $F = k/k_0$, dimensionslos
G	geometrische Kennzahl, Gl. 62, dimensionslos
i	$i = \sqrt{-1}$

k	korrigierter Wärmedurchgangskoeffizient, $\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$
k_0	unkorrigierter Wärmedurchgangskoeffizient, $\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$
k	Zähler in Summen, Gl. (A3)
m	Konstante, Gl. 10, dimensionslos
Nu	Nußeltzahl für internes α_s eines Modellelements der Speichermasse, $Nu = (\alpha_s V) / (\lambda_s A)$
Q	Wärme, J
q	flächenspezifische Wärme, $q = Q/A$, J/m^2
$\dot{q}$	Wärmestromdichte, W/m^2
R	Außenradius, m
r	Radius, Abstand, Gl. 10, m
S	Variable, Gl. (A3)
T	Temperatur, K
t	Periodendauer, s (t_w , t_k)
U_A	Amplitude der Temperatur, K
U_q	Amplitude der Wärmestromdichte, W/m^2
V	Volumen (Speicherelement), m^3

Wilfried Roetzel
 roetzel-suelfeld@t-online.de

✉ Chakkrit Na Ranong
 chakkrit.naranong@th-nuernberg.de

¹ Helmut-Schmidt-Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg, Institut für Thermodynamik, 22039 Hamburg, Deutschland

² Fakultät Verfahrenstechnik, Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, 90489 Nürnberg, Deutschland

X	dimensionslose Wanddicke, thermische Wanddicke, $X = \frac{V}{A} \sqrt{\frac{\omega}{2a_s}}$
Y	Ersatzvariable, Gl. 63, dimensionslos
z	Variable in Gl. (A9), dimensionslos

Griechische Buchstaben

α	Wärmeübergangskoeffizient, $W/(m^2 K)$
δ	Durchmesser, Plattendicke, m
ε	dimensionslose Periodendauer, $\varepsilon_w = t_w / (t_w + t_k)$, $\varepsilon_k = t_k / (t_w + t_k)$
η	dimensionslose Zeit, $\eta = \tau / (t_w + t_k)$
κ	Konstante in Gl. 4
λ	Wärmeleitfähigkeit, $W/(m K)$
ξ	dimensionslose Koordinate, Gl. 3
τ	Zeit, s
ϕ	Hilfsfunktion nach Hausen, Gl. 2, dimensionslos
φ	Phasenverschiebung, Gl. 15, dimensionslos
ψ	Phasenverschiebung, Gl. 15, dimensionslos
ω	Kreisfrequenz, 1/s

Indizes

A	an der Oberfläche A
a	Regeneratorende
b	Regeneratorende
gl	gleichwertig
j	Zähler für Fouriersche Reihe
k	Kaltperiode, Kugel
m	Mittelwert
p	Platte, ebene Wand
per	Vollperiode
s	Speichermasse
w	Warmperiode
z	Zylinder
v	Zähler für Fouriersche Reihe, Summe

Hochzeichen

$\sim$	effektiver Wert nach T-Schwingungsmodell
$-$	Laplacetransformierte Größe

1 Einleitung

In der Verfahrens-, Energie-, Klima- und Kältetechnik werden Wärmeübertrager eingesetzt, um warme Prozessströme abzukühlen oder kalte aufzuwärmen. Man unterscheidet zwischen Rekuperatoren und Regeneratoren. In Rekuperatoren wird die Wärme zwischen zwei oder mehreren stetig in getrennten Kanälen strömenden Fluiden durch Trennwände hindurch übertragen. In Regeneratoren strömen zwei Fluide abwechselnd periodisch durch die gleichen Kanäle einer Speichermasse. Während der Warmperiode der Dauer t_w wird vom warmen Fluid Wärme an die umströmten Elemente der Speichermasse abgegeben, wobei sich diese

aufwärmen. In der nachfolgenden Kaltperiode der Dauer t_k wird die Speichermasse in entgegengesetzter Richtung von dem kalten Fluid durchströmt, und die Speicherelemente geben die zuvor aufgenommene Wärme wieder an das kalte Fluid ab. Regeneratoren werden ausschließlich bei Gasen in weiten Temperaturbereichen eingesetzt. Als extreme Beispiele seien die Winderhitzer von Hochöfen genannt mit feuerfesten Steinen als Speicherelementen sowie Regeneratoren mit dünnen metallischen Speicherelementen in der Klima- und Tieftemperaturtechnik.

Die Berechnung der in einem Regenerator übertragenen Wärme ist weitaus schwieriger als beim Rekuperator, da beide Gastemperaturen und die Temperaturen in den Speicherelementen nicht nur vom Ort sondern auch von der Zeit abhängen.

Bildet man jedoch bei eingeschwungenem Betrieb die zeitlichen Mittelwerte der Gastemperaturen und trägt sie über der Hauptströmungsrichtung, d.h. der Längskoordinate des Regenerators auf, so erhält man etwa das gleiche Bild wie beim Rekuperator. Die in einer Vollperiode der Dauer $(t_w + t_k)$ übertragene Wärmemenge Q_{per} kann man daher ebenfalls mit einer logarithmischen mittleren Temperaturdifferenz für Gegenstrom und einem mittleren Wärmedurchgangskoeffizienten k berechnen.

$$Q_{per} = k (t_w + t_k) A \frac{\Delta T_{a,m} - \Delta T_{b,m}}{\ln \frac{\Delta T_{a,m}}{\Delta T_{b,m}}} F \quad (1)$$

Hierbei bedeuten $\Delta T_{a,m}$ und $\Delta T_{b,m}$ die zeitlich gemittelten Temperaturdifferenzen der Gase an beiden Enden des Regenerators. Durch die Zeitabhängigkeit und Mittelwertbildung wird nicht ganz die logarithmische mittlere Temperaturdifferenz erreicht, und es muss mit einem Korrekturfaktor $F \leq 1$ multipliziert werden. In der Regeneratortheorie von Hausen [1] wird der Korrekturfaktor mit $F = k/k_0$ bezeichnet.

Der Wärmedurchgangskoeffizient k wird nach Hausen [1] wie folgt definiert:

$$\frac{1}{k (t_w + t_k)} = \left(\frac{1}{\alpha_w} + \phi \frac{\delta}{\lambda_s} \right) \frac{1}{t_w} + \left(\frac{1}{\alpha_k} + \phi \frac{\delta}{\lambda_s} \right) \frac{1}{t_k}. \quad (2)$$

Hierbei bedeuten α_w und α_k die Wärmeübergangskoeffizienten durch Konvektion und Strahlung zwischen dem warmen bzw. dem kalten Gas und der Oberfläche der Speicherelemente sowie $\phi (\delta/\lambda_s)$ einen zusätzlichen Wärmeleitungswiderstand der Speicherelemente, der dem Wandwiderstand δ/λ beim Rekuperator entspricht. Die Größe δ ist die Dicke bzw. der Durchmesser eines platten-, zylinder- oder kugelförmigen Speicherelements und λ_s seine Wärmeleitfähigkeit. Die Hilfsfunktion ϕ wird von Hausen [1,

Abb. 1 Hilfsfunktion $\phi(\xi)$ nach Hausen [1] und VDI-Wärmeatlas [2] zur Berechnung des zusätzlichen, mittleren Wärmeleitungswiderstands der Speichermasse $\frac{1}{\alpha_{s,m}} = \phi \frac{\delta}{\lambda_s}$ in Abhängigkeit von der Größe $\xi = \frac{\delta^2}{2\alpha_s} \left(\frac{1}{t_w} + \frac{1}{t_k} \right)$

2] nach eigenen analytischen Berechnungen als Funktion der dimensionslosen Größe

$$\xi = \frac{\delta^2}{2\alpha_s} \left(\frac{1}{t_w} + \frac{1}{t_k} \right) \quad (3)$$

in Form eines Diagramms (Abb. 1) wiedergegeben.

Im Buch von Hausen [1] und älteren Ausgaben des VDI-Wärmeatlas werden zusätzlich folgende Näherungsgleichungen für Platte (p), Zylinder (z) und Kugel (k) angegeben:

$$\begin{aligned} \phi_p &= \frac{1}{6} - \frac{1}{180}\xi, & \xi \leq 10 \\ \phi_z &= \frac{1}{8} - 0,00261\xi, & \xi \leq 15 \\ \phi_k &= \frac{1}{10} - 0,00143\xi, & \xi \leq 20. \end{aligned} \quad (4)$$

Für große Werte von ξ

$$\phi = \frac{0,357}{\sqrt{\kappa + \xi}} \quad (5)$$

$\kappa_p = 0,3 \quad \kappa_z = 1,1 \quad \kappa_k = 3,0.$

Die Berechnung des Korrekturfaktors F ist die ursprüngliche Hauptaufgabe bei der Berechnung von Regeneratoren. Sie gelingt in der Theorie von Hausen [1] und später bei ausführlicheren analytischen Berechnungen von Baclic und Dragutinovic [3] sowie weiteren Autoren nur mit der vereinfachenden Annahme, dass die Speicherelemente selbst dem Wärmetransport keinen Wärmeleitungswiderstand entgegenseetzen ($\lambda_s = \infty$) und der tatsächlich vorhandene zusätzliche Wärmeleitungswiderstand im Gas bei der Wärmeübertragung entsteht. Die Ausdrücke $1/\alpha_w + \phi(\delta/\lambda_s)$

und $1/\alpha_k + \phi(\delta/\lambda_s)$ von Gl. 2 werden also wie reine Wärmeübergangswiderstände in den Gasen behandelt, bei unendlicher Wärmeleitfähigkeit der Speicherelemente. Unter dieser Voraussetzung hat Hausen den Korrekturfaktor F ($F = k/k_0$) als Funktion der reduzierten Regeneratorlänge

$$\Lambda = 2 \frac{k_0 (t_w + t_k) A}{C_{\text{per}}} \quad (6)$$

und der reduzierten Periodendauer

$$\Pi = 2 \frac{k_0 (t_w + t_k) A}{C_s} \quad (7)$$

berechnet und als Diagramm vorgelegt [1, 2] mit C_s als Wärmekapazität der gesamten Speichermasse und

$$C_{\text{per}} = \frac{1}{2} (\dot{W}_w t_w + \dot{W}_k t_k) \quad (8)$$

der mittleren Wärmekapazität der Gase pro Warm- bzw. Kaltperiode. Die Kennzahlen Λ und Π entsprechen den NTU-Werten beim Rekuperator.

Beide Probleme, die Berechnung des zusätzlichen Wärmeleitungswiderstands

$$\phi \frac{\delta}{\lambda_s} = \frac{1}{\alpha_{s,m}}, \quad (9)$$

der auch durch ein internes $\alpha_{s,m}$ an der Oberfläche ausgedrückt werden kann, sowie die Berechnung des Korrekturfaktors F (Λ, Π) werden im Folgenden neu behandelt. Hierzu wird ein für die Auswertung von Wärmeübertragungsmessungen mittels Temperaturschwingungen entwickeltes Rechenmodell [4] auf den Regenerator angewendet. Eine erste Näherung in dieser Richtung wurde bereits kurz erwähnt [5], hier soll jedoch das Temperaturschwingungsmodell genauer an den Regeneratorprozess angepasst werden.

2 Temperaturschwingungsmodell

Das Modell bezieht sich auf harmonische Temperaturschwingungen in plattenförmigen, zylindrischen und kugelförmigen Festkörpern endlicher Wärmeleitfähigkeit λ_s . Die Wärmeleitungsprozesse in den Körpern werden durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{1}{a_s} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \quad (10)$$

beschrieben mit $m=0$ für die ebene Platte, $m=1$ für den Zylinder und $m=2$ für die Kugel [6]. In Gl. 10 bedeuten T

Abb. 2 **a** Eigenschaften des wahren Körpers und **b** Eigenschaften des Modellkörpers

die Temperatur, τ die Zeit, r den Abstand vom Mittelpunkt bzw. der Mittelebene bei der Platte und a_s die Temperaturleitfähigkeit. Der Außenradius wird mit R und die äußere Oberfläche mit A bezeichnet (Abb. 2a).

Wird an der Außenfläche A ($r=R$) eine harmonische Temperaturschwingung $T_A(\tau)$ erzeugt, so pflanzt sich diese ins Innere unter Abnahme der Amplitude und mit Phasenverschiebung fort. Die Temperaturschwingung wird von einer Schwingung der radialen Wärmestromdichte $\dot{q}(r, \tau)$ begleitet, die sich in ähnlicher Weise unter Abschwächung der Amplitude fortpflanzt. Im Zentrum, $r=0$, geht die Wärmestromdichte gegen Null.

Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung (Gl. 10) kann die tatsächlich dem Körper an der Oberfläche A aufgezogene Temperaturschwingung als erste Randbedingung dienen

$$r = R : T(r = R, \tau) = T_A(\tau) = U_A \cos(\omega\tau + \varphi_A) \quad (11)$$

oder eine vorgegebene Schwingung an einer anderen Stelle r mit der Amplitude $U(r)$ und Phase $\varphi(r)$, z. B. für $r=0$ mit $U_0 = U(r=0)$ und $\varphi_0 = \varphi(r=0)$.

Die zweite Randbedingung bezieht sich ebenfalls auf das Zentrum, $r=0$, und lautet:

$$r = 0 : \dot{q}(r = 0, \tau) = \dot{q}_0 = -\lambda_s \left. \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (12)$$

Da beim Temperaturschwingungsmodell ausschließlich der eingeschwungene Zustand betrachtet wird, kann die Anfangsbedingung für Gl. 10 beliebig gewählt werden:

$$\tau = 0 : T(r, \tau = 0) = f(r). \quad (13)$$

Es wird $f(r) = 0$ gesetzt.

Wenn das Temperaturfeld für den eingeschwungenen Zustand durch Lösen der partiellen Differentialgleichung (Gl. 10) mit den zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen Gl. 11 bis 13 bekannt ist, ergibt sich an der Außenfläche A die Wärmestromdichte zu

$$\dot{q}(r = R, \tau) = \dot{q}_A(\tau) = -\lambda_s \left. \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (14)$$

Die Wärmestromdichte $\dot{q}_A(\tau)$ korrespondiert zur Temperaturschwingung $T_A(\tau)$. Beide Schwingungen haben die gleiche Frequenz ω , sie unterscheiden sich durch Amplitude und Phasenlage:

$$\begin{aligned} T_A(\tau) &= U_A \cos(\omega\tau + \varphi_A) \\ \dot{q}_A(\tau) &= U_{q,A} \cos(\omega\tau + \psi_A). \end{aligned} \quad (15)$$

Im Temperaturschwingungsmodell wird der reale Festkörper (Platte, Zylinder und Kugel) durch einen Modellkörper mit unendlicher Wärmeleitfähigkeit λ ersetzt, der die gleichen Korrespondenzeigenschaften bezüglich $T_A(\tau)$ und $\dot{q}_A(\tau)$ wie der reale Körper besitzt. Der Modellkörper hat folgende Eigenschaften (Abb. 2b):

1. Wahre äußere Gestalt und Oberfläche A .
2. Wahre thermophysikalische Stoffwerte mit Ausnahme der Wärmeleitfähigkeit λ .
3. Unendliche Wärmeleitfähigkeit λ und damit einheitliche, nur von der Zeit abhängige Temperatur $\tilde{T}(\tau)$.
4. Innerer Wärmeübergangskoeffizient α_s an der Oberfläche A zur Berücksichtigung der realen Wärmeleitungswiderstände.
5. Verkleinertes, effektives Volumen $\tilde{V} \leq V$ und dadurch verringerte Wärmekapazität.

Die unbekannten Größen α_s und $\tilde{V}$ müssen so bestimmt werden, dass die folgenden beiden Gleichungen zu jeder Zeit erfüllt sind:

$$\dot{q}_A(\tau) = \alpha_s [\tilde{T}(\tau) - T_A(\tau)] \quad (16)$$

$$\dot{q}_A(\tau) A = -\tilde{V} \rho_s c_s \frac{d\tilde{T}(\tau)}{d\tau}. \quad (17)$$

Auflösen von Gl. 16 nach $\tilde{T}$, Differenzieren nach der Zeit und Einsetzen in Gl. 17 liefert mit Substitution von $\dot{q}_A(\tau)$ entsprechend Gl. 14 eine einzige Bestimmungsgleichung für α_s und $\tilde{V}$:

$$\frac{\lambda_s A}{\tilde{V} \rho_s c_s} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \bigg|_{r=R} + \frac{\lambda_s}{\alpha_s} \frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r \partial \tau} \bigg|_{r=R} = \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} \bigg|_{r=R}. \quad (18)$$

Die Schwingungsfunktion $T(r, \tau)$ und deren partielle Ableitungen müssen durch Lösen der Differentialgleichung (Gl. 10) mit den Rand- und Anfangsbedingungen Gl. 11 bis 13 gewonnen werden. Gl. 18 gilt für jeden Zeitpunkt. Mit zwei nichtperiodischen Zeitpunkten τ_1 und τ_2 ($\tau_2 - \tau_1 \neq \nu(2\pi/\omega)$; $\nu = 1, 2, \dots$) und den damit berechneten Temperaturen und deren Ableitungen erhält man zwei algebraische Gleichungen für die zwei Unbekannten α_s und $\tilde{V}$. Für jedes nichtperiodische Wertepaar (τ_1, τ_2) ergeben sich die gleichen Werte für α_s und $\tilde{V}$. Dies demonstriert die Konsistenz des Temperaturschwingungsmodells. Anstelle einer solchen Berechnungsweise wird eine elegantere Methode vorgestellt, die auf dem Zeigerdiagramm einer harmoni-

schen Schwingung beruht, welches in der Elektrotechnik auf Wechselstrom angewendet wird:

$$T(r, \tau) = \bar{T}(s = i\omega) \exp(i\omega\tau). \quad (19)$$

In Gl. 19 ist $T(r, \tau)$ die gesuchte Funktion der Temperaturschwingung in komplexer Darstellung mit $\bar{T}(s = i\omega)$ als der komplexen Amplitude. Die Funktion $\bar{T}(s)$ ist die Lösung der Laplacetransformierten Gl. 10

$$\frac{s}{a_s} \bar{T} = \frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{m}{r} \frac{d\bar{T}}{dr} \quad (20)$$

mit den zwei Randbedingungen

$$r = 0: \quad \bar{T}(r = 0) = U_0 \quad (21)$$

und

$$r = 0: \quad \left. \frac{d\bar{T}}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (22)$$

Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (Gl. 20) mit den beiden Randbedingungen Gln. 21 und 22 lauten

Platte

$$\bar{T} = U_0 \cosh\left(r \sqrt{\frac{s}{a}}\right) \quad (23)$$

Zylinder

$$\bar{T} = U_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{s}{a}\right)^k \left(\frac{r}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} \right] \quad (24)$$

Kugel

$$\bar{T} = \frac{U_0}{r} \sinh\left(r \sqrt{\frac{s}{a}}\right) \quad (25)$$

Durch Einsetzen der Gln. 23, 24 und 25 in Gl. 19 mit $s = i\omega$ erhält man die gesuchten komplexen Temperaturschwingungsfunktionen $T(r, \tau)$. Diese Funktionen $T(r, \tau)$ nach Gl. 19 werden in die Bestimmungsgleichung (Gl. 18) eingesetzt, und man erhält nach Einführung der dimensionslosen thermischen Wanddicken

$$X = \frac{V}{A} \sqrt{\frac{\omega}{2a_s}}, \quad \tilde{X} = \frac{\tilde{V}}{A} \sqrt{\frac{\omega}{2a_s}}, \quad (26)$$

Abb. 3 Nach den Gln. 20, 21 und 22 berechnete Werte von $\tilde{X}/\tilde{Nu} = X/\text{Nu}$ (blau) und $\tilde{X}$ (rot) als Funktion von $X = \frac{V}{A} \sqrt{\frac{\omega}{2a_s}}$ für Platte (a), Zylinder (b) und Kugel (c). Grenzwerte: $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{X}_{a,b,c} = X$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{X}_{a,b,c} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (\tilde{X}/\tilde{Nu})_{a,b,c} = 1/2$; $\lim_{x \rightarrow 0} (\tilde{X}/\tilde{Nu})_a = X/3$; $\lim_{x \rightarrow 0} (\tilde{X}/\tilde{Nu})_b = X/2$; $\lim_{x \rightarrow 0} (\tilde{X}/\tilde{Nu})_c = \frac{3}{5}X$

der Nußeltzahlen

$$\text{Nu} = \frac{\alpha_s V}{\lambda_s A}, \quad \tilde{\text{Nu}} = \frac{\alpha_s \tilde{V}}{\lambda_s A} \quad (27)$$

und der Kennzahlen

$$\frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}} = \frac{X}{\text{Nu}} = \frac{\lambda_s}{\alpha_s} \sqrt{\frac{\omega}{2a_s}} \quad (28)$$

nach einigen Umformungen die folgenden komplexen Gleichungen zur Berechnung der gesuchten Größen α_s und $\tilde{V}$:

Platte

$$2 \frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}} + i \frac{1}{\tilde{X}} = (1+i) \coth [X(1-i)] \quad (29)$$

Zylinder

$$2 \frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}} + i \frac{1}{\tilde{X}} = 2X \frac{1 + \sum_{i=1}^{\infty} [X(1-i)]^{2k} \frac{1}{(k!)^2}}{\sum_{k=1}^{\infty} k [X(1-i)]^{2k} \frac{1}{(k!)^2}} \quad (30)$$

Kugel

$$2 \frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}} + i \frac{1}{\tilde{X}} = \frac{2}{(1+i) \coth [3X(1-i)] - \frac{1}{3X}} \quad (31)$$

Die Gln. 29, 30 und 31 sind neu und einfacher als die ursprünglich [4] konventionell durch Koeffizientenvergleich

entwickelten Gleichungen. Sie liefern die gleichen Ergebnisse.

In Abb. 3 sind die Kennzahlen $\tilde{X}/\tilde{\text{Nu}} = X/\text{Nu} = (\lambda_s/\alpha_s) \sqrt{\omega/2a_s}$ und $\tilde{X} = (\tilde{V}/A) \sqrt{\omega/2a_s}$ als Funktion von $X = (V/A) \sqrt{\omega/2a_s}$ dargestellt. Man erkennt, dass beide Kennzahlen mit wachsendem X für Platte, Zylinder und Kugel je einem gemeinsamen Grenzwert zustreben. Für $X \rightarrow \infty$, d.h. für große Körper, kleine Temperaturleitfähigkeiten und hohe Frequenzen wird $\tilde{X} = 1$ und damit $\tilde{V} = A \sqrt{2a_s/\omega}$ sowie $\tilde{X}/\tilde{\text{Nu}} = 1/2$ und $\alpha_s = 2\lambda_s \sqrt{\omega/2a_s} = \sqrt{2\omega \lambda_s \rho_s c_s}$. Für kleine Werte von X , etwa $X \leq 0,5$, ist $\tilde{X} = X$ oder $\tilde{V} = V$ und für die Platte $\tilde{\text{Nu}}_a = \alpha_s V/\lambda_s A = 3$, den Zylinder $\tilde{\text{Nu}}_b = 2$ und die Kugel $\tilde{\text{Nu}}_c = 5/3$. In diesem Bereich stimmt die hypothetische Temperatur $\tilde{T}(\tau)$ mit der häufig verwendeten örtlich gemittelten Temperatur $T_m(\tau)$ des wahren Körpers überein. Für größere Werte $X > 0,5$ unterscheiden sich die Amplituden und Phasen beider Temperaturschwingungen. Im Extremfall $X = \infty$ wird die Amplitude von T_m gleich Null, während die Amplitude von $\tilde{T}$ einen endlichen Wert behält. Nur mit dem verkleinerten effektiven Volumen $\tilde{V}$ des Modellkörpers lässt sich das Schwingungsverhalten von Platte, Zylinder und Kugel exakt mit einem konstanten, zeitunabhängigen innerem α_s beschreiben.

Das Schwingungsmodell lässt sich auch auf andere Fälle anwenden, z.B. auf einen Hohlzylinder mit Wärmeübergang innen, $r = R_i$, und Isolation außen $\dot{q}_a = 0$ für $r = R_a$. Es müssten nur für Gl. 20 veränderte Randbedingungen verwendet werden. Mit der neu zu findenden Lösung $\tilde{T}(s,r)$ kann mit Gl. 18 in gleicher Weise eine der Gl. 24 entsprechende Beziehung hergeleitet werden. Bei hohen Frequenzen ω , wie sie z.B. in Zylindern von Verbrennungsmotoren vorkommen, könnte man auch sofort die für $X = \infty$ oben im Text angegebenen Gleichungen für α_s und V anwenden. Im Folgenden soll das beschriebene Schwingungsmodell auf den Regenerator angewendet werden.

3 Anwendung auf den Regenerator

Die Speichermasse eines Regenerators besteht aus einer Vielzahl von Speicherelementen (Platte, Zylinder, Kugel), die von dem warmen und dem kalten Gas abwechselnd umströmt werden. Sie erfahren dadurch beim betrachteten eingeschwungenen Betriebszustand periodische Temperaturschwingungen, die sich aus einer Grundschwingung und Oberschwingungen zusammensetzt. Die Frequenzen werden mit

$$\omega_v = \omega_1 v \quad (v = 1, 2, 3, \dots) \quad (32)$$

Abb. 4 Wärmestromdichte $\dot{q}(\eta)$ an der Oberfläche eines Speicherelements während der Warm- und Kaltperiode, aufgetragen über der dimensionslosen Zeit $\eta = \tau / (t_w + t_k)$

und der Hauptfrequenz

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{t_w + t_k} \quad (33)$$

bezeichnet, wobei t_w und t_k die Dauer der Warm- bzw. der Kaltperiode bedeuten. Entsprechend werden für alle Frequenzen die Kennzahlen X_v , $\tilde{X}_v$ und $\tilde{X}_v/\tilde{\text{Nu}}_v = X_v/\text{Nu}_v$ eingeführt:

$$X_v = \frac{V}{A} \sqrt{\frac{\omega_v}{2a_s}}, \quad \tilde{X}_v = \frac{\tilde{V}}{A} \sqrt{\frac{\omega_v}{2a_s}} \quad (34)$$

$$X_v = X_1 \sqrt{v}, \quad \tilde{X}_v = \tilde{X}_1 \sqrt{v}$$

$$\frac{\tilde{X}_v}{\tilde{\text{Nu}}_v} = \frac{X_v}{\text{Nu}_v} = \frac{\lambda_s}{\alpha_{s,v}} \sqrt{\frac{\omega_v}{2a_s}} = \frac{\lambda_s}{\alpha_{s,v}} \sqrt{\frac{\omega_1}{2a_s}} \sqrt{v}. \quad (35)$$

Bei der Entwicklung des Temperaturschwingungsmodells wurde eine Temperaturschwingung an der Oberfläche eines Speicherelements vorgegeben und daraus die korrespondierende Wärmestromdichte berechnet. Beim Regeneratorprozess wird umgekehrt vorgegangen. Es wird eine zeitliche Wärmestromdichteverteilung an der Oberfläche eines Elements angenommen, um daraus Temperaturdifferenzen $(T_A - \tilde{T})$ an der Oberfläche und effektive Wärmekapazitäten $\tilde{C}_s = \tilde{V} \rho_s c_s$ zu berechnen. Aus Berechnungen und Messungen von Hausen ist bekannt, dass für $t_w \approx t_k$ in der Mitte eines langen Regenerators sich die Gas- und Speicherelementtemperaturen linear mit der Zeit verändern. Daher werden zunächst zeitlich konstante Wärmestromdichten $\dot{q}_w$ und $\dot{q}_k$ an der Oberfläche der Speicherelemente angenommen, wie es in Abb. 4 dargestellt ist.

Die Energiebilanz für den eingeschwungenen Zustand liefert

$$\dot{q}_w \varepsilon_w + \dot{q}_k \varepsilon_k = 0 \quad (36)$$

mit der dimensionslosen Dauer ε_w der Warm- und ε_k der Kaltperiode

$$\varepsilon_w = 1 - \varepsilon_k = \frac{t_w}{t_w + t_k}. \quad (37)$$

Der stufenförmige Verlauf der Wärmestromdichte kann durch die Fouriersche Reihe wiedergegeben werden

$$\dot{q} = \sum_{v=1}^{\infty} \dot{q}_v$$

$$\dot{q}_v = a_v \cos(2\pi v \eta) + b_v \sin(2\pi v \eta) \quad (38)$$

$$a_v = \frac{\dot{q}_w}{\pi \varepsilon_k v} \sin(2\pi \varepsilon_w v)$$

$$b_v = \frac{\dot{q}_w}{\pi \varepsilon_k v} [1 - \cos(2\pi \varepsilon_w v)].$$

Für jede Frequenz $\omega_v = \omega_1 v$ ergibt sich nach dem Schwingungsmodell ein zeitlich konstantes $\alpha_{s,v}$ und ein zeitlich konstanter Verkleinerungsfaktor $(\tilde{V}/V)_v = (\tilde{X}/X)_v$. Für beide Größen muss ein geeigneter Mittelwert gefunden werden, der die richtige Wärmemenge pro Warm- bzw. Kaltperiode ergibt. Für die Berechnung beider Mittelwerte spielt die pro Fläche A während der Warm- bzw. Kaltperiode übertragene Wärmemenge eine wichtige Rolle. Sie lässt sich für jede Frequenz durch Integration der Gl. 38 über der Zeit τ oder der dimensionslosen Zeit η berechnen:

$$q_{w,v} = \int_{\tau=0}^{\tau=t_w} \dot{q}_{w,v} d\tau = (t_w + t_k) \int_{\eta=0}^{\eta=\varepsilon_w} \dot{q}_{w,v} d\eta \quad (39)$$

$$= \frac{\dot{q}_w (t_w + t_k)}{\pi^2 \varepsilon_k} \frac{1 - \cos(2\pi \varepsilon_w v)}{v^2}.$$

3.1 Mittelwert von α_s

Den effektiven Mittelwert von α_s erhält man nach der Gleichung

$$\frac{1}{\alpha_{s,m}} = \frac{\sum_{v=1}^{\infty} \frac{q_{w,v}}{\alpha_{s,v}}}{\sum_{v=1}^{\infty} q_{w,v}}, \quad (40)$$

wobei der Zähler den mittleren Temperaturabfall an der Oberfläche A bedeutet.

Abb. 5 Der Wärmestromdichte nach Abb. 2 überlagerte Wärmestromdichten $\dot{q}(\tau)$ als lineare Funktionen der dimensionslosen Zeit $\eta = \tau / (t_w + t_k)$

Durch Einsetzen von $1/\alpha_{s,v} = [\tilde{X}/(\tilde{\text{Nu}} X)]_v \left(\frac{V}{\lambda_s A}\right)$ und $\sum_{v=1}^{\infty} q_{w,v} = \dot{q}_w(t_w + t_k) \varepsilon_w$ erhält man mit Gln. 39 und 27 die dimensionslose Mittelwertgleichung für den internen Wärmeübergangskoeffizienten

$$\left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}}\right)_m = \frac{1}{\pi^2 \varepsilon_w \varepsilon_k} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi \varepsilon_w v)}{v^{2,5}} \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}}\right)_v. \quad (41)$$

3.1.1 Überlagerung einer linearen Funktion $\dot{q}(\tau)$

Die folgenden Gleichungen zeigen, dass eine überlagerte Wärmestromdichte nach Abb. 5 keinen Einfluss auf den effektiven Mittelwert nach Gl. 41 hat. Die überlagerte lineare Funktion muss folgende Symmetrieeigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta \leq \varepsilon_w : \quad & \dot{q}_w = \dot{q}_0 - \frac{2\dot{q}_0}{\varepsilon_w} \eta \\ \varepsilon_w \leq \eta \leq 1 : \quad & \dot{q}_k = -\left(\dot{q}_0 + \frac{2\dot{q}_0}{\varepsilon_k} \varepsilon_w\right) + \frac{2\dot{q}_0}{\varepsilon_k} \eta. \end{aligned} \quad (42)$$

Die für diese Funktion berechneten Fourierkoeffizienten a_v und b_v ergeben für jede Frequenz

$$\begin{aligned} q_{w,v} &= q_{k,v} = 0. \\ a_v &= \frac{\dot{q}_0}{\pi^2 \varepsilon_w \varepsilon_k} \frac{1 - \cos(2\pi \varepsilon_w v)}{v^2} \\ b_v &= -\frac{\dot{q}_0}{\pi^2 \varepsilon_w \varepsilon_k} \frac{\sin(2\pi \varepsilon_w v)}{v^2} \\ q_{w,v} &= q_{k,v} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Durch geeignete Wahl von $\dot{q}_0$ (Größe und Vorzeichen) kann man sich gut an realistische Verteilungen der Wärmestromdichte anpassen, womit die Mittelwertgleichung nach Gl. 41 eine brauchbare Allgemeingültigkeit erhält. Die zeitlichen Wärmestromdichteverteilungen im Rahmen der Gln. 36 und 42 dürfen sich sogar von Element zu Element ändern, ohne dass der nach Gl. 41 berechnete Mittelwert beeinflusst wird.

3.1.2 Sonderfall $\varepsilon_w = \varepsilon_k = 1/2$

Im Sonderfall gleicher Warm- und Kaltperioden können beliebige symmetrische Funktionen der Art $\dot{q}_w = f(\eta)$, $\dot{q}_k = g(\eta)$, $g(\eta) = f(1-\eta)$ überlagert werden, ohne dass sich der effektive Mittelwert ändert. Das ergibt sich daraus, dass solche Funktionen als Fouriersche Reihe nur Cosinustglieder enthalten, die bei der Integration über der Warm- bzw. Kaltperiode verschwinden.

$$\begin{aligned} \dot{q}_v &= a_v \cos(2\pi v \eta) \\ q_{w,v} &= q_{k,v} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

In diesem Sonderfall kann die Mischungsgleichung Gl. 41 umgeformt und dadurch vereinfacht werden. Für $\varepsilon_w = \varepsilon_k = 1/2$

wird $\cos(2\pi \varepsilon_w v) = \cos(\pi v)$ abwechselnd gleich (-1) und $(+1)$, und der Zähler dadurch abwechselnd $(+2)$ und (0) . Man kann in diesem Sonderfall die Gl. 41 daher wie folgt angeben:

$$\left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}}\right)_m = \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^{2,5}} \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{\text{Nu}}}\right)_{v=(2j-1)}. \quad (45)$$

3.2 Mittelwert von $\tilde{X}$

Zur Mittelwertbildung der effektiven Speicherkapazität muss die Aufwärmung

$$\Delta \tilde{T}_v = (\tilde{T}_{\eta=\varepsilon_w} - \tilde{T}_{\eta=0})_v \quad (46)$$

der verkleinerten Speichermasse der Kapazität $\tilde{C}_{s,v}$ betrachtet werden. Über die Wärmemenge $q_{w,v}$ erhält man die Mischungsformel

$$\sum_{v=1}^{\infty} q_{w,v} = C_s \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{X}}{X}\right)_v \Delta \tilde{T}_v = C_s \left(\frac{\tilde{X}}{X}\right)_m \sum_{v=1}^{\infty} \Delta \tilde{T}_v. \quad (47)$$

Hieraus lässt sich, ähnlich wie bei Gl. 41, folgende Gleichung zur Berechnung des Mittelwertes $\tilde{X}_m$ herleiten:

$$\frac{1}{\tilde{X}_m} = \frac{1}{\pi^2 \varepsilon_w \varepsilon_k} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi \varepsilon_w v)}{v^{1,5}} \frac{1}{\tilde{X}_v} \quad (48)$$

3.2.1 Sonderfall $\varepsilon_w = \varepsilon_k = 1/2$

Auch hier kann im Sonderfall $\varepsilon_w = \varepsilon_k = 1/2$ eine einfachere Gleichung angegeben werden:

$$\frac{1}{\tilde{X}_m} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^{1,5}} \frac{1}{\tilde{X}_{v=(2j-1)}}. \quad (49)$$

Für die Überlagerung von Funktionen der Wärmestromdichte gelten die gleichen Überlegungen wie für die Mittelwertgleichungen 41 und 45.

3.3 Rechengang für $\alpha_{s,m}$ und $\tilde{X}_m$

Zur Berechnung des mittleren Zusatzwiderstands $1/\alpha_{s,m}$ für Gl. 9 und der verkleinerten, effektiven Speicherkapazität $\tilde{C}_{s,m}$ wird wie folgt vorgegangen: Mit den gegebenen Daten $V_s, A, Q_s, C_s, \lambda_s, t_w$ und t_k muss zuerst die dimensionslose thermische Wanddicke X_1 für die Hauptfrequenz ω_1 nach den Gln. 33 und 34 berechnet werden. Damit erhält man auch die Werte X_v für alle höheren Frequenzen nach Gl. 34. Mit Hilfe der Gln. 29–31 für Platten, Zylinder und Kugeln

bekommt man die Werte von $\tilde{X}_v$ und $(\tilde{X}/\tilde{Nu})_v$, die in die Mischungsgleichungen 41 oder 45 für $(\tilde{X}/\tilde{Nu})_m$ und Gl. 48 oder Gl. 49 für $1/\tilde{X}_m$ einzusetzen sind.

Aus den gewonnenen Mittelwerten $(\tilde{X}/\tilde{Nu})_m = (X/Nu)_m$ und $\tilde{X}_m$ erhält man mit Hilfe der Gln. 26 und 27

$$\frac{1}{\alpha_{s,m}} = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Nu}} \right)_m \sqrt{\frac{t_w + t_k}{\pi \lambda_s \rho_s c_s}} \quad (50)$$

und

$$\tilde{C}_s = V_s \rho_s c_s \frac{\tilde{X}_m}{X_1}. \quad (51)$$

Die unendlichen Summen in den Mittelwertgleichungen, insbesondere in den Gln. 48 und 49, konvergieren sehr schlecht, und es müssen eine große Zahl n (bei den eigenen Rechnungen $n=5000$) von Summanden berechnet werden. Zur Vermeidung unendlicher Doppelsummen sind beim Zylinder die Näherungsgleichungen anzuwenden, die für diesen Zweck entwickelt wurden und im Anhang, Gln. A1 bis A8, wiedergegeben sind. Außerdem wird die jeweilige Restsumme $\sum_{n+1}^{\infty}$ näherungsweise durch ein bestimmtes

Integral in den Grenzen $(n+1/2)$ bis ∞ berechnet und addiert. Diese Summenkorrekturen (A9) bis (A16) werden im Anhang näher erläutert.

4 Ergebnisse der Berechnungen

4.1 Wärmewiderstand der Speichermasse

Die Ergebnisse zum Wärmewiderstand $1/\alpha_{s,m}$ sollen wie in Abb. 1 durch die Größe ϕ als Funktion von ξ dargestellt werden. Hierzu müssen die berechneten Mittelwerte $(\tilde{X}/\tilde{Nu})_m = (X/Nu)_m$ in die Größen ϕ und ξ umgerechnet werden. Aus den Gln. 2, 3, 9, 26, 27, 33, und 37 ergeben sich die folgenden Zusammenhänge für die Platte (p), den Zylinder (z) und die Kugel (k):

$$\begin{aligned} \phi_p &= \frac{1}{2Nu_p}, & \xi_p &= \frac{2X_p^2}{\pi \varepsilon_w \varepsilon_k} \\ \phi_z &= \frac{1}{2Nu_z}, & \xi_z &= \frac{8X_z^2}{\pi \varepsilon_w \varepsilon_k} \\ \phi_k &= \frac{1}{6Nu_k}, & \xi_k &= \frac{18X_k^2}{\pi \varepsilon_w \varepsilon_k}. \end{aligned} \quad (52)$$

Die erhaltenen Werte $\phi(\xi)$ stimmen exakt mit den Werten von Hausen überein. Für $\varepsilon_w = \varepsilon_k = 0,5$ erhält man den in Abb. 1 und im Wärmetlas dargestellten Verlauf. Auch die Näherungsgleichungen von Hausen [1], Gln. 4 und 5,

Abb. 6 Hilfsfunktion $\phi(\xi)$ für Platte, Zylinder und Kugel entsprechend Abb. 1, jedoch mit zusätzlichen Kurven, die für die dimensionslosen Periodendauern $\varepsilon_w = 0,2$ ($\varepsilon_k = 0,8$) berechnet wurden. Sie gelten auch für $\varepsilon_w = 0,8$ ($\varepsilon_k = 0,2$)

können bestätigt werden. Der Zähler 0,357 in Gl. 5 ergibt sich nach den eigenen Rechnungen zu 0,357112.

Für $\varepsilon \neq 0,5$ verschieben sich in Übereinstimmung mit Hausen die Kurven geringfügig nach oben, wie es in Abb. 6 für $\varepsilon_w = 0,2$ (auch gültig für $\varepsilon_w = 0,8$) dargestellt ist. Die an sich starke Abhängigkeit $\phi(\varepsilon)$ wird durch die Auftragung über ξ in einfacher Weise genügend genau berücksichtigt.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse zum Wärmewiderstand nach dem hier vorgestellten Modell mit der Theorie von Hausen ist erfreulich und erstaunlich zugleich. Denn Hausen hat laut Aussagen in seinem Buch den inneren Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{s,m}$ mit der örtlich gemittelten Temperatur des Speicherelements definiert, und diese Temperatur stimmt nur bei thermisch dünnen Wänden ($\xi \rightarrow 0$, $X \leq 0,5$) mit der Temperatur $\tilde{T}$ nach den Gln. 16 und 17 überein. Hausen hat jedoch im Text erwähnt, dass er seine Lösungen an den Fall unendlicher Wanddicke ($\xi \rightarrow \infty$, $X \rightarrow \infty$) angepasst hat. Dies führte auf den richtigen inneren Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha_{s,m}$. Dieser Koeffizient gilt jedoch nur in Verbindung mit einer verringerten Speicherkapazität. Vermutlich hat Hausen im Verlauf seiner Herleitungen die Temperatur $\tilde{T}$ und das Volumen $\tilde{V}$ eliminiert und nicht weiter verfolgt, in dem Glauben, dass es sich um die mittlere Temperatur $T_m = \tilde{T}$ und das vollständige Volumen $V = \tilde{V}$ handelt. Den gleichen Fehler würde man bekommen, wenn man in den Gln. 29–31 nur den Realteil betrachtet und den Imaginärteil ignoriert, weil man $\tilde{V} = V$ als gegeben ansieht.

4.2 Verkleinerte effektive Speicherkapazität

Die dimensionslose effektive Wanddicke $\tilde{X}_m$ hängt für Platte, Zylinder und Kugel in unterschiedlicher Weise von der Eingangsgröße X_1 und von der dimensionslosen Periodendauer ε ab. Auch der für alle Geometrien gemeinsame Grenzwert von $\tilde{X}_m$ für $X_1 \rightarrow \infty$ hängt stark von ε ab. Wie bei der Funktion $\phi(\xi)$ lässt sich die Abhängigkeit von ε dadurch berücksichtigen, dass man das Verhältnis $\tilde{X}_m/X_1 = (\tilde{X}/X)_m$ als Funktion von ξ angibt. Dies ist in Abb. 7 dargestellt. Die Kurven für $\varepsilon=0,5$ und $\varepsilon=0,2$ stimmen im Rahmen der Zeichengenauigkeit überein. Die drei Kurven für Platte, Zylinder und Kugel sind folglich für alle realistischen Werte von ε gültig. In Übereinstimmung mit dem Diagramm Abb. 1 (Hausen) wurde der Bereich $0 \leq \xi \leq 160$ dargestellt. Werte von $\xi=160$ werden bei einem vernünftig bemessenen Regenerator nicht vorkommen. Die Abb. 7 demonstriert aber sehr anschaulich, dass die Speichermasse korrigiert werden muss. Für praktische Anwendungen wurden die nachstehenden Näherungsgleichungen für Platte, Zylinder und Kugel entwickelt. In den meisten Fällen dürfte der lineare Anfangsbereich von Bedeutung sein.

Platte

$$0 \leq \xi \leq 6 : \quad \frac{\tilde{X}}{X} = 1 + \frac{\xi}{6} \quad (53)$$

Abb. 7 Verhältnis der effektiven zur tatsächlichen Speicherkapazität $\tilde{C}_s/C_s$ für Platte, Zylinder und Kugel als Funktion der dimensionslosen Größe $\xi = \frac{\delta^2}{2a} \left(\frac{1}{t_w} + \frac{1}{t_k} \right)$. Die dargestellten Funktionen gelten für beliebige dimensionslose Periodendauern $0 < \varepsilon_w < 1$

$$6 \leq \xi \leq 20 : \quad \frac{\tilde{X}}{X} = 0,8578\sqrt{\xi} + 0,0075\xi - 0,15 - 0,012\sin\left[\frac{\pi}{7}(\xi-6)\right] \quad (54)$$

$$20 \leq \xi \leq \infty : \quad \frac{\tilde{X}}{X} = 0,8578\sqrt{\xi} \quad (55)$$

Zylinder

$$0 \leq \xi \leq 10 : \quad \frac{\tilde{X}}{X} = 1 + \frac{\xi}{16} \quad (56)$$

$$10 \leq \xi \leq \infty : \quad \frac{\tilde{X}}{X} = 0,2647 + 0,4289\sqrt{\xi} \quad (57)$$

Kugel

$$0 \leq \xi \leq 20 : \quad \frac{\tilde{X}}{X} = 1 + \frac{\xi}{30} - 7,17 \left(\frac{\xi}{100} \right)^4 \quad (58)$$

$$20 \leq \xi \leq \infty : \quad \frac{\tilde{X}}{X} = 0,28593\sqrt{\xi + 3,764\xi^{0,425}} \quad (59)$$

4.3 Berücksichtigung realer Geometrien der Speicherelemente

Die Elemente von Speichermassen unterscheiden sich meist von reinen Platten, Zylindern und Kugeln. Zur näherungsweisen Berücksichtigung realer Geometrien hat Hausen [1, 2] eine gleichwertige Plattendicke

$$\delta_{gl} = \frac{\delta}{2} + \frac{V}{A} \quad (60)$$

eingeführt, die kürzlich [2, 5] zu

$$\frac{1}{\delta_{gl}} = \frac{2}{3\delta} + \frac{A}{6V} \quad (61)$$

verbessert wurde. In den Gln. 60 und 61 bedeutet δ einen Durchmesser des Speicherelements, der hier als Durchmesser einer größtmöglichen, eingeschlossenen Kugel festgelegt wird. (Beispiele: Quader mit Kantenlängen $a > b > c$, $\delta = c$; Zylinder der Länge L mit elliptischem Querschnitt, Achsen $a > b$, für $L > b$ ist $\delta = b$, für $L < b$ ist $\delta = L$.) Mit Hilfe der gleichwertigen Plattendicke kann der Wärmewiderstand $1/\alpha_{s,m}$ mit dem Diagramm im Wärmeatlas (Abb. 1) oder den Näherungsgleichungen 4 und 5 für die Platte ermittelt werden. Bei der Anwendung auf Zylinder und Kugel treten bereichsweise geringfügige Ungenauigkeiten auf.

Zur Berechnung der effektiven Speicherkapazität liefert diese Methode keine brauchbaren Ergebnisse. Es wird deshalb eine quadratische Interpolation zwischen den Ergebnissen für Platte, Zylinder und Kugel empfohlen, die sowohl auf die Berechnung von $Y = \tilde{C}_s/C_s$ als auch $Y = 1/\alpha_{s,m}$

anwendbar ist. Zur Charakterisierung der Geometrie wird entsprechend den Gln. 60 und 61 die Kennzahl

$$G = \frac{A\delta}{V} \quad (62)$$

eingeführt. Für die Platte ist $G_p=2$, für den Zylinder $G_z=4$ und die Kugel $G_k=6$. Für alle Geometrien liegt G zwischen 2 und 6. Die Interpolationsgleichung lautet

$$Y = Y_p \left(3 - \frac{5}{4}G + \frac{1}{8}G^2 \right) + Y_z \left(-3 + 2G - \frac{1}{4}G^2 \right) + Y_k \left(1 - \frac{3}{4}G + \frac{1}{8}G^2 \right) \quad (63)$$

5 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

1. Die Wärmeleitungswiderstände in den Speichermassen können durch einen zusätzlichen Wärmeübertragungswiderstand berücksichtigt werden. Die nach dem vorgestellten Berechnungsverfahren gewonnenen Zusatzwiderstände stimmen exakt mit den von Hausen [1] berechneten und im VDI-Wärmeatlas [2] angegebenen Werten überein. Sie gelten für realistische Verteilungen der Wärmestromdichte während der Warm- und Kaltperiode.
2. Nach dem Berechnungsmodell muss zusätzlich die Kapazität der Speichermasse auf einen verkleinerten Wert reduziert werden. Ohne diese Korrektur wird der Wirkungsgrad des Regeneratorprozesses zu groß berechnet.
3. Für die thermische Berechnung von Regeneratoren werden einfache Näherungsgleichungen für die effektive Speicherkapazität angegeben. Hierbei können alle Geometrien der Speicherelemente berücksichtigt werden.

Funding Open Access funding provided by Projekt DEAL.

Anhang

Näherungsgleichungen für Zylinder

$$0 \leq X \leq 0,81 \quad (A1)$$

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{X} + \frac{X^3}{3} - 0,073X^{6,752}$$

$$0,81 \leq X < 1,3 \quad (A2)$$

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{X} + 0,55431X - 0,28942$$

$$1,3 \leq X < 2 \quad (A3)$$

$$\tilde{X} = 0,75248 + 0,063763X$$

$$2,0 \leq X \leq \infty \quad (A4)$$

$$\frac{1}{X} = 1 + \frac{0,24856}{X} + \frac{0,05033}{X^2}$$

$$\frac{\tilde{X}}{\tilde{Nu}} = \frac{1}{2} \tanh(X + \Delta X) \quad (A5)$$

$$0 \leq X \leq 1,3 \quad (A6)$$

$$\Delta X = \frac{1}{3}X^3 + 0,027X^5 (1,0645 - X^3)$$

$$1 \leq X \leq 1,75 \quad (A7)$$

$$\Delta X = 0,7061 \exp \left[-3,3636 \left(\left| \ln \frac{1,5067}{X} \right| \right)^{1,6902} \right]$$

$$1,75 \leq X \leq \infty \quad (A8)$$

$$\Delta X = 1,6356 - 0,5819X$$

Restglieder der unendlichen Summen in den Mittelwertgleichungen 41, 45, 48 und 49

Numerische Integration

$$\int_{z=n+1/2}^{z=\infty} y(z) dz = \Delta z \sum_{z=n+1}^{\infty} y(z); \quad \Delta z = 1; \quad z = v, j \quad (A9)$$

Bei genügend großen n werden die Grenzwerte erreicht

$$\left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Nu}} \right)_{z \geq n+1} = \frac{1}{2}; \quad (\tilde{X})_{z \geq n+1} = 1. \quad (A10)$$

Außerdem wird angenommen, dass sich dann die nachfolgenden Cosinusglieder in den Gln. 41 und 45 aufheben. Durch Anwendung der Gln. A9 und A10 erhält man folgende Restglieder:

Gl. 41:

$$\sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi \varepsilon_w v)}{v^{2,5}} \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Nu}} \right)_v = \frac{1}{3(n+0,5)^{1,5}} \quad (A11)$$

Gl. 45:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^{2,5}} \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Nu}} \right)_{v=(2j-1)} = \frac{1}{6(2n)^{1,5}} \quad (A12)$$

Gl. 48:

$$\sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi \varepsilon_w v)}{v^{1,5}} \frac{1}{\tilde{X}_v} = \frac{2}{(n+0,5)^{0,5}} \quad (A13)$$

Gl. 49:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^{1,5}} \frac{1}{\tilde{X}_{v=(2j-1)}} = \frac{1}{(2n)^{0,5}} \quad (A14)$$

Das Prinzip der Methode kann mit den bekannten unendlichen Summen getestet werden:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{v=1}^n \frac{1}{v^2} + \frac{1}{n+0,5} \quad (\text{A15})$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j-1)^2} + \frac{1}{4n}. \quad (\text{A16})$$

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

1. Hausen H (1976) Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom, 2. Aufl. Springer, Berlin Heidelberg New York
2. Bender W (2019) N1 Wärmeübertragung in Regeneratoren. In: Stephan P, Kabelac S, Kind M, Mewes D, Schaber K, Wetzel T (Hrsg) VDI-Wärmeatlas, 12. Aufl. Springer Reference Technik (VDI Springer Reference). Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg
3. Baćlić BS, Dragutinović GD (1998) Operation of counterflow regenerators. Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA
4. Roetzel W, Na Ranong C (2018) Evaluation of temperature oscillation experiment for the determination of heat transfer coefficient and dispersive Peclet number. Arch Thermodyn 1:91–110. <https://doi.org/10.1515/aoter-2018-0005>
5. Roetzel W, Na Ranong C (2018) Thermal calculation of heat exchangers with simplified consideration of axial wall heat conduction. In: E3S Web of Conferences HTRSE 2018. Bd. 70. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20187002013>
6. Baehr HD, Stephan K (2013) Wärme- und Stoffübertragung, 8. Aufl. Springer Vieweg, Berlin Heidelberg