Nicolaus Cusanus und implizite Funktionen

Wolfgang Förg-Rob · Kurt Girstmair

Eingegangen: 2. September 2021 / Angenommen: 1. November 2021 / Online publiziert: 29. November 2021
© Der/die Autor(en) 2021

Zusammenfassung Nicolaus Cusanus' Beiträge zur Mathematik des 15. Jahrhunderts betreffen hauptsächlich Kreisquadraturen. Wir besprechen seinen frühesten Versuch auf diesem Gebiet, der zu einer überraschend guten Approximation der Zahl π führt. In seiner Begründung stellt Cusanus Behauptungen auf, die sich, modern gesprochen, in Aussagen über implizite Funktionen übersetzen lassen. Wir beweisen diese Aussagen und diskutieren Joseph Ehrenfried Hofmanns Beweisversuch, der 70 Jahre zurückliegt.

Schlüsselwörter Nicolaus Cusanus · Quadratur des Kreises · Implizite Funktionen · Joseph Ehrenfried Hofmann

1 Eine Kreisquadratur

Nicolaus Cusanus (1401–1464; ab 1448 Kardinal, ab 1450 Fürstbischof von Brixen) war einerseits ein tatkräftiger Kirchenpolitiker, andererseits aber auch ein vielseitiger Gelehrter. Die Diskussion um sein Werk ist noch keineswegs abgeschlossen (vgl. [1, 6]). Neben Werken zur Philosophie und Theologie hat er auch solche zur Naturwissenschaft und Mathematik hinterlassen.

Wir diskutieren hier seine Abhandlung *De geometricis transmutationibus* (Über geometrische Umwandlungen). Es handelt sich dabei um Cusanus' ältestes mathematisches Werk (soweit bekannt). Darin findet man eine der (mathematisch durchwegs unrichtigen) Kreisquadraturen, denen das besondere Interesse des Cusaners

Wolfgang Förg-Rob · Kurt Girstmair (✉)

Institut für Mathematik, Universität Innsbruck, Technikerstr. 13/7, 6020 Innsbruck, Österreich

E-Mail: Kurt.Girstmair@uibk.ac.at

Wolfgang Förg-Rob

E-Mail: Wolfgang.Foerg-Rob@uibk.ac.at

Abb. 1 Cusanus' Konfiguration

galt. Solche Quadraturen laufen in der Regel darauf hinaus, die Zahl π , also das Verhältnis des Kreisumfangs zu dessen Durchmesser, exakt zu bestimmen. Den Hintergrund für die zahlreichen Versuche des Cusaners auf diesem Gebiet bildet die hohe Bedeutung des Kreises als Symbol für die göttliche Vollkommenheit in seinem Denken (vgl. [9]).

Die Quadratur in dieser Abhandlung führt zu einem besseren numerischen Ergebnis als andere von Cusanus' Quadraturen, die einen Wert der Zahl π außerhalb der Grenzen $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ liefern. Da Archimedes diese Grenzen streng mathematisch bewiesen hatte, konnte schon Nicolaus' jüngerer Zeitgenosse Regiomontanus (1436–1476) einige dieser Quadraturen durch Nachrechnen widerlegen (vgl. [2, S. 276–277], [4, S. 328–329]). Die hier besprochene Quadratur liegt innerhalb dieser Grenzen.

Die Aufgabe, die sich Cusanus stellt, ist folgende. Gegeben sei das gleichseitige Dreieck b, c, d , das den Mittelpunkt a haben soll (vgl. Abb. 1). Der Punkt f halbiert die Seite bc . Es soll ein Kreis konstruiert werden, dessen Umfang gleich dem Umfang des gleichseitigen Dreiecks (also der Summe seiner drei Seiten) ist. Es handelt sich deshalb, streng genommen, nicht um eine Quadratur der Kreisfläche, sondern um eine Rektifikation der Kreislinie. Nicolaus schreibt, dass der Radius dieses Kreises größer als $\overline{af}$ sein muss, aber kleiner als $\overline{ab}$. Diesen Radius gibt er folgendermaßen an: Man nehme den Halbierungspunkt e der Strecke $\overline{bf}$ und verlängere die Strecke $\overline{ae}$ um ein Viertel ihrer selbst bis zum Punkt h . Dann ist $\overline{ah}$ der gesuchte Radius. In seinen Worten: *Dico, si de a ad e linea ducta extendatur per quartam sui ut sit ah, illam fore semidiametrum circuli, cuius circumferentia aequatur tribus trigoni lateribus* (vgl. [3, S. 8]).

Wir können natürlich leicht nachrechnen, ob das stimmt. Gilt $\overline{bf} = 1$, so ist $\overline{df} = \sqrt{3}$ und der Inkreisradius $\overline{af}$ gleich $\sqrt{3}/3$. Ferner ist $\overline{ef}$ gleich $1/2$. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz hat man

$$\overline{ae} = \sqrt{(\sqrt{3}/3)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{21}/6.$$

Nun ist $\overline{ah}$ gerade $5/4$ mal diese Strecke, somit $\overline{ah} = 5\sqrt{21}/24$. Da der Umfang des Kreises mit Radius $\overline{ah}$ gleich dem Dreiecksumfang, also gleich 6 sein soll, erhalten wir die Gleichung

$$2\pi \cdot 5\sqrt{21}/24 = 6.$$

Daraus kann man π berechnen und findet

$$\pi = 24\sqrt{21}/35 = 3,1423376... \quad (1)$$

Der tatsächliche Wert von π ist um 0,000744... kleiner. Somit ist Cusanus' Resultat zwar falsch, aber zumindest numerisch nahe bei der Wahrheit. Bereits Moritz Cantor war über die Güte dieser Approximation verwundert, zumal sie auf einem höchst problematischen Weg erreicht wird (vgl. [2, S. 194]). Allerdings ist π auch eine transzendente Zahl und insbesondere keine quadratische Irrationalität wie das π von (1).

Nicolaus gibt für sein Resultat einen Beweis, der natürlich nicht mathematisch korrekt sein kann. Er argumentiert so. Man wählt auf der Strecke $\overline{bf}$ einen Punkt e und verlängert die Strecke $\overline{ae}$ zu einer Strecke $\overline{ah}$ so, dass

$$\overline{eh} : \overline{ae} = \overline{ef} : \overline{bc}. \quad (2)$$

Liegt der Punkt e nahe bei f , so ist die Strecke $\overline{ah}$ nur wenig größer als der Inkreisradius des Dreiecks und damit zu klein für den Radius des gesuchten Kreises. Liegt hingegen der Punkt e nahe bei b , so ist die Strecke $\overline{ah}$ größer als der Umkreisradius des Dreiecks und damit zu groß für den Radius des gesuchten Kreises. Daher kann man e so wählen, dass $\overline{ah}$ genau der Radius des gesuchten Kreises ist.

Auf ähnliche Weise kann man e so wählen, dass

$$\overline{eh} : \overline{ae} = \overline{eb} : \overline{bc}. \quad (3)$$

Wiederum schließt Cusanus, dass für eine geeignete Wahl von e die Strecke $\overline{ah}$ der Radius des gesuchten Kreises ist. Soweit ist seine Argumentation richtig. Nun folgt der Trugschluss: Nach dem Cusaner muss der Punkt e so gewählt werden, dass er *beiden* Beziehungen (2), (3) genügt. Dies ist aber nur für den Halbierungspunkt e der Strecke $\overline{bf}$ der Fall, das heißt $\overline{ef} : \overline{bf} = 1 : 2$.

Schließlich verlangt er vom Punkt e , dass auch noch

$$\overline{eh} : \overline{ae} = (\overline{ef} : \overline{bf})^2 \quad (4)$$

gilt. Das ist wiederum nur für $\overline{ef} : \overline{bf} = 1 : 2$ der Fall.

In Wirklichkeit aber liefern die Bedingungen (2)–(4) drei verschiedene geeignete Punkte e . Dazu setzen wir wieder $\overline{bf} = 1$ und nehmen an, dass $\overline{ah}$ tatsächlich der Radius des gesuchten Kreises ist. Es sei ferner $t = \overline{ef}$. Dann ist $\overline{ae} = \sqrt{t^2 + 1/3}$. Wegen $\overline{ef} : \overline{bc} = t/2$ liefert (2): $\overline{eh} = \overline{ae} \cdot t/2$ und $\overline{ah} = \overline{ae} \cdot (1 + t/2) =$

$\sqrt{t^2 + 1/3} \cdot (1 + t/2)$. Aus der Formel $2 \cdot \overline{ah} \cdot \pi = 6$ erhält man durch Quadrieren eine Gleichung 4. Grades für t . Sie lautet

$$\pi^2(t^2 + 1/3)(2 + t)^2 = 36 \quad (5)$$

und hat als einzige Lösung

$$t = 0,500188... \quad (6)$$

im zulässigen Bereich $0 < t < 1$. Im Fall von (3) erhält man auf dieselbe Weise eine andere Gleichung 4. Grades. Sie lautet $\pi^2(t^2 + 1/3)(3 - t)^2 = 36$. Sie hat nur die Lösung

$$t = 0,500518... \quad (7)$$

im zulässigen Bereich. Die Beziehung (4) führt auf eine Gleichung 6. Grades, nämlich $\pi^2(t^2 + 1/3)(1 + t^2)^2 = 9$, die die eindeutige Lösung

$$t = 0,500143... \quad (8)$$

im zulässigen Bereich hat.

Nach Cusanus müsste $t = 0,5$ sein. Wie man sieht, sind diese Werte alle sehr nahe bei 0,5. Somit liegen die drei zugehörigen Punkte e sehr nahe bei seinem Punkt e . Dies zeigt, welch glückliche Hand der Cusaner hatte.

Merkwürdigerweise werden in der Cusanus-Literatur, soweit uns bekannt, die drei Werte (6)–(8), an denen Nicolaus' irrige Schlussweise besonders offenkundig wird, nicht besprochen. Man begnügt sich vielmehr mit dem Wert (1) von π (vgl. [7, S. 191], [4, S. 310]).

Wäre Cusanus ohne den Fehler, die Bedingungen (2)–(4) zu verknüpfen, weiter gekommen? Wohl nicht, denn das in (5) auftretende Polynom $\pi^2(x^2 + 1/3)(2 + x)^2 - 36$ ist im Polynomring über dem Körper $\mathbb{Q}(\pi^2)$ irreduzibel. Damit enthält der von der Zahl t von (6) erzeugte Körper $\mathbb{Q}(t)$ den Körper $\mathbb{Q}(\pi^2)$ und hat über diesem den Grad 4. Somit ist t mindestens so unzugänglich wie π^2 .

Es ist heute weitgehender Konsens in der Forschung, dass man Cusanus' Versuche zur Kreisquadratur nicht ausschließlich nach ihrer mathematischen Richtigkeit beurteilen sollte (vgl. [8, S. 95–96], [1, S. 290]).

2 Implizite Funktionen

Nicolaus Cusanus begründet seine Behauptung, dass $t = 1/2$ ist, noch auf andere Weise (vgl. [7, S. 10–11]). Diese Begründung führt auf ein Problem, das im Folgenden besprochen werden soll.

Cusanus geht vom gleichseitigen Dreieck zum regelmäßigen n -Eck über. Dessen Seite sei wieder $\overline{bc}$ mit dem Mittelpunkt f , und es gelte $\overline{bf} = 1$. Es sei nun a der Mittelpunkt des regelmäßigen n -Ecks. Wieder wählt Cusanus einen Punkt e auf

$\overline{bf}$, und wie oben setzen wir $t = \overline{ef}$. Die Strecke $\overline{ae}$ verlängert er erneut zu $\overline{ah}$ in der Weise, dass (2) gilt. Das bedeutet $\overline{eh} = (t/2) \cdot \overline{ae}$ und

$$\overline{ah} = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \cdot \overline{ae}. \quad (9)$$

Nun gilt $\overline{bf} : \overline{af} = \tan(\pi/n)$, d. h., $\overline{af} = 1/\tan(\pi/n)$. Wir setzen zur Abkürzung

$$\varphi = \pi/n.$$

Nach dem pythagoreischen Lehrsatz haben wir

$$\overline{ae} = \sqrt{1/\tan(\varphi)^2 + t^2} = \frac{\sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}}{\tan(\varphi)},$$

da $\tan(\varphi) > 0$. Nach (9) gilt also

$$\overline{ah} = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \frac{\sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}}{\tan(\varphi)}. \quad (10)$$

Es soll nun $\overline{ah}$ der Radius des Kreises sein, der denselben Umfang wie das regelmäßige n -Eck hat, d. h., $2 \cdot \overline{ah} \cdot \pi = 2n$ bzw.

$$\overline{ah} = n/\pi = 1/\varphi. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\tan(\varphi)}{\varphi} = \left(1 + \frac{t}{2}\right) \sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}, \quad (12)$$

die wir auch in der Form

$$\frac{2 \tan(\varphi)}{(t + 2) \sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}} = \varphi \quad (13)$$

anschreiben.

Cusanus behauptet nun (in moderner Sprechweise), dass mit zunehmendem n der Wert von t streng monoton gegen 0 geht und für das kleinste n , also $n = 3$, das Maximum $t = 1/2$ annimmt. Letzteres ist natürlich falsch. Quadriert man nämlich beide Seiten von (13) und setzt $\varphi = \pi/3$, so erhält man eine Gleichung, die äquivalent zu (5) ist. Doch (5) hat nicht die Nullstelle $t = 0,5$, denn dann wäre π eine quadratische Irrationalität. Vielmehr ist das fragliche Maximum gerade die Zahl $t = 0,500188\dots$ von (6). Der Wert $t = 1/2$ für $\varphi = \pi/3$ wird vom Mathematik-Historiker Joseph Ehrenfried Hofmann in seiner Cusanus-Ausgabe als richtig übernommen (vgl. [7, S. XXIII–XXIV und S. 192–194]).

Aber die Behauptung, dass t für monoton wachsendes n streng monoton gegen null geht, ist richtig. Hofmann hat dies (vor annähernd 70 Jahren) zu erweisen versucht, nach unserer Meinung freilich auf unzureichende Weise. Wir werden seinen Ansatz im Abschnitt 3 diskutieren. Soweit wir sehen, ist Hofmanns Nachweis von der Forschung bisher nicht weiter hinterfragt worden (vgl. etwa [4, S. 310]).

Zum Beweis der Behauptung des Cusaners nehmen wir an, dass $\varphi \in (0, \pi/2)$ beliebig ist. Wir zeigen zunächst, dass dann t eine (implizite) Funktion von φ ist. Genauer gesagt, gilt der folgende Satz.

Satz 1 Zu jedem $\varphi \in (0, \pi/2)$ gibt es genau ein $t > 0$, sodass (13) gilt.

Beweis Wir schreiben dazu $g(\varphi, t)$ für die linke Seite von (13). Es sei φ fest und es gelte $t \rightarrow 0$. Dann geht $g(\varphi, t)$ gegen $\tan(\varphi) > \varphi$, d.h., es gibt ein $t > 0$, sodass $g(\varphi, t) > \varphi$. Gilt hingegen $t \rightarrow \infty$, so geht $g(\varphi, t)$ gegen $0 < \varphi$, d.h., es gibt ein $t > 0$, sodass $g(\varphi, t) < \varphi$. Da $g(\varphi, t)$ eine stetige Funktion von t ist, muss es also ein $t > 0$ geben mit $g(\varphi, t) = \varphi$. Dieses t ist eindeutig bestimmt. Ist etwa $t' > t$, so ist $g(t', \varphi) < g(t, \varphi) = \varphi$. $\square$

Wir schreiben nun $T : (0, \pi/2) \rightarrow (0, \infty)$ für die nach Satz 1 definierte Funktion von φ . Die Gleichung (13) ist dann erfüllt für alle $\varphi \in (0, \pi/2)$ und $t = T(\varphi)$. Es erweist sich im Folgenden als günstig, anstelle dieser Gleichung die Gleichung $G(\varphi, t) = 0$ zu verwenden, wobei

$$G(\varphi, t) = \frac{\tan(\varphi)}{\varphi \sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}} - 1 - \frac{t}{2}. \quad (14)$$

Es gilt dann $G(\varphi, T(\varphi)) = 0$ für alle $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Satz 2 Die Funktion T ist stetig-differenzierbar.

Beweis Da G eine stetig-differenzierbare Funktion von (φ, t) ist, ist nach dem Satz über implizite Funktionen (vgl. [5, S. 104]) die Funktion T stetig differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\varphi, T(\varphi)) \neq 0$$

für alle $\varphi \in (0, \pi/2)$ gilt. Es gilt aber

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\varphi, t) = \frac{-t \tan(\varphi)^3}{\varphi \sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}^3} - \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Dieser Ausdruck ist < 0 für alle $\varphi \in (0, \pi/2)$ und alle $t > 0$. $\square$

Die Abb. 2 stellt den Graphen von T , also die Nullstellenmenge von G in $(0, \pi/2) \times (0, \infty)$, dar. Sie lässt Nicolaus' Behauptung, dass $T(\pi/n)$ für streng monoton wachsendes $n \geq 3$ streng monoton gegen 0 geht, plausibel erscheinen. Wir beweisen dies für $n \geq 4$. Dann bleibt nur noch zu zeigen, dass $T(\pi/4) < T(\pi/3)$ ist. Es gilt aber $T(\pi/4) = 0,380227... < T(\pi/3) = 0,500188...$ (vgl. (6)).

Abb. 2 Graph von T

Satz 3 Es gibt ein $\alpha \in (\pi/4, \pi/3)$, sodass T auf $(0, \alpha]$ streng monoton wächst. Ferner gilt $\lim_{\varphi \rightarrow 0} T(\varphi) = 0$.

Beweis Zunächst beachten wir, dass $T(\varphi)$ der Gleichung (12) genügt. Das liefert

$$\frac{\tan(\varphi)}{\varphi} = \left(1 + \frac{T(\varphi)}{2}\right) \sqrt{1 + T(\varphi)^2 \tan(\varphi)^2} > \left(1 + \frac{T(\varphi)}{2}\right),$$

d. h.,

$$T(\varphi) < \frac{2 \tan(\varphi)}{\varphi} - 2 \quad (16)$$

für alle $\varphi \in (0, \pi/2)$. Da die rechte Seite von (16) für $\varphi \rightarrow 0$ gegen 0 geht, geht auch $T(\varphi) (> 0)$ unter dieser Voraussetzung gegen 0. Das beweist die zweite Aussage des Satzes.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt für $\varphi \in (0, \pi/2)$

$$\frac{d T}{d \varphi}(\varphi) = -\frac{(\partial G / \partial \varphi)}{(\partial G / \partial t)}(\varphi, T(\varphi)). \quad (17)$$

Wegen

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi}(\varphi, t) = \frac{-t^2 \tan(\varphi)^3 + \varphi \tan(\varphi)^2 - \tan(\varphi) + \varphi}{\varphi^2 \sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}^3}$$

erhalten wir mittels (15)

$$-\frac{(\partial G / \partial \varphi)}{(\partial G / \partial t)}(\varphi, t) = \frac{2(-t^2 \tan(\varphi)^3 + \varphi \tan(\varphi)^2 - \tan(\varphi) + \varphi)}{2t \varphi \tan(\varphi)^3 + \varphi^2 \sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}^3}. \quad (18)$$

Dieser Ausdruck wird für $\varphi \in (0, \pi/2)$ und $t \in (0, \infty)$ genau dann gleich 0, wenn

$$t^2 = \frac{\varphi \tan(\varphi)^2 - \tan(\varphi) + \varphi}{\tan(\varphi)^3}. \quad (19)$$

Nun sei $t_0(\varphi)$ die rechte Seite dieser Gleichung. Unser nächstes Ziel ist es, für hinreichend kleines φ die Aussage $t_0(\varphi) \neq T(\varphi)^2$ zu zeigen.

Dazu verwenden wir

$$t_0(\varphi) \geq \frac{\sin(\varphi) \tan(\varphi)^2 - \tan(\varphi) + \sin(\varphi)}{\tan(\varphi)^3}$$

für $\varphi \in (0, \pi/2)$. Die rechte Seite dieser Ungleichung formt man leicht zu $\cos(\varphi)/(1 + \cos(\varphi))$ um. Wir setzen $t_1(\varphi) = \cos(\varphi)/(1 + \cos(\varphi))$. Dann folgt

$$\frac{d t_1}{d \varphi}(\varphi) = -\frac{\sin(\varphi)}{(1 + \cos(\varphi))^2}.$$

Daher ist $t_1 : (0, \pi/3] \rightarrow (0, \infty)$ streng monoton fallend. Es gilt $t_1(\pi/3) = 1/3$.

Wir setzen $t_2(\varphi) = (2 \tan(\varphi)/\varphi - 2)^2$. Da $\tan(\varphi)/\varphi$ auf $(0, \pi/2)$ streng monoton wächst, ist auch die Funktion $t_2 : (0, \pi/3] \rightarrow (0, \infty)$ streng monoton wachsend. Es ist $\lim_{\varphi \rightarrow 0} t_2(\varphi) = 0$, ferner haben wir $t_2(\pi/3) = 1,710794\dots$

Wegen der Eigenschaften von t_1 und t_2 gibt es genau ein $\alpha \in (0, \pi/3)$ derart, dass $t_1(\alpha) = t_2(\alpha)$. Die Zahl α hat den Wert $\alpha = 0,829999\dots$ Wir erhalten wegen (16)

$$T(\varphi)^2 < t_2(\varphi) \leq t_2(\alpha) = t_1(\alpha) \leq t_1(\varphi) \leq t_0(\varphi)$$

für alle $\varphi \in (0, \alpha]$, insbesondere also $T(\varphi)^2 \neq t_0(\varphi)$. Somit ist für die in Frage kommenden φ und $t = T(\varphi)$ die Gleichung (19) nicht erfüllt. Daher gilt nach (18) und (17) auch $(d T/d \varphi)(\varphi) \neq 0$ für alle $\varphi \in (0, \alpha]$. Da $d T/d \varphi$ nach Satz 2 stetig ist, ist die Funktion T streng monoton auf $(0, \alpha]$. Wegen $\lim_{\varphi \rightarrow 0} T(\varphi) = 0$ ist T auf $(0, \alpha]$ streng monoton wachsend. $\square$

Cusanus betrachtet, modern gesprochen, nicht nur die Funktion T , sondern auch das Analogon zu dieser Funktion, das man erhält, wenn man die Bedingung (2) durch (4) ersetzt. In diesem Fall hat man anstelle der Funktion G von (14) die Funktion

$$H(\varphi, t) = \frac{\tan(\varphi)}{\varphi \sqrt{1 + t^2 \tan(\varphi)^2}} - 1 - t^2.$$

Die dadurch gegebene implizite Funktion lässt sich ganz ähnlich wie T behandeln.

3 Hofmanns Ansatz

Dieser findet sich in [7, S. 192–194] (in beiden Auflagen identisch). Hofmann betrachtet die Lösungen (φ, t) der Gleichung (12), wobei er $\varphi \in (0, \pi/2)$ und (stillschweigend) $t > 0$ voraussetzt. Durch logarithmische Differentiation von (12) nach t erhält er

$$h(\varphi, t) \cdot \frac{d\varphi}{dt} = h_1(\varphi, t) \quad (20)$$

mit

$$h(\varphi, t) = \frac{\varphi - \sin(\varphi) \cos(\varphi)(1 + t^2 \tan(\varphi)^2)}{\varphi \sin(\varphi) \cos(\varphi)(1 + t^2 \tan(\varphi)^2)} \quad (21)$$

und

$$h_1(\varphi, t) = \frac{1}{2+t} + \frac{t \tan(\varphi)^2}{1+t^2 \tan(\varphi)^2}. \quad (22)$$

Hier wird also φ als differenzierbare Funktion von t vorausgesetzt – wobei freilich nicht von vornherein klar ist, wo sich φ als Funktion von t auffassen lässt.

Hofmann nimmt nun an, dass für jede Lösung (φ, t) von (12) mit $\varphi \in (0, \pi/3]$ auch $t \leq 1/2$ gilt. Unter dieser Annahme zeigt er, dass der Ausdruck $h(\varphi, t)$ von (21) positiv ist, sodass man aus (20) und (22) schließen kann, dass $d\varphi/dt > 0$ ist. Daraus ersieht er, dass dann auch $d t/d\varphi > 0$ ist und somit t streng monoton mit φ wächst.

Wir wollen diese Ausführungen im Licht des Satzes über implizite Funktionen diskutieren und benützen dazu die Funktion G von (14). Gilt für ein Paar (φ_0, t_0) mit $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, $t_0 > 0$, dass $G(\varphi_0, t_0) = 0$ und $(\partial G/\partial \varphi)(\varphi_0, t_0) \neq 0$, dann gibt es Umgebungen U von φ_0 und V von t_0 sowie genau eine Funktion $\Phi: V \rightarrow U$, sodass $\Phi(t_0) = \varphi_0$ und $G(\Phi(t), t) = 0$ für alle $t \in V$. Die Funktion Φ ist stetig-differenzierbar und es gilt

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = -\frac{(\partial G/\partial t)}{(\partial G/\partial \varphi)}(\Phi(t), t)$$

für alle $t \in V$. Die Hofmannschen Ausführungen besagen, dass in diesem Fall

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \frac{h_1}{h}(\Phi(t), t)$$

für $t \in V$ gilt. Dies ist richtig und stellt eine bemerkenswert einfache Darstellung von $d\Phi/dt$ in diesem Bereich dar. Ein Blick auf Abb. 2 lehrt auch, dass T wohl nicht injektiv ist und man daher keine globale Umkehrfunktion Φ von T erwarten kann.

Hofmann beschränkt, wie gesagt, (φ, t) auf die Menge $I = (0, \pi/3] \times (0, 1/2]$. Nach seinen Ausführungen gilt dann $(d\Phi/dt)(t) > 0$ für alle $t \in (0, 1/2]$, für die die Funktion Φ (in einer Umgebung von t) definiert und $\Phi(t) \leq \pi/3$ ist. Allerdings hat er keine Information über die Nullstellenmenge von G im Bereich I zur Verfügung (und natürlich auch keine Entsprechung zu Abb. 2). Es könnte etwa der Fall eintreten, dass für ein $t \in (0, 1/2]$ gar kein $\varphi \in (0, \pi/3]$ existiert, sodass $G(\varphi, t) = 0$. Dies wäre beispielsweise dann der Fall, wenn die Funktionswerte $T(\varphi)$ für $\varphi \rightarrow 0$ nicht streng monoton gegen 0, sondern gegen einen Grenzwert > 0 gingen. Wir wissen zwar aufgrund von Satz 3, dass dies nicht passieren kann, doch bei Hofmann findet

man nichts darüber. Ginge $T(\varphi)$ tatsächlich gegen einen Grenzwert > 0 , so wäre die Aussage des Cusanus, um die es hier geht, falsch.

Es ist auch der Fall denkbar, dass es zu einem $\varphi \in (0, \pi/3]$ zwei verschiedene t im Intervall $(0, 1/2]$ gibt, sodass (t, φ) Nullstellen von G sind. Wir haben diesen Fall zwar in Satz 1 ausgeschlossen, aber mit Hofmanns Information kann man nicht einfach davon ausgehen, dass er nicht auftritt. In diesem Fall könnten auch für gewisse t zwei verschiedene φ existieren, sodass $G(\varphi, t) = 0$.

Es ist nicht schwer, Beispiele für beide Fälle (kein φ zu gegebenem t bzw. zwei t zu gegebenem φ) anzugeben, bei denen auch die Entsprechung zu der von Hofmann verwendeten Positivität von $(h_1/h)(\varphi, t)$ (vgl. (20)–(22)) gegeben ist.

Ein weiterer Einwand betrifft Hofmanns Annahme, dass für jede Nullstelle (φ, t) von G mit $\varphi \in (0, \pi/3]$ auch $t \leq 1/2$ gilt. Dies trifft nicht zu. Denn der zu $\varphi = \pi/3$ gehörige Wert $t = T(\pi/3)$ ist $t = 0,500188... > 1/2$ (vgl. (6)). Man muss also die Obergrenze $\pi/3$ des Intervalls durch eine kleinere ersetzen, wenn $t \leq 1/2$ erhalten bleiben soll. Doch auch dann gilt das nicht automatisch, wie Hofmanns Ausführungen suggerieren. Es lässt sich aber erreichen, indem man (16) verwendet. Denn man hat $T(\varphi) \leq 2 \tan(\varphi)/\varphi - 2 \leq 1/2$ für $\varphi \leq \beta$, wobei $\beta = 0,759307...$ Dieses β liegt zwischen $\pi/5$ und $\pi/4$, sodass nur die Werte $\varphi \in \{\pi/3, \pi/4\}$ separat zu betrachten sind.

Bei aller Kritik an Hofmanns Beitrag muss man freilich bedenken, dass er sich vor 70 Jahren nicht auf die heutigen Rechen- und Visualisierungshilfen stützen konnte.

Funding Open access funding provided by University of Innsbruck and Medical University of Innsbruck.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

1. Brösch, M., Euler, W.A., Geissler, A., Ranff, V. (Hrsg.): Handbuch Nikolaus von Kues: Leben und Werk. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (2014)
2. Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Teil 2. Teubner, Leipzig (1900)
3. Cusanus, N.: Opera omnia XX. Meiner, Hamburg (2010). Hrsg. M. Folkerts
4. Folkerts, M.: Die Quellen und die Bedeutung der mathematischen Werke des Nikolaus von Kues. In: Kremer, K., Reinhardt, K. (Hrsg.) Nikolaus von Kues, 1401–2001, S. 291–332. Paulinus, Trier (2003). ebd. 329
5. Forster, O.: Analysis II. Springer Fachmedien, Wiesbaden (2017)
6. Hallauer, H.: Nikolaus von Kues als Kirchenreformer und Fürstbischof von Brixen. In: Kremer, K., Reinhardt, K. (Hrsg.) Nikolaus von Kues, 1401–2001, S. 103–134. Paulinus, Trier (2003)

7. Hofmann, J.E. (Hrsg.): Nikolaus von Cues, Die mathematischen Schriften. Meiner, Hamburg (1952; 2. Aufl. 1980)
8. Nagel, F.: Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften. Aschendorff, Münster (1984)
9. Yamaki, K.: Die Bedeutung geometrischer Symbole für das Denken des Nicolaus Cusanus. Eine Untersuchung am Beispiel der Metamorphose seiner Auffassung vom Kreis. In: Pukelsheim, F., Schwaetzer, H. (Hrsg.) Das Mathematikverständnis des Nikolaus von Kues, S. 295–312. Paulinus, Trier (2005)