Monopoly

Mathematische Anmerkungen zu einem polarisierenden Gesellschaftsspiel

Matthias Müller · Raphael Thiele

Eingegangen: 11. Februar 2021 / Angenommen: 13. April 2021 / Online publiziert: 5. Mai 2021
© Der/die Autor(en) 2021

Zusammenfassung Die Spielidee des Monopoly-Spiels ist mehr als 100 Jahre alt. Ein Grund für den beständigen Erfolg ist die Anpassungsfähigkeit der Spielidee. Mittlerweile kann man über 1000 unterschiedliche Versionen unterscheiden. Die zentrale Gefängnis-Regel ist allen Versionen gemein. Unterschiedliche Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Spielfelder eines Spielplans sind die Folge. Ziel des Beitrages ist es, den Einfluss der Gefängnis-Regel auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Größe des Spielplans und der Anzahl an Würfeln beim Monopoly-Spiel zu untersuchen. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der 40 Felder des Spielplans der Classic-Version sind bekannt. Im Artikel wird ein allgemeines Modell des Spiels beschrieben, das eine Variation der Anzahl an Feldern und Würfeln erlaubt und eine Untersuchung des Einflusses auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Spielfelder ermöglicht. Die Ergebnisse verdeutlichen den Einfluss der Gefängnis-Regel und das damit verbundene Ungleichgewicht der summierten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zwischen dem oberen und unteren Spielfeldbereich. Insgesamt lässt sich festhalten, dass eine Steigerung der Anzahl an Feldern des Spielplans bei gleichbleibender Anzahl an Würfeln den Einfluss der Gefängnis-Regel und das Ungleichgewicht zwischen den Bereichen des Spielplans vergrößert. Im Gegensatz dazu schwächt eine Erhöhung der Anzahl an Würfeln bei gleichbleibender Anzahl an Feldern den Einfluss der Gefängnis-Regel ab und führt zur Angleichung der summierten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Spielfeldbereiche.

M. Müller (✉)

Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung für Didaktik, Friedrich-Schiller-Universität Jena,
Ernst-Abbe-Platz 2, 07743 Jena, Deutschland
E-Mail: matthias.mueller.2@uni-jena.de

R. Thiele

Fakultät für Mathematik und Informatik, Lehrstuhl für Mathematische Optimierung,
Friedrich-Schiller-Universität Jena, Ernst-Abbe-Platz 2, 07743 Jena, Deutschland
E-Mail: raphael.thiele@uni-jena.de

Schlüsselwörter Aufenthaltswahrscheinlichkeiten · Gefängnis-Regel des Monopoly-Spiels · Markov-Ketten

MSC-Classification 91A60 · 60J10

1 Einleitung

Das Brettspiel Monopoly ist eines der bekanntesten und erfolgreichsten Gesellschaftsspiele der Welt. Bis zum Jahr 2013 wurde es über 260 Millionen Mal verkauft [7]. Weltweit wurde es bisher in über 100 Ländern in 37 Sprachen verlegt. Weiterhin erscheinen regelmäßig neue Versionen des Spiels [10]. Die Geschichte von Monopoly hat ihren Ursprung im Jahr 1904 in Pennsylvania, USA. Ein Vorläufer des Spiels wurde unter dem Namen *The Landlord's Game* von Elizabeth Magie entwickelt und wies schon einige Gemeinsamkeiten zu den späteren Monopoly-Spielen auf. Jedoch war *The Landlord's Game* ein sozial-kritisches Spiel, mit dem die antisoziale Wirkung von Monopolen demonstriert werden sollte. 1924 beantragte Elizabeth Magie ein Patent für eine überarbeitete Version. Diese Version lernte Charles Darrow im Jahr 1933 kennen. Er veränderte und erweiterte das Spiel [7]. Am 19. März 1935 kaufte der Verlag Parker Brother Games die Rechte an dem Spiel, und bereits im ersten Jahr wurden 35 000 Spiele pro Woche verkauft [8]. Die erste deutsche Monopoly-Version erschien im Jahre 1936, allerdings kam die heutige als Classic-Version bekannte Variante erst 1953 auf den Markt [7]. Vor diesem Hintergrund ist es schwierig ein eindeutiges *Geburtsdatum* auszumachen. Man kann die Patentanmeldung von Elizabeth Magie von 1924 zu Grunde legen, somit würde die Spielidee im Jahr 2024 ein 100-jähriges Jubiläum erfahren. Oft wird allerdings der Ankauf und die Vermarktung des Spiels durch den Verlag Parker Brother Games als *Geburtsdatum* angesehen [8], daher wäre das 100-jährige Jubiläum am 19. März 2035.

Ein Grund für den beständigen Erfolg ist die Anpassungsfähigkeit der Spielidee bzw. die Bereitschaft zur Anpassung des Spiels von Seiten des Verlages. Bekanntermaßen werden Bezeichnungen und die Währung im Spiel gern variiert. So gibt es verschiedene Themen, Jubiläen- und Regionalausgaben. Mittlerweile kann man über 1000 unterschiedliche Versionen zählen [13]. So unterscheiden sich die Regeln in Hinblick auf Grundstückspreise und Mieten. Ein interessantes Beispiel ist der Vergleich der älteren Auflage der Classic-Version von 1995 mit der aktuellen Classic-Version. Die Grundstückspreise und Mieten sind in der Auflage von 1995 deutlich höher (daher auch realistischer) und die Berechnung der Mieten für Wasser- und Elektrizitätswerk erfolgt mit Faktor 80 bzw. 200. In der aktuellen Classic-Version sind die Preise maximal dreistellig und die Berechnungen von Hypotheken und Mieten deutlich einfacher. Damit haben sich etwaige (Kopf-)Rechnungen während des Spiels vereinfacht.

Ein weiterer Unterschied zwischen den Versionen ist die Anzahl an Feldern. So besitzt der Spielplan der Fortnite-Variante 32, der der Imperium-Variante 36 und der der Mega-Deluxe-Edition 52 Felder. Entsprechend der Anzahl an Feldern kommen teilweise unterschiedliche sechsseitige Würfel zum Einsatz. In der Fortnite-

Variante ist der zweite Würfel durch einen Aktionswürfel ersetzt, dieser beeinflusst das Voransetzen der Figuren jedoch nur unwesentlich. Folglich wird die Fortnite-Variante mit nur einem Würfel gespielt. Im Gegensatz dazu werden für die Mega-Deluxe-Edition drei Würfeln verwendet. Neben den zwei bekannten Würfeln gibt es einen weiteren Tempo-Würfel, welcher neben den Zahlen 1, 2 und 3 noch drei Sondersymbole aufweist, die das Voransetzen der Spielfiguren beeinflussen.

Trotz der Vielzahl an Versionen des Monopoly-Spiels gibt es allerdings stets Grundelemente, die sich bei allen Versionen ausfindig machen lassen. So sind die Spielfelder quadratisch aufgebaut und die vier Eckfelder (Los, Gefängnis, Frei-Parken und Geh-Ins-Gefängnis) sind allen Versionen gemein. Das bedeutet auch, dass die damit verbundene Regel Geh-Ins-Gefängnis¹ sich bei allen Versionen wiederfindet. Diese Regel stellt eine Art Abkürzung auf dem Spielplan dar und hat auf das Spiel einen entscheidenden Einfluss, denn in Zusammenhang mit den Regeln zum Würfeln, sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Spielfelder nicht gleichverteilt. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass die Anzahl an Feldern auf dem Spielplan zwischen den unterschiedlichen Versionen variiert, kommt der Einfluss auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten unterschiedlich stark zum Tragen.

Das Ziel des Beitrages ist es, den Einfluss der Gefängnis-Regel auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Größe des Spielplans und der Anzahl an Würfeln beim Monopoly-Spiel zu untersuchen. Die zu erwartenden Ergebnisse können helfen bestehende Gewinnstrategien anzupassen und die Attraktivität neuer Monopoly-Varianten zu bewerten. Das Ziel soll im Folgenden ausführlicher motiviert (vgl. Kap. 2.2) und in Zusammenhang mit den bisherigen Erkenntnissen zum Spiel gebracht werden (vgl. Kap. 2.3). Im Kap. 3 wird entsprechend der Zielstellung das methodische Vorgehen dargestellt und das gewählte Modell beschrieben. Es schließen sich die daraus gewonnen Ergebnisse (vgl. Kap. 4) und eine Diskussion der Ergebnisse vor dem Hintergrund der Zielstellung (vgl. Kap. 5) an.

2 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten beim Monopoly-Spiel

2.1 Grundlegendes Regelwerk

Die Beschreibung der Regeln soll exemplarisch an der Classic-Version erfolgen, relevante Abweichungen zu anderen Versionen werden an geeigneter Stelle kenntlich gemacht.

Zwei bis acht Personen können Monopoly zusammen spielen. Ziel des Spiels ist es, der reichste Spieler am Spieltisch zu werden [4]. Das bedeutet, dass alle anderen Spieler durch Bankrott aus dem Spiel ausscheiden müssen. Im Rahmen der Regeln wird das Ziel durch An- und Verkauf von Besitzrechten sowie Vermietung von Grundstücken, Häusern oder Hotels erreicht [4]. Der Spielplan der Classic-Version umfasst einen Rundlauf von 40 Feldern. Begonnen wird auf dem Feld 0 (Los). Es wird mit zwei Würfeln reihum gewürfelt. Die Spielfiguren werden jeweils um die

¹ Im Folgenden wird die Regel verkürzt als Gefängnis-Regel bezeichnet.

Abb. 1 Monopoly-Spielplan mit 40 Feldern: Verbindende Elemente aller Versionen sind die quadratische Form mit den vier Eckfeldern (Los, Gefängnis, Frei-Parken und Geh-Ins-Gefängnis) und der Gefängnis-Regel als Abkürzung entlang der Hauptdiagonalen

Frei-Parken 20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	Geh-Ins-Gefängnis 30
19										31
18										32
17										33
16										34
15										35
14										36
13										37
12										38
11										39
10 Gefängnis	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0 Los

Augensumme beider Würfel vorge setzt. Bei einem Pasch muss erneut gewürfelt werden. Das Spielfeld ist in Abb. 1 idealisiert dargestellt.

Eines der Eckfelder ist das Feld 0 (Los), auf dem gestartet wird. Die drei anderen Eckfelder 10, 20 und 30 sind das Gefängnis, Frei-Parken und Geh-Ins-Gefängnis. Des Weiteren gibt es die Straßfelder (insgesamt 22 Straßen in acht Gruppen), vier Bahnhöfe sowie das Wasser- und das Elektrizitätswerk, die erworben werden können. Weiterhin ergänzen jeweils drei Gemeinschafts- und Ereignisfelder das Spielfeld, bei denen immer einer Anweisung gefolgt werden muss, die auf den Gemeinschafts- oder Ereigniskarten angegeben ist. Diese Felder können nicht erworben werden. Auf den Steuerfeldern Einkommens- und Zusatzsteuer wird eine angegebene Steuer an die Bank fällig. Auf den Straßefeldern sowie den Bahnhöfen und den Werken wird eine Miete fällig, sobald eine Person diese Felder erworben hat.

Ist ein Spielender am Zug, hat er oder sie die Möglichkeit verschiedene Aktionen auszuführen. Nach dem Setzen der Spielfigur kann das Feld, auf dem sie sich befindet, erworben werden (sofern dieses Feld noch nicht verkauft wurde), bzw. muss die fällige Miete gezahlt oder die Aktion auf dem Feld ausgeführt werden. Danach kann, sofern alle Straßen einer Farbgruppe (Straßenzug) sich in einer Hand befinden, Häuser oder Hotels auf eben diesen Straßen gebaut werden. Das Handeln mit Grundstückskarten ist jederzeit möglich.

Eine Besonderheit ist das Gefängnis-Feld. Dieses muss eine Spielfigur besuchen, wenn sie auf das dementsprechende Feld gesetzt, eine entsprechende Karte gezogen oder zum dritten Mal in Folge ein Pasch gewürfelt wird. Das Gefängnis darf verlassen werden, wenn erneut ein Pasch gewürfelt wird oder man sich durch eine Kautions freikauf. Hat ein Spielender seinen Zug abgeschlossen, beginnt der Zug eines Mitspielenden. Kommt man in einem Zug auf oder über das Feld 0 (Los), so erhält man Gehalt von der Bank. Geht ein Spielender Bankrott, steht kein Kapital

Abb. 2 Siebener Zyklus bei Monopoly-Spielplan mit 40 Feldern: Die Eckfelder 0 (Los), 10 (Gefängnis) und 30 (Geh-Ins-Gefängnis) sind hervorgehoben

mehr zur Verfügung und es können keine Hypotheken oder Kredite aufgenommen werden. Damit scheidet der Spielende aus [4].

2.2 Motivation der Annahme unterschiedlicher Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, umfasst der Spielplan der Classic-Version 40 Felder und die Spielfiguren werden um die Summe der Augenzahlen zweier Würfel vorangesetzt. Es ist nicht sofort ersichtlich, warum die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten auf den Spielfeldern des Spielplans unterschiedlich sein sollen [9]. Um eine erste Idee für diese Tatsache zu entwickeln, bestimmen wir zunächst den Erwartungswert der Summe der Augenzahlen beim Würfeln mit zwei Würfeln:

$$2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Es ist zu erwarten, dass eine Spielfigur im Mittel 7 Felder auf dem Spielplan weitergesetzt wird. Vernachlässigen wir zunächst die Gefängnis-Regel. Um sich den Sachverhalt zu veranschaulichen, lassen wir jetzt gedanklich eine Spielfigur in 7er Schritten um den Spielplan wandern. Da es 40 Felder gibt und 40 und 7 teilerfremd sind, wird jedes Feld nach 40 Zügen genau einmal besucht, wenn die Figur in 7er Schritten um den Rundlauf gesetzt wird. (Das ist eine schöne Veranschaulichung der Rechnung 40 modulo 7.) Demnach könnte man annehmen, dass im Mittel alle Felder gleich oft besucht werden.

An dieser Stelle wird es spannend, denn wir beziehen die Gefängnis-Regel jetzt mit in die Betrachtungen ein. Gelangt eine Spielfigur auf Feld 30 muss sie auf Feld 10 gesetzt werden. Startet man entsprechend der Regeln auf Feld 0 und setzt eine Figur in 7er Schritten auf dem Spielplan so gelangt man nach 10 Zügen auf das Feld 30, folgerichtig muss man (wenn man dann darf) von Feld 10 loslaufen und ist nach weiteren 10 Zügen wieder auf Feld 0. Der komplette Zyklus ist in Abb. 2 veranschaulicht.

Somit verbleibt die Spielfigur in einem Zyklus von 21 Feldern, wenn man in 7er Schritten um den Spielplan setzt und die Gefängnis-Regel beachtet. Es werden dann nur 21 Felder besucht (offensichtlich ist 21 ein Vielfaches von 7) und man kann vermuten, dass im Mittel nicht alle Felder im Spiel Monopoly gleich oft besucht werden. Auch wenn mit dieser Betrachtung keine quantitative Aussage möglich ist, kann festgehalten werden, dass es bei langanhaltender Spieldauer Felder auf dem Spielplan gibt, die öfter besucht werden als andere [9]. In der Tat sind die zu erwartenden Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder unterschiedlich. Anhand des eben beschriebenen Gedankenspiels ist zu vermuten, dass der orangene

und der rote Straßenzug sowie das Feld Frei-Parken (alles Spielfelder oberhalb der Hauptdiagonalen des quadratischen Spielplans) im Vorteil sind.

2.3 Bisherige Ansätze zur Bestimmung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten bei der Classic-Version

Für die Classic-Version sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und erwarteten Renditen aus diversen Arbeiten bereits bekannt. Jedoch unterscheiden sich die einzelnen Ergebnisse aufgrund des Detailgrades der Umsetzung der Monopoly-Regeln. Nachfolgend werden wir einen kurzen Überblick über solche bekannten Umsetzungen geben. Dabei beschränken wir uns auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Für die erwarteten Renditen verweisen wir auf [2, 3, 5].

Unterschiede gibt es unter anderem bei der Umsetzung der Gefängnis-Regel. In [11] wird komplett darauf verzichtet. Das ist aber eher die Ausnahme, da die Gefängnis-Regel einen wichtigen Bestandteil von Monopoly darstellt.

Außerdem stellt sich die Frage, wie lange sich die Spielfigur im Gefängnis aufhalten soll. Grundlegend werden hier zwei Ansätze unterschieden. Entweder die Spielfigur kauft sich sofort frei wie in [6] oder sie bleibt bis zu einem Pasch, aber maximal drei Würfe im Gefängnis wie bei [1, 2, 12]. In [3, 5] werden beide Fälle miteinander verglichen. Die wohl umfangreichste Modellierung findet sich bei [3]. Das Verlassen des Gefängnisses wird hier durch einen Parameter beeinflusst. Dieser gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher ein Spielender vorzeitig bezahlt, um aus dem Gefängnis freizukommen.

Im Monopoly-Spiel muss die Spielfigur nach dem dritten Pasch in Folge in das Gefängnis. Diese Regel wird entweder vernachlässigt [6], exakt umgesetzt [2, 3] oder lediglich approximiert [1, 5]. Im Gegensatz dazu sind die Ereignis- und Gemeinschaftskarten leicht zu integrieren. Entsprechend sind sie bei [1–3, 5, 6, 12] zu finden.

Für die Vergleichbarkeit der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten macht es einen Unterschied, ob sie je Zug wie bei [3] oder je Wurf wie bei [1, 2, 5, 6] bestimmt wurden. Ein Zug kann nämlich, aufgrund der Paschregel, bis zu drei Würfe umfassen. Dadurch fallen die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten tendenziell größer aus, wodurch die Summe aller Werte eins übersteigt (vgl. [3]).

In Tab. 1 betrachten wir exemplarisch für alle oben genannten Arbeiten die Ergebnisse von [2]. Darin zeigt sich das erwartete Ungleichgewicht zwischen den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der einzelnen Felder. Am häufigsten befindet sich die Spielfigur im Gefängnis, was aufgrund der Paschregel nicht weiter verwunderlich ist. Außerdem weisen der orange (16, 18, 19), rote (21, 23, 24) und teilweise auch der gelbe Straßenzug überdurchschnittlich hohe Wahrscheinlichkeiten auf. Das entspricht also drei von vier Straßenzügen im oberen Bereiches des Spielplans. Weitere Auffälligkeiten ergeben sich bei den ersten 3 Bahnhöfen (5, 15, 25).

Neben der Classic-Version gibt es noch andere Versionen, die sich in der Anzahl an Feldern oder Würfeln unterscheiden. Für diese Fälle kommt die Gefängnis-Regel allerdings genauso zum Tragen, sodass nicht von einer Gleichverteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Spielfelder ausgegangen werden kann. Im folgenden Kapitel beschreiben wir unseren methodischen Zugang, um den Einfluss

Tab. 1 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die Classic-Version gemäß [2]. Das Feld 10 umfasst zwei Werte, da zwischen Nur-zu-Besuch und Im-Gefängnis unterschieden wird

Feld-Nr.	Wahrscheinlichkeit	Feld-Nr.	Wahrscheinlichkeit
0	0,02889	20	0,02806
1	0,02436	21	0,02594
2	0,01763	22	0,01209
3	0,02040	23	0,02549
4	0,02210	24	0,02983
5	0,02686	25	0,02718
6	0,02169	26	0,02540
7	0,00972	27	0,02521
8	0,02246	28	0,02480
9	0,02217	29	0,02441
10	0,02184 bzw. 0,09422	30	0
11	0,02596	31	0,02501
12	0,02378	32	0,02438
13	0,02213	33	0,02193
14	0,02457	34	0,02312
15	0,02531	35	0,02243
16	0,02703	36	0,00934
17	0,02306	37	0,02023
18	0,02821	38	0,02023
19	0,02794	39	0,02457

der Gefängnis-Regel in Abhängigkeit von der Anzahl an Feldern und Würfeln zu quantifizieren.

3 Methodik

3.1 Veranschaulichung des Lösungsprinzips am einfachen Beispiel

Um das Lösungsprinzip zu verdeutlichen beginnen wir vergleichbar zu [1] und [2] mit einer vereinfachten Variante, die lediglich vier Felder umfasst. Bei uns handelt es sich dabei um die vier Eckfelder des klassischen Monopoly Spieles (vgl. Abb. 3). Auf ein Gemeinschaftsfeld, wie bei [1], verzichten wir, da dieses für unser späteres Modelle keine Rolle spielt. Im Gegensatz zu [2] verwenden wir nur einen Würfel mit den Zahlen 1 und 2.

Sei $p_i(t)$ die Wahrscheinlichkeit nach $t \in \mathbb{N}$ Würfeln auf Feld $i \in \{0, 1, 2\}$ zu stehen. Wir fassen diese Wahrscheinlichkeiten im Spaltenvektor $p(t)$ mit $p(t) = [p_0(t), p_1(t), p_2(t)]'$ zusammen. Der vorab verwendete Begriff der Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist damit im Rahmen des Modells definiert. Zu Beginn befindet sich die Spielfigur auf Los. Entsprechend erhalten wir $p(0) = [1, 0, 0]'$. Nun würfeln wir einmal. Dabei bekommen wir mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 2. Entsprechend befindet sich unsere Spielfigur nach einem Wurf entweder auf dem Gefängnis-Feld oder dem Frei-Parken-Feld. Für $p(1)$ gilt

Abb. 3 Monopoly-Spielplan mit 4 Feldern

also $p(1) = [0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]'$. Nach dem 2. Wurf ergibt sich dann der Vektor $p(2)$ mit $p(2) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]'$.

Wenn die Verteilung $p(t)$ nach t Würfeln bekannt ist, so kann die Verteilung nach $t + 1$ Würfeln ganz einfach rekursiv berechnet werden. Dazu definieren wir die Matrix M , welche wir als Übergangsmatrix bezeichnen. Wie der Name vermuten lässt, geben die Einträge M_{ij} die Wahrscheinlichkeit an, von Feld i zu Feld j zu gelangen. Entsprechend darf diese Matrix keine negativen Einträge haben und die Zeilensumme muss 1 ergeben. Für unser kleines Beispiel ergibt sich die folgende Übergangsmatrix:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Betrachten wir bspw. die zweite Zeile dieser Matrix, welche zum Gefängnis-Feld gehört. Von diesem Feld ist es nicht möglich mit einem Wurf Los zu erreichen. Jedoch können wir jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Frei-Parken-Feld und das Geh-Ins-Gefängnis-Feld erreichen. Zweiteres bringt uns wiederum direkt zum Gefängnis-Feld. Mit Hilfe dieser Matrix ergibt sich $p(t + 1) = Mp(t)$. Somit ist es jetzt ganz einfach $p(t)$ für ein beliebiges $t \in \mathbb{N}$ zu berechnen. Schauen wir uns die ersten 5 Verteilungen an:

$$\begin{aligned} p(2) &= Mp(1) \\ p(3) &= Mp(2) = M(Mp(1)) \\ p(4) &= Mp(3) = M(Mp(2)) = M(M(Mp(1))) \\ p(5) &= Mp(4) = M(Mp(3)) = M(M(Mp(2))) = M(M(M(Mp(1)))) \end{aligned}$$

Wenn t um 1 erhöht wird, müssen wir lediglich ein mal mehr mit M multiplizieren. Folglich können wir $p(t)$ auch explizit als $p(t) = M^{t-1}p(1)$ angeben. Für unser kleines Beispiel haben wir in der Tab. 2 die Verteilungen nach den ersten 10 Würfeln zusammengefasst. Darin wird ersichtlich, dass sich die Spielfigur anscheinend immer mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf dem Gefängnis-Feld befindet. Interessanter sieht es bei den zwei verbleibenden Feldern aus. Hier oszillieren die Wahrscheinlichkeiten jeweils um einen Wert. Es ist aber ersichtlich, dass die Ausschläge mit wachsenden t immer geringer werden.

Tab. 2 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für den Monopoly-Spielplan mit 4 Feldern und zweiseitigen Würfel

# Würfe	Los	Gefängnis	Frei-Parken
0	1,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,5000	0,5000
2	0,2500	0,5000	0,2500
3	0,1250	0,5000	0,3750
4	0,1875	0,5000	0,3125
5	0,1563	0,5000	0,3437
6	0,1719	0,5000	0,3281
7	0,1641	0,5000	0,3359
8	0,1680	0,5000	0,3320
9	0,1660	0,5000	0,3340
10	0,1670	0,5000	0,3330

Wie entwickeln sich also die Wahrscheinlichkeiten, wenn wir von diesen Momentaufnahmen zum Unendlichen übergehen? In unserem Bsp. können wir alle Zustände nach endlich vielen Schritten erreichen. Aufgrund dieser Eigenschaft handelt es sich um eine reguläre Markov-Kette. Folglich wissen wir, dass $p(t)$ für t gegen unendlich gegen ein eindeutiges p konvergiert. Diesen Wert p bezeichnen wir als stationäre Verteilung. Für diese stationäre Verteilung gilt: $p = Mp$, d.h. die Verteilung ändert sich nicht mehr, wenn wir sie mit der Übergangsmatrix M multiplizieren. In diesen einfachen Bsp. kann die stationäre Verteilung $p = [\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}]'$ einfach geraten werden und zur Kontrolle in $p = Mp$ eingesetzt werden. Die Lösung ist aber auch einfach zu berechnen, indem man die Gleichung $p = Mp$ wie folgt umstellt:

$$p = Mp \iff 0 = Mp - p \iff 0 = (M - I)p.$$

Dabei ist I die Einheitsmatrix. Diese Gleichung kann jetzt z.B. mit einem Computeralgebra-System gelöst werden.

3.2 Erläuterung des allgemeinen Modells

Im Folgenden betrachten wir ein allgemeines Modell, welches der Zielstellung verschiedene Spielpläne (variierbar in der Anzahl an Feldern) und Würfel-Varianten (variierbar in der Anzahl an Würfeln) gerecht wird. In Bezug auf die Anzahl an Würfeln umfasst das Modell $w \in \{1, 2, 3\}$ Würfel.

Der Monopoly-Spielplan umfasst $n \in \mathbb{N}$ Feldern. Da alle Spielpläne quadratisch sind, gelte die Einschränkung n sei durch vier teilbar. Außerdem gewährleisten wir durch $12w \leq n$, dass der Spielplan im Verhältnis zur Anzahl der verwendeten Würfel hinreichend groß ist. Die n Felder werden beginnend mit 0 durchnummeriert. Folglich hat Los wie üblich die Nummer 0, das Gefängnis die Nummer $\frac{1}{4}n$, Frei-Parken die Nummer $\frac{2}{4}n$ und Geh-Ins-Gefängnis die Nummer $\frac{3}{4}n$. Die restlichen Felder werden bis auf ihre Nummer nicht weiter spezifiziert. Für $n = 40$ ergibt sich so bspw. der Spielplan aus Abb. 1.

Tab. 3 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für Monopoly-Spielplan mit 40 Feldern und 2 Würfeln gemäß allgemeinem Modell.

Feld-Nr.	Wahrscheinlichkeit	Feld-Nr.	Wahrscheinlichkeit
0	0,02294	20	0,02706
1	0,02311	21	0,02688
2	0,02331	22	0,02668
3	0,02357	23	0,02642
4	0,02320	24	0,02679
5	0,02300	25	0,02699
6	0,02293	26	0,02706
7	0,02294	27	0,02705
8	0,02300	28	0,02699
9	0,02307	29	0,02692
10	0,05000	30	0
11	0,02313	31	0,02686
12	0,02386	32	0,02613
13	0,02458	33	0,02541
14	0,02533	34	0,02466
15	0,02612	35	0,02387
16	0,02699	36	0,02300
17	0,02796	37	0,02203
18	0,02755	38	0,02244
19	0,02726	39	0,02273

Indem wir uns nur auf die vier Eckfelder beschränken, vernachlässigen wir unter anderem den Einfluss der Ereignis- und Gemeinschaftskarten. Außerdem vernachlässigen wir wie [6] die Paschregel um in oder aus dem Gefängnis zu kommen. Folglich unterscheiden wir bei dem Gefängnis-Feld auch nicht, ob wir im Gefängnis sind oder nur zu Besuch.

Anhand dieses Modelles untersuchen wir im nächsten Kapitel den Einfluss der Gefängnisregel in Abhängigkeit von n und w auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Diese werden mit einem selbstgeschriebenen Matlab® Program bestimmt.

4 Ergebnisse

In diesem Kapitel untersuchen wir das allgemeine Modell aus Kap. 3.2. Im Mittelpunkt steht dabei das Ungleichgewicht, welches sich durch die Gefängnis-Regel ergibt und wie sich die Anzahl der Felder (n) und Würfel (w) auf dieses auswirkt. Zunächst sollen allerdings in Analogie zu Tab. 1 die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für 40 Felder und 2 Würfel vorgestellt werden, wenn diese mithilfe des allgemeinen Modelles bestimmt werden.

Aufgrund von unseren Vereinfachungen stimmen die Ergebnisse (vgl. Tab. 3) natürlich nicht exakt mit den Ergebnisse von [2] (vgl. Tab. 1) überein. Vor allem halten wir uns, wegen der fehlenden Paschregel, deutlich weniger im Gefängnis auf. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die Felder mit überdurchschnittlich hohen Wahrscheinlichkeiten einen zusammenhängenden Block bilden. Dieser umfast

Tab. 4 Kumulierte Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für vier Monopoly-Varianten gemäß allgemeinen Modell

Variante	# Felder	# Würfel	Wahrscheinlichkeiten		
			Oben	Gefängnis	Unten
Fortnite	32	1	0,538244	0,062500	0,399255
Imperium	36	2	0,497744	0,055555	0,446699
Classic	40	2	0,501716	0,050000	0,448283
Mega-Deluxe	56	3	0,498627	0,035714	0,465658

die Felder 14 bis 33. Innerhalb dieses Blockes liegen der kleinste und größte Wert auch etwas näher zusammen. Trotz dieser Unterschiede ist die Tendenz, dass die Felder im oberen Bereich häufiger auftreten klar erkennbar. Dies spricht für die Güte des Modells und stützt die Aussagen für den speziellen Fall $n = 40$ und $w = 2$.

Das allgemeine Modell eignet sich nicht nur um neben dem geschilderten Spezialfall weitere Fälle untersuchen zu können. Insbesondere kann das Ungleichgewicht zwischen den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten betrachtet werden, welches sich durch die Gefängnis-Regel ergibt. Weiterhin kann der Einfluss von n und w auf dieses Ungleichgewicht näher untersucht werden. Damit wir verschiedene Varianten besser miteinander vergleichen können teilen wir den Spielplan in drei Bereiche: unterhalb der Hauptdiagonalen (Unten), auf der Hauptdiagonalen (Gefängnis) und oberhalb der Hauptdiagonalen (Oben) auf.

Der untere Bereich umfasst alle Felder, welche sich nach dem Geh-Ins-Gefängnis-Feld und vor dem Gefängnis befinden. Formal handelt es sich dabei um die Felder $\frac{3}{4}n + 1$ bis $n - 1$ und 0 bis $\frac{1}{4}n - 1$. Entsprechend umfasst der obere Bereich alle Felder nach dem Gefängnis und vor dem Geh-Ins-Gefängnis-Feld. Formal sind das also die Felder $\frac{1}{4}n + 1$ bis $\frac{3}{4}n - 1$. Das Geh-Ins-Gefängnis-Feld wird nicht betrachtet, da auf diesen die Spielfigur nicht stehen bleibt, was einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit von 0 entspricht. Im konkreten Bsp. $n = 40$ umfasst der obere Bereich also die Felder 11 bis 29 und der untere Bereich die Felder 31 bis 39 und 0 bis 9 (vgl. Abb. 1).

Für ein gegebenes n und w bestimmen wir mit einem selbstgeschriebenen Matlab® Program (analog zu Kap. 3.1) die stationären Verteilungen. Um anschließend das Ungleichgewicht quantifizieren zu können berechnen wir die kumulierten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten aller Felder des oberen Bereiches und aller Felder des unteren Bereiches. In Tab. 4 sind diese kumulierten Wahrscheinlichkeiten für vier Monopoly-Varianten zusammengefasst.

In jeder der vier betrachteten Varianten befindet sich die Spielfigur mit einer größeren Wahrscheinlichkeit im oberen Bereich, als im unteren Bereich. Für die klassische Variante deckt sich diese Beobachtung mit den Ergebnissen von [2], wie man einfach anhand der Werte aus Tab. 1 nachrechnen kann. Aufgrund unserer Vereinfachungen unterscheiden sich erwartungsgemäß die konkreten Wahrscheinlichkeiten leicht.

Desweiteren ist ersichtlich, dass n und w diese Werte maßgeblich beeinflussen. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels untersuchen wir diese Einflüsse systematisch, indem wir einen Parameter fixieren und den zweiten Parameter variieren. Bevor wir

Tab. 5 Kumulierte Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für variierende Anzahlen an Feldern und Würfeln gemäß allgemeinem Modell

# Felder	1 Würfel		2 Würfel		3 Würfel	
	Oben	Unten	Oben	Unten	Oben	Unten
64	0,560765	0,407985	0,515415	0,453335	0,501650	0,467100
128	0,572049	0,412326	0,526943	0,457432	0,513410	0,470965
256	0,577691	0,414497	0,532702	0,459485	0,519206	0,472982
512	0,580512	0,415582	0,535582	0,460512	0,522103	0,473991
1024	0,581923	0,416124	0,537022	0,461025	0,523551	0,474495
2048	0,582628	0,416395	0,537742	0,461282	0,524276	0,474748
4096	0,582981	0,416531	0,538102	0,461410	0,524638	0,474874
8192	0,583157	0,416599	0,538282	0,461474	0,524819	0,474937
16384	0,583245	0,416633	0,538372	0,461506	0,524909	0,474968
∞	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{14}{26}$	$\frac{12}{26}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{19}{40}$

damit beginnen, schauen wir uns noch die Wahrscheinlichkeiten für das Gefängnis-Feld an. Bei diesen ist auffällig, dass sie immer den Wert $\frac{2}{n}$ annehmen. Diese Auffälligkeit kann auch bei anderen Varianten beobachtet werden. Aus diesem Grund und weil alle drei Fälle aufsummiert 1 ergeben, werden wir nachfolgend nicht mehr auf das Gefängnis eingehen.

Die Tab. 5 enthält die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für Spielpläne der Größe $n = 2^k$ für $k = 6, 7, \dots, 14$ und $w \in \{1, 2, 3\}$. Für ein beliebiges (aber feste) w steigen mit zunehmendem n auch die Wahrscheinlichkeiten sich im oberen bzw. unteren Bereich aufzuhalten. Das lässt sich vermutlich dadurch erklären, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Gefängnis-Feld (gegeben durch $\frac{2}{n}$) immer kleiner wird. Gleichzeitig muss die Summe, über die Wahrscheinlichkeiten der drei Bereiche, immer 1 ergeben.

Mit jeder Verdopplung von n erhöhen sich zwar die Wahrscheinlichkeiten, aber der Zuwachs wird immer kleiner. Von $n = 8192$ auf $n = 16384$ beträgt der Unterschied, für die Wahrscheinlichkeit des oberen Bereiches, in allen drei Fällen ungefähr $\frac{1}{10000}$. Das ist ein Indiz dafür, dass wir uns schon in der Nähe des zu erwartenden Grenzwertes befinden. Für diesen Grenzwert haben wir die folgende Vermutung.

Vermutung 1 Für das Modell aus Kap. 3.2 und ein beliebiges (aber festes) $w \in \mathbb{N}$ konvergiert mit zunehmendem n die Wahrscheinlichkeit sich oberhalb der Hauptdiagonalen auf dem Spielplan aufzuhalten gegen $\frac{7w}{14w-2}$.

Um die Wahrscheinlichkeit aus Vermutung 1 interpretieren zu können, schreiben wir diese wie folgt um $\frac{\frac{7}{2}w}{w+6w-1}$. Im Zähler steht nun die erwartete Augenzahl beim Würfeln mit w Würfeln. Im Nenner steht die Summe aus der minimalen und maximalen Augenzahl beim Würfeln mit w Würfeln. Von dieser Summe wird der Wert eins abgezogen. Unter der Annahme, dass diese Interpretation korrekt ist, lässt sich Vermutung 1 vermutlich leicht von 6-seitigen auf s -seitige Würfel übertragen. Diese Verallgemeinerung beinhaltet auch den Spezialfall eines 2-seitigen Würfels, welchen wir für einen Beweisversuch am vielversprechendsten halten.

Nun fixieren wir n und variieren w , d.h. wir betrachten die Tab. 5 zeilenweise. In diesem Fall nimmt die Wahrscheinlichkeit, sich im oberen Bereich aufzuhalten, mit wachsendem w ab. Entsprechend steigt die Wahrscheinlichkeit, sich im unteren Bereich aufzuhalten. Es lässt sich also vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit des oberen Bereiches von oben gegen $\frac{1}{2}$ konvergieren wird, wohingegen die Wahrscheinlichkeit des unteren Bereiches von unten gegen $\frac{1}{2}$ konvergieren wird. Für $n = \infty$ lässt sich das leicht mit der Formel aus Vermutung 1 zeigen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass eine Steigerung der Anzahl an Feldern des Spielplans (bei gleichbleibenden w) den Einfluss der Gefängnis-Regel vergrößert. Im Gegensatz dazu schwächt eine Erhöhung der Anzahl an Würfeln (bei gleichbleibenden n), den Einfluss der Gefängnis-Regel ab.

5 Diskussion, Zusammenfassung und offene Fragen

Zunächst kann man die Vereinfachungen des gewählten Modells (vgl. Kap. 3.2) kritisch betrachten, insbesondere weil die Kartenanweisungen der Gemeinschafts- und Ereigniskarten im allgemeinen Modell nicht abgebildet werden. Dies resultiert unmittelbar aus der Verallgemeinerung hinsichtlich der variablen Anzahl an Würfeln und Feldern des Spielplans. Eine Zuordnung entsprechender Kartenanweisungen zu allen Anzahlen an Feldern ist nicht möglich.

Betrachten wir dennoch exemplarisch die Kartenanweisungen der Classic-Variante (Spielplan mit 40 Feldern). Es kann festgehalten werden, dass es nicht viele Kartenanweisungen gibt, die zu einem Versetzen der Spielfigur führt. Es gibt jeweils 16 Gemeinschafts- und Ereigniskarten bei dieser Monopoly-Variante. Unter den Gemeinschaftskarten gibt es zwei Anweisungen, die das Versetzen einer Spielfigur veranlassen. Zum einen soll das Feld 0 (Los) und zum anderen das Feld 10 (Gefängnis) besucht werden. Weiterhin liegen das Feld 0 unter und das Feld 10 über der Hauptdiagonalen des Spielplans. Es ist zu vermuten, dass diese beiden Anweisungen das beschriebene Ungleichgewicht nicht auflösen.

Bei den Ereigniskarten gibt es 9 Anweisungen, die zum Versetzen der Spielfigur führen. Betrachtet man die Lage der 9 Felder auf die in den Ereigniskarten verwiesen wird, so befinden sich 5 Felder unter und 4 Felder über der Hauptdiagonalen. Auch in diesem Fall ist zu vermuten, dass die Disbalance zwischen den beiden Teilen des Spielplans in Hinblick auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nicht ausgeglichen wird.

Für die Validität des gewählten Modells spricht der Vergleich mit den berechneten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Die mit dem allgemeinen Modell bestimmten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eines Monopoly-Spielplans mit 40 Feldern (Tab. 3) zeigen eine prinzipielle Übereinstimmung mit den Angaben von [2] (vgl. Tab. 1). Es kann davon ausgegangen werden, dass das gewählte Modell belastbare Ergebnisse in Hinblick auf die formulierte Zielstellung liefert. Die schon angesprochenen Abweichungen könnten durch eine veränderte Modellierung der Paschregel verringert und somit den Werten von [2] noch weiter angenähert werden. Die Modellierung wäre aufwendiger, weil die Verweildauer für alle Felder umgesetzt werden müsste. Da entsprechend der Regeln das Gefängnis nach drei Paschen besucht werden muss

und nach einem Pasch zu verlassen ist. Die im vorliegenden Beitrag vorgestellten Überlegungen würden allerdings unberührt bleiben. Unter diesem Gesichtspunkt sind genauere Ergebnisse erstrebenswert, aber für die Aussage in Bezug auf den Einfluss von Anzahl an Feldern und Anzahl an Würfeln auf die Disbalance zwischen den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nicht notwendig.

Die vorgestellten Ergebnisse liefern einige interessante Beobachtungen, die für die beschriebenen Monopoly-Varianten von Bedeutung sind. So können Rückschlüsse auf bestehende Gewinnstrategien gezogen werden indem z. B. die Bestimmung von Renditen einzelner Felder in den Fokus rückt. Vor dem Hintergrund der dargestellten Ergebnisse kann zudem die Attraktivität neuer Monopoly-Varianten bewertet werden, was für die Entwicklung weiterer Varianten von Relevanz sein kann.

Es fällt auf, dass die Summe der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten aller Felder oberhalb der Hauptdiagonalen bei allen vier Varianten mindestens 3% höher ist als unter der Hauptdiagonalen (vgl. Tab. 4). Maßgeblich verantwortlich für das Ungleichgewicht ist die Gefängnis-Regel, die durch die beiden Felder auf der Hauptdiagonalen bestimmt ist. Damit ist die Vermutung, dass sich Spielfiguren häufiger auf den Feldern oberhalb der Hauptdiagonalen des Spielplans befinden, für alle Varianten gültig. Besonders groß ist dieses Ungleichgewicht für die Fortnite-Variante, die einen Spielplan mit 32 Feldern und einem Würfel umfasst. Es scheint unattraktiv, Monopoly-Varianten mit noch kleineren Spielplänen und nur einem Würfel zu entwickeln, da sich die zu erwartende Ungleichverteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten ungünstig auf einen (im Sinne der Mitspielenden) ausgewogenen Spielverlauf auswirken würde.

Interessanter Weise wird die Disbalance, wie man evtl. meinen könnte, nicht durch eine steigende Anzahl an Feldern auf dem Spielplan völlig aufgehoben (vgl. Tab. 5). Aufgrund der Berechnungen besteht die Vermutung, dass sich bei zwei Würfeln die aufsummierte Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Felder oberhalb der Hauptdiagonalen bei $\frac{14}{26} = \frac{7}{13}$ stabilisieren wird (vgl. Vermutung 1). Das entspricht mehr als 7% Unterschied zwischen den beiden Bereichen des Spielplans. Dieser Wert verdeutlicht den Einfluss der Gefängnis-Regel auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten beim Monopoly-Spiel nachdrücklich. Es ist festzuhalten, dass eine Steigerung der Anzahl an Feldern keine völlige Auflösung des Ungleichgewichts zwischen den beiden Bereichen des Spielplans bewirkt. Eine Möglichkeit wäre die Steigerung der Anzahl an Würfeln (vgl. Tab. 5).

Um das Monopoly-Spiel attraktiv für die Mitspielenden zu halten, sollte bei steigender Anzahl an Feldern auch die Anzahl an Würfeln steigen. Das hat den Nebeneffekt, dass eine Umrundung des Spielplan durch eine Spielfigur entsprechend schneller erfolgen würde. Entscheidend in Hinblick auf die behandelte Fragestellung ist allerdings vielmehr, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Bereiche ober- und unterhalb der Hauptdiagonalen angleichen. Für $n = \infty$ und $w \rightarrow \infty$ konvergiert die Wahrscheinlichkeit sich oberhalb der Hauptdiagonalen zu befinden von oben gegen $\frac{1}{2}$.

Die unterschiedlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Felder haben einen direkten Einfluss auf die jeweilige Rendite der Felder im Spiel [2]. Die Untersuchung der Veränderung der Rendite in Abhängigkeit der Anzahl an Feldern und Würfeln wäre ein interessantes und lohnenswertes Unterfangen. Dafür müsste das

beschriebene Modell angepasst werden. Für große Anzahlen und Feldern wird es evtl. sinnvoll sein sich zunächst auf bestimmte Felder zu beschränken. So können Felder der Classic-Version mit hoher oder niedriger Rendite wie z. B. Feld 24 (Operplatz) und Feld 3 (Turmstraße) als Ausgangspunkte für die Untersuchung dienen. Es ist von besonderem Interesse wie bei den beiden genannten Feldern darauf zu achten, Beispiele oberhalb und unterhalb der Hauptdiagonalen zu wählen, denn auch wenn die summierten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Felder oberhalb der Diagonalen höher ist als unterhalb, so heißt das nicht, dass alle Felder oberhalb der Hauptdiagonalen eine höhere Aufenthaltswahrscheinlichkeit haben müssen als einzelne Felder unterhalb. Analog gilt das für die Renditen der Felder.

Es kann zusammengefasst werden, dass der Einfluss der Gefängnis-Regel beim Monopoly-Spiel auf die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten ober und unterhalb der Hauptdiagonalen mit variierender Anzahl an Spielfeldern bestehen bleibt und durch die Steigerung der Anzahl an Würfeln abgeschwächt wird. Für die bisherigen Varianten an Monopoly-Spielen sind die summierten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nicht zu unterschiedlich, als das die Attraktivität dieser Varianten beeinflusst wird. Eine Verringerung oder Steigung der Anzahl an Spielfeldern über die bisherigen Anzahlen hinaus scheint unattraktiv. Eine Berechnung der Renditen der einzelnen Felder vor dem Hintergrund des hier beschriebenen Modells scheint lohnenswert.

Danksagung Wir danken Michael Fothe für die akribische Korrektur des Artikels und die wertvollen Hinweise. Bedanken möchten wir uns auch für die konstruktiven Anmerkungen aus den Gutachten, denen wir gern nachgegangen sind.

Funding Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

1. Abbott, S.D., Richey, M.: Take a walk on the boardwalk. *Coll. Math. J.* **28**(3), 162–171 (1997)
2. Bewersdorff, J.: Glück, Logik und Bluff, 7. Aufl. Springer, Wiesbaden (2018)
3. Bishop, R., Ash, R.: Monopoly as a markov process. *Math. Mag.* **45**, 26–29 (1972)
4. Brady, M., Wernecke, T.: Monopoly. Strategie und Taktik des populärsten Spiels der Welt. EBG Verlags GmbH, Wien und Bern (o.J.)
5. Collins, T.: Probabilities in the game of monopoly (1997). <http://www.tkcs-collins.com/truman/monopoly/monopoly.shtml>, Zugegriffen: 5. Jan. 2021
6. Holderied, F.: Liebe Monopoly-Spieler (1996). <http://www.holderied.de/monopoly/>, Zugegriffen: 5. Jan. 2021

7. Leimroth, D.: Die Geschichte des Monopoly-Spiels. *Zeitreise: Die Geschichte von Monopoly* (2013). <https://winningmoves.de/blog/die-geschichte-des-monopoly-spiels>, Zugegriffen: 5. Jan. 2021
8. Melzer, C.: Der Reichste gewinnt: Brettspiel Monopoly wird 80 (2015). <https://www.badische-zeitung.de/der-reichste-gewinnt-brettspiel-monopoly-wird-80-102050294.html>, Zugegriffen: 5. Jan. 2021
9. Müller, M.: Der ableger: Würfeln für fortgeschrittene. *Wurzel* **54**(5), 107–114 (2019)
10. Ratkovic, M.: Heute ist Welt-Monopoly-Tag: Kennen Sie schon diese Spiel-Editionen? (2020). https://www.focus.de/shopping/service/monopoly-spiele-im-ueberblick-von-avengers-bis-zelda-die-beliebtesten-monopoly-editionen_id_10344764.html, Zugegriffen: 5. Jan. 2021
11. Stewart, I.: How fair is monopoly? *Sci Am* **274**(4), 104–105 (1996)
12. Stewart, I.: Monopoly revisited. *Sci Am* **275**(4), 116–119 (1996)
13. Vötsch, M., Vötsch, L.V.S.: Monopoly Editionen Liste (2020). <https://monopoly-regeln.de/monopoly-editionen-liste/>, Zugegriffen: 5. Jan. 2021