Kirsti Andersen: Optical Illusions in Rome – A Mathematical Travel Guide

American Mathematical Society, MAA Press, 2020, X + 80 Seiten,
ISBN: 9781470452674, €44,55

Karl Heinrich Hofmann

Online publiziert: 16. September 2020
© Der/die Autor(en) 2020

Der Eintritt der mathematischen Theorie der Zentralperspektive in die Geschichte der Malerei ist ein kulturgeschichtliches Ereignis erster Ordnung. Allein die bloße Frage, wann er denn stattgefunden habe, ist kontrovers¹. Zwar existieren genügend Beweise dafür, dass die Malerei in der Antike eine hohe Stufe erreicht hatte. Das völlige Fehlen jeder Hinweise auf eine Verarbeitung mathematisch-technischer Methoden dabei wird diskutiert, aber auch die führende Expertin in der Kunst- und Mathematikgeschichte für die Entwicklung der perspektivischen Zeichnung, KIRSTI

ANDERSEN² kommt zu dem Schluss, dass erst im Anfang des quattrocento die *darstellende Geometrie* in die Kunstgeschichte einzieht³. Schon eine bloße Diskussion über die Zentralperspektive verlangt die Festlegung ganz verschiedener Standpunkte, mindestens schon einmal der folgenden:

- (1) die mathematische Hintergrundtheorie,
- (2) die Anwendung dieser Theorie durch die Künstlerin oder den Künstler,

¹ [1], S. 730.

² [1], pp. 723ff.

³ L.B.ALBERTI 1434, de Pictura.

K. H. Hofmann (✉)
Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Deutschland
E-Mail: hofmann@mathematik.tu-darmstadt.de; khh@math.tulane.edu

Tulane University, New Orleans, USA

- (3) die Beschreibung der Anwendung der Perspektive in der Betrachtung und Untersuchung eines Kunstwerkes (oder mehrerer solcher),
- (4) die gründliche historische Untersuchung und Beschreibung, wie sich die Synthese dieser Aspekte im Laufe der Kunst- und Sachgeschichte entwickelt hat, und nicht zuletzt
- (5) die Behandlung des Gegenstandes im Unterricht, der Lehre und dem Studium auf allen Stufen.

Eine saubere Trennung dieser Gebiete ist unmöglich. Man ist versucht, zu behaupten, dass es sich bei (1) um einen entwicklungsgeschichtlich abgeschlossenen Zweig der angewandten Mathematik handle, nämlich um die seit GASPARD MONGE konsolidierte *darstellende Geometrie*. Man erinnert sich aber dann sehr schnell daran, dass die Entwicklung der technischen Hilfsmittel im Zeitalter der digitalen Technologie und der dazugehörigen Mittel der Programmierung auch die darstellende Geometrie im informatischen und didaktischen Bereich fast grenzenlos erweitert hat. Ähnliches wird man zu (2) behaupten bei der Entwicklung und Verbreitung der Fotografie.

Das von der American Mathematical Society gemeinsam mit der Mathematical Association of America veröffentlichte, großzügig bebilderte Buch mit dem Titel „Optical Illusions in Rome“ von KIRSTI ANDERSEN⁴ ordne ich den Bereichen (3) und (4) zu. Der kunsthistorische Teil des Textes einschliesslich der zahlreichen Bilder umfasst 50 Seiten, der mathematische und mathematik-didaktische Teil 16, während ein abschließender Text mit bibliographischen und weiterführenden Notizen 12 Seiten in Anspruch nimmt. Die Verfasserin dieser attraktiven Monografie ist bekannt durch das von ihr verfasste enzyklopädische Standardwerk⁵ über die Geschichte der mathematischen Theorie der Perspektive. Zur Erhöhung des Genusses des kunsthistorischen Reiseführers, dem unsere Aufmerksamkeit in diesem Augenblick gilt, sowie zur Vertiefung der darin enthaltenen Informationen empfehle ich, das umfangreiche Werk der Verfasserin daneben bereitzuhalten. Freilich reicht der vorliegende Text völlig zum grundsätzlichen Verständnis dieses 2016 in dänischer Sprache für die Dänische Mathematiklehrervereinigung verfassten Essays. Dieser erschien 2019 nach seiner Übersetzung ins Englische. Falls interessierte Leser weitere Literatur zum Gegenstand „Bildende Kunst und Mathematik in der Renaissance“ suchen, dann ist auch das von J.V.FIELD verfasste und 1997 von Oxford University Press unter dem Titel „*The Invention of Infinity*“⁶ veröffentlichte Buch uneingeschränkt zu empfehlen.

Was ist nun der Inhalt des Buches, das wir hier besprechen? Wir werden in lebendiger, von reicher Bebilderung begleiteter Diskussion zu vier Standorten in Rom geführt, wo sich das Thema Zentralperspektive und die dahinterstehende Mathematik im Rahmen der Frescomalerei und der Architektur in der Hochrenaissance, im Manierismus und im Barock instruktiv behandeln lässt. Der Reihe nach besuchen wir dazu die folgenden Kunstwerke:

⁴ [2], 2019, ix + 80 Seiten.

⁵ [1], 2007.

⁶ [3].

- (A) Die Ausmalung der *Sala delle prospettive* durch BALDASSARE PERUZZI in der Villa Farnesina,
- (B) die Architektur von FRANCESCO BORROMINI's Kollonade im Pallazzo Spada,
- (C) ein anamorphes Fresco in der Klosterkirche von Trinitá dei Monti oberhalb der „Spanischen Treppe“ und
- (D) ANDREA POZZO's Kuppelfresco in der Jesuitenkirche Sant'Ignazio, welches auch das äußere Titelbild zum Buch liefert.

Ganz nebenbei bekommen wir noch BERNINI's mathematische Konstruktion des Petersplatzes vorgeführt, von dem alle Leute glauben, es handle sich um eine Ellipse mit langer Achse parallel zur Fassade des Petersdoms, was sich aber spätestens nach der Lektüre dieses Textes als falsch erweist.

Die Exkursion zu (A) ist eine ausgezeichnete Gelegenheit, die Zentralperspektive an einem konkreten Beispiel einer Halle, eben jener „*Sala delle prospettive*“ zu erleben. Drei ihrer Wände sind mit Fresken ausgestattet, welche den Innenraum der Halle nach außen ins Unendliche fortsetzen. Diese Seiten täuschen einen Säulenhof vor, durch welchen man über eine Balustrade hinweg in die umgebende Stadtszene und Landschaft blickt und sie so sieht, wie sie um etwa 1506 ausgesehen habe mag. Der Boden der Halle ist mit einem Netz von großflächigen Marmorquadraten ausgelegt und bietet somit das von allen Renaissancemalern ausgenützte rechtwinklige Koordinatensystem mit dem diese seit ALBERTI⁷ die Beherrschung des dreidimensionalen Raumes bei Projektion in die Ebene beweisen. Dieses Koordinatensystem muss natürlich auf jeder Seite des Saales getrennt in die Fresken fortgesetzt werden und bietet so der Verfasserin die Gelegenheit, schon in ihrem ersten Beispiel gut gestützt durch die zahlreichen Fotografien des Standorts vorzuführen, dass man die Augentäuschung⁸ nur dann korrekt erleben kann, wenn man die Szene von einem und nur einem Punkt aus betrachtet, dem sogenannten *Augenpunkt*, der begreiflicherweise in allen Büchern zur Perspektive eine zentrale Rolle⁹ spielt. Jede der drei Bildebenen (Freskowände) hat ihren Augenpunkt. Es ist anzunehmen, dass es die Konzeption des Künstlers war, dass man sich als Beschauerin oder Beschauer nicht vom Fleck bewegen muss, wenn man sich nach der Betrachtung der Westseite als Nächstes die Südseite ansieht und sich schließlich der Ostseite zuwendet. Mit anderen Worten: Der Maler vereint die drei Augenpunkte der drei bemalten Seiten zu einem und demselben Punkt¹⁰. In der „Sala“ muss der Augenpunkt eines der drei Wandfresken auf derjenigen (gedachten) Geraden im Fußboden liegen, deren gemalte Fortsetzung in ebendiesem Wandbild *senkrecht* abgebildet ist¹¹. Und wenn wir schon einmal beim Theoretisieren verweilen, sei auch noch das Folgende gesagt: Die

⁷ LEON BATTISTA ALBERTI, *De pictura*, 1435.

⁸ «trompe l'œil» ist der so offenbar nur im Französischen existierende Fachausdruck.

⁹ no pun!

¹⁰ Was die Autorin hierzu meint, sagt sie auf Seite 13, Spalte 1.

¹¹ Da die Halle drei bemalte zu einander entweder parallele oder orthogonale Wände hat, muss es auf dem Fußboden zwei orthogonale Geraden geben, die sich senkrecht unter dem gemeinsamen Augenpunkt schneiden.

Abb. 1 Die „Sala delle prospettive“

perspektivische Zeichnung einer jeden Szene, die ein horizontal ausblickender Beobachter sieht, muss gewisse notwendige Bedingungen erfüllen, um mathematisch korrekt wiedergegeben zu sein. Ein erster Test dafür ist leicht zu prüfen, nämlich so: Die eindeutige wagrechte Gerade, die in der Bildebene durch die orthogonale Projektion des Augenpunktes läuft, heisst der *Horizont*. In vielen Bildern ist er mindestens teilweise sichtbar; in fast allen Bildern ist er leicht rekonstruierbar¹². Die Testbedingung lautet: Die Darstellung zweier paralleler horizontaler Geraden wird sich im Bild **immer** auf dem Horizont schneiden (mit Ausnahme des Falles, dass sie parallel zur Bildebene laufen) (s. Abb. 1). Der Test ist deswegen praktikabel und leicht bei den meisten Bildern durchzuführen, weil fast jeder Bereich menschlicher Umwelt, der zwecks Bildgewinnung auf eine vertikale Ebene projiziert wird, von einer großen Zahl von parallelen horizontalen Geradenbündeln durchsetzt ist, die von menschlichen Artefakten wie Architekturen, Mobiliaren, Landschaftsgestaltungen herrühren. Wie gesagt: auf einem zentralperspektivischen Bild, das mathematisch korrekt konstruiert ist, muss in diesem Bild jedes solche Bündel auf einen Punkt auf dem Horizont konvergieren—ausnahmslos!¹³ Die zahlreichen Bilder im Buch auf den Seiten 4, 9 bis 13 laden den Betrachter ein, den Horizontaltest auf PERUZZI's meisterhaften Fresken in der Sala delle prospettive anzuwenden, und man findet sie mit einem positive Befund bestätigt selbst bei einem so kritischen horizontalen parallelen Geradenbündel, welches gegeben ist durch die Basen und Kapitelle der dominierenden Säulen auf den Fresken, die in den Figuren 1.03, 1.04, 1.06, 1.07 abgebildet sind.¹⁴

¹² Wenn ich mit meinem Handy am Strand am Meer stehe und mit meinem Handy das Meer fotografiere, dann ist das Handy der Augenpunkt. Auf dem Meer stehen viele Surfer meiner Größe auf Ihrem Paddelbrett und paddeln umher, fern und nah, überall. Auf meinem Foto läuft der Horizont genau durch die Augen aller auf dem Foto sichtbaren Surfer, vorausgesetzt ihre Körpergröße entspräche der Höhe des Handys bei der Aufnahme. Wenn ich auf einem Berg stehe, ist alles ganz anders, s. z. B. [1], S. 487.

¹³ Cf. [1] pp. 3–15, and p.179.

¹⁴ Wer mehr Bildmaterial über die Sala delle prospettive in der villa faresina anschauen möchte, der findet es via Google im Internet.

Abb. 2 Das „Teatro Marcello“

Der Test stützt die Überzeugung, dass der Künstler mathematisch präzise Pläne und Entwürfe seinem Werk vorausgearbeitet haben musste. Freilich trifft das gute Testergebnis auf die Landschaftsfresken eher nicht zu. Da, wo sie sich dem Test nicht entziehen, gibt es Fehlermeldungen, wie etwa für den Ausblick auf das Teatro Marcello¹⁵ (s. Abb. 2). Auf diesem kann die darstellende Geometrie verschiedene Horizonte in einem und demselben Bild nachweisen.

Bei dem Versuch, einige Prinzipien der darstellenden Geometrie an den im Buch vorgelegten Reproduktionen nachzuvollziehen, wird man schliesslich in aller Deutlichkeit gewahr, dass wir bei der Diskussion von raumgeometrischen Problemen und deren zentralperspektivischer Darstellung noch eine dritte Stufe der Abstraktion erklimmen: Zuerst ist da der dreidimensionale Raum, in dem wir uns als Beschauer bewegen. Der Freskomaler bildet diesen in seiner Zentralperspektive auf einer *Bildebene*, in diesem Fall einer Wand der *Sala*, ab. Und drittens betrachten wir eine Fotografie, die den ursprünglichen Raum und dann die Bildebene des Freskos in ihm erfasst, und wir testen die Geometrie der Reproduktion des ursprünglichen Raum in einem Bild, das den ursprünglichen Raum und das darin abgebildete Bild, das Fresko, enthält. Dieses Bild ist eine gedachte Projektionsebene immer senkrecht zu unserem Sehstrahl, wo immer wir uns gerade befinden und das Foto in der Hand, oder auf dem Tisch, oder unter Glas an der Wand haben, oder eben das beobachtete Stück Weltsicht, das wir mit uns tragen. Ich nenne sie die *zweite Bildebene*. Das Fresko an der Wand ist auf die erste Bildebene gemalt. Wir stellen fest, dass gewisse Geradenbüschel auf unserer Fotografie, der zweiten Bildebene, sich in einem Punkt schneiden und schliessen daraus, dass das auch schon auf die Geradenbüschel auf dem Fresko, der ersten Bildebene zutrifft. Dass dieser Schluss mathematisch korrekt ist, beruht darauf, dass das Abbilden durch Fotografieren eine projektive Kollineation ist, die Geraden und Schnittpunkte erhält.

Es gibt in der Tat in diesem wertvollen Buch viel Übungsstoff zur Geometrie, zum Kunstunterricht, zur Kunstgeschichte für Schüler, Studenten, Lehrer und Pro-

¹⁵ Figur 1.13 auf S. 13

Abb. 3 BORROMINIs Kollonade

fessoren. Der anregende Stoff und das dazu gelieferte Material ist schon deswegen eine gewissen Herausforderung, weil er schon bei der Schilderung eines mit Fresken ausgestatteten Saales so ins Grübeln führt.

Aber damit kommt es noch schlimmer. Die nächste Wanderung (B) führt zu BORROMINIs Kollonaden, einem Prachtsstück manieristischer Architektur von illusionistischem Charakter.

Eine Kollonade ist ein überwölbter Zugang zu einem Gebäude oder Innenhof—üblicherweise reich dekoriert durch eine symmetrische Anordnung von Säulen auf beiden Seiten des Korridors (s. Abb. 3). Eine solche Kollonade ist freilich umso prestigeträchtiger, je länger sie ist und da liegt hier der Hase im Pfeffer: BORROMINI baut eine Kollonade, deren *reale* Dimensionen sich nach hinten verjüngen. Die natürlichen Abmessungen einer im Gegensatz hierzu von vorne bis hinten ebenmässig gebauten Kollonade scheinen sich durch die natürliche Perspektive im Auge der am Eingang stehenden Menschen gesehen, nach hinten zu verkleinern, und durch diese perspektivische Verkürzung bekommt der Betrachter beim Eintreten eine erste Vorstellung von der Länge der Kollonade. Wenn also der Architekt schon bei der Konstruktion eine geeignete progressive Verkleinerung einbaut, wird der Eindruck der subjektiven perspektivischen Verkleinerung verstärkt und die Kollonade wirkt beim Anschauen viel länger als sie in Wirklichkeit ist. Wieviel länger? Anders aus-

Abb. 4 Längenbestimmung der „virtuellen Kollonade“

gedrückt: Wie lange müsste eine korrekt gebaute Kollonade (bei der Verfasserin: „die virtuelle Kollonade“) sein, damit sie in normaler perspektivischer Verkürzung dasselbe Bild ergäbe wie „*la falsa prospettiva di BORROMINI*“? Um diese Frage zu beantworten, brauchen wir nicht mehr als den Strahlensatz, korrekt angewandt (s. Abb. 4):

Hier ist $\overline{PQRS}$ die virtuelle Kollonade, $\overline{PQ'RS'}$ die BORROMINI-Kollonade, A der Augenpunkt, dessen Höhe bei der Berechnung keine Rolle spielt und dessen Entfernung von der Vorderfassade $\overline{PR}$ seit früheren Berechnungen durch ROCCO SINISGALLI als $\delta = 1,625\text{m}$ angesetzt wird. (Bis auf mm genau!!) In der Literatur wird die Länge der BORROMINI-Kollonade mit $L = 8,6\text{m}$ angegeben¹⁶. Dann ist

$$\overline{F_1F_2} = 1,625\text{m} + 8,6\text{m} \cong 10,2\text{m} \text{ (gerundet).}$$

Wir brauchen noch Informationen über das Verhältnis $v = (H : h)$ der echten Höhe $H = \overline{PR}$ der Vorderfassade zu der Höhe $h = \overline{C'D'}$ der verkürzten Hinterfassade. Mein Ansatz, um wenigstens Größenordnungen zu ermitteln, ist $v = 2,4$ ¹⁷. Nun bekommen wir aus dem Strahlensatz (d. h. den Proportionen ähnlicher Dreiecke) das Ergebnis $2,4 = (H : h) = (\overline{QS} : \overline{C'S'}) = (\overline{SA} : \overline{S'A}) = (\overline{SF_1} : \overline{F_2F_1})$. Damit wissen wir schon einmal $\overline{SF_1} = 2,4 \times \overline{F_1F_2} = 2,4 \times 10,2\text{m} \cong 24,5\text{m}$. Folgt man der Verfasserin und bezeichnet die gesuchte Länge $\overline{RS}$ der virtuellen Kollonade mit λ , dann ist $24,5\text{m} = \overline{SF_1} = \lambda + \delta = \lambda + 1,625\text{m}$. Wir haben damit die Länge der virtuellen Kollonade berechnet zu¹⁸

$$\lambda \cong 22,9\text{m}.$$

Bei ANDERSEN heißt es, ROCCO SINISGALLI, ein in diesem Zusammenhang wohl bekannter Kunsthistoriker, habe $\lambda = 20,5\text{m}$ berechnet. Hätten wir $v = 2,16$

¹⁶ Wikipedia, engl., unter „forced perspective“.

¹⁷ Dafür habe ich unter den zahllosen Fotografien im Internet eine herausgesucht, die eine Person X auf der Vorderfassade $\overline{PR}$ und eine gleichgrosse Person Y auf der Hinterfassade $\overline{C'D'}$ zeigt. Auf der Fotografie messe ich das Verhältnis $(\overline{PR} : |X|)$ als $(13 : 4)$, beziehungsweise $(\overline{Q'S'} : |Y|) = (3,4 : 2,5)$; damit bekomme ich $v = (13 \times 2,5) / (4 \times 3,4) = 2,39\text{m}$ auf zwei Kommatstellen, gerundet $2,4\text{m}$.

¹⁸ Unsere Formel war: $\lambda = v(L + \delta) - \delta = vL + (v - 1)\delta$. Man sieht, dass die Information über das Verhältnis v erwarteterweise wesentlich ist. Auch präzisere Angaben werden sie wohl immer knapp über 2 ansetzen.

angenommen, dann wäre bei uns auch 20,5 m herausgekommen. ANDERSEN selbst schreibt an dieser Stelle: „After extensive study of the literature on the determination of λ , I too set out to calculate it. Based on complicated arguments I found that λ is about 18 meters plus 1.1 times the distance [8], in other words 19.8 meters.“¹⁹ Über genauere Angaben ihrer „komplizierten Rechnung“ lässt sie uns im Dunkeln. Wir sehen immerhin, dass die Resultate im Variationsbereich der gegebenenfalls noch genau zu bestimmenden Parameter wie etwa v vertretbar beieinanderliegen. Die englische Wikipedia behauptet $\lambda = 37\text{ m}$ und überschätzt die bei mehreren Rechnungen gefundenen Werte signifikant, während sich die deutsche Wiki auf diese Frage überhaupt nicht einlässt. Glücklicherweise sind BORROMINI's Kollonaden in dem *Palazzo Spada* eine so berühmte Touristenattraktion, dass „Google Search“ überquillt von einschlägigem Bildmaterial²⁰. Wir diskutieren die Maße eines imaginären Gebäudes, das es nur auf der zweiten Bildebene gibt, und wir bestimmen im Prinzip seine Dimension mathematisch präzise, nachdem erst einmal die Aufgabe präzise formuliert und die real gegebenen Daten bestimmt sind. Der vorliegende Text von KIRSTI ANDERSEN ist wie im ganzen Werk überreich ausgestattet mit historischen und kunsthistorischen Informationen. Er lässt uns aber an dieser Stelle bei der mathematischen Hintergrundklärung allein, und ich zögere, die Übungsaufgaben 2.4 auf SS. 62 bis 64 als hilfreich zu bezeichnen. Die hier wiedergegebene Rechnung ist unsere; wir haben sie komplett eingesetzt um zu zeigen, dass es sich um einfache Proportionenlehre handelt. Man müsste sich dabei auch hier nicht aufhalten, enthielte der Buchtitel nicht ausdrücklich das Wort „Mathematik“.

Die sogenannten anamorphen Kunstwerke, von denen eines im dritten Ausflug (C) berichtet wird, sind eher Kuriositäten. Bei einer *Anamorphose* handelt es sich um ein Bild, dessen Inhalt erst erkannt wird, wenn man es aus einem bestimmten, meist ungewöhnlichen Winkel betrachtet, oder zur Betrachtung gewisse Hilfsmittel in Anspruch nimmt. Das einzige mir bisher aus der Kunstgeschichte bekannte Beispiel waren „the Ambassadors“ von Hans Holbein dem Jüngeren²¹. Auch das Internet kommt nicht an diesem Beispiel vorbei, wenn man das geeignete Suchwort bei Google eingibt. Für eine Diskussion des Beispiels (C) in unserer Liste hat die Verfasserin gute sachliche Gründe. Allerdings hält sich meine Begeisterung dafür in Grenzen, und wenn meine Reiseplanung (wie immer) gewissen Beschränkungen unterläge, dann würde ihr dieser Standort zum Opfer fallen²².

Hingegen sollte man das vierte Exkursionsziel auf alle Fälle einplanen: Das fantastische von ANDREA POZZO virtuell ausgemalte Langschiff nebst Kuppelfresko der Jesuitenkirche Sant'Ignazio. Die Deckenfresken und besonders die Scheinarchitektur beim Ausmalen von Kuppeln wurde im Barock hoch entwickelt. Die mathematische Geometrie, die wir im Zusammenhang mit der klassischen Zentralperspektive diskutiert haben, müssen wir neu besprechen: Im „klassischen“ Fall (von ALBERTI bis PERUZZI in (A)) ist die primäre Bildfläche senkrecht auf der

¹⁹ S. 21, Spalte 2.

²⁰ vielleicht auch unter Stichwörtern wie *colonne prospettive*— *La falsa prospettiva*, *Borromini*, *forced perspective*— die Nutzer wissen ohnehin, wie hier ein Wort ins andere führt!

²¹ London National Gallery.

²² Für weitere kunsthistorische Details s. [1], pp. 452–457.

horizontalen Grundfläche, auf der wir stehen, und die daher in unserem Gehirn als etwas fest Gegebenes verankert ist. Jetzt stellt sich der Architekt und Maler eine andere Aufgabe: Auf der flachen Decke der Vierung von Sant'Ignazio soll virtuell eine kreiszylindrische virtuelle Architektur mit halbkugelförmigem Abschluss genannt „eine virtuelle“ Kuppel, errichtet werden und dies soll auf die flache Decke projiziert und dann gemalt werden, und zwar so, dass sie aus einem vom Architekten und Künstler bestimmten Augenpunkt in Bodennähe als „scheinbar real“ wahrgenommen wird. Das Fresko selbst ist an Ort und Stelle zu bewundern. Aber sein Schöpfer POZZO hat zu dieser virtuellen Raumkonstruktion jene überlieferte Konstruktionszeichnung²³ erstellt, die von der Autorin mit großer Detailkenntnis und überzeugender Klarheit diskutiert wird. Im Prinzip geht es dabei überhaupt nicht um die Halbkugel, die eigentliche Kuppel, die ohnehin nicht so sehr viel Dekorationsmaterial liefert, sondern es geht um den sie tragenden Zylinder; als virtuelle Architektur ist dieser mit tragenden Säulen auf seiner Innenfläche ausgestattet. Für die perspektivische Behandlung des Problems hat POZZO im Hinblick auf die Tradition und die Lehre der Zentralperspektive das geometrisch Vernünftige getan: Er dreht die gesamte Konfiguration um 90 Grad um eine horizontale Achse senkrecht zur Symmetrieebene des Baus und studiert somit einen liegenden Kreiszylinder und dessen Zentralperspektive für eine die Basiskreisscheibe enthaltende Bildebene und für einen Augenpunkt knapp oberhalb des ins Unendliche verlängerten Zylinders²⁴. Dabei erscheinen die Querschnitte des Zylinders als Kreise, deren Mittelpunkte konstruiert und deren Positionen von der Autorin erläutert werden.

Eine Frage freilich bleibt noch unerörtert: Ist der Architekt und Designer POZZO gerechtfertigt in seiner Annahme, eine virtuelle Kreiskontur, wie sie als jeder Querschnitt des konzipierten Zylinders auftritt, werde bei der Abbildung auf die erste Bildebene, nämlich die horizontale Decke²⁵ immer als Kreis abgebildet wie in seinem Entwurf? (S. [2], Seite 43, Figur 4.07.)

In der Tat liefert jede Parallel- oder Zentralprojektion eines Kreises im Raum auf eine Ebene eine Ellipse²⁶. In dem Falle, dass die den Kreis enthaltende Eben parallel zur Bildebene ist—und nur in diesem—ist die Projektion wieder ein Kreis. Aber genau das ist der Fall bei POZZOs Konstruktion. Zweifel daran könnten nur aus der Tatsache entstehen, dass der Augenpunkt (nämlich das Projektionszentrum einer Zentralprojektion) abseits von der Projektionsachse liegt. Aber die Projektionsrichtung spielt bei der Aussage der Kreiserhaltung keine hinderliche Rolle. POZZO hat recht!²⁷ Und wir stellen fest, dass das Auge im etwas seitlich gewählten korrekten Augenpunkt beim Blick nach oben auf seiner eigenen mitgetragenen zweiten Bildebene *alle* auf der ersten Bildfläche, der ebenen Vierungsdecke, gemalten Kreise als Ellipsen sieht—genau so wie die Kamera auf Seite x (=römische Ziffer 10) dieses Buches.

²³ Fig. 4.07, s. auch [1], pp. 388–394.

²⁴ Fig. 4.07.

²⁵ $\overline{AD}$.

²⁶ abgesehen von dem Entartungsfall, dass die Projektionsrichtung in der Ebene selbst liegt.

²⁷ und ist korrekt beschrieben in [1], pp. 386–394.

Figure 6.11.

Figure 6.12.

Abb. 5 Pozzo malt eine Kuppel auf eine flache Decke in Untersicht

Leider ist der mathematische Kommentar im Buch in „Section 6.4. for Chapter 4“ auf den Seiten 66, 65 graphisch misslungen (s. Abb. 5a).

Die Quelle der Irreführung dürfte in der Figur 6.11 bei der Geraden $\overline{OA}$ zu suchen sein, die im mathematischen Inhalt von 6.11 keinerlei Bedeutung hat, wohingegen die für die Diskussion wichtige Gerade $\overline{ON}$ fehlt und eigentlich rot eingezeichnet sein müsste.²⁸ Der fehlende Schnittpunkt X der zwei Geraden $\overline{HE}$ und $\overline{ON}$ in 6.11 muss auch in 6.12 erscheinen, weil der Kreis κ um L_i mit Radius $|\overline{L_i M_i}|$ durch diesen in der Vorlage nicht markierten Punkt X in 6.12 läuft. Der Umstand, dass die Punkte X und A so nahe beieinanderlägen, dass sie bei der Zeichengenauigkeit der Zeichnungen im Buch kaum zu trennen wären, ist wohl vermutlich der Grund dafür, dass man auf die Angabe des Punktes X verzichtet hat. Tatsache ist aber, dass sich die Kreise κ und der grosse Kreis durch A und E nicht tangentiell berühren wie BERNINIs Kreise auf dem Petersplatz²⁹ sondern sie sich schneiden (s. Abb. 5b); auf POZZOs eigener Zeichnung³⁰ ist das glasklar.

²⁸ Es fehlt auch die horizontale Fortsetzung der blauen Geraden $\overline{MN}$ nach links bis zur vertikalen Geraden $\overline{OH}$, ohne welche die in Übungsaufgabe 4.1. angesprochenen „similar triangles“ nicht vollständig sichtbar sind. Übrigens sollte in der Übungsaufgabe die Referenz auf Figur 6.11 verweisen und nicht auf 6.12!

²⁹ (s. Seite 27, Figur 2.11).

³⁰ (s. Seite 43, Figur 4.07).

Die Zeichnung in Figur 6.12 erweckt den Eindruck, sie sei der Grundriss zur Figur 6.11. Das allerdings trifft nicht zu: Eine verpasste Chance! (Vgl. Abb. 5b)

Nur noch *eine* Bemerkung zu diesem Thema: Im den letzten zwei Sätzen des Abschnitts 6.4 auf Seite 67 wird behauptet, der kleine Kreis c sei das Bild des Querschnitts des Domes in der Höhe $2k/3$ von der Basis des Domes mit Radius k . Dieser Kreis hat nun den Radius $\sqrt{5} \times k/3 \cong 0.57k$. Dass die Behauptung, die Projektion dieses Querschnitts sei c , damit nicht zutreffen kann, sieht man mit bloßem Auge.

Im Buch selbst wird darauf hingewiesen³¹, wo man sich in der Sant'Ignazio aufstellen muss, um im Augenpunkt der kunstvollen Projektion der Vierungskuppel zu sein. Die Fotografie in Figur 4.08 zeigt, wie man von anderen Sichtpunkten, die gar nicht weit vom kanonischen Augenpunkt entfernt sind, einen geradezu *anamorphischen* Anblick der Kuppel erzwingt. Damit ist ja wohl auch das Kapitel 3 über die Anamorphismen im Ende noch zusätzlich gerechtfertigt.

Die Ausmalung des Mittelschiffs von Sant'Ignazio liefert den Anlass, die brillante Deckenmalereimalerei POZZO wiederzugeben, besonders die grandiose Apotheose Ignazios fußend auf den Pfeilern der vier Erdteile³² als ein Symbol des weltweiten Wirkens seines Ordens (s. Titelbild). Zu dem Thema der vier Kontinente entsteht wenige Jahre später in der Residenz in Würzburg das geniale Deckenfresko von GIOVANNI BATTISTA TIEPOLO. Dieses soll flächenmäßig das größte Fresko der Welt sein.

Der American Mathematical Society und der Mathematical Association of America ist zu danken, dass sie diese inspirierende Vorlage der Mathematik- und Kunsthistorikerin KIRSTI ANDERSEN in ihrer Spectrum-Serie veröffentlicht und damit einer großen interessierten Lesergemeinde zugänglich gemacht haben. Der Umstand, dass ich mir bei der Behandlung mathematischer Hintergründe des Stoffes manchmal etwas größere Klarheit, Zuwendung zum Detail, und Präzision gewünscht hätte, fällt nicht ins Gewicht gegenüber meiner Bewunderung für die historische Detailgenauigkeit und Vernetzung der mit großer Sachkenntnis und mitreißender Bebilderung ausgewählten Beispiele zur Entstehung der Zentralperspektive in der Kunstgeschichte. Konkret ausgedruckt: Das Buch ist sehr wohl geeignet, dem kulturinteressierten Romreisenden zur Anregung und Wegweisung zu dienen, wie auch schon sein Untertitel ankündigt. Es enthält in der Tat auch einen Stadtplan mit dem öffentlichen Verkehrsnetz von Rom. Ich komme zu dem Schluss, dass dieses Buch den praktizierenden Lehrkräften im Geometrieunterricht von der Mittelstufe an bis ins Grundstudium hinein, im US-amerikanischen Unterrichts- und Studiensystem bis zur Stufe eines Bachelor degrees, ausgiebiges Material zur Motivierung und Übung an die Hand gibt. In einer Neuauflage sollten einige meist harmlose Druckfehler³³ beseitigt

³¹ Seite 44, Spalte 1.

³² Fig. 4.09-4.13, s. auch S. 36, ganzseitig

³³ Seite 7, Spalte 1, Zeile 4 [easily]; Seite 8, Spalte 1, Zeile 9 [Following]; Seite 20, Spalte 1, Zeile 13 [line through I_2]; Seite 27, Spalte 2, Zeile 5 [arcs]; auf Seite 26, Spalte 3 ist der Name des auf den Seiten 12, 13 eingeführten SEBASTIANO SERLIO dreimal hintereinander falsch gedruckt; Seite 29, Spalte 2, Zeile 10 [Louis]; Seite 30, Spalte 2, Zeile 3v.u. [Klammer?]; Seite 41, Spalte 1, Zeile 14v.u. [plane]; Seite 44, Spalte 1, Zeile 2 [replace „vertical“ by „horizontal“]; Seite 66, Spalte 2, Zeile 9v.u. [6.11 statt 6.12].

werden. Man sagt den Mathematikern nach, sie seien besonders der Musik zugewandt: „Scratch a mathematician: find a musician!“ Die Veröffentlichungen von KIRSTI ANDERSEN tragen dazu bei, dass man zitieren sollte: „Scratch a mathematician; find an artist“ oder auch „*an art historian*“.

Funding Open Access funding provided by Projekt DEAL.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

1. Andersen, K.: „The Geometry of an Art,“ The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Science. Springer, xxxvii, S. 812 (2007)
2. Andersen, Kirsti, „Optical Illusions in Rome,“ A Mathematical Travel Guide, AMS/MAA Spectrum **99** Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 2019, x+80 pp.
3. Field, J.V.: „The Invention of Infinity“—Mathematics and Art in the Renaissance. Oxford University Press, xii, S. 250 (1997)