Probab. Theory Relat. Fields 111, 287–321 (1998)

Probability Theory and Related Fields

Étude d'une EDPS conduite par un bruit poissonnien

Erwan Saint Loubert Bié[*]

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, UMR 6620 du CNRS Université Blaise Pascal, F-63177 Aubière Cedex, France. e-mail: sloubert@ucfma.univ-bpclermont.fr

Received: 7 April 1997 / In revised form: 20 January 1998

Summary. We study a Stochastic Partial Differential Equation, of parabolic type, set on $\mathbb{R}^d$, with $d \in \mathbb{N}$. This equation is driven by a Poisson random measure, either compensated or not. The first part of this work shows existence and uniqueness of a progressively measurable solution. The technics involved are close to those used to deal with analogous equations driven by a Gaussian noise. The second part gives some criterions on the intensity of the Poisson random measure, in order to ensure some smoothness, either in space or in time, for the solution of this equation.

Mathematics Subject Classification (1991): 60H15, 35R60

Résumé. Nous étudions une équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS), de type parabolique, posée sur $\mathbb{R}^d$, d entier, et conduite par un bruit poissonnien, compensé ou non. La première partie de ce travail montre l'existence et l'unicité d'une solution progressivement mesurable. Les techniques employées sont proches de celles utilisées pour résoudre les équations analogues conduites par un bruit blanc. La seconde partie donne des conditions, portant sur l'intensité du bruit poissonnien, et permettant d'assurer certaines régularités, en espace ou bien en temps, pour le processus solution.

[*] L'auteur remercie Jean PICARD pour l'attention constante qu'il a portée à ce travail.

Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques (E.D.P.S.) paraboliques intervient dans des problèmes aussi variés que la théorie du filtrage, l'étude de l'évolution du potentiel électrique d'un réseau de neurones ou la description de modèles de pollution atmosphérique. La plupart des travaux effectués dans ce domaine concernent des E.D.P.S. avec bruit blanc. Ainsi, dans son cours à l'école de probabilités de St.-Flour en 1984 [6], Walsh présente-t-il une étude détaillée de l'équation:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - V + f(V,t)\dot{W} & t > 0,\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial V}{\partial x}(L,t) = 0 & t > 0, \\ V(x,0) = V_0(x), & t > 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

où $\dot{W}$ est un bruit blanc basé sur $[0,\infty) \times [0,L]$. Cette équation intervient en neurophysiologie, lors de l'étude de l'évolution d'un potentiel électrique neuronique. La résolution est basée sur la recherche d'une solution par une itération de Picard.

Plus généralement, il est possible d'étudier des E.D.P.S. conduites par une semi-martingale quelconque. Une méthode pour cela, consiste à rechercher une solution X_t comme une fonction du temps à valeurs dans un espace de distributions. Une E.D.P.S. se ramène alors à une équation différentielle stochastique à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie, généralement un espace de Hilbert ou de Banach (*cf.* [4]). C'est cette idée qui est à la base de la résolution par Kallianpur et al., dans [5] de l'E.D.P.S.:

$$X_t = X_0 + \int_0^t A(s,X_s)\,ds + \int_0^t \int_U G(s,X_{s^-},u)\tilde{N}(du\,ds)\ . \tag{0.2}$$

Dans la relation ci-dessus, $(U,\mathscr{Y},\mu)$ est un espace mesuré σ-fini, $N(du\,ds)$ désigne une mesure de Poisson aléatoire sur $\mathbb{R}^+ \times U$, d'intensité $\mu(du)\,ds$, et $\tilde{N}(du\,ds)$ désigne la mesure aléatoire compensée: $d\tilde{N} = dN - \mu(du)\,ds$. L'équation (0.2) est posée dans le dual Φ' d'un espace nucléaire dénombrablement hilbertien Φ. Les fonctions A et G sont des fonctions: A: $\mathbb{R}^+ \times \Phi' \mapsto \Phi'$ et G: $\mathbb{R}^+ \times \Phi' \times U \mapsto \Phi'$. Sous des hypothèses de continuité et de monotonie pour A et G, l'équation (0.2) possède une unique solution forte dans Φ'. Cette solution est une fonctionnelle à valeurs dans un espace de distributions. Les fonctions A et G ci-dessus doivent être définies et continues sur tous les Hilbert inclus dans Φ', ce qui est assez contraignant. En outre, les hypothèses utilisées semblent difficiles à vérifier pour un problème posé sur tout $\mathbb{R}^d$ où un opérateur elliptique comme le laplacien n'est plus coercif.

Nous considérons ici une équation aux dérivées partielles stochastique parabolique posée sur $\mathbb{R}^d$, et conduite par un bruit poissonnien sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$, où U est un espace mesuré muni d'une fonction $|\cdot|: U \mapsto \mathbb{R}^+$, qui y jouera le rôle d'une norme. Soit donc l'équation:

$$V(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \frac{1}{2}\Delta V(s,x)\,ds + \int_0^t g(V(s,x),s,x)\,ds + \int_0^t \int_{h\in U} f(V_-(s,x),s,x,h))\,d\lambda^+(s,x,h)\ , \tag{0.3}$$

où λ^+ est un bruit poissonnien d'intensité λ^-. On suppose, pour étudier (0.3), que $d\lambda^- \ll ds \otimes dy \otimes d\mu$, avec $\int_U |h| d\mu(h)$ finie. Les processus considérés sont alors à variation finie. Les fonctions f et g sont des fonctions de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ respectivement, à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'intégrale par rapport à λ^+ est alors une intégrale stochastique définie pour des processus X progressivement mesurables, et tels que la norme:

$$\|X\|_E = \sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathbb{E}(|X(t,x)|)$$

soit finie. On appelle E l'espace vectoriel de ces processus.
On appelle ω-particule de λ^+, ou simplement particule, tout point (s,y,h) tel que $\lambda^+(s,y,h) = 1$. Le cas le plus simple rentrant dans notre cadre d'étude est celui où $f = f(h)$, et $g \equiv 0$, et où il n'y a qu'un nombre fini $N_t(\omega)$ de particules (s_i, y_i, h_i) sur $[0,t] \times \mathbb{R}^d$. La solution de (0.3) s'écrit alors:

$$V(t,x,\omega) = \sum_{i=1}^{N_t(\omega)} f(h_i) \frac{\mathrm{e}^{\frac{-\|x-y_i\|^2}{2(t-s_i)}}}{(2\pi(t-s_i))^{d/2}}\ . \tag{0.4}$$

Toutefois, il y aura en général une infinité de particules, qui constitueront un ensemble dense dans $[0,t] \times \mathbb{R}^d$. Or, comme on le voit sur (0.4), la solution de (0.3) devient non bornée au voisinage de chaque particule. Il n'y aura donc pas, en général, de fonction dans $\mathscr{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifie (0.3). Il faut envisager une solution au sens faible, à valeurs dans un espace de distributions sur $\mathbb{R}^d$. Pour définir $f(X(s^-,y),s,y,h))$ et $g(X(s,y),s,y)ds$, il faut que cette solution soit presque sûrement une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On assimile alors X_t à sa densité, notée $X(t,x,\omega)$ (ou $X(t,x)$ comme ci-dessus.)

Dans la première partie, nous montrons que, moyennant un bon choix de α dans la définition de E, l'équation (0.3) admet une solution unique dans cet espace. Il est également possible de résoudre une équation analogue en remplaçant le bruit poissonnien λ^+ par le bruit compensé $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$. L'intégrale stochastique devient alors une intégrale par rapport à une mesure martingale, définie dans un espace de variables aléatoires L^p. On considère dans ce cas l'équation:

$$W(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \frac{\Delta}{2} W(s,x)\,ds + \int_0^t \bar{g}(W(s,x),s,x)\,ds + \int_0^t \int_U f(W_-(s,x),s,x,h)\,d\lambda(s,x,h) \ . \tag{0.5}$$

Cette équation se résout de manière identique à (0.3), en remplaçant l'hypothése $\int_U |h|\,d\mu(h)$ finie, par l'hypothèse $\int_U |h|^p d\mu(h)$ finie, qui autorise un plus grand nombre de particules avec $|h|$ petit. Les processus considérés ne sont alors plus à variation finie.

Dans la seconde partie, nous étudions les régularités partielles de la solution V de (0.3). Comme les particules du bruit poissonnien forment en général un ensemble dense dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, il est exclu d'envisager des continuités ou des dérivabilités globales en temps et en espace. On étudie donc les régularités partielles: continuité et dérivabilité presque sûres en espace, à un instant t fixé, ou bien continuité et dérivabilité en temps, en un point x fixé dans $\mathbb{R}^d$. Nous étudions ensuite la régularité de l'équation posée en dimension 1, avec un bruit poissonnien compensé. Ce cas est en effet celui qui permet le plus aisément des comparaisons avec l'étude des E.D.P.S. conduites par un bruit blanc. Cette étude ne se généralise pas en dimension plus grande.
Des lemmes techniques utiles dans les démonstrations sont présentés dans un appendice, à la fin de ce travail.

1 Résolution de l'équation

1.1 Présentation du problème

1.1.1 Le bruit poissonnien

Dans l'ensemble de ce travail, le triplet $(U, \mathcal{U}, \mu)$ désigne un espace mesuré σ-fini, pour lequel on dispose d'une application $|\cdot| \to \mathbb{R}^+$, telle que $\int_U |h|\,d\mu(h) < \infty$. Si U est un espace vectoriel normé, on prendra en général $|\cdot| = \|\cdot\|_U$. On notera Ω l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$, à valeurs entières, $\mathscr{F}$ la tribu $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{U}$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$ (les notations $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^+)$ et $\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$ représentant respectivement les tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^d$). L'application λ^+ sur $\mathscr{F} \times \Omega$ est définie, pour A quelconque dans $\mathscr{F}$, et ω quelconque dans Ω, par:

$$\lambda^+(A, \omega) = \omega(A)$$

Soit $d\tilde{\lambda}^-(y,h)$ une mesure sur $(\mathbb{R}^d \times U, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{U})$, et $\mathbb{P}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ sous laquelle la variable aléatoire $\lambda^+(A, \cdot)$ détermine un bruit poissonnien sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$, d'intensité λ^-, avec $d\lambda^- = ds \otimes d\tilde{\lambda}^-(y,h)$. Un point (s,y,h) tel que $\lambda^+(s,y,h) = 1$, est appelé une ω-particule. On dit aussi qu'on a, au point $(s,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ une particule d'amplitude h, (de masse $|h|$.) Le point y est alors le point où apparaît cette particule, l'instant s est son instant d'apparition. Nous ferons en général sur $\tilde{\lambda}^-$ une hypothèse de la forme:

$$(H_1)(p) : d\tilde{\lambda}^-(y,h) \leq M dy\, d\mu(h) \text{ et } \int_U |h|^p \, d\mu(h) < \infty \quad ,$$

pour un réel positif M, et pour un $p < 1 + 2/d$, $p \geq 1$. Cette hypothèse signifie que les particules de λ^+ apparaissent de manière uniforme en espace, et que la masse totale des particules apparaissant dans un domaine borné pendant un temps fini, n'est pas trop grande.

1.1.2 Définition de l'intégrale stochastique

On appelle $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée sur Ω par les variables aléatoires $\mathscr{F}$-mesurables qui s'écrivent:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_U H(s,y,h) d\lambda^+(s,y,h)$$

pour H à support dans $[0,t] \times \mathbb{R}^d \times U$. Ceci donne donc une filtration sur $\mathscr{F}$, pour laquelle on dispose d'une tribu prévisible $\mathscr{P}(\mathscr{F}_t)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Un processus $Y(s,y,\omega)$ dépendant de la variable d'espace y sera alors dit prévisible s'il est mesurable pour la tribu $\mathscr{P}(\mathscr{F}_t) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$. Si Y dépend de h, il sera encore dit prévisible s'il est mesurable pour $\mathscr{P}(\mathscr{F}_t) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{U}$. On appellera processus progressifs les processus mesurables par rapport, respectivement, à la tribu $\mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d)$, ou à la tribu $\mathrm{Prog}(\mathscr{F}_t) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{U}$. Ces définitions sont analogues à celles utilisées dans [1].

Pour les processus Y, positifs ou $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$ intégrables, et qui sont $\mathscr{P}(\mathscr{F}_t) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{U}$-mesurables, on dispose d'une "formule d'intégration prévisible":

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U Y(s,y,h)\,d\lambda^+(s,y,h)\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U \mathbb{E}(Y(s,y,h))\,d\lambda^-(s,y,h) \ , \tag{1.1}$$

(Voir par exemple à ce sujet [2], pp. 448 et suiv.), où l'intégrale du membre de gauche est définie par:

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U Y(s,y,h,\omega)\,d\lambda^+(s,y,h) = \sum_{\substack{\mathbb{R}^+\times\\ \mathbb{R}^d\times U}} Y(s,y,h,\omega)\lambda^+(s,y,h) \ . \tag{1.2}$$

Ceci nous donne alors une variable aléatoire positive ou intégrable. On peut encore définir cette intégrale si Y est un processus prévisible, fini $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$ presque partout, et tel que $|Y| \wedge 1 \in L^1(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$. En effet, on a alors:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U (|Y|(s,y,h,\omega) \wedge 1)\,d\lambda^+(s,y,h)\right)$$
$$= \||Y| \wedge 1\|_{L^1(d\lambda^-\otimes d\mathbb{P})} < \infty \ .$$

Par suite, l'intégrale contre λ^+ du processus $\mathbf{1}_{\{Y<1\}}Y$ est finie, et il n'y a, $\mathbb{P}$-presque sûrement, qu'un nombre fini de particules (s,y,h) pour lesquelles $|Y(s,y,h,\omega)|$ est supérieur à 1.

Cette définition de l'intégrale stochastique par rapport à λ^+, ne permet d'intégrer que des processus prévisibles. Elle peut s'étendre aux processus Y progressivement mesurables et tels que, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $Y(\cdot,y)$ est dans $L^1_{\text{loc}}(ds)$. En effet, il existe alors un processus Y_- qui est une version prévisible de Y, c'est-à-dire tel que: $Y = Y_-$, $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$ presque partout. On définit donc alors:

$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U Y(s,y,h)\,d\lambda^+(s,y,h) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U Y_-(s,y,h)\,d\lambda^+(s,y,h) \ . \tag{1.3}$$

La formule d'intégration prévisible permet de montrer que cette définition ne dépend pas de la version prévisible Y_- choisie pour Y. En outre, elle montre que, les processus Y et Y_- étant égaux $d\lambda^- \otimes d\mathbb{P}$ presque partout, si on note $I(Y)$ l'intégrale ainsi définie, on a,

$$\mathbb{E}(I(Y)) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d}\int_U \mathbb{E}(Y(s,y,h))\,d\lambda^-(s,y,h) \ . \tag{1.4}$$

Pour étudier l'équation (0.3), on utilise l'espace vectoriel E des classes de processus progressivement mesurables pour lesquels:

$$\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathbb{E}(|X(t,x)|) = \|X\|_E < \infty \ , \tag{1.5}$$

pour une constante $\alpha > 0$, fixée. Si X_n est une suite de Cauchy de E, alors il existe une suite extraite X_{n_i} telle que, pour tout couple (t,x), la suite $X_{n_i}(t,x)$ converge presque sûrement. La limite de X_n, pour $\| \cdot \|_E$ admet donc une version progressivement mesurable, et l'espace vectoriel E est donc un espace de Banach.

Soit $1 \leq p \leq 2$. Nous définissons à présent une intégration stochastique contre $d\lambda$ pour des processus de $L^p(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$. Lorsque $Y(s,y,h,\omega) \in L^p(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$ est un processus prévisible, grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (*cf.* [3]), on a:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\left| \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_U Y(s,y,h)\, d\lambda \right|^p \right) \\ &\quad \leq C_p \mathbb{E}\left(\left(\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_U Y(s,y,h)^2\, d\lambda^+ \right)^{p/2} \right) \ . \end{aligned}$$

Pour $p \leq 2$, l'exposant $p/2$ dans le terme de droite est inférieur à 1. En rentrant, par sous-additivité, cet exposant dans la somme, et en utilisant la formule d'intégration prévisible (1.1), on obtient:

$$\mathbb{E}\left(\left| \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_U Y(s,y,h) d\lambda \right|^p \right) \leq C_p \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} \int_U \mathbb{E}(|Y(s,y,h)|^p) d\lambda^- . \tag{1.6}$$

La formule ainsi obtenue, qu'on appellera formule d'intégration prévisible L^p, permet de définir une intégration stochastique contre $d\lambda$ pour des processus de $L^p(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$. On appelle E_p l'espace vectoriel des classes de processus progressivement mesurables pour lesquels, pour un $T > 0$ fixé arbitrairement:

$$\sup_{[0,T] \times \mathbb{R}^d} \mathbb{E}(|X(t,x,\omega)|^p)^{1/p} = \|X\|_p < \infty \ . \tag{1.7}$$

Dans la suite de ce travail, on parlera simplement de processus, sans préciser en général qu'il s'agit de processus de E (resp. de E_p), et on notera X_- une version prévisible de X dans E (resp. dans E_p).

1.1.3 L'équation

On étudie dans cette partie l'équation (0.3). Dans toute la suite, la fonction u_0 est une fonction réelle mesurable et bornée sur $\mathbb{R}^d$. Le processus V est cherché dans E, et la troisième intégrale de (0.3) est une intégrale stochastique par rapport á λ^+, au sens défini dans (1.2). Les fonctions $f(V_-(s,y,\omega),s,y,h)$ et $g(V(s,y),s,y)$ seront à présent notées $f(V_-)(s,y,h)$ et $g(V)(s,y)$ respectivement ; nous présenterons plus loin les hypothèses faites sur ces fonctions.

Pour donner un sens à l'équation (0.3), on en écrit une formulation faible pour la dualité entre $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, espace des distributions tempérées. Notre approche reprend point par point celle de Walsh dans [6].

Notons d'abord que, si X est un processus de E, alors $X(t,\cdot)$ est dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour tout t positif, et pour toute fonction ϕ régulière et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_{\mathbb{R}^d} X(t,x)\phi(x)\,dx\right|\right) \le \mathrm{e}^{\alpha t}\|X\|_E \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|\,dx \ .$$

On définit alors une solution de (0.3), comme étant un processus tel que, pour toute fonction ϕ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on ait:

$$\begin{aligned}\langle V(t,\cdot)-u_0,\phi\rangle &= \int_0^t \left\langle V(s,\cdot),\frac{\Delta\phi}{2}\right\rangle ds + \int_0^t \langle g(V)(\cdot,s),\phi\rangle\,ds \\ &\quad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_U f(V_-)(s,y,h)\phi(y)\,d\lambda^+(s,y,h) \ . \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Les méthodes classiques (*cf.* [6]) permettent de montrer que, si le processus V vérifie (1.8), alors

$$\begin{aligned}V(t,\cdot) &= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)G_t(\cdot,y)\,dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} g(V)(s,y)G_{t-s}(\cdot,y)\,dy\,ds \\ &\quad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_U f(V_-)(s,y,h)G_{t-s}(\cdot,y)\,d\lambda^+(s,y,h) \ , \qquad (1.9)\end{aligned}$$

où $G_t(x,y)$ désigne la fonction de Green associée à l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\Delta}{2}$:

$$G_t(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{d/2}} .$$

Pour un processus X de E, on pose alors:

$$\begin{aligned}\Phi(X)(t,x) &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_U f(X_-)(s,y,h)G_{t-s}(x,y)\,d\lambda^+(s,y,h) \\ &\quad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} g(X)(s,y)G_{t-s}(x,y)\,dy\,ds \ , \qquad (1.10)\end{aligned}$$

et on recherche une solution de (0.3) comme limite dans E, de l'itération:

$$\begin{cases} V^0(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_t(x,y)\,dy \\ V^{n+1}(t,x) = V^0(t,x) + \Phi(V^n)(t,x) \ . \end{cases} \tag{1.11}$$

Pour assurer l'existence des deux intégrales apparaissant dans (1.10), et la convergence du système itératif ci-dessus, on fait sur f et g les hypothèses suivantes:

$$\exists K, \quad \text{t.q. } \forall (v, v_1, v_2, t, x, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U \ ,$$

on ait:

$$(H_2) \begin{cases} |f(v,t,x,h)| \leq K(1+|v|)|h| \\ |f(v_1,t,x,h) - f(v_2,t,x,h)| \leq K|v_1 - v_2||h| \ , \end{cases}$$

et:

$$(H_3) \begin{cases} |g(v,t,x)| \leq K(1+|v|) \\ |g(v_1,t,x) - g(v_2,t,x)| \leq K|v_1 - v_2| \ . \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, et pour un bon choix de α dans la définition de E, l'application Φ est une contraction à valeurs dans E, ce qui permet d'exhiber une solution de (0.3) dans cet espace. C'est l'objet de la partie suivante. Dans l'ensemble des calculs, (t,x) désignera en général le point de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ où sera calculée la valeur d'un processus, et le triplet $(s,y,h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times U$ représentera le triplet des variables par rapport auxquelles seront effectuées les intégrations.

1.2 Calcul de la solution

Théorème 1.2.1 *Nous supposons que la mesure λ^- vérifie* (H_1)(1), *que les fonctions f et g vérifient respectivement* (H_2) *et* (H_3). *Alors, si on choisit α assez grand dans la définition de E, la fonction Φ est k-contractante sur E, avec un $k < 1$. La suite (V_n) converge donc dans E vers un processus V, qui est l'unique solution de* (0.3) *dans cet espace.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes. On montre d'abord que, si α est choisi suffisamment grand, l'application Φ est une contraction. Ceci entraîne la convergence de la suite V^n, construite par l'itération (1.11), vers un processus de E, noté V. On montre alors que V est bien une solution de (0.3), au sens précisé dans (1.8).

Afin de simplifier les écritures dans ce qui suit, on supprimera souvent les dépendances de f et g en s et y, pour ne garder que celle en X, qui est la plus importante dans nos calculs.

Remarquons d'abord que, grâce aux hypothèses $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2) et (H_3), si X est un processus de E, alors $\Phi(X)$ est encore un processus de E. La suite V^n est donc bien définie.

On pose maintenant, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, avec:

$$\Phi_1(X)(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(X)(s,y) G_{t-s}(x,y)\, dy\, ds \ , \tag{1.12}$$

et

$$\Phi_2(X)(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(X_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h) \ . \tag{1.13}$$

On a alors le résultat suivant.

Lemme 1.2.1 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), *et* (H_3) *sont vérifiées, alors, quels que soient* X *et* X', *deux processus de* E,

$$\|\Phi_2(X) - \Phi_2(X')\|_E \leq \frac{KM \int_U |h|\, d\mu(h)}{\alpha} \|X - X'\|_E \ , \tag{1.14}$$

et

$$\|\Phi_1(X) - \Phi_1(X')\|_E \leq \tfrac{K}{\alpha} \|X - X'\|_E \ . \tag{1.15}$$

Preuve du lemme. On note:

$$D_2(t,x) = \Phi_2(X)(t,x) - \Phi_2(X')(t,x) \ , \tag{1.16}$$

et

$$D_1(t,x) = \Phi_1(X)(t,x) - \Phi_1(X')(t,x) \ . \tag{1.17}$$

Or, les fonctions f et g étant lipschitziennes et à croissance linéaire, on a:

$$|D_2(t,x)| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U K|X - X'|(s,y)|h| G_{t-s}(x,y)\, d\lambda^+(s,y,h) \ ,$$

et

$$|D_1(t,x)| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} K|X - X'|(s,y) G_{t-s}(x,y)\, ds\, dy \ .$$

Grâce à la formule d'intégration prévisible , $\mathbb{E}(|D_2(t,x)|)$ est majoré selon:

$$\mathbb{E}(|D_2(t,x)|) \leq K \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U e^{\alpha s} \|X - X'\|_E G_{t-s}(x,y) |h| \, d\lambda^-(s,y,h) \ ,$$

et donc,

$$\|D_2\|_E \leq \frac{KM}{\alpha} \left(\int_U |h| \, d\mu(h) \right) \|X - X'\|_E \ .$$

De même $\|D_1\|_E = \sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} e^{-\alpha t} \mathbb{E}(|D_1|)$, et on a donc:

$$\|D_1\|_E \leq \frac{K}{\alpha} \|X - X'\|_E ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Montrons à présent que la suite V^n converge dans E. Du lemme 1.2.1, on déduit que, pour une constante C positive,

$$\|\Phi(X) - \Phi(X')\|_E \leq \frac{C}{\alpha} \|X - X'\|_E \ .$$

En particulier, si l'on choisit $\alpha > C$, et que l'on note $k = C/\alpha$, l'application Φ est une k-contraction sur E, avec $k < 1$.
Par conséquent, la suite V^n, construite grâce à (1.11), converge dans E. Notons V sa limite. Il faut encore montrer que V est solution de (0.3). C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 1.2.2 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), *et* (H_3), *et soit* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, *alors, le processus* V *vérifie* (1.8).

Preuve du lemme. Par construction, le processus V vérifie:

$$\begin{aligned} V(t,x) = V^0(t,x) &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(V)(s,y) G_{t-s}(x,y) \, dy \, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(V_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y) \, d\lambda^+(s,y,h) \ , \end{aligned} \tag{1.18}$$

ce qui permet donc d'écrire, pour toute fonction $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \langle V(t,\cdot), \phi \rangle = \left\langle V^0(t,\cdot), \phi \right\rangle &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(V)(s,y) \langle G_{t-s}(\cdot,y), \phi \rangle dy \, ds \\ &+ \sum_{[0,t] \times \mathbb{R}^d \times U} f(V)(s,y,h) \langle G_{t-s}(\cdot,y), \phi \rangle \lambda^+(s,y,h) \ . \end{aligned} \tag{1.19}$$

Or, V^0 vérifie:

$$\left\langle V^0(t,\cdot), \phi \right\rangle = \langle u_0, \phi \rangle + \int_0^t \left\langle V^0(s,\cdot), \frac{\Delta\phi}{2} \right\rangle ds \ , \tag{1.20}$$

et, de la même façon:

$$\langle G_{t-s}(\cdot,y),\phi(\cdot)\rangle = \phi(y) + \int_{u=s}^{t} \left\langle G_{u-s}(\cdot,y),\frac{\Delta\phi}{2}\right\rangle du \ . \tag{1.21}$$

En reportant (1.20) et (1.21) dans (1.19), nous obtenons:

$$\begin{aligned}\langle V(t,\cdot)-u_0,\phi\rangle = &\int_0^t \left\langle V(u,\cdot),\frac{\Delta\phi}{2}\right\rangle du + \int_0^t \langle g(V)(s,\cdot)\phi\rangle\, ds \\ &+ \sum_{[0,t]\times\mathbb{R}^d\times U} f(V_-)(s,y,h)\phi(y)\lambda^+(s,y,h) \ .\end{aligned}$$

qui est exactement l'égalité (1.8). Le processus V est donc bien une solution de l'équation différentielle (0.3). La preuve du lemme est donc complète. □

De plus, comme l'application Φ est une k-contraction sur E, pour un $k<1$, le processus V est l'unique processus dans E qui vérifie (1.18). C'est donc l'unique solution de (0.3) dans E, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remarques. 1) La démonstration reste valable en supposant simplement que, pour un réel M indépendant de y, on a: $dm(y) = \int_U |h| d\tilde{\lambda}^-(y,h) \le M\,dy$.

2) Il est encore possible de résoudre (0.3), en rajoutant à $\tilde{\lambda}^-$ une mesure $\tilde{\lambda}_2^-$, finie sur $\mathbb{R}^d \times U$, et telle que, pour tout $a>0$, il existe une constante M_a, telle que:

$$\int_{|h|\le a} |h| d\tilde{\lambda}_2^-(y,h) \le M_a\,dy \ . \tag{1.22}$$

Pour le faire, on résout d'abord, par la même méthode que ci-dessus, l'équation (0.3) sous la probabilité $\mathbb{P}_m$, pour laquelle λ^+ est un bruit poissonnien d'intensité $ds\,d\tilde{\lambda}^- + \mathbf{1}_{\{|h|\le m\}} ds\,d\tilde{\lambda}_2^-(y,h)$, et on fait ensuite tendre m vers ∞, pour obtenir un processus V qui est une solution de (0.3), $\mathbb{P}$-presque sûrement. Si les particules apparaissent sur un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, on peut donc résoudre (0.3), en supposant simplement que, pour tout $a>0$, $\int_U (|h|\wedge a)\, d\tilde{\lambda}^-(y,h) \le M_a\,dy$.

3) Le coefficient K doit être choisi indépendant de s et y. Cette méthode ne permet pas de traiter directement le cas où les fonctions f et g sont localement lipschitziennes.

4) On démontre ici la convergence de la suite construite grâce à (1.11), pour la norme $\|\cdot\|_E$, définie dans (1.5). Pour que l'itération (1.11) soit bien définie dans E, il faut en particulier que cette norme soit finie pour V_0, donc que u_0 soit borné. On peut toutefois faire une démonstration analogue en remplaçant $\|.\|_E$ par:

$$\|X\|_n = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \frac{\mathbb{E}(|X(t,x,\omega)|)}{(1+\|x\|)^n} \quad ,$$

pour un T positif fixé. La convergence de la suite V^n se montre alors en utilisant le lemme de Walsh (lemme 1.3.1 dans ce travail.) Ceci permet d'envisager des données initiales à croissance polynômiales de degré $\leq n$.

1.3 Etude de l'équation compensée dans $L^p(\Omega)$

On considère dans cette partie l'équation (0.5) posée sur $\mathbb{R}^d$, et dans laquelle on utilise l'intégrale stochastique par rapport à $d\lambda$ définie dans (1.6), pour des processus de $L^p(d\lambda^- \otimes d\mathbb{P})$. On suppose donc que la mesure λ^- satisfait l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)(p)$, pour un p fixé, $1 < p < 1 + 2/d$, $p \leq 2$. La fonction $\bar{g}$, apparaissant dans (0.5) est supposée telle que, pour tout t, x, v, v_1, v_2:

$$(\mathrm{H}_4)\begin{cases} |\bar{g}(v,t,x)| \leq K(1+|v|) \\ |\bar{g}(v_1,t,x) - \bar{g}(v_2,t,x)| \leq K|v_1 - v_2| \quad . \end{cases}$$

On cherche une solution de (0.5) dans l'espace E_p, défini dans (1.7). Si Y est un processus de E_p, on pose:

$$\Psi_1(Y) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(Y)(s,y) G_{t-s}(x,y)\, dy\, ds \quad ,$$

et

$$\Psi_2(Y) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(Y_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda(s,y,h) \quad .$$

Théorème 1.3.1 *Si la mesure* λ^- *vérifie* $(\mathrm{H}_1)(p)$, *pour un* $1 < p < 1 + 2/d, p \leq 2$, *que les fonctions* f *et* $\bar{g}$ *vérifient respectivement* (H_2) *et* (H_4), *alors l'équation* (0.5) *admet une solution unique* W *dans l'espace* E_p.

Démonstration. On cherche une solution de (0.5) grâce à l'itération:

$$\begin{cases} W^0(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_t(x,y)\, dy \\ W^{n+1}(t,x) = W^0(t,x) + \Psi_1(W^n)(t,x) + \Psi_2(W^n)(t,x) \quad . \end{cases} \tag{1.23}$$

Soit H_n la fonction réelle croissante définie sur $[0,T]$, par:

$$H_n(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left\{\left|W^{n+1}(s,y) - W^n(s,y)\right|^p\right\} \quad . \tag{1.24}$$

Alors

$$H_n(t) \leq C\big(H_{n,1}(t) + H_{n,2}(t)\big) \ ,$$

avec:

$$H_{n,1}(t) = \sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\big\{\big|\Psi_1(W^n)(s,y) - \Psi_1\big(W^{n-1}\big)(s,y)\big|^p\big\} \ , \tag{1.25}$$

la fonction $H_{n,2}$ étant définie de manière analogue avec Ψ_2 à la place de Ψ_1. Alors, grâce à la lipschitzianité de $\bar{g}$:

$$\begin{aligned}&\big|\Psi_1\big(W^{n+1}\big)(t,x) - \Psi_1(W^n)(t,x)\big|^p\\ &\quad \leq C\bigg(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\big|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)\big|G_{t-s}(x,y)\,ds\,dy\bigg)^p \ ,\end{aligned}$$

donc, par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}&\big|\Psi_1\big(W^{n+1}\big)(t,x) - \Psi_1(W^n)(t,x)\big|^p\\ &\quad \leq C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\big|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)\big|^p G_{t-s}(x,y)\,ds\,dy \ .\end{aligned}$$

Pour $t \leq T$, il existe donc une constante C_T, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_{n,1}(t) \leq C_T\int_0^t H_{n-1}(s)\,ds \ . \tag{1.26}$$

Nous étudions maintenant $H_{n,2}(t)$. Grâce à la formule d'intégration prévisible L^p (1.6), on a:

$$\begin{aligned}&\big|\Psi_2\big(W^{n+1}\big)(t,x) - \Psi_2(W^n)(t,x)\big|^p\\ &\quad \leq C\bigg(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|h|^p\big|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)\big|^p G_{t-s}^p(x,y)\,ds\,dy\,d\mu(h)\bigg)^p,\end{aligned}$$

et donc,

$$H_{n,2}(t) \leq C_T\bigg(\int_U |h|^p\,d\mu(h)\bigg)\int_0^t \frac{H_{n-1}(s)\,ds}{(t-s)^{(p-1)d/2}} \ , \tag{1.27}$$

pour une constante positive C_T éventuellement différente de la précédente, et pour tout entier n. On obtient donc, pour la fonction $H_n = H_{n,1} + H_{n,2}$:

$$H_n(t) \leq C_T\int_0^t \frac{H_{n-1}(s)\,ds}{(t-s)^{(p-1)d/2}} \ . \tag{1.28}$$

Et il est alors possible d'appliquer à cette suite de fonctions le lemme suivant, dû à Walsh:

Lemme 1.3.1 *Soit $H_n(t)$ une suite de fonctions définies sur $[0,T]$, pour un $T > 0$, telles que H_0 est bornée* sur $[0,T]$, *et qu'il existe une constante C indépendante de n, et un réel $a > -1$, pour lesquels*:

$$H_n(t) \leq C \int_0^t H_{n-1}(s)(t-s)^a \, ds \ .$$

Alors, il existe un entier k, tel que, pour tout n et tout m entiers:

$$H_{n+mk}(t) \leq C'^m \int_0^t H_n(s) \frac{(t-s)^m}{(m-1)!} \, ds \ .$$

En particulier, pour tout $\gamma > 0$, la série de fonctions de terme général $H_n^\gamma(t)$ converge alors uniformément sur $[0,T]$, d'après le critère de Cauchy.

Grâce à ce lemme,

$$\sum_{m=0}^{\infty} H_m^{1/p}(T) < \infty \ ,$$

et la suite W^n converge donc dans E_p vers un processus W qui sera une solution de (0.5). Sur ce dernier point, nous renvoyons à la démonstration analogue effectuée dans la partie précédente. □

Remarque. Soit V un processus solution de (0.3). Si la mesure λ^- vérifie à la fois $(\mathrm{H}_1)(1)$ et $(\mathrm{H}_1)(p)$, alors, en posant:

$$\bar{g}(v,t,x) = g(v,t,x) + \int_U f(v,t,x,h) l(x,h) \, d\mu(h) \ , \tag{1.29}$$

avec $l(y,h) = d\tilde{\lambda}^-(y,h)/dy \, d\mu(h)$, on voit que les équations (0.3) et (0.5) sont équivalentes. Ceci conduit au:

Corollaire 1.3.1 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, $(\mathrm{H}_1)(p)$, (H_2), *et* (H_3) *sont vérifiées, alors la solution V de* (0.3) *construite dans le théorème* 1.2.1 *est dans l'espace vectoriel E_p.*

Le résultat d'intégrabilité donné par ce Corollaire semble optimal. On ne peut avoir une puissance p-ième de V intégrable pour un p plus grand que $1 + 2/d$, car la fonction de Green $G_s(x,y)$ n'est plus dans $L^p([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, si $p \geq 1 + 2/d$.

1.4 Etude du cas $d = 1$

Dans ce cas, on montre que, si $\int_U |h|^p \, d\mu(h)$ et $\int_U |h|^2 \, d\mu(h)$ sont finies, pour un $2 < p < 3$, alors la solution $W(t,x)$ de (0.5) est dans $L^p(\Omega)$, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Nous reprenons les mêmes notations que dans la partie 1.3. En particulier les fonctions H_n, $H_{n,1}$ et $H_{n,2}$ sont définies comme dans (1.24) et (1.25), et l'espace vectoriel E_p est défini comme dans (1.7), en modifiant la valeur de p.

Théorème 1.4.1 *Soit* $2 < p < 3$. *Si les hypothèses* (H_4) *et* (H_2), $(\mathrm{H}_1)(p)$ *et* $(\mathrm{H}_1)(2)$ *sont vérifiées, alors la suite* W^n *construite grâce à* (1.28) *converge dans l'espace* E_p.

Démonstration. Nous désignerons dans cette preuve par C une constante positive, dépendant de T et p. La valeur de C pourra changer d'une ligne à l'autre.

La fonction $H_{n,1}$ vérifie, pour $t \leq T$:

$$H_{n,1}(t) \leq C_T \int_0^t H_{n-1}(s)\, ds \quad . \tag{1.30}$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis Gundy, on a, pour $H_{n,2}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left|\Psi_2\left(W^{n+1}\right)(t,x) - \Psi_2(W^n)(t,x)\right|^p\right\} \\
&\quad \leq C_p \mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |h|^2 G_{t-s}(x,y)^2 \left|W_-^n - W_-^{n-1}\right|^2(s,y)\, d\lambda^+(s,y,h)\right)^{\frac{p}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

Notons $S_n(t,x)$ la somme ci-dessus, sur les particules de λ^+. Ici $2 < p < 3$, donc $p/2 \geq 1$, et il n'est pas possible de rentrer, par sous-additivité, l'exposant $p/2$ dans la somme sur les particules de λ^+. On réécrit donc $S_n(t,x)$ comme:

$$\begin{aligned}
S_n(t,x) = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |h|^2 G_{t-s}(x,y)^2 \left(W_-^n(s,y) - W_-^{n-1}(s,y)\right)^2 d\lambda(s,y,h) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |h|^2 G_{t-s}(x,y)^2 \left(W_-^n(s,y) - W_-^{n-1}(s,y)\right)^2 d\lambda^-(s,y,h) \quad .
\end{aligned}$$

Notons alors $I_n(t,x)$ et $J_n(t,x)$ les deux termes du membre de droite. En appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy , on obtient, pour $I_n(t,x)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(|I_n(t,x)|^{p/2}\right) \\
&\quad \leq C\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |h|^4 G_{t-s}(x,y)^4 \left|W_-^n - W_-^{n-1}\right|^4(s,y)\, d\lambda^+(s,y,h)\right)^{p/4}\right) \quad . \\
&\quad \leq C\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |h|^p G_{t-s}(x,y)^p \left|W_-^n - W_-^{n-1}\right|^p(s,y)\, d\lambda^+(s,y,h)\right) \quad .
\end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant la formule d'intégration prévisible L^1, qui fournit:

$$\mathbb{E}\Big(|I_n(t,x)|^{p/2}\Big) \le C\int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{\frac{p-1}{2}}}\, ds \ . \tag{1.31}$$

Nous majorons à présent $\mathbb{E}(|J_n(t,x)|^{p/2})$ en utilisant l'inégalité de Hölder. On a donc, pour $t \le T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(|J_n(t,x)|^{p/2}\Big) \le C\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d}\int_U |h|^2 \mathbb{E}\big(\big|W^n(s,y) - W^{n-1}(s,y)\big|^p\big) \\ \times G^2_{t-s}(x,y)\, ds\, dy\, d\mu(h) \\ \times \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d}\int_U |h|^2 G^2_{t-s}(x,y)\, ds\, dy\, d\mu(h)\right)^{\frac{p}{2}-1}.\end{aligned}$$

Or, comme $\int_U |h|^2 d\mu(h)$ est finie, on a, pour $t \le T$:

$$\mathbb{E}\Big(|J_n(t,x)|^{p/2}\Big) \le C\int_0^t H_{n-1}(s)\, ds \ . \tag{1.32}$$

En additionnant les inégalités (1.30), (1.31), et (1.32), nous obtenons donc:

$$H_n(t) \le C\int_0^t \frac{H_{n-1}(s)}{(t-s)^{\frac{p-1}{2}}}\, ds \ .$$

Il suffit d'appliquer de nouveau le lemme 3.1 pour conclure. □

2 Régularités partielles de la solution

2.1 Introduction

On étudie à présent les régularités partielles de la solution V de (0.3) construite dans la partie précédente. En général, les particules de λ^+ forment un ensemble dense dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, et V est non-bornée au voisinage de celles-ci. Il est donc impossible d'obtenir des régularités presque sûres, conjointes en (t,x). On va donc chercher à établir des conditions presque sûres de régularité partielle. Par exemple, nous allons exhiber une condition sur λ^- permettant d'assurer, à un instant t fixé, la continuité de la fonction $V(t,\cdot)$ sur $\mathbb{R}^d$. De la même manière, on pourra assurer, la continuité de la fonction $V(\cdot,x)$ sur $\mathbb{R}^+$, en un point x fixé dans $\mathbb{R}^d$. Les mêmes questions sont étudiées pour les dérivabilités.

Par construction, le processus V vérifie:

$$V = V^0 + \Phi_1(V) + \Phi_2(V) \ ,$$

où V^0, Φ_1 et Φ_2 sont définies respectivement dans (1.11), (1.12), et (1.13). L'étude des régularités de V se ramène donc à celle des régularités, respectivement, de $\Phi_2(V)$ et $\Phi_1(V)$. Nous allons étudier celles-ci dans les deux premiers paragraphes de cette partie. Nous présenterons ensuite le cas unidimensionnel de l'équation compensée. Ce cas présente peu de régularité, mais est intéressant comme étant le plus proche des équations analogues étudiées pour le bruit blanc (*cf.* [6]).

2.2 Etude des régularités de $\Phi_2(V)$

Dans cette partie, on va étudier la régularité de $\Phi_2(V)$, en utilisant la définition de Φ_2 comme intégrale stochastique par rapport à λ^+. On suppose donc vraie l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)(1)$, afin d'assurer l'existence de cette intégrale. Les résultats ainsi trouvés s'appliqueront en particulier au cas où la fonction g est identiquement nulle.

Pour α un nombre réel positif strictement, on appelle π_α la fonction sur U définie par:

$$\begin{array}{lll} \pi_\alpha(h) = |h|^\alpha & \text{si} & 0 < \alpha < 1 \\ \pi_\alpha(h) = |h||\log(|h|)| & \text{si} & \alpha = 1 \\ \pi_\alpha(h) = |h| & \text{si} & \alpha > 1 \ , \end{array}$$

et on note $(\mathrm{H}_5)(\alpha)$, l'hypothèse:

$$(H_5)(\alpha) : \int_U \pi_\alpha(h)\, d\mu(h) < \infty \ .$$

Nous allons utiliser dans cette partie les estimations du Lemme A1, dont l'énoncé se trouve en appendice.

2.2.1 Régularité en espace

Théorème 2.2.1 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), *et* (H_3). *Alors, si, pour un entier* $l \in \mathbb{N}$, *la mesure* μ *satisfait à l'hypothèse* $(\mathrm{H}_5)(\frac{2}{d+l})$, *il existe un sous-ensemble* N_t *de* Ω, $\mathbb{P}$-*négligeable, tel que*: *pour tout* $\omega \in \Omega - N_t$, *l'application* $\Phi_2(V)(t, \cdot, \omega)$ *est de classe* C^l sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. L'ensemble de la démonstration repose sur les majorations de $G_{t-s}(x, y)$, énoncées dans le lemme A1.

Soit A un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, et t un réel positif fixé. Nous allons montrer que, sous chacune des conditions énoncées ci-dessus, il existe un ensemble $N_{t,A}$ tel que $\mathbb{P}(N_{t,A}) = 0$, et que, pour $\omega \notin N_{t,A}$, la fonction $V(t, \cdot, \omega)$ possède la régularité voulue.

Soit x_0 un point de A, et r_0, un réel strictement positif et tel que, pour un $\delta > 0$, on ait:

$$A \subset B[x_0, r_0 - \delta) \ ,$$

où $B[x, r)$ représente la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^d$. On note dans la suite de cette preuve $B = B[x_0, r_0)$. Alors, pour tout $y \notin B$, et tout x dans A, on a :

$$\|y - x_0\| - r_0 + \delta \leq \|y - x\| \leq \|y - x_0\| + r_0 \ . \tag{2.1}$$

Dans la suite, pour simplifier les écritures, on prendra $x_0 = 0$. Pour étudier la régularité de $\Phi_2(V)$, on va considérer séparément les particules situées en dehors de B et celles intérieures à B. Soit donc:

$$S(t,x) = \sum_{[0,t] \times B^c \times U} f(V_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y) \lambda^+(s,y,h) \ .$$

Le lemme suivant donne la régularité de la fonction S sur $\mathbb{R}^+ \times A$.

Lemme 2.2.1 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), *et* (H_3) *sont vérifiées*, *la fonction*: $(t,x) \mapsto S(t,x)$ *est presque sûrement de classe* C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times A$. *Plus précisément*, *il existe un ensemble* N_A, *qui est* $\mathbb{P}$-*négligeable*, *et tel que*:

$$(\omega \notin N_A) \Longrightarrow ((t,x) \mapsto S(t,x) \,\mathrm{est}\, C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times A)$$

Preuve du lemme. On montre en fait que, pour tout $T \geq 0$, il existe un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable $N_{T,A}$ tel que, si $\omega \notin N_{T,A}$, la fonction $S(\cdot, \cdot, \omega)$ est C^∞ sur $[0, T] \times A$. La conclusion du lemme en découle naturellement. Soit $D_{t,x}$ un opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. On envisage alors la somme:

$$S(D)(t,x) = \sum_{[0,t] \times B^c \times U} f(V_-)(s,y,h) D_{t,x}(G_{t-s}(x,y)) \lambda^+(s,y,h) \ ,$$

et on montre que, presque sûrement, elle converge normalement sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. Pour cela, il faut considérer, pour un y de B^c:

$$\sup_{\substack{t \leq T \\ x \in A}} \left| D_{t,x}(G_t(x,y)) \right| \ .$$

Comme, $\|x - y\| \geq \delta$, et $t \leq T$, il existe une constante C, et des réels n_1 et n_2, tels que:

$$\left|D_{t,x}(G_t(x,y))\right| \leq C\frac{\|x-y\|^{n_1}}{t^{n_2}}\mathrm{e}^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} \ .$$

Or, la fonction u définie par:

$$u(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2t}}}{t^{n_2}}$$

est une fonction majorée sur $\mathbb{R}^+$ par C/r^{2n_2}, et croissante sur $[0; r^2/2n_2]$, décroissante sur $[r^2/2n_2; +\infty)$. On a donc,

$$D_{t,x}(G_t(x,y)) \leq C\|x-y\|^{n_1-2n_2} \qquad \text{si } \|x-y\| \leq \sqrt{2Tn_2}$$

$$D_{t,x}(G_t(x,y)) \leq C\|x-y\|^{n_1}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\|x-y\|^2}{2T}}}{T^{n_2}} \text{ si } \|x-y\| \geq \sqrt{2Tn_2} \, .$$

Quitte à modifier la valeur de la constante C, on a donc, grâce à l'encadrement de $\|x-y\|$ donné dans (2.1),

$$\sup_{\substack{t\leq T\\ x\in A}} D_{t,x}(G_t(x,y)) \leq C(\|y\|+r_0)^{n_1}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(\|y\|-r_0+\delta)^2}{2T}}}{T^{n_2}} \ . \tag{2.2}$$

Et, par suite:

$$\sum_{[0,t]\times B^c\times U} |f(V_-)(s,y,h)| \sup_{\substack{x\in A\\ t\leq T}}\left|D_{t,x}(G_{t-s}(x,y))\right| \lambda^+(s,y,h)$$

$$\leq \sum_{[0,t]\times B^c\times U} C|f(V_-)(s,y,h)|(\|y\|+r_0)^{n_1}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(\|y\|-r_0+\delta)^2}{2T}}}{T^{n_2}}\lambda^+(s,y,h) \ .$$

Or, le membre de droite de cette inégalité est d'espérance finie, grâce aux hypothèses $(\mathrm{H}_1)(1)$ et (H_2). La conclusion du lemme s'ensuit donc: la fonction S est presque sûrement C^∞ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$. □

Le lemme 2.2.1 permet de ne considérer, pour l'étude de la régularité partielle en espace sur A, que les particules apparaissant dans un cylindre $[0,t]\times B$, pour un instant t positif fixé.

Lemme 2.2.2 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), et (H_3) *sont vérifiées, et qu'on a, pour un entier* l:

$$\int_0^t\int_{|h|\leq 1}\left(\frac{|h|}{(t-s)^{(d+l)/2}}\wedge 1\right) ds\, d\mu(h) < \infty \tag{2.3}$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(t,\cdot)$ *est presque sûrement de classe* C^l sur A.

Preuve du lemme. Fixons d'abord quelques notations. Pour un d-uplet $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose $|m| = m_1 + \cdots + m_d$, et

$$\partial^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_d^{m_d}} \quad .$$

Grâce au lemme 2.2.1, il suffit donc de prouver que, si la condition (2.3) est vérifiée, alors la fonction H définie selon:

$$H\colon\ x \mapsto \sum_{[0,t]\times B\times U} f(V_-)(s,y,h)G_{t-s}(x,y)\lambda^+(s,y,h) \ , \qquad (2.4)$$

est presque sûrement de classe C^l sur A. Pour cela, nous allons montrer que, si $m \in \mathbb{N}^d$ est tel que $|m| \leq l$, alors la série donnée par:

$$\sum_{[0,t]\times B\times U} |f(V_-)(s,y,h)| \left| \sup_{x\in A} \partial_x^m (G_{t-s}(x,y)) \right| \lambda^+(s,y,h) \ , \qquad (2.5)$$

converge, sous la condition (2.3). Remarquons d'abord qu'on peut supprimer dans cette somme les particules de masse $|h| \geq 1$, celles-ci étant en nombre fini dans $[0,t] \times B$. Par ailleurs, grâce au Lemme A1, on a, pour tout d-uplet m d'entiers, tel que $|m| \leq l$,

$$\left|\partial_x^m (G_{t-s}(x,y))\right| \leq \frac{C}{(t-s)^{(d+l)/2}} \ ,$$

pour une certaine constante C. La série (2.5) convergera donc uniformément sur A si:

$$\sum_{\substack{[0,t]\times B \\ \times\{|h|\leq 1\}}} \left(\frac{|h|(1+|V_-(s,y)|)}{(t-s)^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) \lambda^+(s,y,h) < \infty \ .$$

Or, si X est une variable aléatoire positive, $\mathbb{E}(X \wedge 1) \leq \mathbb{E}(X) \wedge 1$. Dès lors, en utilisant la formule d'intégration prévisible:

$$\mathbb{E}\left\{ \sum_{\substack{[0,t]\times B \\ \times\{|h|\leq 1\}}} \left(\frac{|h|(1+|V_-(s,y)|)}{(t-s)^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) \lambda^+(s,y,h) \right\} \leq M(1 + e^{\alpha t}\|V\|_E)$$
$$\times \int_0^t \int_B \int_{|h|\leq 1} \left(\frac{|h|}{(t-s)^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) ds\, dy\, d\mu(h) \ . \qquad (2.6)$$

De plus, la boule B est de mesure de Lebesgue finie. Donc, sous la condition (2.3), la fonction H est de classe C^l sur A. La preuve du lemme est donc complète. $\square$

Pour achever la démonstration du théorème 2.2.1, nous allons prouver que l'hypothèse $(\mathrm{H}_5)(\frac{2}{d+l})$ implique la condition suffisante donnée dans le lemme 2.2.2.

Considérons d'abord le cas $l = 0$, c'est-à-dire l'étude de la continuité de $\Phi_2(V)$ en la variable d'espace. On a:

$$\int_0^t \int_{|h|\le 1} \left(\frac{|h|}{(t-s)^{d/2}} \wedge 1 \right) ds\, d\mu(h)$$
$$\le \int_{|h|\le 1} |h| \int_{s=|h|^{2/d}}^t \frac{ds}{s^{d/2}}\, d\mu(h) + \int_{|h|\le 1} \int_{s=0}^{|h|^{2/d}} ds\, d\mu(h) \ .$$

L'étude de la première intégrale impose de séparer les cas $d \neq 2$ et $d = 2$.

Pour $d > 2$, si

$$\int_{|h|\le 1} |h|^{2/d} d\mu(h) < \infty \ ,$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(t, \cdot, \omega)$ est presque sûrement continue sur A.

Pour $d = 2$, si

$$\int_{|h|\le 1} |h| |\log(|h|)|\, d\mu(h) < \infty \ ,$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(t, \cdot, \omega)$ est presque sûrement continue sur A.

En dimension 1, on obtient:

$$\int_0^t \int_{|h|\le 1} \left(\frac{|h|}{(t-s)^{d/2}} \wedge 1 \right) ds\, d\mu(h) \le \sqrt{t}/2 \int_{|h|\le 1} |h|\, d\mu(h) < \infty \ ,$$

sous la seule hypothèse $(\mathrm{H}_1)(1)$, qui suffit pour conclure à la continuité en espace. Ceci démontre donc le théorème 2.2.1. pour $l = 0$.

L'étude du caractère C^l, pour $l > 0$, se fait de la même manière. Il faut considérer:

$$\int_0^t \int_{|h|\le 1} \left(\frac{|h|}{s^{(d+l)/2}} \wedge 1 \right) ds\, d\mu(h) \ .$$

Si $d + l \neq 2$, cette intégrale sera finie si:

$$\int_{|h|\le 1} |h|^{2/(d+l)}\, d\mu(h) < \infty \ .$$

Si $d = l = 1$, il faut imposer

$$\int_{|h|\le 1} |h| |\log(|h|)|\, d\mu(h) < \infty \ .$$

Le théorème est donc démontré. □

2.2.2 Régularité en temps

On étudie dans cette partie la régularité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $\Phi_2(V)(\cdot,x)$, x étant fixé dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème 2.2.2 *On suppose que les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), et (H_3) *sont vérifiées, et que la mesure* μ *vérifie* $(\mathrm{H}_5)(\frac{d}{d+2l})$, *pour un entier positif* l. *Alors, pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$, *il existe un sous-ensemble* N_x *de* Ω, *qui est* $\mathbb{P}$-*négligeable, et tel que: pour tout* $\omega \notin N_x$, *la fonction* $\Phi_2(V)(\cdot,x)$ *est de classe* C^l sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration. Soient A et B comme dans la partie précédente. Dans la suite, et pour simplifier les écritures, nous supposerons que $x=0$, et $x \in A$. De même que dans l'étude de la régularité en espace, on peut se restreindre, grâce au lemme 2.2.1 à l'étude de l'influence des seules particules apparaissant dans $[0,T] \times B$.

De plus, grâce au lemme A1, on a la majoration uniforme:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left|\frac{\partial^l G_{t-s}(0,y)}{\partial t^l}\right| \leq \frac{C'_l}{\|y\|^{d+2l}} \quad ,$$

qui conduit à la propriété suivante, analogue au lemme 2.2.2:

Lemme 2.2.3 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), *et* (H_3) *sont vérifiées, et qu'on a, pour un entier* l:

$$\int_B \int_{|h|\leq 1} \left(\frac{|h|}{\|y\|^{d+2l}} \wedge 1\right) dy\, d\mu(h) < \infty \tag{2.7}$$

alors la fonction $\Phi_2(V)(\cdot,0)$ *est presque sûrement de classe* C^l sur $[0,T]$.

Montrons à présent le théorème. Pour la continuité en temps, on étudie donc la finitude de

$$\int_B \int_{|h|\leq 1} \left(\frac{|h|}{\|y\|^{d}} \wedge 1\right) dy\, d\mu(h) \quad .$$

Cette intégrale se majore selon:

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0}\int_{|h|\leq 1}\left(\frac{|h|}{r^d}\wedge 1\right)r^{d-1}\,dr\,d\mu(h) &\leq (|\log(r_0)|+1/d)\int_{|h|\leq 1}|h|\,d\mu(h) \\ &\quad + \frac{1}{d}\int_{|h|\leq 1}|h||\log(|h|)|\,d\mu(h) \quad .\end{aligned}$$

Par hypothèse $\int_{|h|\le 1} |h|\, d\mu(h) < \infty$. Si, de plus, $\int_{|h|\le 1} |h||\ \log(|h|)|\, d\mu(h) < \infty$, la fonction $\Phi_2(V)(\cdot, 0, \omega)$ sera donc continue sur $[0, T]$.
Pour montrer que V est de classe C^l en temps, on considère, grâce à la condition (2.7), l'intégrale:

$$\int_A \int_{|h|\le 1} \left(\frac{|h|}{r^{d+2l}} \wedge 1 \right) r^{d-1}\, dr\, d\mu(h) \quad ,$$

qui sera finie si:

$$\int_{|h|\le 1} |h|^{\frac{d}{d+2l}}\, d\mu(h) < \infty \quad .$$

La démonstration du théorème est donc complète. $\square$

2.3 Etudes des régularités de $\Phi_1(V)$

Nous étudions à présent les régularités de $\Phi_1(V)$, en espace, puis en temps. Les méthodes employées dans cette partie diffèrent de celles utilisées dans l'étude de $\Phi_2(V)$: on emploie les lemmes A2 et A3 de l'appendice, et le critère de Kolmogoroff. Chaque partie présente deux résultats différents, suivant que la fonction g est supposée bornée ou non.

2.3.1 Régularité en espace de $\Phi_1(V)$

On obtient, sous l'hypothèse que g est bornée, une continuité et une dérivabilité partielle en espace, et une continuité en espace en dimension 1 et 2, lorque g est à croissance linéaire.

Théorème 2.3.1 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2) *et* (H_3) *sont vérifiées, et que la fonction g est bornée, alors, pour tout t positif, la fonction* $\Phi_1(V)(t, \cdot, \omega)$ *est continue et de classe* C^1 sur $\mathbb{R}^d$.

Théorème 2.3.2 *On suppose ici que* $d \le 2$, *que, pour tout p tel que* $1 \le p < 1 + 2/d$, *la mesure* λ^- *satisfait l' hypothèse* $(\mathrm{H}_1)(p)$, *et que les fonctions f et g vérifient respectivement* (H_2) *et* (H_3). *Alors, pour tout t positif, il existe un ensemble* $\mathbb{P}$*-négligeable* N_t, *tel que: si* $\omega \notin N_t$, *la fonction* $\Phi_1(V)(t, \cdot, \omega)$ *est continue* sur $\mathbb{R}^d$.

Dans ces démonstrations, on écrira en général $G(x, y)$ au lieu de $G_{t-s}(x, y)$, aucune ambiguïté n'étant à craindre.

La démonstration de chacun de ces théorèmes utilise le Lemme A2, dont l'énoncé se trouve en appendice.

Démonstration du Théorème 2.3.1.

Notons S un majorant de la fonction $|g|$, et soit

$$X(t,x,\omega) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(V)(s,y) G_{t-s}(x,y)\, ds\, dy \ .$$

La démonstration de la continuité est alors immédiate, en écrivant que:

$$|X(x) - X(z)| \leq S \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |G(x,y) - G(z,y)|\, ds\, dy \ ,$$

et en appliquant le Lemme A2, avec $\gamma = 1$.

Pour montrer la dérivabilité, nous remarquons d'abord que, pour un $r_0 > 0$, si on note $B = B[x_0, 2r_0)$, alors la fonction:

$$z \mapsto \int_0^t \int_{B^c} g(V)(s,y) G(z,y)\, ds\, dy \ ,$$

est différentiable sur $B[x_0, r_0)$, grâce aux théorèmes classiques de dérivation d'une fonction définie par une intégrale. Il suffit donc de montrer la différentiabilité de la fonction:

$$X_B(z) = \int_0^t \int_B g(V)(s,y) G(z,y)\, ds\, dy \ ,$$

pour $z \in B[x_0, r_0)$. Pour cela, on note que, grâce au lemme A2, la fonction g étant bornée, si $\|z - x\| \leq 1/2$ et $1 < \gamma < \gamma_c$, on a:

$$\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)|^\gamma \left(\frac{|G(z,y) - G(x,y)|}{\|z - x\|} \right)^\gamma ds\, dy \leq C \ .$$

La famille de fonctions $\frac{G(z,y) - G(x,y)}{\|z-x\|} g(V)(s,y)$ est donc équiintégrable sur $[0,t] \times B$ quand x tend vers z. Notons alors $\vec{\nabla}\, G(z,y)$ le gradient de la fonction $G(\cdot, y)$, pris en z, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. On a donc, si $z - x = \|z - x\| \vec{u}$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to z} \int_0^t \int_B g(V)(s,y) \frac{|G(z,y) - G(x,y)|}{\|z - x\|}\, ds\, dy \\ &\quad = \int_0^t \int_B g(V)(s,y) \langle \vec{\nabla} G(z,y), \vec{u} \rangle\, ds\, dy \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Or, la famille de fonctions $\| \vec{\nabla}\, G(z,y) \|$ est équiintégrable pour $z \in B[x_0, r_0)$. Par suite, en prenant pour $\vec{u}$, dans (2.8), un vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, on montre que la fonction X_B possède une dérivée partielle par rapport à x_i, continue pour $z \in B[x, r_0)$. En conséquence, X_B est de classe C^1 sur $B[x, r_0)$, ce qui achève la démonstration. □

Démonstration du Théorème 2.3.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et $r_0 > 0$, on note $B = B[x_0, 2r_0)$. Grâce aux théorèmes classiques de continuité pour des fonctions définies par une intégrale, il suffit de montrer la continuité de l'application:

$$X_B(z) = \int_0^t \int_B g(V)(s,y)G(z,y)\, ds\, dy \ ,$$

pour $z \in B[x_0, r_0)$. On applique pour cela le critère de Kolmogoroff, pour chacune des dimensions considérées ($d = 1$ ou 2.) En dimension 1, l'application de l'inégalité de Hölder pour un p tel que $1 < \alpha + 1 = p < 3$, fournit:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)||G(x,y) - G(z,y)|\, ds\, dy\right)^{1+\alpha} \\ \leq \int_0^t \int_B |g(V)(s,y)|^{1+\alpha}|G(x,y) - G(z,y)|\, ds\, dy \\ \times \left(\int_0^t \int_B |G(x,y) - G(z,y)|\, ds\, dy\right)^{\alpha} \ .\end{aligned}$$

Grâce au corollaire 1.3.1, il est possible de prendre l'espérance de chacune de ces quantités. En utilisant le Lemme A2, on montre alors que:

$$\mathbb{E}\left(|X_B(x) - X_B(z)|^{1+\alpha}\right) \leq C\|x - z\|^{1+\alpha} \ ,$$

avec un $\alpha > 0$. Le critère de Kolmogoroff permet de conclure. La même démonstration, faite en dimension plus grande, donnerait la continuité par rapport à chacun des x_i, si $x = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$.

Pour $d = 2$, on a $\gamma_c = 4/3$, et, grâce à l'inégalité de Hölder, on voit que :

$$\begin{aligned}|X_B(x) - X_B(z)|^{\gamma} \leq \left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)||G(x,y) - G(z,y)|^{\gamma}\, ds\, dy\right) \\ \times \left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)|\, ds\, dy\right)^{\gamma-1}\end{aligned}$$

Donc, avec une nouvelle application de Hölder

$$
\begin{aligned}
|X_B(x) - X_B(z)|^{\gamma\gamma'} \le & \left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)| \, ds \, dy \right)^{\gamma'(\gamma-1)} \\
& \times \int_0^t \int_B |g(V)(s,y)|^{\gamma'} |G(x,y) - G(z,y)|^{\gamma} \, ds \, dy \\
& \times \left(\int_0^t \int_B |G(x,y) - G(z,y)|^{\gamma} \, ds \, dy \right)^{\gamma'-1} .
\end{aligned}
$$

On note alors

$$
Y_B(x) = \frac{X_B(x)}{\left(\int_0^t \int_B |g(V)(s,y)| \, ds \, dy\right)^{1-1/\gamma}} .
$$

En prenant l'espérance dans les inégalités ci-dessus, on obtient, grâce au Lemme A2:

$$
\mathbb{E}\left(|Y_B(x) - Y_B(z)|^{\gamma\gamma'}\right) \le C\|x - z\|^{\gamma\gamma'} \ \forall \ \gamma < \gamma_c, \ \gamma' < 1 + 2/d = 2 .
$$

La conclusion s'ensuit grâce au lemme de Kolmogoroff. On obtient de surcroît une $1/4 - \epsilon$-hölderianité pour Y_B, donc pour X_B. □

2.3.2 Régularité en temps de $\Phi_I(V)$

On a deux théorèmes différents, suivant que la fonction g est supposée bornée ou simplement à croissance linéaire. Ces théorèmes fournissent la continuité en temps mais pas la dérivabilité.

Théorème 2.3.3 *Si les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2) *et* (H_3) *sont vérifiées, et que la fonction* g *est bornée, alors pour tout* x *dans* $\mathbb{R}^d$, *la fonction* $\Phi_1(V)(\cdot, x, \omega)$ *est continue* sur $\mathbb{R}^+$. *On a de plus, si* $\delta \le 1/2$,

$$
|\Phi_1(V)(t,x,\omega) - \Phi_1(V)(t+\delta,x,\omega)| \le C|\delta \log(|\delta|)| .
$$

Théorème 2.3.4 *Supposons vérifiées les hypothèses* $(\mathrm{H}_1)(1)$, (H_2), (H_3) *et* $(\mathrm{H}_1)(p)$, *pour un* $1 < p < 1 + 2/d$. *Alors, pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$, *il existe un ensemble* $\mathbb{P}$*-négligeable* N_x *tel que : si* $\omega \notin N_x$, *la fonction* $\Phi_1(V)(\cdot, x, \omega)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$.

Démonstration du Théorème 2.3.3. Soit S un majorant de $|g|$, alors, grâce au lemme A3, on a,

$$
|\Phi_1(V)(t,x,\omega) - \Phi_1(V)(t+\delta,x,\omega)| \le CS|\delta \ln(|\delta|)| ,
$$

ce qui montre le théorème 2.3.3.

Démonstration du Théorème 2.3.4. Si λ^- vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)(p)$, pour un $1 < p < 1 + 2/d$, on a, d'après le corollaire 1.3.1:

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(|V(t,x)|^p) < \infty \ ,$$

pour tout $T > 0$. Notons alors $X_x(t)$ la fonction:

$$X_x(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g(V)(s,y) G_{t-s}(x,y)\, ds\, dy \ .$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, en posant $1 + \alpha = p$, on a

$$\begin{aligned} &|X_x(t+\delta) - X_x(t)|^{1+\alpha} \\ &\quad \le \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |g(V)(s,y)|^p |G_{t+\delta-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y)|\, ds\, dy \\ &\quad\quad \times \left(\int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^d} |G_{t+\delta-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y)|\, ds\, dy \right)^{\alpha} \ . \end{aligned}$$

On trouve donc, en utilisant le Lemme A3:

$$\mathbb{E}\Big(|X_x(t+\delta) - X_x(t)|^{1+\alpha} \Big) \le C_{T,p} |\delta \ln(|\delta|)|^{1+\alpha}$$

Le lemme de Kolmogoroff permet alors de conclure. □

2.4 Régularité en dimension 1

On considère dans cette partie l'équation (0.5) posée dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, (donc avec $d = 1$), et sous l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)(2)$. Comme dans les équations analogues avec un bruit blanc, on utilise alors, pour sa résolution, une intégration stochastique L^2. Soit donc W le processus de E_2 solution de (0.5).

Théorème 2.4.1 *Soit* $t \ge 0$. *Si les hypothèses* (H_2),(H_4), $(\mathrm{H}_1)(2)$ *et* $(\mathrm{H}_1)(p)$ *sont vérifiées, pour un* $1 < p < 2$, *alors, il existe un ensemble* $\mathbb{P}$*-négligeable* N_t *tel que, si* $\omega \notin N_t$, *la fonction* $W(t,\cdot,\omega)$ *soit continue* sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Rappelons que le processus W vérifie:

$$\begin{aligned} W(t,x) = &\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) G_t(x,y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \bar{g}(W)(s,y) G_{t-s}(x,y)\, dy\, ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(W_-)(s,y,h) G_{t-s}(x,y)\, d\lambda(s,y,h) \end{aligned}$$

Le processus W^0, qui est le premier terme du membre de droite ci-dessus est clairement régulier. La régularité du deuxième terme se traite comme celle de $\Phi_1(V)$ dans la partie 2.3.1. Il suffit donc d'étudier la continuité de:

$$\Psi_2(W)(t,\cdot) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(W_-)(s,y,h) G_{t-s}(\cdot,y)\, d\lambda(s,y,h)$$

Pour cela, on utilise l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy pour un exposant p avec $1 < p < 2$, et $\int |h|^p \, d\mu(h)$ finie. On a donc, la fonction f étant à croissance linéaire:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|\Psi_2(W)(t,x) - \Psi_2(W)(t,z)|^p\} &\leq C\big(1 + \|W\|_2^p\big) \\ &\times \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |G_{t-s}(x,y) - G_{t-s}(z,y)|^p |h|^p \, ds\, dy\, d\mu(h) \ . \end{aligned}$$

Le lemme A2 permet d'en déduire que, si $p \neq 3/2$:

$$\mathbb{E}\{|\Psi_2(W)(t,x) - \Psi_2(W)(t,z)|^p\} \leq C\|z - x\|^{s(p)}. \ ,$$

avec: $s(p) = p$ si $1 < p < 3/2$, $s(p) = 3 - p$ si $3/2 < p < 2$. Dans le cas $p = 3/2$, on obtient:

$$\mathbb{E}\{|\Psi_2(W)(t,x) - \Psi_2(W)(t,z)|^p\} \leq C\|z - x\|^{\frac{3}{2}} |\ln(\|z - x\|)|$$

Le Lemme de Kolmogoroff fournit alors la conclusion souhaitée.

Remarque. Il est possible de résoudre (0.5), dans l'espace E_p, pour $1 < p < 2$, en supprimant l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)(2)$. La démonstration ci-dessus fournirait alors la même conclusion.

Si on résout (0.5) dans l'espace E_2, il est nécessaire d'imposer l'hypothèse: $\int |h|^p \, d\mu(h)$ finie, pour un $1 < p < 2$, afin de montrer la continuité de W en la variable d'espace. Dans le cas d'une E.D.P.S. conduite par un bruit blanc, Walsh, dans [6], montre la continuité de la solution de l'équation (0.1), conjointement en espace et en temps. Nous sommes ici beaucoup plus limités, pour sans doute deux raisons. D'abord, la solution V de (0.3), comme la solution W de (0.5), est non-bornée au voisinage de chaque particule, et ne peut pas être dans L^p, pour un $p > 3$, tandis que la solution de l'équation de Walsh est dans tous les espaces L^p, pour p supérieur à 1. En outre, pour utiliser le critère de Kolmogoroff, l'application de l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy conduit à essayer de majorer l'espérance de:

$$\left(\sum_{\substack{[0,t]\times \\ \mathbb{R}^d\times U}} f^2(V_-)(s,y,h)|G_{t-s}(x,y)-G_{t-s}(z,y)|^2\lambda^+(s,y,h)\right)^{p/2},$$

dans le cas de l'équation avec un bruit poissonnien, au lieu de:

$$\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} f^2(V)(s,y,h)|G_{t-s}(x,y)-G_{t-s}(z,y)|^2\,ds\,dy\right)^{p/2},$$

dans le cas de l'équation avec un bruit blanc.

3 Appendice

Dans le lemme A1, nous rappelons sans démonstration des estimations classiques sur les dérivées de la fonction de Green $G_t(x,y)$.

Lemme A1 *Soit g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par:*

$$g_1(x)=\frac{e^{\frac{-\|x\|^2}{2t}}}{t^{d/2}},$$

alors, $\forall l\in\mathbb{N}\ \exists C_l\geq 0$ *tel que, pour tout* $D=\frac{\partial^l}{(\partial x_1)^{i_1}\cdots(\partial x_d)^{i_d}}$ *où* $i_1+\cdots+i_d=l$:

$$\sup_{\mathbb{R}^d}|D(g_1(x))|\leq\frac{C_l}{t^{(d+l)/2}}.$$

Soit g_2 la fonction donnée sur $\mathbb{R}^+$ *par* $g_2(t)=\frac{e^{\frac{-r^2}{2t}}}{t^{d/2}}$. *Alors* $\forall l\in\mathbb{N}\ \exists C'_l\geq 0$ *tel que*:

$$\sup_{\mathbb{R}^+}\left|g_2^{(l)}(t)\right|\leq\frac{C'_l}{r^{d+2l}}.$$

Les lemmes A2 et A3 fournissent des estimations sur les intégrales des incréments de la fonction de Green.

Lemme A2. *Soit $T\geq 0$, et γ tel que $0<\gamma<1+2/d$. On pose $\gamma_c=1+\frac{1}{d+1}$. Alors, si $\|x-z\|\leq 1/2$, et $t\leq T$*:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|G_s(x,y)-G_s(z,y)|^\gamma\,ds\,dy\\&\quad\leq C\|x-z\|^\gamma && 0\leq\gamma<\gamma_c\\&\quad\leq C\|x-z\|^{\gamma_c}|\log(\|x-z\|)| && \gamma=\gamma_c\\&\quad\leq C\|x-z\|^{2-d(\gamma-1)} && \gamma>\gamma_c\end{aligned}$$

Démonstration. Dans l'ensemble de cette démonstration, on désignera par C un nombre réel strictement positif ne dépendant que de d, T, et γ, et dont la valeur pourra changer d'une ligne à l'autre. Posons:

$$\Delta = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |G_s(x,y) - G_s(z,y)|^\gamma \, ds \, dy \ .$$

Alors, quitte à effectuer un changement de variable isométrique, on se ramène à $x = 0$, et $z = he_1$, avec $h \geq 0$. ($(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ représentant la base canonique de $\mathbb{R}^d$).
On va montrer ces inégalités pour $T > 1$ et $h \leq 1/2$. On a donc,

$$\Delta = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |G_s(he_1,y) - G_s(0,y)|^\gamma \, ds \, dy \ .$$

En posant alors $y = hy'$, et $u = h^{-2}s$, cette expression devient:

$$\Delta = Ch^{2-d(\gamma-1)} \int_0^{T/h^2} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{e^{-\frac{(y'_1-1)^2+\cdots+y'^2_d}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1+\cdots+y'^2_d}{2u}}}{u^{d/2}} \right|^\gamma dy'_1 \cdots dy'_d \, du \ .$$

Nous commençons par nous affranchir des problèmes posés par l'intégrale quand u est petit, en remarquant que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |G_u(e_1,y') - G_u(0,y')|^\gamma \, du \, dy' &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} C|G_u(0,y')|^\gamma \, du \, dy' \\ &\leq C < \infty \ .\end{aligned}$$

Notons alors:

$$\Delta' = Ch^{2-d(\gamma-1)} \int_1^{T/h^2} \int_{y'_1 \in \mathbb{R}} \left| \frac{e^{-\frac{(y'_1-1)^2}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1}{2u}}}{u^{1/2}} \right|^\gamma dy'_1 \prod_{j=2}^d \int_{y'_j \in \mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{y'^2_j\gamma}{2u}}}{\sqrt{u}^\gamma} \, dy'_j \, du \ ,$$

on a donc:

$$\Delta' = Ch^{2-d(\gamma-1)} \int_1^{T/h^2} \frac{1}{u^{\frac{d}{2}(\gamma-1)}} \int_{y'_1 \in \mathbb{R}} \frac{\left| e^{-\frac{(y'_1-1)^2}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1}{2u}} \right|^\gamma}{u^{1/2}} dy'_1 \, du \ .$$

Il faut alors majorer:

$$\delta(u) = \int_{y'_1 \in \mathbb{R}} \frac{\left| e^{-\frac{(y'_1-1)^2}{2u}} - e^{-\frac{y'^2_1}{2u}} \right|^\gamma}{u^{1/2}} dy'_1 \ .$$

Pour cela, on note que: $(|y'_1 - 1| \leq |y'_1|) \Leftrightarrow (y'_1 \geq \frac{1}{2})$, ce qui permet de découper $\delta(u)$ selon $\delta(u) = 2I(u)$, avec:

$$I(u) = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\left(-e^{-\frac{y_1'^2}{2u}} + e^{-\frac{\left(y_1'-1\right)^2}{2u}}\right)^{\gamma}}{\sqrt{u}} \, dy_1' \ ,$$

par symétrie. De plus,

$$I(u) = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\left(1 - e^{\frac{\left(y_1'-1\right)^2 - y_1'^2}{2u}}\right)^{\gamma}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\left(y_1'-1\right)^2 \gamma}{2u}} \, dy_1' \ .$$

Effectuons alors le changement de variable $y = y_1' - 1$ dans $I(u)$, on obtient:

$$\sqrt{u} I(u) = \int_{-1/2}^{+\infty} \left(1 - e^{-\frac{(y+1)^2 - y^2}{2u}}\right)^{\gamma} e^{\frac{-y^2 \gamma}{2u}} \, dy \ .$$

Or, pour tout réel v, $1 - e^{-v} \leq v$; donc,

$$\sqrt{u} I(u) \leq \int_{-1/2}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \left(\frac{2y+1}{2u}\right)^{\gamma} dy \ ,$$

et,

$$\sqrt{u} I(u) \leq \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \left(\frac{2y+1}{2u}\right)^{\gamma} dy + \int_{-1/2}^{0} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \left(\frac{2y+1}{2u}\right)^{\gamma} dy \ .$$

Or, pour $\gamma \leq 1$, on a $(a+b)^{\gamma} \leq a^{\gamma} + b^{\gamma}$, et, si $\gamma \geq 1$, $(a+b)^{\gamma} \leq 2^{\gamma-1}(a^{\gamma} + b^{\gamma})$, par convexité. Donc,

$$\sqrt{u} I(u) \leq C \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \frac{y^{\gamma}}{u^{\gamma}} \, dy + C \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \frac{dy}{u^{\gamma}} + C \int_{-1/2}^{0} e^{-\frac{y^2}{2u/\gamma}} \frac{dy}{u^{\gamma}} \ .$$

Notons respectivement $\sqrt{u} K(u)$, $\sqrt{u} L(u)$, et $\sqrt{u} M(u)$ les trois intégrales ci-dessus. En effectuant le changement de variable $y' = y/\sqrt{u}$, on obtient:

$$K(u) \leq \frac{C}{u^{\frac{\gamma}{2}}}, \ L(u) \leq \frac{C}{u^{\gamma}}, \ M(u) \leq \frac{C}{u^{\gamma}} \ .$$

On a donc:

$$\delta(u) \leq \frac{C}{u^{\gamma/2}} + \frac{C}{u^{\gamma}} \ ,$$

par suite:

$$\Delta \leq C h^{2-d(\gamma-1)} \left(C + \int_{1}^{T/h^2} \left(\frac{C}{u^{\frac{d}{2}(\gamma-1) + \frac{\gamma}{2}}} + \frac{C}{u^{\frac{d}{2}(\gamma-1) + \gamma}}\right) du\right) \ . \tag{3.1}$$

Supposons dans un premier temps que tous les exposants de u, intervenant dans l'intégrale ci-dessus, soient différents de 1. On obtient alors:

$$\Delta \leq Ch^{2-d(\gamma-1)} + Ch^{\gamma} + Ch^{2\gamma} \ .$$

Donc, pour $h \leq 1/2$, on trouve:

$$\begin{aligned} &\Delta \leq Ch^{\gamma} && \text{si} \quad 0 < \gamma < \gamma_c \\ &\Delta \leq Ch^{2-d(\gamma-1)} && \text{si} \quad \gamma_c < \gamma < 1 + 2/d \ . \end{aligned}$$

Si on prend à présent $\gamma = \gamma_c = 1 + \frac{1}{d+1}$ dans (3.1), on obtient, pour $h \leq 1/2$,

$$\Delta \leq Ch^{\gamma_c} |\log(h)| \ ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Lemme A3. *Soit $T \geq 0$, et δ tel que $|\delta| \leq 1/2$. On a alors, si t et $t+\delta$ sont inférieurs à T:*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |G_{t+\delta-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y)| \, ds \, dy \leq C|\delta \log(\delta)|$$

en posant $G_u(x,y) = 0$, pour tout u strictement négatif.

Démonstration. Dans cette démonstration, la lettre C désignera encore une constante positive, et dont la valeur pourra changer d'une ligne à l'autre. On suppose aussi, quitte à modifier la valeur de t, que $\delta \geq 0$. Effectuons d'abord un changement de variable, en posant $t - s = \delta u$, et $x - y = \sqrt{\delta} z$, on montre ainsi:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |G_{t+\delta-s}(x,y) - G_{t-s}(x,y)| \, ds \, dy = |\delta| \\ \times \int_0^{T/\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |G_{u+1}(z) - G_u(z)| \, du \, dz \ . \end{aligned}$$

Soit $z_0(u)$, la fonction donnée par:

$$z_0(u) = \sqrt{d(u+1)u \log\left(1 + \frac{1}{u}\right)} \ .$$

Si $\|z\| = z_0$, alors $G_u(z) = G_{u+1}(z)$. La fonction z_0 est nulle en 0 et équivalente à $\sqrt{du}$ en $+\infty$. De plus, $G_{u+1}(z) \leq G_u(z)$ si, et seulement si: $\|z\| \leq z_0(u)$.
Soit à présent

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^d} |G_{u+1}(z) - G_u(z)| \, dz \ ,$$

alors :

$$I(u)=\int_{\|z\|\le z_0(u)}(G_u(z)-G_{u+1}(z))\,dz+\int_{\|z\|\ge z_0(u)}(G_{u+1}(z)-G_u(z))\,dz\ .$$

Un changement de variable en $z/\sqrt{u}$ dans G_u, et en $z/\sqrt{u+1}$ dans G_{u+1} fournit alors:

$$I(u)=2\int_{\|z\|=z_0(u)/\sqrt{u+1}}^{\|z\|=z_0(u)/\sqrt{u}}G_1(z)\,dz=C\int_{r=z_0(u)/\sqrt{u+1}}^{z_0(u)/\sqrt{u}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r^{d-1}\,dr\ ,$$

pour une constante C positive. Donc $I(u)\le C$ pour tout $u\ge 0$. De plus, pour $u\ge 1$, on a $z_0(u)\le C\sqrt{u}$, et donc:

$$\begin{aligned}I(u)&\le Cz_0(u)\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u+1}}\right)\left(\frac{z_0(u)}{\sqrt{u}}\right)^{d-1}\\&\le\frac{C}{u}\ .\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{\frac{T}{\delta}}I(u)\,du\le\int_0^1 C_1\,du+\int_1^{\frac{T}{\delta}}\frac{C_2}{u}\,du\le C_1+C_2\log\left(\frac{T}{\delta}\right)\ .$$

D' où, par multiplication par δ, la conclusion du lemme, pour $\delta\le 1/2$:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|G_{t+\delta-s}(x,y)-G_{t-s}(x,y)|\,ds\,dy\le C|\delta\log(\delta)|\ .$$

References

Jacod J. et Shiryaev A.N.: Limit Theorems for stochastic processes. Number 288 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaft. Springer-Verlag (1987)

Revuz A. et Yor, M.: Continuous Martingales and Brownian motion. Number 293 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaft. Springer-Verlag (1994)

Dellacherie C. et Meyer, P.-A.: Probabilités et potentiel- Tome 2. Number 1385 in Actualités scientifiques et industrielles. Institut de mathématique de l'Université de Strasbourg, Hermann edition (1980)

Gyöngy I., Krylov N.V.: On stochastic equations with respect to semimartingales I. Stochastics and stochastics reports, **4,** 1–21 (1980)

Kallianpur G., Xiong J., Hardy G. et Ramasubramanian, S.: The existence and uniqueness of solutions of nuclear-space valued stochastic differential equations

driven by Poisson random measures. Stochastics and stochastics reports, **50,** 85–122 (1994)
Walsh J.B.: An Introduction to SPDEs. In P.L. Hennequin editor, Ecole d'été de probabilité de St-Flour XIV, number 1180 in LNM, pages 265–439. Springer-Verlag (1984)