Probab. Theory Relat. Fields 110, 13–49 (1998)

Probability Theory and Related Fields

Points de croissance des processus de Lévy et théorie générale des processus

S. Fourati

Analyse et Modèles Stochastiques, UPRES-A CNRS 6085, INSA de Rouen, F-76130 Mt. St. Aignan, France

Received: 4 May 1995/In revised form: 6 May 1997

Summary. We prove a conjecture of J. Bertoin: a Lévy process has increase times if and only if the integral $\int_{0+} \frac{1}{G(x)} dH(x)$ is finite, where G and H are the distribution functions of the minimum and the maximum of the Lévy process killed at an independent exponential time. The "if" part of the statement had been obtained before by R. Doney. Our proof uses different techniques, from potential theory and the general theory of processes, and is self-contained. Our results also show that if $P(X_t > 0) \leq 1/2$ for all t small enough, then the process does not have increase times.

AMS Subject Classification (1991): Primary 60J30; Secondary 60G07, 60J55

Introduction

On sait depuis longtemps (voir Dvöretzky, Erdös, Kakutani [DEK], Berman [Be], Burdzy [Bu], Adelman [Ad]) que le mouvement brownien n'a pas de points de croissance. Plus précisément, étant donné un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$, il n'existe pas, presque surement, d'intervalle $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$, tel que l'on ait $B_s \leq B_u$ pour $s \in]t - \varepsilon, t]$, $u \in [t, t + \varepsilon[$. Récemment, Bertoin s'est intéressé au problème de l'existence de points de croissance pour les processus de Lévy, et il a dégagé des classes de tels processus pour lesquels on peut donner une réponse à ce problème : Ceux qui n'ont pas de sauts positifs [B1], ceux qui ⟪rampent vers le bas⟫ [B2], les processus stables [B3]. Il en a déduit la conjecture suivante : *Si G et H désignent les fonctions de répartition*

Key words: Lévy processes – Increase points – Subordinators – Local times – Excessive function – Optional projection – Dual projection

des lois des variables aléatoires égales respectivement aux valeurs absolues des valeurs minimales et maximales prises par le processus de Lévy X avant un temps exponentiel indépendant alors

$$X \textit{ a des points de croissance si et seulement si } \int_0^1 \frac{1}{G(x)}\, dH(x) < +\infty$$

Très récemment, Doney [D] a montré l'implication

$$\textit{Si } \int_0^1 \frac{1}{G(x)}\, dH(x) < +\infty \textit{ alors } X \textit{ a des points de croissance}$$

Nous allons montrer l'équivalence en toute généralité.

Par des réductions standards, l'existence de points de croissance pour un processus de Lévy X se ramène à celle de temps de croissance ⟪globaux⟫ pour le même processus tué en un temps exponentiel, c'est à dire de temps t tels que $0 \le t < \zeta$, et $X_s \le X_u$ pour tous $0 \le s \le t$, $t \le u < \zeta$, où ζ est une variable de loi exponentielle, indépendante de X. Une des approches de Bertoin consiste à considérer le processus $(S - X, X - J)$, où $J_t = \inf_{t \le s < \zeta} X_s$ et $S_t = \sup_{0 \le s \le t} X_s$. Ce processus est simplement markovien dans une filtration convenable, et ses instants de passage au point $(0,0)$ sont exactement les temps de croissance globaux du processus X. Le problème d'existence des points de croissance se ramène donc à celui de la polarité d'un point pour un certain processus de Markov, ce qui rendrait possible l'utilisation de méthodes de théorie du potentiel pour la résolution de ce problème si ce processus était fortement markovien. La propriété de Markov forte de $(S - X, X - J)$ n'est pas toujours vérifiée et quand elle l'est, elle est souvent difficile à établir (voir le commentaire du paragraphe 1.2). Nous verrons dans cet article que le processus $(S - X, X - J)$ vérifie toujours une propriété de Markov, que nous avons appelée dans [F2] ⟪propriété de Markov relativement à un couple $(\mathfrak{L}, \mathscr{G})$⟫ où $\mathfrak{L}$ et $\mathscr{G}$ sont des tribus sur $[0, +\infty[\times \Omega$, l'une décrivant un ⟪passé⟫, l'autre un ⟪futur⟫. C'est une propriété plus forte que la propriété de Markov simple, sans toutefois entraîner la propriété de Markov forte. Nous montrerons qu'on peut adapter les outils usuels de la théorie des processus de Markov (fonctions excessives, temps locaux, changement de temps, etc.) à cette propriété. Nous obtenons ainsi une illustration ⟪pratique⟫ des généralités introduites dans [F2].

La démonstration de la conjecture de Bertoin se décompose en trois étapes relativement autonomes. La première étape consiste à dégager une fonction co-excessive pour un certain processus de Markov qui est bornée si et seulement si il existe des points de croissance. Dans la deuxième étape, nous donnons une expression de cette fonction à l'aide de lois de variables aléatoires simples. Cette étape, comme la précédente, utilise exclusivement les outils de la théorie générale des processus (projections optionnelles, projections duales, etc.). La dernière étape consiste en une démonstration très simple d'un résultat général sur les flutuations d'un processus de Lévy qui permet de contrôler notre fonction à l'aide des fonctions G et H. Cette étape s'appuie sur des propriétés élémentaires des processus de Lévy.

Cette article est organisé comme suit. Dans la partie préliminaire 0, nous rappelons des éléments de théorie générale et nous introduisons la propriété de Markov relativement à un couple de tribus passé-futur. L'essentiel de cette partie et les démonstrations se trouvent dans [F1] et [FL]. Nous verrons encore dans cette partie que la propriété des processus de Lévy, c'est-à-dire d'être à accroissements indépendants et stationnaires, se formule de façon particulièrement agréable avec notre propriété. La partie 1 est consacrée à établir la propriété de Markov des processus $(X - J)$ et $(S - X, X - J)$ relativement à un couple de tribus passé-futur convenable. On y retrouve, sous une forme plus générale et sans efforts (sauf celui de ⟨⟨digérer⟩⟩ le formalisme), des résultats bien connus de Millar, et d'autres plus récents de Bertoin sur les décompositions des processus de Lévy en certains temps aléatoires. D'autre part, nous donnons des conditions suffisantes pour que les processus $(X - J)$ et $(S - X, X - J)$ soient fortement markoviens et un exemple contredisant cette propriété dans le cas général. La partie 2 contient des résultats préliminaires nécessaires pour la suite. Dans la troisième partie, on montre que l'ensemble des temps de croissance (c'est à dire l'ensemble des instants de passage du processus $(S - X, X - J)$ en $(0, 0)$) est vide, ou bien il contient un nombre infini d'éléments (ps), on y établit ensuite la propriété régénérative des points de croissance, on y trouve aussi un critère suffisant pour l'abscence de points de croissance ne faisant intervenir que la fonction $t \mapsto \mathbf{P}(X_t > 0)$. En particulier si X n'est pas un processus de Poisson composé et si cette fonction est majorée par $1/2$ dans un voisinage droit de l'origine alors il n'y a pas de points de croissance. Cela ne semble pas être une conséquence canonique de la conjecture de Bertoin. Dans la partie 4, nous donnons successivement les trois étapes de la démonstration de cette conjecture et nous terminons par des exemples.

Nous avons choisi de rédiger ce travail en remettant tout ⟨⟨à plat⟩⟩ pour reformuler des résultats, parfois bien connus, en termes adéquats pour l'utilisation des outils de la théorie générale des processus. Nous nous adressons tout particulièrement au lecteur ami de la théorie des processus de Lévy sans être féru de théorie générale des processus. Nous souhaitons le convaincre de l'utilité de cette théorie pour l'étude des processus de Lévy à travers l'application qui est faite ici au problème de l'existence des points de croissance.

Je tiens à remercier Jean Bertoin dont la clarté des conférences a éveillé mon intérêt pour les processus de Lévy et qui, par sa disponibilité et sa science, m'a permis de faire mes premiers pas dans cette théorie.

0 Préliminaires

0.0 Notations

Soit Ω l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R} \cup \{\delta\}$ (δ est un point cimetière), continues à droite et limitées à gauche, à durée de vie finie. On désigne par ζ

le temps de mort, par $X = \{X_t; t \geq 0\}$ le processus canonique des coordonnées et par $(\theta_t)_{t\geq 0}$ les opérateurs de translation habituels sur Ω définis par $\theta_t(\omega)(s) = \omega(t+s)$. On note $\sigma(.)$ la tribu engendrée, soit par une famille de variables aléatoires et dans ce cas c'est une tribu sur Ω, soit par une famille de processus (identifiés à des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$) et dans ce cas c'est une tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. On note les tribus sur Ω

$$\mathscr{G} = \sigma(X_s - X_0;\ s \geq 0)$$
$$\mathscr{F} = \sigma(X_s;\ s \geq 0)$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathscr{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(X_s;\ 0 \leq s < t + \epsilon)$$

On convient des égalités pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{\delta\}$, $\delta - x = x - \delta = \delta$, et $x \wedge \delta = \delta \wedge x = x$. Si z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{F})$ on note $z \circ \theta$ le processus $(t, \omega) \mapsto z \circ \theta_t(\omega)$. On désigne par $J = \{J_t; t \geq 0\}$ le processus minimum futur défini sur Ω par

$$J_t = \inf_{t \leq s < \zeta} X_s$$

Pour tout couple de réels positifs (s, t) tel que $s \leq t$ on a

$$J_s = \big(\inf_{s \leq u < t} X_u \big) \wedge J_t$$

On en déduit que si $s \leq t$ la variable aléatoire J_s est $\mathscr{F}_t \vee \sigma(J_t)$-mesurable, et donc que la famille de tribus $(\mathscr{F}_t \vee \sigma(J_t))_{t\geq 0}$ est croissante. On note $(\tilde{\mathscr{F}}_t)_{t\geq 0}$ la filtration obtenue par régularisation à droite. On introduit les tribus sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ suivantes

- $\mathfrak{O}$ est la tribu engendrée par les processus càdlàg $(\mathscr{F}_t)$-adaptés.
- $\tilde{\mathfrak{A}}$ $= \mathfrak{O} \vee \sigma(J)$
- $\tilde{\mathfrak{O}}$ est la tribu engendrée par les processus càdlàg $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$-adaptés.
- $\mathfrak{H}$ est la tribu engendrée par les processus de la forme $z \circ \theta$ où z est $\mathscr{G}$-mesurable.

La ⟨⟨théorie générale des processus⟩⟩ (théorème de section, de projection, de projection duale ...) est bien connue pour les tribus $\mathfrak{O}$ et $\tilde{\mathfrak{O}}$ (voir [DM1] et [DM2]) elle l'est moins pour les tribus $\tilde{\mathfrak{A}}$ et $\mathfrak{H}$, c'est pourquoi nous allons faire quelques rappels dans la section suivante. Nous renvoyons le lecteur à Azéma [Az], Lenglart [L] et [FL] pour plus de détails.

0.1. Rappels de théorie générale des processus

Définitions 0.1.1. *Une tribu de Lenglart est une tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par des processus càdlàg et comprise entre les tribus prévisible et optionnelle d'une filtration continue à droite sur Ω.*

Une tribu du futur strict est une tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *engendrée par des processus continus à droite et limités à gauche, telle que pour tout processus* Z, *mesurable par rapport à cette tribu, et tout* $s \in \mathbb{R}_+$, *le processus* $Z_{s+.}$ *est encore mesurable par rapport à cette tribu.*

On vérifie facilement que si $\mathfrak{S}$ est une tribu du futur strict contenant l'intervalle stochastique $[\![0, \zeta[\![$, la tribu retournée de $\mathfrak{S}$ c'est à dire la tribu engendrée par les processus $\{Z_{\zeta-t} 1_{0<t\leq\zeta}; t \in \mathbb{R}_+\}$ où Z est $\mathfrak{S}$-mesurable, est la tribu prévisible d'une filtration (voir Azéma [Az] et [FL]).

La tribu $\tilde{\mathfrak{A}}$ est un exemple de tribu de Lenglart (appelée tribu de Meyer par Lenglart et dans [FL]) (ici la filtration continue à droite est $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$), tandis que $\mathfrak{H}$ est un exemple de tribu du futur strict. On pourra remarquer que la tribu retournée de $\mathfrak{H}$ est la tribu prévisible naturellement associée au processus $\{X_\zeta^- - X_{\zeta-t}^-; 0 \leq t < \zeta\}$.

Dans la suite de cette section, $\mathfrak{L}$ désigne une tribu de Lenglart et $\mathfrak{S}$ une tribu du futur toutes deux contenant l'intervalle stochastique $[\![0, \zeta[\![$. On note $\mathfrak{L}^+$ et $\mathfrak{L}^-$ les tribus optionnelle et prévisible de la définition 0.1.1 contenant $\mathfrak{L}$, qui est clairement unique.

Définitions 0.1.2. *Une variable aléatoire* T, *sur* $(\Omega, \mathscr{F})$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *telle que l'intervalle stochastique* $[\![T, +\infty[\![$ *est* $\mathfrak{L}$*-mesurable est appelée un temps d'arrêt de* $\mathfrak{L}$. *Une variable aléatoire* τ, *sur* $(\Omega, \mathscr{F})$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$ *telle que l'intervalle stochastique* $[\![0, \tau]\!]$ *est dans* $\mathfrak{S}$ *est appelée un temps de retour de* $\mathfrak{S}$.

La notion de temps de retour correspond à celle de co-temps d'arrêt dans [FL].

Définitions 0.1.3. *On appelle* $\mathfrak{L}$*-mesure une mesure aléatoire* $B = \{B(\omega, ds);$ $\omega \in \Omega\}$ *(c'est-à-dire un noyau de mesures sur* $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$*) telle que le processus* $(t, \omega) \mapsto B(\omega, [0, t])$ *est* $\mathfrak{L}$*-mesurable. De même, une* $\mathfrak{S}$*-mesure est une mesure aléatoire* B *telle que le processus* $(t, \omega) \mapsto B(\omega, [t, +\infty[)$ *est* $\mathfrak{S}$*-mesurable .*

Pour tout temps aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty, +\infty\}$, on note Δ_T la mesure aléatoire égale en ω à la mesure de Dirac en $T(\omega)$ si $T(\omega)$ est finie et à la mesure nulle si $T(\omega)$ vaut $-\infty$ ou $+\infty$. Pour un ensemble aléatoire D quelconque (c'est-à-dire une partie mesurable de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$), on note Λ_D la mesure aléatoire égale en ω, à la mesure de comptage de l'ensemble $D(\omega)$. Si T est un $\mathfrak{L}$-temps d'arrêt, respectivement un $\mathfrak{S}$-temps de retour alors Δ_T est une $\mathfrak{L}$-mesure, respectivement une $\mathfrak{S}$-mesure. De même, si D est un ensemble $\mathfrak{L}$-mesurable, respectivement $\mathfrak{S}$-mesurable alors Λ_D est une $\mathfrak{L}$-mesure, respectivement une $\mathfrak{S}$-mesure.

Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on note $\mathfrak{L}_\infty$ et $\mathfrak{L}_U$ les tribus sur Ω définies par

$$\mathfrak{L}_\infty = \sigma(Z_T 1_{T<+\infty}; Z \text{ est } \mathfrak{L}\text{-mesurable, } T \text{ est un temps d'arrêt de } \mathfrak{L})$$
$$\mathfrak{L}_U = \sigma(Z_U 1_{U<+\infty} + z 1_{U=+\infty}; Z \text{ est } \mathfrak{L}\text{-mesurable}, z \text{ est } \mathfrak{L}_\infty\text{-mesurable})$$

De même, si v est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$, on pose

$$\mathfrak{S}_{-\infty} = \sigma(Z_\tau 1_{\tau>-\infty}; Z \text{ est } \mathfrak{S}\text{-mesurable, } \tau \text{ est temps de retour de } \mathfrak{S})$$
$$\mathfrak{S}_v = \sigma(Z_v 1_{v>-\infty} + z 1_{v=-\infty}; Z \text{ est } \mathfrak{S}\text{-mesurable}, z \text{ est } \mathfrak{S}_{-\infty}\text{-mesurable})$$

Commentaire. Revenons à notre exemple de tribu de Lenglart donné par la tribu $\tilde{\mathfrak{A}}$ et de tribu du futur strict donné par la tribu $\mathfrak{H}$. On peut voir que $\tilde{\mathfrak{A}}_\infty = \mathscr{F}$ et, pour tout réel positif t, $\tilde{\mathfrak{A}}_t = \mathscr{F}_t \vee \sigma(J_t)$. On a aussi $\mathfrak{H}_{-\infty} = \mathscr{G}$. Le temps, qu'on notera ρ, égal au premier instant où X prend sa valeur minimale ($\rho = \inf\{t \geq 0; X_t = J_t\} \cup \{t > 0; X_t^- = J_t^-\}$) est un exemple de temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{A}}$. Un autre exemple de temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{A}}$ important pour la suite est donné par le temps T_c égal au premier temps de croissance $T_c = \inf\{t \geq 0; X_t = J_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s\}$. De plus, le temps T_c a son graphe inclus dans l'ensemble $\{X - J = 0\}$ par définition, par conséquent la tribu $\tilde{\mathfrak{A}}_{T_c}$ est égale à la tribu notée $\mathscr{F}_{T_c}$ dans la littérature c'est-à-dire celle engendrée par les variables aléatoires de la forme Z_{T_c} où Z parcourt l'ensemble des processus optionnels de la filtration $(\mathscr{F}_t)$. Tandis que la tribu $\tilde{\mathfrak{O}}_{T_c}$ qu'on obtient en remplaçant $\tilde{\mathfrak{A}}$ par $\tilde{\mathfrak{O}}$ (c'est-à-dire en prenant $\mathfrak{L}^+$ au lieu de $\mathfrak{L}$) est égale à la tribu notée $\tilde{\mathscr{F}}_{T_c}$ dans la littérature (et dans la suite de ce travail) engendrée par les variables de la forme Z_{T_c} où Z parcourt l'ensemble des processus optionnels de la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$. Il est bien connu (cf [DM 1]) que T_c étant un temps d'arrêt de cette filtration, la tribu $\tilde{\mathscr{F}}_{T_c}$ est égale à celle, souvent notée $\tilde{\mathscr{F}}_{T_c}^+$ dans la littérature, engendrée par les variables de la forme Z_{T_c} où Z parcourt l'ensemble des processus progressifs de la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$. La tribu $\tilde{\mathscr{F}}_{T_c}$ est en particulier plus grande que $\mathscr{F}_{T_c}^+$.

Dans la suite, l'espace $(\Omega, \mathscr{F})$ sera muni d'une probabilité $\mathbf{P}$ telle que le temps ρ, n'est pas (ps) un temps de saut positif du processus canonique X. Dans ce cas, le graphe de ρ est aussi, à une indistinguabilité près, inclus dans l'ensemble $\{X - J = 0\}$ et la tribu $\tilde{\mathfrak{A}}_\rho$ est alors égale, aux ensembles négligeables près, à la tribu $\mathscr{F}_\rho$. Nous verrons par ailleurs (cf corollaire 1.2.4) que les tribus $\tilde{\mathfrak{A}}_\rho$ et $\tilde{\mathscr{F}}_\rho$ sont aussi égales aux ensembles négligeables près. Cela implique en particulier l'égalité des tribus $\mathscr{F}_\rho^+$ et $\mathscr{F}_\rho$ aux ensembles négligeables près ; cette égalité de tribus est un résultat bien connu de Millar [M].

Soit $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité quelconque sur l'espace $(\Omega, \mathscr{F})$. Voici les résultats d'existence de projection et de projection duale sur une tribu de Lenglart $\mathfrak{L}$ et sur une tribu du futur $\mathfrak{S}$, qui sont établis dans [L] et [FL].

Proposition 0.1.4. *Pour tout processus mesurable Z, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, il existe un processus $\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)$ (resp. $\Pi^{\mathfrak{S}}(Z)$), à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\mathfrak{L}$-mesurable (resp. $\mathfrak{S}$-mesurable), nul hors de $[\![0, \zeta[\![$, et unique à l'indistinguabilité près, tel que*

a) *pour tout temps d'arrêt T de $\mathfrak{L}$,*

$$\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)_T 1_{T<\zeta} = \mathbf{E}[Z_T | \mathfrak{L}_T] 1_{T<\zeta}$$

b) *respectivement, pour tout temps de retour τ de $\mathfrak{S}$,*

$$\Pi^{\mathfrak{S}}(Z)_\tau 1_{\tau\geq 0} = \mathbf{E}[Z_\tau|\mathfrak{S}_\tau]1_{\tau\geq 0}$$

Les processus $\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)$ et $\Pi^{\mathfrak{S}}(Z)$ sont les projections de Z sur $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{S}$. Dans la suite, tous les processus qu'on projettera seront implicitement à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et nuls hors de $[\![0,\zeta[\![$. Nous conviendrons également que, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur la mesure de probabilité choisie, une égalité entre processus sera une égalité à indistinguabilité près. De plus, la notation $\int_a^b$ désignera l'intégrale sur l'intervalle fermé à droite et ouvert à gauche $[a,b[$.

Proposition 0.1.5. *Pour toute mesure aléatoire* $A = \{A(\omega,ds);\omega\in\Omega\}$, *telle que* $\mathbf{E}(A[0,\zeta[) < +\infty$, *il existe une* $\mathfrak{L}$*-mesure notée* $A^{\mathfrak{L}} = \{A^{\mathfrak{L}}(\omega,ds);\omega\in\Omega\}$, (*resp. une* $\mathfrak{S}$*-mesure, notée* $A^{\mathfrak{S}}$), *unique à l'indistinguabilité près*[1]*portée par* $[0,\zeta[$, *telle que pour tout processus Z mesurable*, *on ait*

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\zeta \Pi^{\mathfrak{L}}(Z)_s A(ds)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta Z_s A^{\mathfrak{L}}(ds)\right]$$

Respectivement,

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\zeta \Pi^{\mathfrak{S}}(Z)_s A(ds)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta Z_s A^{\mathfrak{S}}(ds)\right]$$

Nous énonçons dans la proposition suivante des propriétés des projections sur $\mathfrak{L}$ et sur $\mathfrak{S}$ que l'on utilisera dans la suite et qui sont établies dans [L] et dans [FL].

Proposition 0.1.6.

a) *Si Z est continu à droite et borné* (*ps*) *alors* $\Pi^{\mathfrak{S}}(Z)$ *est continu à droite et borné* (*ps*), $\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)$ *est limité à droite et borné* (*ps*) *et le processus régularisé à droite* $\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)^+$ *est égal* (*ps*) *à* $\Pi^{\mathfrak{L}^+}(Z)$.

b) *Si Z est nul* (*ps*) *hors d'un ensemble à coupes dénombrables alors* $\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)$ et $\Pi^{\mathfrak{S}}(Z)$ *ont la même propriété*.

Proposition 0.1.7. *Soit A une mesure aléatoire telle que* $\mathbf{E}(A[0,\zeta[) < +\infty$. *Les supports de* $A^{\mathfrak{L}}$ *et de* $A^{\mathfrak{S}}$ *contiennent* (*ps*) *le support de A*.

Démonstration. Soit O un ensemble aléatoire inclus dans $[\![0,\zeta[\![$ dont les coupes sont des intervalles ouverts, on a montré dans [F1] que le processus $\Pi^{\mathfrak{L}}(1_O)$ est strictement positif (ps) sur O. En prenant des réunions dénombrables de tels ensembles aléatoires, on en déduit que cette propriété est encore vraie pour tout ensemble aléatoire inclus dans $[\![0,\zeta[\![$ dont les coupes sont des ouverts de $\mathbb{R}_+$. Soit A une mesure aléatoire portée par $[0,\zeta[$,

[1] Dire que deux mesures aléatoires A et B sont indistinguables signifie que l'ensemble $\{\omega$; les mesures $A(\omega,ds)$ et $B(\omega,ds)$ sont différentes$\}$ est négligeable.

on note K l'ensemble aléatoire dont la coupe en ω, pour tout ω, est égale au support de la mesure $A^{\mathfrak{L}}(\omega, ds)$ et K^c son complémentaire, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\int_0^\zeta \Pi^{\mathfrak{L}}(1_{K^c})_t A(dt)\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta 1_{t\in K^c} A^{\mathfrak{L}}(dt)\right] \\ &\qquad \text{(par définition de la projection duale)} \\ &= 0 \qquad \text{(par définition de } K)\end{aligned}$$

et donc la mesure $A(\omega, dt)$ est portée (pour presque tous les ω) par l'ensemble $\{t; \Pi^{\mathfrak{L}}(1_{K^c})_t(\omega) = 0\}$, qui est inclus dans $K(\omega)$ d'après la remarque qui précéde. L'ensemble $K(\omega)$ contient donc (ps) le support de la mesure $A(\omega, dt)$. La même démonstration est valable pour la projection duale sur $\mathfrak{S}$.

Proposition 0.1.8. *Si Z est un processus positif borné, $\mathfrak{S}$-mesurable, càdlàg et tel que pour tout $s \geq 0$* (*on convient que $Z_t = 0$ pour $t < 0$*)

$$\Pi^{\mathfrak{S}}(Z_{.-s}) \leq Z$$

alors il existe une mesure aléatoire A telle que

$$Z = \Pi^{\mathfrak{S}}(A[0, .]) \qquad \textit{sur } [\![0, \zeta[\![$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que le processus $\hat{Z} = \left\{Z^-_{\zeta-t}; 0 \leq t < \zeta\right\}$ est une surmartingale positive, bornée et càdlàg, on peut donc prendre sa décomposition de Doob. On obtient ensuite le résultat cherché en retournant de nouveau le tout (processus et mesures aléatoires).

0.2. Sur la propriété de Markov et la propriété de Lévy

Nous allons rappeler le principe de commutation des projections (qui est le fondement de tout ce qui va suivre) et ses relations avec la propriété de Markov. On reprend les notations du paragraphe 0.1 et on considère un processus Y sur $(\Omega, \mathscr{F})$, à valeurs dans un espace mesurable $(E \cup \{\delta\}, \mathscr{E} \vee \{\delta\})$ et valant δ hors de $[\![0, \zeta[\![$. On suppose dans toute la suite que l'intervalle stochastique $[\![0, \zeta[\![$ et le processus Y sont à la fois mesurables pour les tribus $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{S}$.

Proposition 0.2.1. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *Pour tout processus $\mathfrak{S}$-mesurable Z, il existe une fonction f mesurable sur $(E, \mathscr{E})$ telle que*

$$\Pi^{\mathfrak{L}}(Z) = f(Y)$$

(ii) *Pour tout processus $\mathfrak{L}$-mesurable Z, il existe une fonction f mesurable sur $(E, \mathscr{E})$ telle que*

$$\Pi^{\mathfrak{S}}(Z) = f(Y)$$

(iii) *Pour tout processus mesurable Z, il existe une fonction f mesurable sur $(E, \mathscr{E})$ telle que*

$$\Pi^{\mathfrak{L}}(\Pi^{\mathfrak{S}}(Z)) = \Pi^{\mathfrak{S}}(\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)) = f(Y)$$

D'autre part, l'une d'entre elles entraîne les deux propriétés suivantes

(iv) *Pour toute $\mathfrak{S}$-mesure A telle que $\mathbf{E}(A[0, \zeta[) < +\infty$ la projection $A^{\mathfrak{L}}$ est indistinguable d'une $\mathfrak{S}$-mesure.*

(v) *Pour toute $\mathfrak{L}$-mesure A telle que $\mathbf{E}(A[0, \zeta[) < +\infty$ la projection $A^{\mathfrak{S}}$ est indistinguable d'une $\mathfrak{L}$-mesure.*

Définition 0.2.2. *Si le processus Y vérifie l'une des trois propriétés $(i), (ii)$ ou (iii) on dira qu'il est $(\mathfrak{L}, \mathfrak{S})$-markovien sous* $\mathbf{P}$.

Dans toute la suite, les fonctions mesurables sur les espaces d'états de nos processus markoviens seront représentées par les lettres f ou g, elles seront implicitement à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et nulles au point δ qui sera toujours le nom de la valeur cimetière de nos processus.

Il est facile de voir que si Y est $(\mathfrak{L}, \mathfrak{S})$-markovien alors il est simplement markovien dans sa propre filtration. Lorsque $\mathfrak{L}$ est la tribu optionnelle de la filtration continue à droite naturellement associée à Y et $\mathfrak{S}$ est la tribu engendrée par les processus $(Y_{s+.})$ pour $s \geq 0$, le processus Y est markovien relativement au couple $(\mathfrak{L}, \mathfrak{S})$ si et seulement s'il est fortement markovien dans sa propre filtration. La définition 0.2.2 est donc une généralisation de la propriété de Markov; elle a été introduite et étudiée dans [F2]. Dans la suite, la mesure $\mathbf{P}$ sera une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ qui fait du processus canonique X un processus de Lévy tué en un temps indépendant de loi exponentielle. Le lecteur se convaincra facilement que la propriété de Lévy du processus X entraîne que pour toute variable $\mathscr{G}$-mesurable z, on a

$$\Pi^{\mathfrak{O}}(z \circ \theta) = \mathbf{E}(z) \qquad \text{sur } [\![0, \zeta[\![\tag{0.2.a}$$

Il est équivalent de dire que pour tout processus $\mathfrak{H}$-mesurable Z, il existe $k \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\Pi^{\mathfrak{O}}(Z) = k \qquad \text{sur } [\![0, \zeta[\![\tag{0.2.b}$$

Cela signifie également que le processus qui vaut 1 sur $[\![0, \zeta[\![$ et δ ailleurs est markovien relativement au couple $(\mathfrak{O}, \mathfrak{H})$. Nous montrerons plus loin que le processus $X - J$ est markovien relativement au couple de tribus $(\tilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{H})$.

0.3. Sur l'existence de temps locaux

On suppose toujours le processus Y markovien relativement au couple $(\mathfrak{L}, \mathfrak{S})$ et on note c un point de l'espace d'état E, tel que la probabilité que la trajectoire de Y rencontre c soit strictement positive. Pour tout ω, on note $C(\omega)$ l'ensemble $\{t; Y_t(\omega) = c\}$ et C l'ensemble aléatoire $C = \{(t, \omega); Y_t(\omega) = c\}$.

Proposition 0.3.1. *Il existe une mesure aléatoire B, unique à l'indistinguabilité près, et vérifiant les propriétés suivantes*:

(i) *Pour tout ω, la mesure $B(\omega, ds)$ est portée par l'ensemble $C(\omega)$.*
(ii) *B est une $\mathfrak{L}$-mesure.*
(iii) *B est* **P**-*indistinguable d'une $\mathfrak{S}$-mesure.*
(iv) $\mathbf{E}(B[0,\zeta[) = 1$.

Démonstration. Le théorème de section mesurable (cf [DM1]) fournit un temps aléatoire T, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, dont le graphe est inclus dans l'ensemble $\{(t,\omega); Y_t(\omega) = c\}$ et tel que $\mathbf{P}(T < +\infty) > 0$. On note $B = \dfrac{1_C}{\mathbf{P}(T<+\infty)} \left(\Delta_T^{\mathfrak{S}}\right)^{\mathfrak{L}}$. On vérifie facilement que B vérifie les propriétés (i) à (iv). Reste l'unicité. Si B et B' sont deux mesures aléatoires vérifiant les propriétés (i) à (iv). On a la suite d'égalités, pour tout processus mesurable positif Z,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta} Z_s B(ds)\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta} Z_s (B^{\mathfrak{L}})^{\mathfrak{S}}(ds)\right] \qquad (\text{propriété } (ii) \textit{ et } (iii))\\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta} \Pi^{\mathfrak{L}}\Pi^{\mathfrak{S}}(Z)_s B(ds)\right]\\
&\quad (\text{par définition des projections duales})\\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta} f(Y_s) B(ds)\right] \qquad (\text{car } \Pi^{\mathfrak{L}}\Pi^{\mathfrak{S}}(Z) = f(Y))\\
&= f(c)\mathbf{E}(B[0,\zeta[)] \qquad (\text{propriété } (i))\\
&= f(c) \qquad (\text{propriété } (iv))
\end{aligned}$$

De même, on a l'égalité $\mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta} Z_s B'(ds)\right] = f(c)$.

On a donc $\mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta} Z_s B(ds)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta} Z_s B'(ds)\right]$ pour tout processus mesurable positif Z. On en déduit facilement que B et B' sont indistinguables.

Corollaire 0.3.2 *Si B vérifie les propriétés de (i) à (iv) de la proposition* 0.3.1 *précédente alors, pour presque tout ω, le support de $B(\omega, ds)$ est égal à l'adhérence de l'ensemble $C(\omega)$.*

Démonstration. D'après la propriété (i) de la proposition 0.3.1, le support de la mesure $B(\omega, ds)$, noté $K(\omega)$, est inclus dans l'adhérence de $C(\omega)$. Il reste à vérifier l'inclusion p.s. de $C(\omega)$ dans $K(\omega)$. Soient T un temps aléatoire dont le graphe est inclus dans C et tel que $\mathbf{P}(T < +\infty) > 0$ et $D = \frac{1_C}{\mathbf{P}(T<+\infty)} \left(\Delta_T^{\mathfrak{S}}\right)^{\mathfrak{L}}$. On a vu dans la démonstration de la proposition précédente que D vérifie les propriétés de (i) à (iv). En vertu de l'unicité de B, B et D sont indistinguables. D'autre part, en appliquant successivement la proposition 0.1.7 à la projection duale de Δ_T sur $\mathfrak{S}$ puis sur $\mathfrak{L}$, on obtient que le support de la mesure $D(\omega, ds)$ (donc $K(\omega)$) contient $T(\omega)$ pour presque tous les ω. Ceci étant vrai pour tout temps aléatoire T dont le graphe est inclus dans C, le théorème de section mesurable (cf [DM1]) permet d'en déduire l'inclusion $C(\omega) \subset K(\omega)$ (ps).

Corollaire 0.3.3 *Si B vérifie les propriétés de (i) à (iv) de la proposition* 0.3.1 *précédente alors l'une des suivantes est aussi vérifiée*:

(v) *L'ensemble $C(\omega)$ a un nombre fini d'éléments (ps) et on peut choisir B égal à $k\Lambda_C$ avec $k = \mathbf{E}(\sharp C)^{-1} \in]0, +\infty[$.*

(vi) *L'ensemble $C(\omega)$ n'a pas de points isolés (ps) et on peut choisir B telle que la mesure $B(\omega, ds)$ soit diffuse pour tout ω.*

Démonstration. On note $\Delta B(t, \omega) = B(\omega, \{t\})$. Il est facile de vérifier que les propriétés (ii) et (iii) impliquent que le processus ΔB est à la fois $\mathfrak{L}$-mesurable et $\mathbf{P}$-indistinguable d'un processus $\mathfrak{S}$-mesurable, il est donc $\mathbf{P}$-indistinguable de sa projection sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire d'un processus de la forme $f(Y)$. De plus $B(\omega, ds)$ étant porté par $C(\omega)$, le processus ΔB est nul hors de C, il est donc indistinguable de $f(c)1_C$. On distingue alors deux cas: Soit $\mathbf{E}\left(\sum_{0 \le s < \zeta} \Delta B_s\right) > 0$ et on a

$$0 < \mathbf{E}\left(\sum_{0 \le s < \zeta} \Delta B_s\right) = f(c)\mathbf{E}(\sharp C) \le \mathbf{E}(B[0, \zeta[) < +\infty$$

On en déduit que $f(c) > 0$ et $\mathbf{E}(\sharp C) < +\infty$ et donc que $C(\omega)$ a un nombre fini d'éléments (ps), on vérifie alors aisément que la mesure aléatoire $B' = \dfrac{1}{\mathbf{E}(\sharp C)} \Lambda_C$ vérifie les propriétés (i) à (iv) et la propriété (v) est vérifiée.

Soit $\mathbf{E}\left(\sum_{0 \le s < \zeta} \Delta B_s\right) = 0$, la mesure aléatoire $B' = 1_{\Delta B = 0} B$ est donc indistinguable de B, on voit alors facilement qu'elle vérifie les propriétés (i) à (iv) et que la mesure $B'(\omega, ds)$ est diffuse pour tout ω. Le support de cette mesure est donc un fermé parfait et il est égal à l'adhérence de $C(\omega)$ pour presque tout ω d'après le corollaire précédent ; l'ensemble $C(\omega)$ n'a donc pas de points isolés et la propriété (vi) est vérifiée.

0.4. Sur les semi-groupes de transition

On reprend les notations des paragraphes précédents, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$ sont deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ et on suppose que Y est $(\mathfrak{L}, \mathfrak{S})$-markovien sous les lois $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$. Le processus Y vérifie en particulier la propriété de Markov simple sous ces deux lois. On suppose de plus qu'il existe un semi-groupe markovien $(P_t)_{t \ge 0}$ sur $(E, \mathscr{E})$ qui soit à la fois un noyau de transition de Y sous $\mathbf{P}$ et sous $\mathbf{P}'$. On a alors

Propriété (0.4.1) *Pour tout processus $\mathfrak{S}$-mesurable Z il existe une fonction f mesurable sur $(E, \mathscr{E})$ telle que $f(Y)$ est une version de $\Pi^{\mathfrak{L}}(Z)$ sous $\mathbf{P}$ et sous $\mathbf{P}'$.*

Réciproquement, si la propriété (0.4.1) est vérifiée, et si $(P_t)_{t \ge 0}$ est un semi-groupe de transition pour Y sous $\mathbf{P}$, alors c'est aussi un semi-groupe de transition pour Y sous $\mathbf{P}'$. La construction de semi-groupes de transition étant un problème délicat, et n'étant pas nécessaire pour la suite, nous n'en effectuerons pas, et utiliserons la formulation (0.4.1) pour traduire le fait qu'un processus, markovien sous $\mathbf{P}$ et sous $\mathbf{P}'$, admet le même semi-groupe de transition pour ces deux lois.

1. Propriété de Markov des processus $(S - X)$, $(X - J)$ et $(S - X, X - J)$

On reprend les notations du paragraphe 0.0 et on convient que, pour tout processus Z admettant des limites à gauche en tout temps strictement positif, on prolonge Z^- en 0 en posant $Z_0^- = \delta$. On désigne par $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ qui fait de X un processus de Lévy issu de 0 et tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre 1. On suppose dans toute la suite

Hypothèse 1.0.0 *Les ensembles* $]0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0[$ *sont réguliers :*

$$\inf\{t; X_t > 0\} = 0 \quad \text{et} \quad \inf\{t; X_t < 0\} = 0 \qquad \mathbf{P}\text{-}ps$$

On remarquera facilement qu'alors presque sûrement, il n'existe qu'un unique temps où le processus canonique X prend sa valeur minimale (respectivement maximale) et que cet instant n'est pas un temps de saut de X.

Notations et Définitions 1.0.1 *On désigne par M et m les valeurs maximale et minimale de X, par σ le premier instant où il prend sa valeur maximale et ρ le premier instant où il prend sa valeur minimale*:

$$M = \sup\{X_t; 0 \leq t < \zeta\} \quad \sigma = \inf\{t; X_t - X_0 = M \text{ ou } X_t^- = M\}$$
$$m = \inf\{X_t - X_0; 0 \leq t < \zeta\}$$
$$\begin{aligned}\rho &= \inf\{t; X_t - X_0 = m \text{ ou } X_t^- - X_0 = m\}\\ &= \inf\{t; X_t - J_t = 0 \text{ ou } X_t^- - J_t^- = 0\}\end{aligned}$$

On désignera par $\mathbf{P}'$ la mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ égale à la loi du processus $(X_{t+\rho} - X_\rho; t \geq 0)$ sous $\mathbf{P}$.

On note $S = (S_t)_{t \geq 0}$ le processus maximum passé défini par

$$S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$$

où l'on a convenu que pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{\delta\}$, $x \vee \delta = \delta \vee x = \delta$.
et $\tilde{\mathfrak{H}}$ *la tribu sur* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$,

$$\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \vee \sigma(S - X)$$

Lemme 1.0.2 *la tribu $\tilde{\mathfrak{H}}$ est un tribu du futur strict.*

Démonstration. Pour tous $s, t \geq 0$ on a

$$S_{s+t} - X_{s+t} = \left[(S_t - X_t) \vee \sup_{0 \leq u \leq s}(X_{u+t} - X_t)\right] - (X_{s+t} - X_t)$$

ce qui montre que le processus $(S_{s+t} - X_{s+t})_{t\geq 0}$ est $\tilde{\mathfrak{H}}$-mesurable et $\tilde{\mathfrak{H}}$ vérifie donc les axiomes de la définition (0.1.1)

Soit $\tilde{z} = \tilde{z}(x, \omega)$ une application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $[0, +\infty]$, $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{G}$-mesurable, que l'on prolonge sur $\{\delta\} \times \Omega$ en posant $\tilde{z}(\delta, \omega) = 0$. On notera $\tilde{z} \circ \tilde{\theta}$ le processus sur Ω défini par

$$(\tilde{z} \circ \tilde{\theta})_t(\omega) = \tilde{z}(S_t(\omega) - X_t(\omega), \theta_t(\omega))$$

La tribu $\tilde{\mathfrak{H}}$ est engendrée par les processus de la forme $\tilde{z} \circ \tilde{\theta}$ où $\tilde{z}$ parcourt l'ensemble des applications $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{G}$-mesurables.

1.1. Propriété de Markov du processus $S - X$

Proposition 1.1.1. *Le processus $S - X$ est $(\mathfrak{O}, \tilde{\mathfrak{H}})$-markovien sous* $\mathbf{P}$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{\delta\}$ on a, en notant $\tilde{Z}(x)$ le processus $(t, \omega) \mapsto \tilde{z}(x, \theta_t(\omega))$

$$\Pi^{\mathfrak{O}}(\tilde{Z}(x)) = \mathbf{P}(\tilde{z}(x, .)) = g_{\tilde{z}}(x)$$

Comme $S - X$ est $\mathfrak{O}$-mesurable, on en déduit l'égalité

$$\Pi^{\mathfrak{O}}(\tilde{Z}(S - X)) = g_{\tilde{z}}(S - X)$$

Le processus $S - X$ vérifie la propriété (i) d'un processus de Markov relativement au couple de tribus $(\mathfrak{O}, \tilde{\mathfrak{H}})$ (définition 0.2.2).

Notation 1.1.2. *On note L une mesure aléatoire vérifiant les propriétés suivantes*:

a) *pour tout ω, la mesure $L(\omega, ds)$ est portée par l'ensemble $\{t; S_t(\omega) = X_t(\omega)\}$.*
b) *$L(\omega, ds)$ est diffuse pour tout ω.*
c) *La mesure aléatoire L est une* $\mathfrak{O}$-mesure
d) *La mesure aléatoire L est* $\mathbf{P}$-*indistinguable d'une* $\tilde{\mathfrak{H}}$-*mesure.*
e) $\mathbf{E}(L[0, \zeta[) = 1$

La proposition 0.3.1 et son corollaire 0.3.3 appliqués au processus $S - X$ et au point 0 garantit l'existence de L après avoir remarqué que l'ensemble $\{S - X = 0\}$ a un nombre infini d'éléments ($\mathbf{P}$-ps) (C'est une conséquence immédiate du fait que $]0, +\infty[$ est régulier).

Rappelons maintenant un résultat bien connu (cf [B4] par exemple)

Proposition 1.1.3. *On note $\{\tau_t; t \geq 0\}$ l'inverse continu à droite du processus croissant $\{L([0, s]; s \geq 0\}$.*

Le processsus $Z = \{Z_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$Z_t = (\tau_t, X_{\tau_t}) \qquad (= \delta \text{ si} \tau_t = +\infty)$$

a, sous $\mathbf{P}$, *la loi d'un subordinateur bivarié partant de* $(0, 0)$ *et tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre* 1.

Notations et Définitions 1.1.4. *On note ϕ^1 l'exposant de Laplace du subordinateur Z bivarié(e) et non tué(e) de la proposition* 1.1.3, ϕ^1 *est caractérisé par la formule*

$$\text{Pour tous } \alpha, \lambda \geq 0 \qquad \frac{1}{\phi^1(\alpha,\lambda)+1} = \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha t - \lambda X_t} L(dt)\right] = \mathbf{E}\left[e^{-\alpha\sigma-\lambda M}\right]$$

On notera ϕ^2 l'exposant de Laplace correspondant lorqu'on remplace **P** *par la loi de $-X$ sous* **P**. *La fonction ϕ^2 est caractérisée par la formule*

$$\text{Pour tous } \alpha, \lambda \geq 0 \qquad \frac{1}{\phi^2(\alpha,\lambda)+1} = \mathbf{E}\left[e^{-\alpha\rho+\lambda m}\right]$$

On note dG la loi de $-m$ et G sa fonction de répartition alors que dH et H seront les loi et fonction de répartition de M.

$$G(x) = \mathbf{P}(-m \leq x) \qquad\qquad H(x) = \mathbf{P}(M \leq x)$$

1.2. Propriété de Markov du processus $X - J$

Proposition 1.2.1. *Le processus $X - J$ est $(\tilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{H})$-markovien sous* **P** *et sous* **P**$'$ *et il existe un noyau $\{Q^y(d\omega); y \in \mathbb{R}_+ \cup \{\delta\}\}$ sur $\mathscr{G}$ tel que pour toute variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable z on ait $Q^\delta(z) = 0$, $Q^0(z) = \mathbf{E}'(z)$ et $Q^{X-J}(z)$ est une version de $\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)$ sous* **P** *et sous* **P**$'$.

Démonstration. L'espace $(\Omega, \mathscr{F})$ est d'abord muni de la probabilité **P**. On a vu en 0.2.b que la propriété de Lévy de X entraîne que pour tout processus $\mathfrak{H}$-mesurable Z, il existe $k \in [0, +\infty]$ tel que $\Pi^{\mathfrak{O}}(Z) = k$ sur $[\![0, \zeta[\![$. On en déduit alors, par la proposition 0.2.1 appliquée au processus Y valant 1 sur $[\![0, \zeta[\![$ et δ ailleurs, et au couple de tribu $(\mathfrak{L}, \mathfrak{S}) = (\mathfrak{O}, \mathfrak{H})$ que pour tout processus $\mathfrak{O}$-mesurable Z, il existe $k \in [0, +\infty]$ tel que $\Pi^{\mathfrak{H}}(Z) = k$ sur $[\![0, \zeta[\![$.

D'autre part, tout processus $\tilde{\mathfrak{A}}$-mesurable Z se met sous la forme $Z_t(\omega) = g(X_t(\omega) - J_t(\omega), t, \omega)$ pour une fonction g-mesurable de la tribu produit $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathfrak{O}$. On en déduit comme dans la démonstration de la proposition 1.1.1 que pour tout processus ã-mesurable Z, il existe une fonction h mesurable telle que $\Pi^{\mathfrak{H}}(Z) = h(X - J)$. En appliquant cette fois la proposition 0.2.1 au processus $Y = X - J$ et au couple de tribus $(\mathfrak{L}, \mathfrak{S}) = (\tilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{H})$, on en déduit que pour tout processus $\mathfrak{H}$-mesurable Z, il existe une fonction mesurable f telle que:

$$\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(Z) = f(X - J)$$

En prenant un processus de la forme $Z = z \circ \theta$ où z est une variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable quelconque, on associe à z une fonction mesurable f_z telle que le processus $f_z(X - J)$ soit une version de $\Pi^{\mathfrak{A}}(z \circ \theta)$. L'application $z \mapsto f_z$ ainsi définie est un pseudo-noyau que l'on peut relever en un vrai noyau $(Q^y; y \in \mathbb{R}_+ \cup \{\delta\})$ sur $(\Omega, \mathscr{G})$ (cf Getoor [G] par exemple) de manière que pour toute variable $\mathscr{G}$-mesurable z le processus $Q^{X-J}(z)$ reste une version de $\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)$. On a donc montré que pour toute variable $\mathscr{G}$-mesurable z on a

$$\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta) = Q^{X-J}(z) \qquad \text{sous } \mathbf{P} \tag{1.2.a}$$

Vérifions maintenant les égalités $Q^{\delta}(z) = 0$ et $Q^{0}(z) = \mathbf{E}'(z)$. La première est une conséquence de la convention prise que $\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)$ est nul hors de $[\![0, \zeta[\![$. La deuxième s'obtient par la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}'(z) &= \mathbf{E}(z \circ \theta_\rho) = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big[z \circ \theta_\rho | \tilde{\mathfrak{A}}_\rho\Big]\Big] \qquad \text{(par définition de } \mathbf{P}'\text{)}\\
&= \mathbf{E}\left[\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)_\rho\right] \qquad \text{(car } \rho \text{ est un temps d'arrêt de } \tilde{\mathfrak{A}}\text{)}\\
&= \mathbf{E}\big[Q^{X_\rho - J_\rho}(z)\big] \qquad \text{(d'après1.2.a)}\\
&= Q^0(z) \qquad \text{(car } X_\rho - J_\rho = 0 \ \mathbf{P}\text{-ps)}
\end{aligned}$$

Reste à établir l'analogue de l'égalité 1.2.a pour la loi $\mathbf{P}'$, ce que l'on fait en translatant cette égalité par le temps ρ, qui est un temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{A}}$ (cf [F2] proposition II.1).

Remarques. La proposition précédente montre que sous la loi $\mathbf{P}$, pour toute variable $\mathscr{G}$-mesurable z, on a

$$\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)_0 = \mathbf{E}\Big[z \circ \theta_0 | \tilde{\mathfrak{A}}_0\Big] = \mathbf{E}[z|m] = Q^{-m}(z)$$

Le noyau Q^y est donc une version de la trace sur $\mathscr{G}$ de la loi conditionnelle $\mathbf{P}(.| - m = y)$.

Corollaire 1.2.2. *On note N l'ensemble aléatoire formé des extrémités gauches des intervalles contigüs au fermé aléatoire égal à l'adhérence de l'ensemble $\{X - J = 0\}$. Les propriétés suivantes sont vraies sous* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}'$.

a) *Pour toute variable $\mathscr{G}$-mesurable z, le processus $\Pi^{\tilde{\mathfrak{D}}}(z \circ \theta)$ est indistinguable de la constante* $\mathbf{E}'(z)$ *sur l'ensemble $\{X - J = 0\} \backslash N$.*

b) *Les tribus $\tilde{\mathfrak{D}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$ ont mêmes traces sur l'ensemble $\{X - J = 0\} \backslash N$ (aux processus indistinguables de 0 près).*

Démonstration. On raisonne indifféremment sous $\mathbf{P}$ ou sous $\mathbf{P}'$.

a) On choisit d'abord une variable aléatoire bornée et $\mathscr{G}$-mesurable z telle que le processus $z \circ \theta$ soit continu à droite. D'après la proposition 0.1.6 on a

$$\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)^+ = \Pi^{\tilde{\mathfrak{D}}}(z \circ \theta)$$

D'autre part, $\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta) = Q^{X-J}(z)$, et le processus $Q^{X-J}(z)$ prend la valeur $Q^0(z) = \mathbf{E}'(z)$ en tout point de l'ensemble $\{X - J = 0\}$, donc en une suite de temps s'accumulant à droite de tout point de $\{X - J = 0\} \backslash N$, on en déduit que $\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)^+ = Q^0(z) = \mathbf{E}'(z)$ sur $\{X - J = 0\} \backslash N$, on a donc l'égalité de processus $\Pi^{\tilde{\mathfrak{D}}}(z \circ \theta) = \mathbf{E}'(z)$ sur cet ensemble. Un argument de classe monotone permet d'étendre cette égalité à toutes les va $\mathscr{G}$-mesurables.

b) Le point a) donne que pour tout Z processus $\mathfrak{H}$-mesurable, on a l'égalité $\Pi^{\mathfrak{A}}(z \circ \theta) = \Pi^{\tilde{\mathfrak{O}}}(z \circ \theta)$ sur $\{X - J = 0\} \backslash N$. On déduit ensuite facilement de l'égalité des tribus $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathscr{F}$ et $\mathfrak{O} \vee \mathfrak{H}$ que l'égalité $\Pi^{\mathfrak{A}}(Z) = \Pi^{\tilde{\mathfrak{O}}}(Z)$ sur $\{X - J = 0\} \backslash N$ est encore vraie pour tout processus mesurable Z. Appliquant cela à un processus $\tilde{\mathfrak{O}}$-mesurable Z quelconque (et donc indistinguable de sa projection sur $\tilde{\mathfrak{O}}$), on obtient que Z est indistinguable du processus $\tilde{\mathfrak{A}}$-mesurable $\Pi^{\mathfrak{A}}(Z)$ sur $\{X - J = 0\} \backslash N$ et cela donne le résultat cherché.

Corollaire 1.2.3. *Les propriétés suivantes sont vraies sous* $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$

a) *Si* T *est un temps d'arrêt de* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *dont le graphe est inclus dans* $\{X - J = 0\}$ *alors, conditionnellement à* $T < +\infty$, *le processus* $(X_{t+T} - X_T; t \geq 0)$ *est indépendant de la tribu* $\tilde{\mathfrak{A}}_T$ *et sa loi est* $\mathbf{P}'$.

b) *Tout temps d'arrêt* T *de la filtration* $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$ *dont le graphe est inclus dans* $\{X - J = 0\} \backslash N$ *est ps égal à un temps d'arrêt de* $\tilde{\mathfrak{A}}$ *et les tribus* $\tilde{\mathfrak{A}}_T$ *et* $\tilde{\mathscr{F}}_T$ *sont égales aux ensembles négligeables près.*

Démonstration. Le point a) est une conséquence des égalités vraies pour toute z variable $\mathscr{G}$-mesurable et tout temps d'arrêt T de $\tilde{\mathfrak{A}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'\left(z \circ \theta_T | \tilde{\mathfrak{A}}_T\right) &= \Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta)_T = Q^{X_T - J_T}(z) = Q^0(z) \\ &= \mathbf{E}'(z) \text{ sur } \quad T \in \{X - J = 0\} \end{aligned}$$

Le point b) est une ⟨⟨coupe⟩⟩ en T du résultat b) du corollaire 1.2.2 précédent.

On utilisera le corollaire 1.2.3 à plusieurs reprises pour le temps $T = T_c$ égal au premier temps de croissance, ce temps vérifie bien les propriétés du point a) du corollaire précédent [on peut facilement vérifier qu'il vérifie aussi celle du point (b)]. On l'utilisera aussi pour le temps $T = \rho$, qui vérifie les propriétés des points (a) et (b). Pour ce temps, on obtient un résultat légèrement plus général que le célèbre résultat de Millar [M] correspondant à la propriété (a) du corollaire précédent lorsqu'on remplace la tribu $\tilde{\mathfrak{A}}_\rho$ par la tribu $\mathscr{F}_\rho^+$ (voir le commentaire du paragraphe 0.1). Nous regroupons ces deux cas dans le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.4. *On note* T_c *le premier temps de croissance.*

$$T_c = \inf\{t; X_t - J_t = 0 \text{ et } S_t - X_t = 0\}$$

Le processus $(X_{t+T_c} - X_{T_c}; t \geq 0)$ *sous la loi* $\mathbf{P}(.|T_c < +\infty)$ *est indépendant de la tribu* $\tilde{\mathfrak{A}}_{T_c} = \mathscr{F}_{T_c}$ *et sa loi est* $\mathbf{P}'$.

Le processus $(X_{t+\rho} - X_\rho; t \geq 0)$ *sous* $\mathbf{P}$ *est indépendant de la tribu* $\tilde{\mathfrak{A}}_\rho = \tilde{\mathscr{F}}_\rho$ *et sa loi est* $\mathbf{P}'$.

Commentaires

1) Quitte à l'adapter, la proposition 1.2.1 reste vraie sans les hypothèses de régularité des ensembles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$. Plus précisemment, lorsque $[0,+\infty[$ n'est pas régulier, on vérifie facilement que ρ est un temps de saut positif et que l'ensemble $\{X-J=0\}$ est vide (**P**-ps) (voir aussi la proposition 4 page 158 dans [B4]). La proposition 1.2.1 reste vraie à condition de remplacer dans la définition de $\mathbf{P}'$, le processus $(X_{t+\rho}-X_\rho; t\geq 0)$ par $(X_{t+\rho}-m; t\geq 0)$.

Si $]-\infty,0[$ n'est pas régulier, ρ est un temps de saut négatif et les assertions de la proposition 1.2.1 et ses corollaires restent vrais sans changement.

2) Le corollaire 1.2.3 généralise à tous les processus de Lévy un résultat de Bertoin [B2] concernant les processus de Lévy qui ⟨⟨rampent vers le bas⟩⟩.

3) Le lecteur curieux s'interrogera sûrement sur ce qui se passe sur l'ensemble $\{X-J=0\}\cap N$. Voici la réponse. Nous n'en donnons pas la démonstration parce qu'elle est un peu longue et ennuyeuse et que ce résultat n'a pas d'application à ce qui nous concerne ici.

Tout d'abord cet ensemble $\{X-J=0\}\cap N$ que nous notons N_1 est progressif relativement à la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$ et il est à coupes dénombrables. On peut montrer facilement qu'une conséquence de la proposition 1.2.1 est que N_1 évite les temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{A}}$ (c'est à dire que pour tout T temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{A}}$, on a $\mathbf{P}(T<+\infty; T\in N_1)=0$). Ensuite, si X est de la forme (f) suivante

$$X_t = at + X_t^1 - X_t^2 \qquad \text{sur } [\![0,\zeta[\![\tag{f}$$

où a est un réel strictement positif, X^1 et X^2 sont, sous **P**, deux subordinateurs indépendants et sans dérive et la mesure de Lévy de X^2 est de masse totale finie non nulle, alors les coupes de l'ensemble N_1 ont presque toutes un nombre fini d'éléments et $\mathbf{P}(N_1\neq\emptyset)>0$. Soit $T_1, T_2, \ldots, T_n \ldots$ l'énumération dans l'ordre croissant des éléments de N_1 ($T_n=+\infty$ à partir d'un certain rang). Il est clair que les T_n sont des temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{O}}$ et ils évitent les temps d'arrêt de $\tilde{\mathfrak{A}}$. L'ensemble N_1 est donc $\tilde{\mathfrak{O}}$-mesurable sans être $\tilde{\mathfrak{A}}$-mesurable. D'autre part, le lecteur se convaincra facilement que $(X-J)$ est fortement markovien si et seulement si on a égalité des tribus $\tilde{\mathfrak{O}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$ aux indistinguabilités près. On en conclut que si X est de la forme (f) alors le processus $X-J$ n'est pas fortement markovien.

Dans tous les autres cas, on montre sans difficulté que N_1 est soit vide (ps) soit il a un nombre infini d'éléments (ps). On peut en déduire (après un travail assez lourd) qu'il évite les temps d'arrêt de la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$. On peut alors remplacer l'ensemble $\{X-J=0\}\backslash N$ par $\{X-J=0\}$ dans l'énoncé des deux corollaires précédents. En particulier, les traces des tribus $\tilde{\mathfrak{O}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$ sur l'ensemble $\{X-J=0\}$ sont égales aux indistinguabilités près et la propriété de Markov forte de $X-J$ est alors vraie en tout temps d'arrêt T de la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$ dont le graphe est inclus dans l'ensemble $\{X-J=0\}$.

Le lecteur très curieux pourra alors s'interroger sur ce qu'il advient dans les excursions hors de l'ensemble $\{X-J=0\}$. Voici une réponse : Si X

vérifie la propriété (ACC) de Silverstein (qui est équivalente à l'absolue continuité relativement à la mesure de Lebesgue de la loi de X_ζ^- sous $\mathbf{P}$) alors les traces de $\tilde{\mathfrak{O}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$ sont égales, aux indistinguabilités près, sur l'ensemble $\{X - J \neq 0\}$. Nous concluerons donc cette question en disant que si la propriété (ACC) est vérifiée et si X n'est pas de la forme (f) alors les tribus $\tilde{\mathfrak{O}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$ sont égales aux indistinguabilités près, le processus $X - J$ est donc $(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{H})$-markovien et fortement markovien. Nous tenons les démonstrations de tout cela à la disposition du lecteur intéressé.

1.3 Propriété de Markov du processus $(S - X, X - J)$

Proposition 1.3.1. *Le processus $(S - X, X - J)$ est $(\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{H}})$-markovien sous $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$. Soit $\{\tilde{Q}^{x,y}(du, d\omega); x, y \in \mathbb{R}_+ \cup \{\delta\}\}$ le noyau sur $(\mathscr{B}(\mathbb{R}_+ \cup \{\delta\}) \times \mathscr{G})$ défini par l'égalité suivante pour une variable $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{G}$-mesurable positive quelconque $\tilde{z}$,*

$$\tilde{Q}^{x,y}(\tilde{z}) = Q^y(\tilde{z}(x, .))$$

Le processus $\tilde{Q}^{S-X,X-J}(\tilde{z})$ est une version de $\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(\tilde{z} \circ \tilde{\theta})$ sous $\mathbf{P}$ et sous $\mathbf{P}'$.

Démonstration. Le raisonnement suivant est valable sous $\mathbf{P}$ et sous $\mathbf{P}'$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{\delta\}$ on a, en notant $\tilde{Z}(x)$ le processus $(t, \omega) \mapsto \tilde{z}(x, \theta_t(\omega))$

$$\begin{aligned}\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(\tilde{Z}(x)) &= Q^{X-J}(\tilde{z}(x, .)) \\ &\qquad \text{(d'après la proposition 1.2.1 appliqué à} \\ &\qquad \text{la variable } z = \tilde{z}(x, .)) \\ &= \tilde{Q}^{(x,X-J)}(\tilde{z}) \qquad \text{(par définition de } \tilde{Q})\end{aligned}$$

Comme $S - X$ est $\tilde{\mathfrak{A}}$-mesurable, on en déduit l'égalité

$$\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(\tilde{Z}(S - X)) = \tilde{Q}^{(S-X,X-J)}(\tilde{z})$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque. Le lecteur se convaincra facilement avec cette démonstration que si les tribus $\tilde{\mathfrak{O}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$ sont égales (aux processus indistinguables de 0 près) alors la processus $(S - X, X - J)$ est $(\tilde{\mathfrak{O}}, \tilde{\mathfrak{H}})$-markovien et donc fortement markovien. Il est alors clair qu'il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes : l'indistinguabilité des tribus $\tilde{\mathfrak{O}}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}$, la propriété de Markov forte de $X - J$ et la propriété de Markov forte de $(S - X, X - J)$.

Notations et définitions 1.3.2. *On désigne par C l'ensemble des temps de croissance de X*

$$C = \{S - X = 0\} \cap \{X - J = 0\}$$

On note $C(\omega)$ la coupe de C en ω.

On dira que X a des points de croissance si $\mathbf{P}(C \neq \emptyset) > 0$, *on notera p la constante* $\mathbf{P}(C \neq \emptyset)$. *On désignera par L^3 une mesure aléatoire vérifiant les quatre propriétés suivantes*

(i) *Pour tout ω, la mesure $L^3(\omega, ds)$ est portée par l'ensemble $C(\omega)$.*
(ii) *L^3 est une $\tilde{\mathfrak{A}}$-mesure.*
(iii) *L^3 est* $\mathbf{P}$*-indistinguable d'une $\tilde{\mathfrak{H}}$-mesure.*
(iv) $\mathbf{E}\big(L^3[0,\zeta[\big) = 1$.

On notera τ le dernier temps de croissance,

$$\tau = \sup\{t; S_t - X_t = X_t - J_t = 0\} \qquad (\sup\emptyset = -\infty)$$

La proposition 0.3.1 appliquée au processus $Y = (S - X, X - J)$, au couple de tribus $(\mathfrak{L}, \mathscr{G}) = (\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{H}})$ et au point $c = (0,0)$ garantit l'existence de L^3 lorsque X a des points de croissance.

2. Projections et projections duales sur $\mathfrak{O}$ sous $\mathbf{P}'$

Notations 2.0 *On note $dH_\circ$ la loi du maximum M sous $\mathbf{P}'$ et $H_\circ$ sa fonction de répartition*

$$H_\circ(x) = \mathbf{P}'(M \leq x)$$

On note $\mathbf{P}''$ la loi de $(X_\sigma - X_{\sigma+t}; t \geq 0)$ et $dG_\circ$ et $G_\circ$ les lois et fonction de répartition de M sous $\mathbf{P}''$

$$G_0(x) = \mathbf{P}''(M \leq x)$$

On remarquera que le graphe de τ est inclus dans l'ensemble des temps de croissance $C = \{X - J = 0\} \cap \{S - X = 0\}$ et ne rencontre pas les extrémités gauches des intervalles contigus au fermé aléatoire $\{S - X = 0\}$. De plus, comme σ, il est ($\mathbf{P}$-ps et $\mathbf{P}'$-ps) égal à un $\tilde{\mathfrak{H}}$-temps de retour dont le graphe est inclus dans cet ensemble.

Le but de cette partie est de démontrer deux résultats techniques énoncés dans les théorèmes suivants et qui sont les clefs de toute la suite.

Théorème 2.1

(a) $$\Delta_\sigma^{\mathfrak{O}} = L \qquad \textit{sous } \mathbf{P}$$

(b) $$\Delta_\tau^{\mathfrak{O}} = pL \qquad \textit{sous } \mathbf{P}$$

Théorème 2.2

(a) $$\Delta_\sigma^{\mathfrak{O}} = \frac{G_\circ(X)}{G(X)} L \qquad \textit{sous } \mathbf{P}'$$

(b) $$\Delta_\tau^{\mathfrak{O}} = \frac{p}{G(X)} L \qquad \textit{sur }]\!]0, \zeta[\![\textit{ et sous } \mathbf{P}'$$

Démonstration du théorème 2.1

Les mesures aléatoires Δ_σ et Δ_τ sont (**P**-ps) des $\tilde{\mathfrak{H}}$-mesures portées par l'ensemble $\{S - X = 0\}$. La propriété de Markov forte de $S - X$ sous **P** donne que les projections duales sur $\mathfrak{O}$ de ces mesures aléatoires sont P-indistinguables de $\tilde{\mathfrak{H}}$ et de $\mathfrak{O}$-mesures portées par l'ensemble $\{S - X = 0\}$. Elles sont donc **P**-indistinguables d'une mesure aléatoire de la forme cL pour une constante multiplicative c. La valeur de c découle alors des définitions de L et p.

La démonstration du thórème 2.2 s'appluie sur une succession de lemmes.

On remarque que le temps ρ est une variable ⟨⟨honnête⟩⟩ au sens de Jeulin [J], ce qui revient à dire que la famille de tribus $(\mathscr{F}_t \vee \sigma(\rho \le t); t \ge 0)$ définit une filtration sur Ω ou encore que $\mathfrak{O}' = \mathfrak{O} \vee \sigma([\![\rho, +\infty[\![)$ est une tribu de Lenglart. [On pourra remarquer qu'une conséquence immédiate de la loi de $0 - 1$ à droite du temps ρ est que la $(\mathscr{F}_t \vee \sigma(\rho \le t); t \ge 0)$ et celle obtenue par régularisation à droite sont égales aux ensembles négligeables près et que la tribu $\mathfrak{O}'$ est égale à la tribu optionnelle associée à cette filtration (aux indistinguables près)].

Notations 2.3.0 *On note $\mathfrak{O}'$ la tribu $\mathfrak{O}' = \mathfrak{O} \vee \sigma([\![\rho, +\infty[\![$ et I le processus $\mathfrak{O}$ minimum passé $I_t = \inf\{X_s; 0 \le s \le t\}$. On définit un noyau $\{P'^y(d\omega); y \in \mathbb{R}_+ \cup \{\delta\}\}$ sur $\mathscr{G}$ de la manière suivante:*
Pour tout $z \in \mathscr{G}$, $P'^\delta(z) = 0$, $P'^0(z) = Q^0(z) = \mathbf{P}'(z)$ et, pour $y > 0$, $P'^y(z) = \mathbf{E}[z| - m \le y] = \frac{1}{G(y)} \int_0^y Q^x(z) dG(x)$.

Lemme 2.3 *Pour toute variable aléatoire positive $\mathscr{G}$-mesurable z, le processus $P'^{X-I}(z) 1_{[\![\rho,\zeta[\![}$ est une version de $\Pi^{\mathfrak{O}'}(z \circ \theta) 1_{[\![\rho,\zeta[\![}$ sous **P** et le processus $P'^{X-I}(z)$ est une version de $\Pi^{\mathfrak{O}}(z \circ \theta)$ sous $\mathbf{P}'$.*

Démonstration. On raisonne d'abord sous **P**. Soit z une variable aléatoire positive $\mathscr{G}$-mesurable quelconque. L'inclusion de la tribu $\mathfrak{O}'$ dans $\tilde{\mathfrak{A}}$, donne l'égalité $\Pi^{\mathfrak{O}'}(z \circ \theta) = \Pi^{\mathfrak{O}'}(\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta))$ et la proposition 1.2.1 donne l'égalité $\Pi^{\tilde{\mathfrak{A}}}(z \circ \theta) = Q^{X-J}(z) = Q^{-m \circ \theta}(z)$. On se ramène donc à montrer la propriété pour z de la forme $f(-m)$.

De manière générale, pour une variable honnête ρ, Jeulin [J] (proposition 5.3 et 5.9) a montré que le processus $\Pi^{\mathfrak{O}}(1_{[\![\rho,\zeta[\![})$ est strictement positif sur $]\!]\rho, \zeta[\![$ et que pour tout processus Z mesurable

$$\Pi^{\mathfrak{O}'}(Z) = \frac{\Pi^{\mathfrak{O}}(Z 1_{[\![\rho,\zeta[\![})}{\Pi^{\mathfrak{O}}(1_{[\![\rho,\zeta[\![})} \qquad \text{sur }]\!]\rho, \zeta[\![$$

On vérifie facilement les égalités entre ensembles aléatoires

$$\begin{aligned} [\![\rho, \zeta[\![= \{I \le J\} \cap [\![0, \zeta[\![&= \{X - J \le X - I\} \cap [\![0, \zeta[\![\\ &= \{-m \circ \theta \le X - I\} \cap [\![0, \zeta[\![\end{aligned}$$

on en déduit

$$\Pi^{\mathfrak{O}}(f(-m)\circ\theta 1_{[\![\rho,\zeta[\![}) = \Pi^{\mathfrak{O}}(f(-m)\circ\theta 1_{\{-m\circ\theta\leq X-I\}}) = \int_0^{X-I} f(x)\, dG(x)$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\Pi^{\mathfrak{O}'}(f(-m)\circ\theta) &= \frac{\Pi^{\mathfrak{O}}(f(-m)\circ\theta 1_{[\![\rho,\zeta[\![})}{\Pi^{\mathfrak{O}}(1_{[\![\rho,\zeta[\![})} = \frac{1}{G(X-I)}\int_0^{X-I} f(x)\, dG(x)\\ &= P'^{X-I}(f(-m)) \qquad \text{sur }]\!]\rho,\zeta[\![\end{aligned}$$

D'autre part, les égalités suivantes découlent des définitions et du fait que ρ est un temps d'arrêt de $\mathfrak{O}'$:

$$\begin{aligned}\Pi^{\mathfrak{O}'}(f(-m)\circ\theta))_\rho &= \mathbf{E}(f(-m\circ\theta_\rho)|\mathscr{F}_\rho) = \mathbf{E}'(f(-m))\\ &= P'^0(f(-m)) = P'^{X_\rho - I_\rho}(f(-m))\end{aligned}$$

L'égalité $\Pi^{\mathfrak{O}'}(f(-m)\circ\theta) = P'^{X-I}(f(-m))$ a donc lieu sur l'ensemble $[\![\rho,\zeta[\![$.

Comme dans la fin de la démonstration de la proposition 1.2.1, on en déduit la propriété cherchée sous $\mathbf{P}'$ par translation par le temps ρ qui est un temps d'arrêt de $\mathfrak{O}'$.

Lemme 2.4 *Pour tout processus mesurable positif U, il existe un processus $\mathfrak{O}$-mesurable Z tel que $Z1_{[\![\rho,\zeta[\![}$ est une version de $\Pi^{\mathfrak{O}'}(U)1_{[\![\rho,\zeta[\![}$ sous $\mathbf{P}$ et une version de $\Pi^{\mathfrak{O}}(U)$ sous $\mathbf{P}'$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent et de l'égalité des tribus $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathscr{F} = \mathfrak{O}\vee\mathfrak{H}$.

Lemme 2.5 *Pour tout $\varepsilon > 0$, la loi du processus $(X_{t+\varepsilon} - X_\varepsilon)_{t\geq 0}$ sous $\mathbf{P}'(.|\varepsilon < \zeta)$ est absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'absolue continuité des $\mathbf{P}'^x$ relativement à la trace de $\mathbf{P}$ sur $\mathscr{G}$ (pour tout $x > 0$).

Lemme 2.6 *Pour toute variable aléatoire z, $(z\Delta_\sigma)^{\mathfrak{O}} = (\mathbf{E}(z|\mathscr{F}_\sigma)\Delta_\sigma)^{\mathfrak{O}}$*

Démonstration. Notons $\mathfrak{O}''$ la tribu de Lenglart $\mathfrak{O}\vee\sigma([\![\sigma,+\infty[\![)$. On a la suite d'égalités:

$$\begin{aligned}(z\Delta_\sigma)^{\mathfrak{O}} &= ((z\Delta_\sigma)^{\mathfrak{O}''})^{\mathfrak{O}} \qquad \text{car } \mathfrak{O}\subset\mathfrak{O}''\\ &= (\Pi^{\mathfrak{O}''}(z).\Delta_\sigma)^{\mathfrak{O}} = (\Pi^{\mathfrak{O}''}(z)_\sigma.\Delta_\sigma)^{\mathfrak{O}} \qquad \text{car } \Delta_\sigma \text{ est une } \mathfrak{O}''\text{-mesure}\\ &= (\mathbf{E}(z|\mathscr{F}_\sigma)\Delta_\sigma)^{\mathfrak{O}} \qquad \text{car } \sigma \text{ est un } \mathfrak{O}''\text{-temps d'arrêt et } \mathfrak{O}''_\sigma = \mathscr{F}_\sigma\end{aligned}$$

Lemme 2.7

(a) $$\Delta_\sigma^{\mathfrak{O}'} = \frac{G_0(X-I)}{G(X-I)}L \qquad \textit{sur }]\!]\rho,\zeta[\![\textit{ et sous } \mathbf{P}$$

(a) $$\Delta_\tau^{\mathfrak{D}'} = \frac{P}{G(X-I)} L \qquad \textit{sur }]\!]\rho,\zeta[\![\textit{ et sous } \mathbf{P}$$

Démonstration. La version duale du résultat de Jeulin cité plus haut donne pour toute mesure aléatoire A,

$$A^{\mathfrak{D}'} = \frac{1}{\Pi^{\mathfrak{D}}(1_{[\![\rho,\zeta[\![})} \left(1_{[\![\rho,\zeta[\![} A\right)^{\mathfrak{D}} \qquad \text{sur }]\!]\rho,\zeta[\![$$

Pour la mesure aléatoire $A = \Delta_\tau$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_\tau^{\mathfrak{D}'} &= \frac{1}{\Pi^{\mathfrak{D}}(1_{[\![\rho,\zeta[\![})} \left(1_{[\![\rho,\zeta[\![} \Delta_\tau\right)^{\mathfrak{D}} \\
&= \frac{1}{G(X-I)} \Delta_\tau^{\mathfrak{D}} \qquad (\text{car } \Pi^{\mathfrak{D}}(1_{[\![\rho,\zeta[\![}) = G(X-I) \text{ et } \tau > \rho) \\
&= \frac{pL}{G(X-I)} \qquad (\text{théorème 2.1}) \qquad \text{sur }]\!]\rho,\zeta[\![\text{ et sous } \mathbf{P}
\end{aligned}$$

Pour $A = \Delta_\sigma$, on remarque d'abord la suite d'égalités

$$\mathbf{P}(\rho \le \sigma | \mathscr{F}_\sigma) = \mathbf{P}(-m \circ \theta_\sigma \le X_\sigma - I_\sigma | \mathscr{F}_\sigma) = \int_0^{X_\sigma - I_\sigma} \mathbf{P}''(M \in du) = G_\circ(X_\sigma - I_\sigma)$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\Delta_\tau^{\mathfrak{D}'} &= \frac{1}{\Pi^{\mathfrak{D}}(1_{[\![\rho,\zeta[\![})} \left(1_{[\![\rho,\zeta[\![} \Delta_\sigma\right)^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{G(X-I)} \left(1_{[\![\rho,\zeta[\![} \Delta_\sigma\right)^{\mathfrak{D}} \\
&= \frac{1}{G(X-I)} (\mathbf{P}(\rho \le \sigma | \mathscr{F}_\sigma) \Delta_\sigma)^{\mathfrak{D}} \qquad (\text{Lemme 2.6}) \\
&= \frac{1}{G(X-I)} (G_\circ(X_\sigma - I_\sigma)\Delta_\sigma)^{\mathfrak{D}} = \frac{G_\circ(X-I)}{G(X-I)} \Delta_\sigma^{\mathfrak{D}} \\
&= \frac{G_\circ(X-I)}{G(X-I)} L \qquad (\text{théorème 2.1})
\end{aligned}$$

Démonstration du théorème 2.2 Tout d'abord, la version duale du résultat du Lemme 2.4 donne que pour toute mesure aléatoire A, il existe une $\mathfrak{D}$-mesure B telle que $1_{[\![\rho,\zeta[\![} B$ soit une version de $1_{[\![\rho,\zeta[\![} A^{\mathfrak{D}'}$ sous $\mathbf{P}$ et que B soit une version de $A^{\mathfrak{D}}$ sous $\mathbf{P}'$. De l'absolue continuité de la loi du processus $(X_{t+\varepsilon} - X_\varepsilon)_{t \ge 0}$ sous $\mathbf{P}'$ $(.|\varepsilon < \zeta)$ relativement à $\mathbf{P}$ (lemme 2.5), on déduit, pour la mesure aléatoire $A = \Delta_\tau$, que cette version commune B est $\mathbf{P}'$-ps égale à $\frac{P}{G(X-I)} L$ sur l'ensemble $]\!]\varepsilon,\zeta[\![$. Ceci étant vrai pour tout ε strictement positif, par recollement, on obtient que cette égalité est vraie sur $]\!]0,\zeta[\![$. Le même argument est valable pour la mesure aléatoire $A = \Delta_\sigma$. D'autre part, pour cette dernière mesure aléatoire l'égalité $(\Delta_\sigma)^{\mathfrak{D}} = \frac{G_\circ(X-I)}{G(X-I)} L$ est encore vraie au temps 0 car les deux mesures aléatoires de cette égalité ne chargent pas ce temps. On termine en constatant que le processus I est identiquement nul sous $\mathbf{P}'$.

Corollaire 2.8 $\mathbf{P}'(\tau > 0) = p\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)} L(ds)\right] \leq 1$

3. Propriété régénérative des points de croissance. Une condition suffisante pour l'abscence de points de croissance faisant intervenir la fonction $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{P}(\mathbf{X_t} > \mathbf{0})$

3.1. Le nombre des points de croissance est nul ou infini

Le théorème suivant complète le théorème 2.2 en établissant que dans le cas où il existe des points de croissance, le temps τ ne charge pas 0 (sous $\mathbf{P}'$) et donc que l'égalité $\Delta_\tau^{\mathfrak{D}} = \frac{p}{G(X)} L$ a encore lieu au temps 0. D'autre part, il donne une condition nécessaire pour l'existence de points de croissance. On verra plus tard (théorème 4.4) que c'est aussi une condition suffisante.

Théorème 3.1.1 *Si X a des points de croissance alors*

$$p^{-1} = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)} L(ds)\right] < +\infty$$

et

$$\Delta_\tau^{\mathfrak{D}} = \frac{p}{G(X)} L \qquad \textit{sous } \mathbf{P}'$$

Lemme 3.1.2 *Il existe une suite de fonctions mesurables positives (f_n) vérifiant la propriété suivante pour tout processus mesurable continu à droite, borné et* $\tilde{\mathfrak{A}}$-mesurable U:

$$\mathbf{E}[U_\tau 1_{\tau > -\infty}] = \lim_n \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta U_s f_n(X_s - J_s) L(ds)\right] \qquad 3.1.a$$

Démonstration. Pour tout n, on pose

$$\begin{aligned} \tau_n &= \inf\left\{t > \tau; L]\tau, t] > \frac{1}{n}\right\} \qquad \text{si } \tau > -\infty \\ &= -\infty \qquad \text{si } \tau = -\infty \end{aligned}$$

On pose ensuite $Z^n = n 1_{]\!]\tau,\tau_n]\!]}$. Il est clair qu'on a pour tout n,

$$\int_0^\zeta Z_s^n L(ds) \leq 1$$

et que pour tout ω,

$$Z_s^n(\omega)L(\omega, ds) \text{ converge étroitement vers} 1_{\tau(\omega)>-\infty}\delta_{\tau(\omega)}$$

On choisit ensuite pour tout n, une fonction g_n telle que $g_n(S-X, X-J)$ soit une version sous $\mathbf{P}$ de $\Pi^{\mathfrak{A}}(\Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(Z^n))$ et on pose $f_n(y) = g_n(0, y)$. On obtient, pour tout processus càd borné $\mathfrak{A}$-mesurable U,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U_\tau 1_{\tau>-\infty}] &= \mathbf{E}\left[\Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(U)_\tau 1_{\tau>-\infty}\right] \\
&\quad \text{(car } \tau \text{ est un } \tilde{\mathfrak{H}}\text{-temps de retour)} \\
&= \lim_n \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta \Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(U)_s Z_s^n L(ds)\right] \\
&\quad \text{(car } \Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(U) \text{ est càd et borné et par convergence dominée)} \\
&= \lim_n \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta \Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(U)_s g_n(S_s - X_s, X_s - J_s) L(ds)\right] \\
&\quad \Big(\text{car } \Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(U) \text{ est } \tilde{\mathfrak{A}} \text{ et } \tilde{\mathfrak{H}}\text{-mesurable et} \\
&\quad g_n(S-X, X-J) = \Pi^{\mathfrak{A}}\left(\Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(Z^n)\right)\Big) \\
&= \lim_n \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta \Pi^{\tilde{\mathfrak{H}}}(U)_s f_n(X_s - J_s) L(ds)\right] \\
&\quad \text{(car } L \text{ est portée par } \{S - X = 0\} \text{ et } g_n(0, y) = f_n(y)) \\
&= \lim_n \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta U_s f_n(X_s - J_s) L(ds)\right] \\
&\quad \text{(car } f_n(X-J) \text{ est } \tilde{\mathfrak{H}}\text{-mesurable)}
\end{aligned}$$

Démonstration du théorème 3.1.1 On suppose que X a des points de croissance. Pour $U = f(X-J)$, où f est continue bornée, on obtient:

$$\mathbf{E}[U_\tau 1_{\tau>-\infty}] = f(0)\mathbf{P}(\tau > -\infty) = pf(0)$$

Et pour tout n,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\int_0^\zeta U_s f_n(X_s - J_s) L(ds)\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta f(X_s - J_s) f_n(X_s - J_s) L(ds)\right] \\
&= \int_0^{+\infty} f(y) f_n(y)\, dG(y)
\end{aligned}$$

L'égalité 3.1.a du lemme précédent appliquée à ces processus $U = f(X-J)$ donne donc que la suite de mesures $f_n(y)\, dG(y)$ converge étroitement vers $p\delta_0$. En particulier,

$$\text{pour tout } x > 0 \qquad \lim_n \int_0^x f_n(y)\, dG(y) = p \qquad 3.1.b$$

Pour $U = 1_{[\![T_c, \zeta[\![}$, on obtient

$$\mathbf{E}[U_\tau 1_{\tau>-\infty}] = \mathbf{P}(T_c \leq \tau; \tau > -\infty) = p$$

et, en utilisant le fait que la loi de $(X_{T_c+t} - X_{T_c}; t \geq 0)$ sous $\mathbf{P}(.|T_c < +\infty)$ est $\mathbf{P}'$, on obtient pour tout n,

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\zeta U_s f_n(X_s - J_s)L(ds)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta 1_{[\![T_c,\zeta[\![} f_n(X_s - J_s)L(ds)\right]$$
$$= p\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta f_n(X_s - J_s)L(ds)\right]$$

L'égalité 3.1.a du lemme précédent appliqué au processus $U = 1_{[\![T_c,\zeta[\![}$ donne donc

$$\lim_n \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta f_n(X_s - J_s)L(ds)\right] = 1 \qquad 3.1.c$$

D'autre part, pour tout n, on a :

$$\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta f_n(X_s - J_s)L(ds)\right] = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)}\left(\int_0^{X_s} f_n(y)\, dG(y)\right)L(ds)\right] \qquad 3.1.d$$

Et le corollaire 2.8 donne

$$\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)}L(ds)\right] = p^{-1}\mathbf{P}(\tau > 0) < +\infty \qquad 3.1.e$$

Les égalités 3.1.b, 3.1.c et 3.1.d et un argument de convergence dominée utilisant 3.1.e donne alors

$$1 = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{p}{G(X_s)}L(ds)\right] \qquad 3.1.f$$

Cela donne la première assertion du théorème. Les égalités 3.1.e et 3.1.f impliquent encore $\mathbf{P}'(\tau > 0) = 1$. On obtient alors que l'égalité $\Delta_\tau^{\mathfrak{O}} = \frac{1}{G(X)}L$ a lieu au temps 0 car les deux mesures aléatoires de cette égalité ne chargent pas ce temps.

Corollaire 3.1.3. *Si X a des points de croissance alors l'ensemble $C(\omega)$ possède un nombre infini d'éléments pour $\mathbf{P}'$- presque tous les ω, et on peut choisir L^3 de telle manière que la mesure $L^3(\omega, ds)$ soit diffuse pour tout ω. De plus*

$$(L^3)^{\mathfrak{O}} = \frac{1}{G(X)}L \qquad \textit{sous } \mathbf{P}'$$

Démonstration. On suppose que X a des points de croissance. La propriété de Markov de $(S - X, X - J)$ sous $\mathbf{P}'$ donne que $\Delta_\tau^{\mathfrak{A}}$ est à la fois une $\tilde{\mathfrak{A}}$ et une $\tilde{\mathfrak{H}}$-mesure portée par C, elle est donc indistinguable d'une mesure aléatoire de la forme cL^3 pour une constante multiplicative c. En projetant de nouveau sur $\mathfrak{O}$, on obtient

$$p^{-1}\Delta_\tau^{\mathfrak{D}} = cp^{-1}(L^3)^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{G(X)}L \qquad \text{sous } \mathbf{P}'$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{E}\big(L^3[0,\zeta[\big) \qquad \text{(par définition de } L^3) \\ &= \mathbf{E}\big(L^3[T_c,\zeta[\big) \qquad \text{(car } L^3 \text{ est porté par } C \subset [\![T_c,+\infty[\![) \\ &= \mathbf{P}(T_c<\zeta)\mathbf{E}'\big(L^3[0,\zeta[\big) \ \ \text{(car } (X_{T_c+t}-X_{T_c};t\ge 0) \text{ sous } \mathbf{P}(.|T<\zeta) \text{ a la loi } \mathbf{P}') \\ &= p\mathbf{E}'\big(L^3[0,\zeta[\big) \qquad \text{(par définition de } p) \end{aligned}$$

On a donc obtenu $p^{-1} = \mathbf{E}'\big(L^3[0,\zeta[\big)$. D'autre part, $p^{-1} = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)}L(ds)\right]$ (théorème 3.1.1). On en déduit que $cp^{-1}=1$ et $(L^3)^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{G(X)}L$ sous $\mathbf{P}'$. D'après le corollaire 0.3.3, si $C(\omega)$ est fini $\mathbf{P}'$-ps, (et donc à fortiori $\mathbf{P}$-ps), alors on peut choisir L^3 de la forme $k\Lambda_C$ où k est un réel strictement positif. Comme l'ensemble $C(\omega)$ contient $\mathbf{P}'$-ps le temps 0, on a donc

$$k = L^3(\{0\}) \qquad \mathbf{P}'\text{-ps}$$

De plus,

$$\mathbf{E}'\big[L^3(\{0\})|\mathscr{F}_0\big] = (L^3)^{\mathfrak{D}}(\{0\}) = \left(\frac{1}{G(X)}L\right)(\{0\}) = 0$$

On en déduit une contradiction. L'ensemble $C(\omega)$ a donc un nombre infini d'éléments $\mathbf{P}'$-ps. D'après le corollaire 0.3.3, on peut choisir L^3 de telle manière que la mesure $L^3(\omega,ds)$ soit diffuse pour tout ω.

3.2. Propriété régénérative des points de croissance

Théorème 3.2.1. *On suppose que X a des points de croissance et on note $\{\tau_s^3; s\ge 0\}$ l'inverse continu à droite du processus croissant $\{L^3[0,t]; t\ge 0\}$. Le processus $Z^3 = \{Z_s^3; s\ge 0\}$ défini de la manière suivante*

$$Z_s^3 = (\tau_s^3, X_{\tau_s^3}) \qquad (=\delta \text{ si } \ \tau_s^3 = +\infty)$$

a, sous $\mathbf{P}'$, la loi d'un subordinateur bivarié partant de $(0,0)$ et tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $p = \mathbf{P}(C\neq\emptyset) = (\mathbf{E}'[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_t)}L(dt)])^{-1}$ et

$$\overline{\{Z_s^3(\omega); s\ge 0\}} = \overline{\{(t,X_t(\omega)); t\in C(\omega)\}} \ \textit{pour } \mathbf{P}\textit{- et } \mathbf{P}'\textit{-presque tous les } \omega$$

Démonstration. On suppose que X a des points de croissance. Un raisonnement élémentaire classique et le corollaire 0.3.2 montrent que $\overline{C(\omega)} = \overline{\{\tau_s^3(\omega); s\ge 0\}}$ $\mathbf{P}$-p.s., et donc aussi $\mathbf{P}'$-ps par translation par le temps $T_c = \tau_0$. On en déduit l'égalite d'ensembles

$$\overline{\{Z_s^3(\omega); s\ge 0\}} = \overline{\{(t,X_t(\omega)); t\in C(\omega)\}} \qquad \mathbf{P} \text{ et } \mathbf{P}' \text{ p.s.}$$

D'autre part, $X_0 = 0$ $\mathbf{P}'$-ps et l'ensemble $C(\omega)$ contient $\mathbf{P}'$-presque sûrement le temps 0 donc $\tau_0^3 = 0$ ($\mathbf{P}'$-ps) on en déduit que

$$Z_0^3 = (0,0) \qquad \mathbf{P}'\text{-ps}$$

Il est facile de voir que, pour deux réels positifs s et u quelconques, τ_s^3 est $\mathbf{P}'$-ps égal à un temps d'arrêt de la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t)$ dont le graphe est inclus dans $\{X - J = 0\}\backslash N$, et

$$\tau_{u+s}^3 - \tau_s^3 = (\tau_u^3 - \tau_0^3) \circ \theta_{\tau_s^3} \qquad \text{sur} \qquad \tau_s^3 < +\infty$$

$$X_{\tau_{u+s}^3} - X_{\tau_s^3} = (X_{\tau_u^3} - X_{\tau_0^3}) \circ \theta_{\tau_s^3} \qquad \text{sur} \qquad \tau_s^3 < +\infty$$

Le corollaire 1.2.3 appliqué au temps τ_s^3 montre que, conditionnellement à $\tau_s^3 < +\infty$, le processus $(X_{t+\tau_s^3} - X_{\tau_s^3})_{t\geq 0}$ est indépendant de la tribu $\tilde{\mathfrak{A}}_{\tau_s^3}$ et que sa loi est égale à $\mathbf{P}'$. En rapprochant cela des deux égalités précédentes, on voit que conditionnellement à $\{\tau_s^3 < +\infty\}$ le couple de variables aléatoires $(\tau_{u+s}^3 - \tau_s^3, X_{\tau_{u+s}^3} - X_{\tau_s^3})$ est indépendant de la tribu $\tilde{\mathfrak{A}}_{\tau_s^3}$, qui contient celle engendrée par $(\tau_v^3, X_{\tau_v^3}; v \leq s)$, et que sa loi est égale à celle de $(\tau_u^3 - \tau_0^3, X_{\tau_u^3} - X_{\tau_0^3})$. Le processus $(\tau_s^3, X_{\tau_s^3})$ est donc un subordinateur bivarié tué en un temps exponentiel indépendant. Le temps de mort de ce processus est égal à $L^3[0,\zeta[$; en utilisant le théorème 3.1.1 et son corollaire 3.1.3, on obtient que le paramètre de cette loi exponentielle est donné par

$$\mathbf{E}'\big(L^3[0,\zeta[\big)^{-1} = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_t)} L(dt)\right]^{-1} = p$$

Notation 3.2.2 *On note ϕ^3 l'exposant de Laplace du subordinateur bivarié (non tué) associé à Z^3 lorsque X a des points de croissance. Une définition équivalente est donnée par la formule*

$$\textit{Pour tout } \alpha, \lambda \geq 0 \qquad \frac{1}{\phi^3(\alpha,\lambda) + p} = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha t - \lambda X_t} L^3(dt)\right]$$

3.3. Une condition suffisante pour l'abscence de points de croissance et qui fait intervenir la fonction $t \mapsto \mathbf{P}(X_t > 0)$.

On note $\mathbf{P}^0$ la loi sur l'espace canonique habituel $(\Omega^0, \mathscr{F}^0)$ des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ (à durée de vie infinie) qui fait du processus canonique (noté encore X) un processus de Lévy non tué et tel que $\mathbf{P}$ soit alors la loi du processus obtenu en tuant X en un temps exponentiel indépendant de paramètre 1. On rappelle l'expression bien connue des exposants de Laplace $\phi^1(\alpha,0)$ et $\phi^2(\alpha,0)$ (cf Bertoin [B4] par exemple).

$$\phi^1(\alpha,0) + 1 = \exp \int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-\alpha t})}{t} \mathbf{P}^0(X_t > 0) e^{-t}\, dt \qquad 3.3.a$$

$$\phi^2(\alpha,0)+1=\exp\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-\alpha t})}{t}\mathbf{P}^0(X_t<0)e^{-t}\,dt \tag{3.3.b}$$

On rappelle aussi la valeur de l'intégrale de Furialli

$$\exp\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-\alpha t})}{t}e^{-t}\,dt=\alpha+1 \tag{3.3.c}$$

On obtient par multiplication des égalités 3.3.a et 3.3.b l'équation bien connue

$$(\phi^1(\alpha,0)+1)(\phi^2(\alpha,0)+1)=\alpha+1 \tag{3.3.d}$$

Théorème 3.3.1 *Si X a des points de croissance alors l'inégalité suivante est vérifiée pour tout réel positif α*

$$\phi^3(\alpha,0)+p\leq\frac{\phi^1(\alpha,0)+1}{\phi^2(\alpha,0)+1}$$

Démonstration. On suppose que X a des points de croissance. On a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi^1(\alpha,0)+1}&=\mathbf{E}[e^{-\alpha\sigma}] \qquad (\text{par définition de } \phi^1)\\
&=\mathbf{E}\left[\int_0^{\zeta}e^{-\alpha s}L^3(ds)\right] \qquad (\text{car}(L^3)^{\mathfrak{D}}=L=\Delta_\sigma^{\mathfrak{D}} \text{ sous } \mathbf{P})\\
&=\mathbf{E}\left[\int_{T_c}^{\zeta}e^{-\alpha s}L^3(ds)\right] \qquad (\text{car } L^3 \text{ est portée par } C\subset[\![T_c,+\infty[\![)\\
&=\mathbf{E}\big[e^{-\alpha T_c}\big]\mathbf{E}'\left[\int_0^{\zeta}e^{-\alpha s}L^3(ds)\right] \qquad\qquad 3.3.e\\
&\qquad (\text{car } (X_{T_c+t}-X_{T_c};t\geq 0) \text{ sous } \mathbf{P}(.|T_c<+\infty) \text{ a la loi } \mathbf{P}')\\
&=\frac{\mathbf{E}[e^{-\alpha T_c}]}{\phi^3(\alpha,0)+p} \qquad (\text{par définition de } \phi^3)
\end{aligned}$$

De plus, l'inégalité évidente $T_c\geq\rho$ donne

$$\mathbf{E}\big[e^{-\alpha T_c}\big]\leq\mathbf{E}[e^{-\alpha\rho}]=\frac{1}{\phi^2(\alpha,0)+1} \tag{3.3.f}$$

Les propriétés 3.3.e et 3.3.f donnent alors l'inégalité du théorème.

Corollaire 3.3.2

si $\quad\liminf_{\alpha\mapsto+\infty}\frac{\phi^1(\alpha,0)}{\phi^2(\alpha,0)}<+\infty\quad$ *alors* $\quad$ *X n'a pas de points de croissance*

Démonstration. Par convergence monotone, on obtient que le terme $\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta e^{-\alpha s} L^3(ds)\right]$ tend vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$. Ce terme est l'inverse de $\phi^3(\alpha,0)+p$ par définition. On en déduit que la fonction $\phi^3(\alpha,0)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. L'inégalité du théorème 3.3.1 donne alors le résultat cherché.

Remarque On pourra remarquer que le corollaire 3.3.2 reste vrai sans l'hypopthèse de régularité des ensembles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ à l'exception du cas du processus de Poisson composé. Plus précisemment, lorsque $[0,+\infty[$ n'est pas régulier, l'ensemble $\{X-J=0\}$ est vide, à fortiori C l'est aussi, X n'a pas de points de croissance. D'autre part, L est remplacé par la mesure de comptage et $\lim_{+\infty}\phi^1(\alpha,0)<+\infty$. L'égalité 3.3.d donne $\lim_{+\infty}\phi^2(\alpha,0)=+\infty$ et le rapport $\frac{\phi^1(\alpha,0)}{\phi^2(\alpha,0)}$ converge vers 0, le corollaire précédent reste vrai dans ce cas.

Lorsque $]-\infty,0]$ n'est pas régulier, la probabilité que 0 soit un temps de croissance est $\mathbf{P}$-strictement positive: X a des temps de croissance dans ce cas. D'autre part, le rapport $\frac{\phi^1(\alpha,0)}{\phi^2(\alpha,0)}$ converge vers $+\infty$. Le corollaire précédent est encore vrai.

Exemples

On exclut le cas du processus de Poisson composé.

1) Si la loi de X est symétrique alors le rapport $\frac{\phi^1(\alpha,0)}{\phi^2(\alpha,0)}$ vaut constemment 1 et le corollaire précédent donne que X n'a pas de points de croissance.

2) Plus généralement, X ne peut avoir à la fois des points de croissance et des points de décroissance, puisque le rapport $\frac{\phi^1(\alpha,0)}{\phi^2(\alpha,0)}$ et son inverse ne peuvent tendre tous les deux vers $+\infty$.

3) Le résultat suivant a été établi par Bertoin [B3]:
Si $\mathbf{P}^0$ *est la loi du processus stable d'ordre* γ *quelconque et de coefficient d'assymétrie* $\beta=\mathbf{P}^0(X_1\geq 0)\leq 1/2$ *alors* X *n'a pas de points de croissance.*

On retrouve facilement ce résultat avec le corollaire précédent. En effet, les fonctions $\phi^1(\alpha,0)$ et $\phi^2(\alpha,0)$ sont respectivement égales à α^β et à $\alpha^{(1-\beta)}$. Le rapport $\frac{\phi^1(\alpha,0)}{\phi^2(\alpha,0)}$ tend donc vers 1 pour $\beta=1/2$ et vers 0 pour $\beta<1/2$.

4) Voici un résultat qui généralise l'exemple 3: *Si il existe un réel strictement positif tel que*

$$1/t\int_0^t \mathbf{P}^0(X_s\geq 0)\,ds\leq 1/2 \qquad \textit{pour tout } t\in\,]0,a[\qquad 3.3.g$$

alors X *n'a pas de points de croissance.*

En effet, si la propriété 3.3.g est vérifiée, on obtient, par une intégration par parties dans l'intégrale $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-\alpha t})}{t}\mathbf{P}^0(X_t>0)e^{-t}\,dt$, l'inégalité

$$I(\alpha)\leq 1/2\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-\alpha t})}{t}e^{-t}\,dt+\frac{1}{a} \qquad 3.3.h$$

puis (on note c la constante $e^{\frac{1}{\alpha}}$),

$$\begin{aligned}\exp I(\alpha) &\le c\exp\left(1/2\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{-\alpha t})}{t}e^{-t}dt\right) \qquad \text{(inégalité 3.3.h)}\\ &= c\sqrt{\alpha+1} \qquad \text{(égalité 3.3.c)}\end{aligned} \qquad 3.3.\text{i}$$

En utilisant successivement 3.3.d ,3.3.a puis 3.3.i, on obtient

$$\frac{\phi^1(\alpha,0)+1}{\phi^2(\alpha,0)+1} = \frac{(\phi^1(\alpha,0)+1)^2}{\alpha+1} = \frac{(\exp I(\alpha))^2}{\alpha+1} \le c^2$$

Le rapport $\frac{\phi^1(\alpha,0)}{\phi^2(\alpha,0)}$ est donc borné et le corollaire 3.3.2 permet alors de conclure.

4. Résolution de la conjecture de Bertoin

Notations 4.1 *On note u la fonction*

$$u(y) = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_t)} 1_{X_t\ge y} L(dt)\right]$$

et $dH_0(s,x)$ la loi du couple (σ, M) sous $\mathbf{P}'$.

Proposition 4.2 *pour toute variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable z,*

$$\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta z\circ\theta_t L(dt)\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta z\circ\theta_t u(X_t-J_t)L(dt)\right] \qquad 4.\text{a}$$

Démonstration. On a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta z\circ\theta_t L(dt)\right] &= \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta P'^{X_t}(z)L(dt)\right] \quad \text{(par projection sur } \mathfrak{D}\text{)}\\ &= \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta\left(\frac{1}{G(X_t)}\int_0^{X_t} Q^y(z)\; dG(y)\right)L(dt)\right]\\ &\qquad \text{(par définition de } P'^x\text{)}\\ &= \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_t)}1_{X_t\ge y}L(dt)\right]Q^y(z)\; dG(y) \quad \text{(par Fubini)}\\ &= \int_0^{+\infty} u(y)Q^y(z)\; dG(y) \quad \text{(par définition de } u\text{)}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\int_0^\zeta z\circ\theta_t u(X_t-J_t)L(dt)\right] &= \mathbf{E}\left[\int_0^\zeta Q^{X_t-J_t}(z)u(X_t-J_t)L(dt)\right]\\ &\qquad \text{(par projection sur } \tilde{\mathfrak{A}}\text{)}\end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} u(y) Q^y(z)\ dG(y) \mathbf{E}(L[0,\zeta[)$$

(par projection sur $\mathfrak{O}$)

$$= \int_0^{+\infty} u(y) Q^y(z)\ dG(y) \quad \text{(par définition de } L)$$

Théorème 4.3

a) $u(y) = \int_y^{+\infty} \frac{1}{G_\circ(x)} dH_\circ(x)$
b) *Si X a des points de croissance alors*

$$\frac{1}{\phi_3(\alpha,\lambda)+p} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha s-\lambda x}}{G_\circ(x)}\ dH_\circ(s,x)$$

Démonstration. Pour tout Z processus $\mathfrak{O}$-mesurable, on obtient la suite d'égalités

$$\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{Z_t}{G(X_t)} L(dt)\right] = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{Z_t}{G_\circ(X_t)} \Delta_\sigma^{\mathfrak{O}}\right] \qquad \left(\text{car } \Delta_\sigma^{\mathfrak{O}} = \frac{G_\circ(X)}{G(X)} L\right)$$
$$= \mathbf{E}'\left[\frac{Z_\sigma}{G_\circ(X_\sigma)}\right] \qquad \left(\text{car } \frac{Z}{G_0(X)} \text{est } \mathfrak{O}\text{-mesurable}\right)$$

En particulier, pour $Z = 1_{X \geq y}$, on obtient

$$u(y) = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_t)} 1_{X_t \geq y} L(dt)\right]$$
$$= \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G_\circ(X_\sigma)} 1_{X_\sigma \geq y}\right]$$
$$= \int_y^{+\infty} \frac{1}{G_\circ(x)}\ dH_\circ(x)$$

La dernière égalité est obtenue après avoir constaté que σ n' est pas ($\mathbf{P}'$-ps) un temps de saut de X, les variables aléatoires X_σ et M sont donc ($\mathbf{P}'$-ps) égales et $dH_\circ$ est la loi de M sous $\mathbf{P}'$ par définition. On a donc établi le point (a). On procède de la même manière pour le point (b) en prenant cette fois $Z_t = e^{-\alpha t - \lambda X_t}$.

Théorème 4.4 *X a des points de croissance si et seulement si*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{G_\circ(x)}\ dH_\circ(x) = \mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)} L(ds)\right] < +\infty$$

Démonstration. On a déja vu (Théorème 3.1.1) que si X a des points de croissance alors $\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)} L(ds)\right] < +\infty$. Reste à établir la réciproque. On suppose donc $\mathbf{E}'\left[\int_0^\zeta \frac{1}{G(X_s)} L(ds)\right] < +\infty$. On note toujours $\{\tau_t; t \geq 0\}$ l'inverse continu à droite du processus croissant $\{L[0,s]; s \geq 0\}$ et on introduit les notations suivantes

$$Y_t = X_{\tau_t} - J_{\tau_t} \qquad \xi = L_\zeta \qquad \theta^1_t = \theta_{\tau_t} \qquad \mathfrak{H}^1 = \sigma(z \circ \theta_{\tau_t}; z \in \mathscr{G})$$

Le processus Y meurt à l'instant ξ, et la famille d'opérateurs $(\theta^1_t; t \geq 0)$ forme un semi-groupe de translations pour Y, la tribu $\mathfrak{H}^1$ est une tribu du futur strict contenant Y. On déduit de 4.a par changement de temps

$$\mathbf{E}'\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t \, dt\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t u(Y_t) \, dt\right] \qquad 4.b$$

Pour tout réel positif s, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_{t+s} u(Y_t) \, dt\right] &= \mathbf{E}'\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_{t+s} \, dt\right] \\ &\quad \text{(d'après 4.b appliqué à } z \circ \theta_s) \qquad 4.c \\ &= \mathbf{E}'\left[\int_s^\xi z \circ \theta^1_t \, dt\right] \leq \mathbf{E}'\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t \, dt\right] \end{aligned}$$

Les propriétés 4.b et 4.c précédentes entraînent l'inégalité

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_{t+s} u(Y_t) \, dt\right] \leq \mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t u(Y_t) \, dt\right]$$

soit par changement de variables $t \mapsto t - s$, après avoir convenu que $u(Y_t) = 0$ pour $t < 0$

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t u(Y_{t-s}) \, dt\right] \leq \mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t u(Y_t) \, dt\right]$$

En appliquant la propriété de projection duale à la mesure aléatoire $z \circ \theta^1_t dt$, qui est une $\mathfrak{H}^1$-mesure, on peut remplacer dans le premier terme de l'inégalité précédente le processus $u(Y_{-s})$ par sa projection sur $\mathfrak{H}^1$, on obtient ainsi

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t \Pi^{\mathfrak{H}^1}(u(Y_{.-s}))_t \, dt\right] \leq \mathbf{E}\left[\int_0^\xi z \circ \theta^1_t u(Y_t) \, dt\right] \qquad 4.d$$

On en déduit facilement que l'inégalité de processus $\Pi^{\mathscr{H}^1}(u(Y_{.-s})) \leq u(Y)$ est vraie pour $\mathbf{P}(d\omega) \otimes dt$-presque tous les couples (t, ω). Comme d'autre part la fonction u est continue, le processus $u(Y)$ est continu à droite, le processus $\Pi^{\mathfrak{H}^1}(u(Y_{.-s}))$ également, puisque c'est la projection d'un processus continu à droite, on en déduit que l'inégalité $\Pi^{\mathfrak{H}^1}(u(Y_{.-s})) \leq u(Y)$ est vraie à l'indistinguabilité près. Le processus $Z = u(Y)$ vérifie les conditions d'application de la proposition 0.1.8, on en déduit l'existence d'une mesure aléatoire A telle que

$$u(Y) = \Pi^{\mathfrak{H}^1}(A[0,.]) \qquad \text{sur} \quad [\![0, \xi[\![\qquad 4.e$$

On obtient alors, en utilisant de nouveau le fait que $z \circ \theta^1_t \, dt$ est une $\mathfrak{H}^1$-mesure, les égalités

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{\xi} z \circ \theta_t^1 u(Y_t)\ dt\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^{\xi} z \circ \theta_t^1 A[0,t]\ dt\right] \qquad (\text{ par 4.e})$$
$$= \mathbf{E}\left[\int_0^{\xi}\left(\int_s^{\xi} z \circ \theta_t^1\ dt\right) A(ds)\right] \qquad (\text{par Fubini}) \qquad 4.f$$

En posant $v = \int_0^{\xi} z \circ \theta_t^1\ dt$, on obtient

$$\mathbf{E}'[v] = \mathbf{E}'\left[\int_0^{\xi} z \circ \theta_t^1\ dt\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^{\xi} z \circ \theta_t^1 u(Y_t)\ dt\right] \qquad (\text{d'après 4.b})$$
$$= \mathbf{E}\left[\int_0^{\xi} v \circ \theta_s A(ds)\right] \qquad (\text{d'aprés 4.f}) \qquad 4.g$$

L'égalité 4.g est donc vérifiée par toute variable v de la forme $v = \int_0^{\xi} z \circ \theta_t^1\ dt$ où z est une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable quelconque. On vérifie alors facilement que cette famille de variables aléatoires est une algèbre engendrant une tribu contenant $\sigma(Y_s; s \geq 0)$. Un argument de classes monotones permet donc d'étendre cette égalité à toute variable de cette tribu. En particulier pour une variable aléatoire de la forme $v = f(Y_0)$, on obtient:

$$f(0) = \mathbf{E}'[f(Y_0)] = \mathbf{E}\left[\int_0^{\xi} f(Y_t) A(dt)\right] \qquad 4.h$$

En appliquant cette dernière égalité à la fonction $f = 1_{x \neq 0}$, on en déduit que la mesure $A(\omega, dt)$ est portée par l'ensemble $E(\omega) = \{t; Y_t(\omega) = 0\}$ pour $\mathbf{P}$-presque tous les ω. Puis en l'appliquant à $f = 1$, on en déduit que $\mathbf{E}(A[0,\zeta[) = 1$ et donc que la mesure $A(\omega, dt)$ ne peut être nulle pour $\mathbf{P}$-presque tous les ω. On en déduit que $\mathbf{P}(E \neq \emptyset) > 0$. D'autre part, il est facile de voir que pour $t \in \mathbb{R}_+$, $t \in E(\omega) \Longleftrightarrow \tau_t(\omega) \in C(\omega)$. On conclut donc $\mathbf{P}(C \neq \emptyset) > 0$ et donc X a des points de croissance.

Remarque Les Markovologues reconnaitrons que, si on construit deux noyaux $\{U(x,dy); x \geq 0\}$ et $\{\hat{U}(x,dy); x \geq 0\}$ tel que le premier soit un noyau-potentiel du processus simplement markovien $X_{\tau_t} - J_{\tau_t}$ et que le second soit en dualité avec le premier pour la mesure de référence dG (c'est-à-dire que pour tout couple de fonctions positives (f,g), l'équation $\int_0^{+\infty} f(y) Ug(y)\ dG(y) = \int_0^{+\infty} \hat{U} f(y) g(y)\ dG(y)$ est vérifiée), on sait qu'alors $\{\hat{U}(x,dy); x \geq 0\}$ est un noyau-potentiel du processus obtenu en retournant $X_{\tau_t} - J_{\tau_t}$ en son temps de mort sous la loi $\mathbf{P}$) alors la fonction u est excessive pour $\hat{U}$ (quitte à modifier ce noyau sur un ensemble polaire, c'est à dire un ensemble de réels qui n'est $\mathbf{P}$-presque sûrement pas rencontré par la trajectoire de $X_{\tau_t} - J_{\tau_t}$).

Théorème 4.5 *Pour tout réel* x,

$$1/4H(x) \leq H_{\circ}(x) \leq H(x)$$

Démonstration. En utilisant le fait que le processus $(X^-_\zeta - X^-_{(\zeta-t)}; t \geq 0)$ a même loi que X, on montre que X^-_ζ a la loi dH sous $\mathbf{P}'$; soit pour tout réel a

$$\mathbf{P}'(X^-_\zeta \leq a) = H(a) \qquad 4.\text{i}$$

La mesure $dH_\circ$ est par définition la loi du maximum M sous $\mathbf{P}'$. Comme la variable aléatoire X^-_ζ est inférieure à M, sa fonction de répartition est supérieure à celle de M, on déduit donc de 4.i l'inégalité

$$H_\circ(a) \leq H(a)$$

Reste la première inégalité du théorème.
Comme Q^y est la trace sur la tribu $\mathscr{G}$ d'une version de la loi conditionnelle $P(\ | -m = y)$ et que le processus $(X_{t+\rho} - X_\rho; t \geq 0)$ est indépendant de m, la loi de $X^-_\zeta - X_0$ sous Q^y est $dH(. + y)$ (pour dG-presque tout y). Pour tout réel positif x, on note $F(x, .)$ la fonction de répartition de $X^-_\zeta - X_0$ sous $\mathbf{P}'^x$ (en particulier $F(0, .) = H$), on obtient pour $x > 0$ et pour tout réel a

$$\begin{aligned} F(x,a) &= \mathbf{P}'^x(X^-_\zeta - X_0 \leq a) \qquad \text{(par définition de } F(x,a)) \\ &= \frac{1}{G(x)} \int_0^x Q^y(X^-_\zeta - X_0 \leq a)\ dG(y) \qquad \text{(par définition de } \mathbf{P}'^x) \\ &= \frac{1}{G(x)} \int_0^x H(a+y)\ dG(y) \\ &\qquad \text{(car } dH(.+y) \text{ est la loi de } X^-_\zeta - X_0 \text{ sous } Q^y) \end{aligned} \qquad 4.\text{j}$$

D'autre part, on déduit du lemme 2.3 que pour tout temps d'arrêt T de la filtration $(\mathscr{F}_t)$, on a

$$\mathbf{E}'\left[1_{X^-_\zeta \leq a} | \mathscr{F}_T\right] = \mathbf{E}'\left[1_{X^-_\zeta - X_T \leq a - X_T} | \mathscr{F}_T\right] = F(X_T, a - X_T) \qquad \text{sur } T < \zeta \quad 4.\text{k}$$

Pour tout réel positif a, on note T^{2a} le temps d'entrée de X dans $]2a, +\infty[$ $(T^{2a} = \inf\{t; X_t > 2a\})$, on a

$$\begin{aligned} H(a) &= \mathbf{P}'(X^-_\zeta \leq a) \qquad \text{(par 4.i)} \\ &= \mathbf{P}'(M \leq 2a, X^-_\zeta \leq a) + \mathbf{P}'(M > 2a, X^-_\zeta \leq a) \\ &\leq H_\circ(2a) + \mathbf{E}'\left[\mathbf{E}'(X^-_\zeta \leq a | \mathscr{F}_{T^{2a}}) 1_{T^{2a} < \zeta}\right] \\ &\qquad \text{(par définition de } H_\circ \text{ et } T^{2a}) \\ &= H_\circ(2a) + \mathbf{E}'\left[F(X_{T^{2a}}, a - X_{T^{2a}}) 1_{T^{2a} < \zeta}\right] \\ &\qquad \text{(par 4.k appliqué à } T = T^{2a}) \end{aligned} \qquad 4.\text{l}$$

On vérifie facilement que les fonctions G et H sont continues et que, par une intégration par partie dans l'équation 4.j, on obtient pour tout réel a et tout x strictement positif

$$F(x, a - x) = \int_0^a \frac{G(x) - G(x - a + z)}{G(x)}\ dH(z) \qquad 4.\text{m}$$

En utilisant la croissance de G et sa propriété de sous-additivité (bien connue et facile à montrer), on obtient pour $x \geq 2a$ (et donc $x - a \geq x/2$) et pour tout réel z positif ou nul

$$G(x - a + z) \geq G(x - a) \geq G(x/2) \geq G(x)/2 \qquad 4.n$$

En reprenant l'égalité 4.m et en utilisant l'inégalité 4.n, on obtient pour tous réels $a > 0$ et $x \geq 2a$

$$F(x, a - x) \leq \frac{G(x) - G(x)/2}{G(x)} \int_0^a dH(z) \leq 1/2H(a) \qquad 4.o$$

La variable aléatoire $X_{T^{2a}}$ est supérieure ou égale à $2a$ sur $T^{2a} < +\infty$, l'inégalité 4.o donne donc que la variable aléatoire $F(X_{T^{2a}}, a - X_{T^{2a}}) 1_{T^{2a} < \zeta}$ est majorée par la constante $H(a)/2$. On déduit alors de 4.1 l'inégalité $H(a) \leq H_\circ(2a) + H(a)/2$ pour tout a, qui est équivalente à l'inégalité $H(a) \leq 2H_\circ(2a)$. La fonction H étant sous-additive, on a l'inégalité $H(2a) \leq 2H(a)$, on en déduit que $H(2a) \leq 4H_\circ(2a)$ et cela donne l'inégalité cherchée par changement de variables $a \mapsto a/2$

On déduit facilement des théorèmes 4.4 et 4.5 le suivant:

Théorème 4.6 *Le processus X a des points de croissance si et seulement si*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{G(x)}\, dH(x) < +\infty$$

Remarques

1) Si une des hypothèses de régularité des ensembles $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ n'est pas vérifiée, il faut remplacer les lois $\mathbf{P}'$ et $\mathbf{P}''$ par les lois des processus $(X_{\rho+t} - m; t \geq 0)$ sous $\mathbf{P}$ pour la première et la loi de $(M - X_{\sigma+t}; t \geq 0)$ sous $\mathbf{P}$ pour la seconde (voir le commentaire du paragraphe1.2). Les fonctions $G_\circ$ et $H_\circ$ sont alors modifiées en conséquence. On peut ensuite adapter les démonstrations précédentes pour établir que les théorèmes 4.3, 4.4 , 4.5 et 4.6 précédents restent vrais dans tous les cas. En particulier, pour le théorème 4.6, si $[0, +\infty[$ n'est pas régulier, on a déjà vu que X n'a pas de points de croissance. D'autre part, dH charge le singleton $\{0\}$ et $G(0) = 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{G(x)}\, dH(x)$ est infinie. Si $]-\infty, 0[$ n'est pas régulier, on a vu que X a des points de croissance. D'autre part, $G(0)$ est strictement positive et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{G(x)}\, dH(x)$ est majorée par $\frac{1}{G(0)}$. Elle est donc finie.

2) Soit ϕ l'exposant de Laplace de X et ψ^+ et ψ^- les exposants de Fourier apparaissant dans la décomposition de Wiener-Hopf:

$$\mathbf{E}^0\left[e^{iuX_t}\right] = e^{it\phi(u)}$$

$$\psi^+(u)\psi^-(-u) = \phi(u)$$

dV^+ et dV^- les mesures, portées par $[0, +\infty[$, dont les transformées de Fourier sont respectivement ψ^+ et ψ^-, V^+ et V^- leur fonctions de répartition. Doney [D] a montré qu'il existe des constantes strictement positives η, a et b vérifiant la propriété suivante

Pour tout $x \in [0, \eta[\qquad aV^+(x) \leq H(x) \leq bV^+(x)$ et $aV^-(x) \leq G(x) \leq bV^-(x)$

Les fonctions V^+ et V^- sont plus intrinsèques que H et G (qui changent lorsqu'on change de paramètre de la loi du temps où l'on tue X). On pourra donc retenir la CNS pour l'existence de points de croissance sous la forme suivante plutôt que sous la forme du théorème 4.6

$$\int_0^1 \frac{1}{V^-(x)} \, dV^+(x) < +\infty$$

Exemples On peut remplacer dans ce qui suit les fonctions H et G par V^+ et V^-. On exclut le cas du processus de Poisson composé et on renvoit à [B4] pour les résultats classiques sur les processus de Lévy que nous utilisons.

1) Si l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{G(x)} \, dH(x)$ est finie alors le rapport $\frac{H(x)}{G(x)}$ tend vers 0 à droite de 0. On retrouve de cette manière que X ne peut avoir à la fois des points de croissance et des points de décroissance.

2) Si X rampe vers le haut (c'est à dire qu'il existe un réel strictement positif tel que $\mathbf{P}(X_{T^a} = a) > 0$ où T^a est le temps d'entrée de X dans $]a, +\infty[$) alors $H(x) \sim cx$ dans un voisinage droit de 0 et pour une constante réelle c strictement positive. On en déduit dans ce cas que X a des points de croissance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{G(x)} \, dx$ est finie. Ceci généralise le résultat de Bertoin [B1] concernant les processus sans sauts positifs.

3) Si X rampe vers le bas alors $G(x) \sim dx$ dans un voisinage droit de 0 et pour une constante strictement positive d. D'autre part, le rapport $\frac{H(x)}{x}$ converge dans tous les cas vers une constante strictement positive (finie si X a une composante Brownienne non nulle et infinie dans les autres cas). On en déduit facilement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{G(x)} \, dH(x)$ est infinie; X n'a donc pas de points de croissance dans ce cas. Ce résultat a été établi par Bertoin [B2].

4) Si X est un processus stable sous $\mathbf{P}^0$ d'indice γ et de coefficient d'assymétrie $\beta = \mathbf{P}^0(X_1 \geq 0)$ alors $H(x) \sim cx^{\gamma\beta}$ et $G(x) \sim dx^{\gamma(1-\beta)}$ dans un voisinage droit de 0 et pour deux constantes strictement positives c et d. On retrouve alors aisément le résultat de Bertoin [B3] : X a des points de croissance si et seulement si $\beta > 1/2$.

Références

[Ad] Adelman, O.: Brownian motion never increases : A new proof to a result of Dvoretzky, Erdos and Kakutani, Israel J. Math. **50**, 189–192 (1985)

[Az] Azéma, J.: Théorie générale des processus et retournement du temps. Ann. sci. de l'ENS. 4ème s. t6. (1973)

[Be] Berman, S.M.: On non increase of Brownian motion. Proc. Ame. Math. Soc. **88**, 141–144 (1983)

[B1] Bertoin, J.: Increase of a Lévy process with no positive jumps. Stochastics and stochastis reports **37**, 247–251 (1991)

[B2] Bertoin, J.: Lévy processes that can creep downwards never increase. Ann. Inst. Henri Poincaré, **31**, (1995)

[B3] Bertoin, J.: Increase of stable processes. J of therotic. prob. (1995)

[B4] Bertoin, J.: Lévy processes. Cambridge University press

[Bu] Burdzy: On non increase of Brownian motion. Ann. Prob. **18**, 978–980 (1990)

[DM 1] Dellacherie, C.; Meyer, P.A.: Probabilités et Potentiel, Tome 1. Hermann (1980)

[DM 2] C. Dellacherie, P.A. Meyer. Probabilités et Potentiel, Tome 2. Hermann (1980)

[D] Doney, R.A. Increase of a Lévy processes. Ann. Prob. **24**, 961–970 (1996)

[DEK] Dvöretzky, A.; Erdös, P.; Kakutani, S.: On nonincrease everywhere of the Brownian motion process. Proc. 4th. Berkeley Symp. Math. Stat. and Probab. II, 103–116 (1961)

[F1] Fourati, S.: Représentation des mesures par des fonctionnelles additives entre deux temps. Ann. Inst. Henri Poincaré **31**, 527–544 (1995)

[F2] Fourati, S.: Une propriété de Markov pour les processus indéxés par $\mathbb{R}$. Sem. Prob. XXIX. LN in Math. 1613 Springer-Verlag (1995)

[FL] Lenglart, E.; Fourati, S.: Tribus homogènes et commutation des projections. Sem. Prob. XXI. LN in Math. 465. Springer-Verlag (1987)

[G] Getoor, R.K. On the construction of kernels. Sem. Prob. IX. LN in Math. Springer-Verlag (1995)

[J] Jeulin, T.: Semi-martingales et grossissement d'une filtration. LN in Math. **833**, Springer-Verlag. (1980)

[M] Millar, P.W.: Zero-One laws and the minimum of a Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc. **226**, 365–391 (1973)