Ann. Henri Poincaré 4 (2003) 385 – 411

1424-0637/03/020385-27
DOI 10.1007/s00023-003-0134-8

Annales Henri Poincaré

Problèmes de Cauchy sur un Conoïde Caractéristique pour les Equations d'Einstein (Conformes) du Vide et pour les Equations de Yang-Mills-Higgs

Marcel Dossa

Abstract. Existence and uniqueness results established in [7], [8] for the hyperbolic quasilinear Cauchy problem of second order, with initial data given on a characteristic cone are applied to solve partially or completely the Cauchy problem, with initial data prescribed on a characteristic cone, for some classical physical equations of gauge theories and gravitation.

Résumé. Les résultats d'existence et d'unicité établis dans [7], [8] pour le problème de Cauchy quasi-linéaire hyperbolique du second ordre avec donnée initiale portée par un conoïde caractéristique, sont appliqués à la résolution partielle ou complète du problème de Cauchy, avec donnée initiale sur un conoïde caractéristique, pour certaines équations physiques classiques des théories des champs de jauge et de la gravitation.

Introduction

Dans des travaux précédents (cf. [7], [8], [11]), pour des données initiales portées par un conoïde caractéristique $\mathcal{C}$, le problème de Cauchy pour des systèmes d'équations hyper-quasilinéaires hyperboliques du second ordre a été résolu dans le domaine $\mathcal{Y}$ intérieur à $\mathcal{C}$, sous des hypothèses de différentiabilité minimale sur les données. L'objet du présent travail est d'appliquer les résultats d'existence et d'unicité ainsi obtenus à la résolution du problème de Cauchy, avec donnée initiale sur un conoïde caractéristique pour certaines équations physiques classiques des théories des champs et de la gravitation: les Equations de Yang-Mills-Higgs, les Equations d'Einstein du vide, le système conforme régulier des Equations d'Einstein de [6].

Malheureusement cette application ne s'opère pas sans difficultés. En effet, considérons dans un espace-temps M, un système d'équations des champs relativistes ou des théories de jauge, avec des conditions initiales portées par une hypersurface S spatiale ou caractéristique. Le problème de Cauchy ainsi obtenu est, en général, mal posé car les Equations des Champs exprimées dans un système de coordonnées quelconque ne sont pas, en général, un système d'évolution (hyperbolique ou parabolique). Pour résoudre cette difficulté, on est amené à adjoindre au système des Equations des champs étudiés une condition supplémentaire appelée "condition de jauge" qui, compte tenu de la structure profonde des Equations étudiées, doit posséder les propriétés suivantes:

(i) lorsque cette condition de jauge est partout vérifiée dans l'Espace-temps, le système des Equations des Champs étudié se réduit à un système d'évolution.

(ii) lorsque le système d'évolution associé est partout vérifié et que la condition de jauge est vérifiée sur l'hypersurface initiale $\mathcal{S}$, alors cette condition est partout vérifiée.

Il en découle que lorsqu'une condition de jauge est choisie, le problème de Cauchy pour les Equations des champs se scinde en deux sous-problèmes: le problème des contraintes initiales et le problème de l'évolution.

Le problème des contraintes initiales consiste à construire, à partir du choix arbitraire sur S de certaines composantes des champs appelées "données indépendantes", des données initiales complètes telles que la solution du problème de l'Evolution associé à ces données initiales vérifie sur S la condition de jauge. Le problème de l'Evolution consiste à résoudre dans l'Espace-temps le système d'Evolution (appelé encore Equations réduites) obtenu pour des données initiales complètes, solution du problème des contraintes initiales.

Ces remarques permettent de préciser les résultats, en fait, partiels obtenus de la façon suivante; nous avons résolu:

1) de façon complète, pour la jauge de Lorentz, le problème de Cauchy pour les Equations de Yang-Mills-Higgs, en utilisant outre [7], [8], les résultats de [34] où Rendall a traité, sous des hypothèses de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les données, le problème des contraintes initiales sur un conoïde caractéristique,

2) les problèmes de l'Evolution associés, en jauge harmonique, respectivement aux Equations d'Einstein du vide et au système conforme régulier des Equations d'Einstein de Choquet Bruhat et Novello ([6]).

Avant de consacrer la suite de ce travail à l'étude strictement mathématique des problèmes annoncés, il convient de dire quelques mots sur les motivations physiques du problème de Cauchy caractéristique en Relativité générale.

Le problème de Cauchy caractéristique intervient naturellement dans une grande variété de problèmes de la Théorie de la Relativité générale. Plusieurs spécialistes de cette théorie (cf. [1], [29], [31]) pensent que ce problème survient beaucoup plus naturellement dans les questions relativistes que le problème de Cauchy traditionnel à données initiales portées par une hypersurface spatiale; ceci est dû au fait qu'en Relativité générale, les directions isotropes et les hypersurfaces isotropes (qui sont des hypersurfaces caractéristiques des Equations d'Einstein) de l'espace-temps relativiste que sont les horizons, l'infini isotrope passé ou futur, les cônes isotropes passé et futur d'un observateur de l'espace-temps, semblent jouer un rôle plus fondamental que les hypersurfaces spatiales et les directions temporelles. Ainsi, par exemple, de nombreux problèmes d'existence et d'unicité de propriétés physiquement intéressantes ou bien pathologiques des espaces-temps relativistes se réduisent à des problèmes de Cauchy sur des horizons, l'infini isotrope passé ou futur, le cône isotrope passé ou futur d'un point, etc... (cf. Hajicek [23], [24], Newman et Unti [30], Christodoulou [4], [5], Moncrief et Isenberg [28], H. Friedrich [15], [19], Kannar [26], Balean [1], Balean et Bartnik [2]). Plusieurs relativistes ont souligné l'importance du problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique dans les questions de cosmologie; dans [12], on a montré que les observations astronomiques idéales, à grande échelle, de l'Univers sont équivalentes à des données portées par le cône isotrope passé (ou futur) d'un seul point (ici et maintenant). Le problème de Cauchy caractéristique pour les Equations d'Einstein a des applications intéressantes en Relativité numérique (cf. [25], [35], [36]); ce succès relatif est dû au fait que le problème des contraintes initiales associé au problème de Cauchy caractéristique se réduit, lorsque le choix des données indépendantes est convenablement opéré, à une hiérarchie d'équations différentielles ou d'équations algébriques plus faciles à résoudre que les contraintes elliptiques du problème de Cauchy traditionnel. L'un des problèmes les plus importants en Relativité générale est l'estimation de la radiation gravitationnelle émise par les systèmes isolés; le problème de Cauchy caractéristique pour les Equations d'Einstein avec donnée initiale portée par le cône isotrope futur d'un point situé au voisinage des sources, constitue un moyen très efficace pour étudier ce problème. Les espaces-temps relativistes représentant la radiation gravitationnelle pure qui vient de l'infini et interragit avec elle-même, peuvent se caractériser comme les solutions des Equations d'Einstein du vide possédant une structure régulière à l'infini isotrope passé (qui constitue le cône isotrope de sommet l'infini temporel passé, avec des génératrices complètes (cf. [15])). Dans une série de travaux [14], [15], [16], [17], [18], [19], H. Friedrich a réussi, en utilisant le formalisme spinoriel de Newman-Penrose et des méthodes de transformation conforme, à réduire des problèmes d'existence globale ou semi-globale, de comportement asymptotique (existence d'espaces-temps relativistes asymptotiquement plats au sens de Penrose), des solutions des Equations d'Einstein, à des problèmes de Cauchy locaux avec donnée sur l'infini isotrope.

1 Rappels des résultats de [8]

1.1 Cadre géométrique et espaces fonctionnels utilisés

Soient: $\mathcal{C}$ le demi-conoïde de sommet 0 dans $\mathbb{R}^4$ d'équation:

- $x^o = s$, $s = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$
- $\mathcal{Y}$ l'intérieur de $\mathcal{C}$: $\mathcal{Y}=\left\{(x^o, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4/ \quad s \leq x^o\right\}$
- $\mathcal{Y}_T = \mathcal{Y} \cap \{x^o \leq T\}$, $\mathcal{C}_T = \mathcal{C} \cap \{x^o \leq T\}$, $\Sigma_T = \mathcal{C} \cap \{x^o = T\}$, $G_T = Y \cap \left\{x^0 = T\right\}$ si T est un réel > 0.

  Pour $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{N}^3$, on note:

$$\partial^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{(\partial x^1)^{\beta_1} (\partial x^2)^{\beta_2} (\partial x^3)^{\beta_3}}.$$

Pour $v = (v_r)$, définie dans un domaine de $\mathcal{C}$ et pour $p \in \mathbb{N}$, on pose:

$$\|v\|_{H^p(\Sigma_t,\mathcal{C})} = \left(\sum_{\substack{|\beta|\leq p \\ r}} \int_{\Sigma_t} \left|\partial^\beta v_r\right|^2 d\sigma(\Sigma_t) \right)^{1/2} \qquad \text{(si le second membre existe),}$$

$d\sigma(\Sigma_t)$ étant la mesure induite sur Σ_t par $dx^1dx^2dx^3$.

Pour $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^4$, on note:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^o)^{\alpha_o}(\partial x^1)^{\alpha_1}(\partial x^2)^{\alpha_2}(\partial x^3)^{\alpha_3}}.$$

Pour $X = (X_r)$ définie dans un domaine de $\mathcal{Y}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose:

$$\left|D^k X\right|^2 = \sum_r \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha X_r|^2 ,$$

$$\|X\|_{H^p(G_t,\mathcal{Y})} = \left(\sum_{k=0}^{p} \int_{G_t} \left|D^k X\right|^2 dx^1dx^2dx^3 \right)^{1/2}$$

(si les seconds membres de ces égalités existent, les dérivées étant prises au sens des distributions).

- $C^\infty(\mathcal{Y}_t)$ est l'espace des restrictions à $\mathcal{Y}_t$ des fonctions numériques de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^4$

  $C^\infty_\infty(\mathcal{Y}_t)$ est le sous espace de $C^\infty(\mathcal{Y}_t)$ formé des fonctions dont les dérivées de tous ordres sont nulles en 0.

  $F^p(\mathcal{Y}_t)$ est l'espace des fonctions numériques X défini par la norme:

$$\|X\|_{F^p(\mathcal{Y}_t)} = \underset{\tau\in]0,t]}{Ess\sup}\, \tau^{-3/2} \|X\|_{H^p(G_\tau,\mathcal{Y})} \ .$$

  $\widetilde{F}^p(\mathcal{C}_t)$ est l'espace des fonctions numériques X défini par la norme:

$$\|X\|_{\widetilde{F}^p(\mathcal{C}_t)} = \sum_I \sum_{r=0}^{2p-1} \underset{\tau\in]0,t]}{Ess\sup}\, \tau^{-2p+r} \|X\|_{H^p(\Sigma_\tau,\mathcal{C})} \ .$$

  $\widehat{F}^p(\mathcal{C}_t)$ est la fermeture dans $\widetilde{F}^p(\mathcal{C}_t)$ de l'espace des restrictions à $\mathcal{C}_t$ des fonctions de $C^\infty_\infty(\mathcal{Y}_t)$.

  $\widetilde{F}^p(\mathcal{Y}_t)$ est le sous espace de $F^p(\mathcal{Y}_t)$ défini par la norme:

$$\|X\|_{\widetilde{F}^p(\mathcal{Y}_t)} = \|X\|_{F^p(\mathcal{Y}_t)} + \sum_{k=o}^{p-1} \left\|[\partial^k_o X]\right\|_{\widetilde{F}^{p-k}(\mathcal{C}_t)}$$

  où [ ] indique la restriction à $\mathcal{C}_t$ et $\partial^k_o = \dfrac{\partial^k}{(\partial x^o)^k}$.

$\widehat{F}^p(\mathcal{Y}_t)$ est la fermeture de $C^\infty_\infty(\mathcal{Y}_t)$ dans $\widetilde{F}^p(\mathcal{Y}_t)$.

$P^k(\mathcal{Y}_t)$ est l'espace des restrictions à $\mathcal{Y}_t$ des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}^4$ de degré $\leq k$.

1.2 Enoncés des résultats de [8]

On considère le système d'équations du second ordre:

$$A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u)D_{\lambda\mu}u + f(x^\alpha, u, Du) = 0 \tag{E}$$

$$u = (u^I),\ Du = (\frac{\partial u^I}{\partial x^\nu}),\ D_{\lambda\mu}u = \left(\frac{\partial^2 u^I}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}\right),\ I = 1, \ldots, N,\ \nu, \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Hypothèse $\mathcal{H}_m$

- m est un entier ≥ 3
- $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, (u^I))$ est de classe C^{2m-1} sur $U \times W$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^4$ contenant l'origine $0, W$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $(x^\alpha, u^I) \in U \times W$, $A^{\lambda\mu}(x^\alpha, u^I)$ définit une forme quadratique définie de signature $+\ -$ avec $A^{oo} > 0$, $A^{ij}X_iX_j$ définie négative $(i, j = 1, 2$ ou $3)$.

Il existe $(a^I) \in W$ tel que $A^{\lambda\mu}(0, a^I) = \eta^{\lambda\mu}$ (métrique de Minkowski)

- $f(x^\alpha, u^I, D_\lambda u^I)$ est de classe C^{2m-3} dans $U \times W \times W'$ où W' est un ouvert de $\mathbb{R}^{4N}$. Si $m = 3$, les dérivées $D_{u^I}f$ et $D_{D_\nu u^I}f$ sont de classe C^{2m-3}.
- $\varphi = (\varphi^I)$ est une fonction numérique continue sur $\mathcal{C}_T$; $\varphi(0) = a^I$ et $\mathcal{C}_T$ est caractéristique pour (E):

$$A^{oo}(s, x^l; \varphi^I(x^l)) - 2\sum_{k=1}^{3} A^{ok}(s, x^l; \varphi^I(x^l))\frac{x^k}{s} + \sum_{i,j=1}^{3} A^{ij}(s, x^l; \varphi^I(x^l))\frac{x^i x^j}{s^2} = 0$$

$\forall (s, x^l) \in \mathcal{C}_T$, φ peut s'écrire $\varphi = \overline{\varphi}|_{\mathcal{C}_T} + \varphi_1$, où $\varphi_1 \in \widetilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$ et $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}^I)$ est une fonction vectorielle à composantes polynomiales de degré $\leq 2(m-1)$ telle que:

$$\overline{\varphi}^I(0) = a^I,\ D\overline{\varphi}(0) \equiv \left((\frac{\partial \overline{\varphi}^I}{\partial x^\lambda})(0)\right) \in W'.$$

Théorème 1 *Soit le problème de Cauchy* $(*)$*: u solution de (E) dans* $\mathcal{Y}$ *et* $u = \varphi$ *sur* $\mathcal{C}_T$*. Sous l'hypothèse* $\mathcal{H}_m$ *avec* $m \geq 3$*, on a:*

1) *la donnée initiale* φ *du problème de Cauchy* $(*)$ *peut se redécomposer en:* $\varphi = \overline{u}|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{\varphi}_1$ *avec:*
   - $\overline{u}$ *fonction polynôme de degré* $\leq 2(m-1)$ *vérifiant au point* 0 *l'équation (E) et les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $2(m-2)$.
   - $\widetilde{\varphi_1} \in \widetilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$
2) $\exists T_o \in]0, T]$ *tel que le problème de Cauchy* $(*)$ *admet, dans le domaine* $\mathcal{Y}_{T_o}$, *une solution unique* $u = (u^I) \in P^{2(m-1)}(\mathcal{Y}_{T_o}) + \widetilde{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o})$.

Cette solution se décompose en:

$$u = \overline{u} + u_1, \quad \textit{avec} \quad u_1 \in \widetilde{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o}),\ u_1(0) = 0,\ Du_1(0) = 0$$

3) *Si les $A^{\lambda\mu}$ sont de classe C^∞ et sont indépendants de u et si $\varphi_1 \in \widehat{F}^m(\mathcal{C}_T)$, alors $u_1 \in \widehat{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o})$.*
4) *Si $f(x^\alpha, u^I, D_\lambda u^I)$ est linéaire en Du, on peut remplacer la condition $m \geq 3$ par $m \geq 2$.*
5) *Si (E) est linéaire, on peut supposer $m \geq 2$ et prendre $T_o = T$.*

Théorème 2 *(Existence Globale dans $\mathcal{Y}_T$)*
Sous les mêmes hypothèses et notations que le Théorème 1, on pose:

$$\|\varphi\|_{m,T} = |\overline{u}|_m + \|\widetilde{\varphi}_1\|_{\widetilde{F}^m(\mathcal{C}_T)} \quad \textit{avec} \quad |\overline{u}|_m = \max_{\substack{|\alpha|\leq 2(m-1)\\ I}} \left|D^\alpha \overline{u}^I(0)\right| \ .$$

On suppose en plus:

$f(x^\alpha, 0, 0) = 0$ et les dérivées partielles d'ordre 2 de f par rapport aux variables u et Du sont de classe de C^{2m-3}.

Alors il existe un réel $d > 0$ tel que, si $\|\varphi\|_{m,T} \leq d$ la solution $u = \overline{u} + u_1$ est globale, c'est-à-dire $T_o = T$.

2 Formulation des principaux résultats obtenus

2.1 Problème de l'Evolution pour les Equations d'Einstein du vide en coordonnées harmoniques; Théorème 3

Les Equations d'Einstein du vide s'écrivent en coordonnées quelconques:

$$R_{\alpha\beta}(g) = 0 \tag{2.1.1}$$

où les $R_{\alpha\beta}$ désignent les composantes du tenseur de Ricci du tenseur métrique hyperbolique inconnu g, de composantes $g_{\alpha\beta}$.

On sait (cf. [3]) que le tenseur de Ricci se décompose sous la forme suivante:

$$R_{\alpha\beta}(g) \equiv^{(h)} R_{\alpha\beta}(g) - \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\lambda}\nabla_\beta F^\lambda + g_{\beta\lambda}\nabla_\alpha F^\lambda\right) \tag{2.1.2}$$

avec:

$$^{(h)}R_{\alpha\beta}(g) \equiv -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\left(x^\nu, g_{\mu\nu}, \partial_\delta g_{\mu\nu}\right) \tag{2.1.3}$$

$$F^\lambda(g) \equiv g^{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \tag{2.1.4}$$

la matrice de composantes $g^{\alpha\beta}$ étant l'inverse de celle de composantes $g_{\alpha\beta}$, les $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ étant les symboles de Christoffel de g. Les coordonnées sont dites harmoniques si on a: $F^\lambda(g) \equiv 0$ partout.

En coordonnées harmoniques, les Equations d'Einstein du vide se réduisent, vu (2.1.2) et (2.1.3), au système hyperbolique:

$$^{(h)}R_{\alpha\beta}(g) = 0 \ .$$

Théorème 3

A *Soit* m *un entier* ≥ 3. *Soit* T *un réel* > 0. *Soit donnée sur* $\mathcal{C}_T$ *une métrique* $h = (h_{\alpha\beta})$ *vérifiant:*

1) $h_{\alpha\beta} = \overline{h}_{\alpha\beta}\big|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{h}_{\alpha\beta}$ *où* $\overline{h}_{\alpha\beta} \in P^{2(m-1)}(\mathbb{R}^4)$ *et* $\widetilde{h}_{\alpha\beta} \in \widetilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$
2) $h_{\alpha\beta}(0) = \overline{h}_{\alpha\beta}(0) = \eta_{\alpha\beta}$ *(métrique de Minkowski)*
3) $\mathcal{C}_T$ *est isotrope relativement à la métrique* $(h_{\alpha\beta})$.

   Alors:

a) *la donnée* h *peut se redécomposer sous la forme* $h_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\alpha\beta}\big|_{\mathcal{C}_T} + \overset{*}{h}_{\alpha\beta}$ *où:*
   - $\overline{g}_{\alpha\beta}$ *est une métrique sur* $\mathbb{R}^4$, $\overline{g}_{\alpha\beta} \in P^{2(m-1)}(\mathbb{R}^4)$ *et* $\overline{g}_{\alpha\beta}$ *vérifie au point* 0 $^{(h)}R_{\alpha\beta}(\overline{g}) = 0$ *et les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $2(m-2)$.
   - $\overset{*}{h}_{\alpha\beta} \in \widetilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$

b) $\exists T_o \in]0, T]$ *et une unique métrique hyperbolique* $(g_{\alpha\beta}) = g$ *telle que:*
   - $g_{\alpha\beta} \in P^{2(m-1)}(\mathcal{Y}_{T_o}) + \widetilde{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o})$, $^{(h)}R_{\alpha\beta}(g) = 0$ *dans* $\mathcal{Y}_{T_o}$ *et* $g_{\alpha\beta}|_{\mathcal{C}_{T_o}} = h_{\alpha\beta}$

     Cette solution peut s'écrire:

     $g_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\alpha\beta} + \widetilde{g}_{\alpha\beta}$ *avec* $\widetilde{g}_{\alpha\beta} \in \widetilde{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o})$.

B *On pose:*

$$\|h\|_{m,T} = \underset{\substack{\alpha,\beta \\ 1\leq|\nu|\leq 2(m-1)}}{Max} \left(\left|D^\nu \overline{g}_{\alpha\beta}(0)\right| + \left\|\overset{*}{h}_{\alpha\beta}\right\|_{\widetilde{F}^m(\mathcal{C}_T)} \right) .$$

Alors il existe un réel $d > 0$ *tel que si* $\|h\|_{m,T} \leq d$ *la solution* $(g_{\alpha\beta})$ *est globale:* $T_o = T$.

C *Si on suppose en plus des hypothèses de A ou B que les données de Cauchy* $(h_{\alpha\beta})$ *vérifient les contraintes suivantes:*
Il existe des fonctions $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})$ *définies sur* $\mathcal{C}_T$ *telles que:*

4) $\gamma_{\alpha\beta} = \overline{\gamma}_{\alpha\beta}\big|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}$ *où* $\overline{\gamma}_{\alpha\beta} \in P^{2m-3}(\mathbb{R}^4)$ *et* $\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} \in \widetilde{F}^{m-1}(\mathcal{C}_T)$
5) $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})$ *vérifie les relations déduites des équations* $F^\lambda(g)\big|_{\mathcal{C}_T} = 0$ *et* $^{(h)}R_{\alpha\beta}(g)\big|_{\mathcal{C}_T} = 0$ *en remplaçant dans ces dernières* $[g_{\alpha\beta}], [\partial_o g_{\alpha\beta}], [\partial_i g_{\alpha\beta}]$ $(i = 1, 2, 3)$ *respectivement par* $h_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}$ *et* $\partial_i[h_{\alpha\beta}] - \dfrac{x^i}{s}\gamma_{\alpha\beta}$ *([ ] désigne la restriction à* $\mathcal{C}$*).*

Alors la solution $g = (g_{\alpha\beta})$ *du problème de Cauchy* $^{(h)}R_{\alpha\beta}(g) = 0$ *dans* $\mathcal{Y}$ *et* $g_{\alpha\beta}|_{\mathcal{C}} = h_{\alpha\beta}$ *est aussi solution des Equations d'Einstein du vide.*

2.2 Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour les Equations de Yang-Mills-Higgs en jauge de Lorentz; Théorème 4

Soit (M, g) un espace-temps de dimension 4, de classe C^∞, muni d'une métrique hyperbolique g de classe C^∞. On fixe sur un ouvert U de (M, g) un système de coordonnées géodésiques normales (x^α) centré au point p. Soit $\mathcal{C}$ le demi-conoïde de sommet p de U, isotrope par rapport à g et d'équation:

$$x^o = s \text{ avec } s = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

Soit $\mathcal{Y}$ l'intérieur de $\mathcal{C}$. On considère dans l'espace-temps $(\mathcal{Y}, g)$ les Equations de Yang-Mills-Higgs usuelles de potentiel de Yang-Mills (A_α) à valeurs dans $\mathcal{G}^4$ (algèbre de Lie de $N \times N$ matrices antihermitiennes) et de champ scalaire $u = (u^I)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$.

Le champ de Yang-Mills associé à $A = (A_\alpha)$ est $F = (F_{\alpha\beta})$ défini par:

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta] \tag{2.2.1}$$

∇ désignant ici la dérivation covariante dans la métrique g.

$F_{\alpha\beta}$ est donc une $N \times N$ matrice de composantes:

$$F^I_{\alpha\beta L} = \nabla_\alpha A^I_{\beta L} - \nabla_\beta A^I_{\alpha L} + (A^I_{\alpha K} A^K_{\beta L} - A^I_{\beta K} A^K_{\alpha L}) \; . \tag{2.2.2}$$

Les Equations de Yang-Mills-Higgs s'écrivent alors:

$$\widehat{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta \tag{2.2.3}$$

$$\widehat{\nabla}_\alpha \widehat{\nabla}^\alpha u^K = R^K(u^L, u^*_L) \tag{2.2.4}$$

où le courant J engendré par le champ de Higgs $u = (u^K)$ est donné par:

$$J^{\beta I}_L = \widehat{\nabla}^\beta u^*_L u^I + u^*_L \widehat{\nabla}^\beta u^I \tag{2.2.5}$$

où u^* désigne le conjugué hermitien de u, $\widehat{\nabla}$ est la dérivation covariante de jauge et riemannienne pour g:

$$\widehat{\nabla}_\alpha u^I = \partial_\alpha u^I + A^I_{\alpha L} u^L \quad \text{(action sur les fonctions scalaires)} \tag{2.2.6}$$

$$\widehat{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} + [A_\alpha, F^{\alpha\beta}] \quad \text{(action sur les fonctions à valeurs dans } \mathcal{G}) \tag{2.2.7}$$

Les R^K sont des fonctions C^∞ de leurs arguments qui, compte tenu de:

$$\widehat{\nabla}_\beta \widehat{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{2.2.8}$$

doivent vérifier, vu (2.2.3) et (2.2.4):

$$\widehat{\nabla}_\beta J^\beta \equiv 0 \; . \tag{2.2.9}$$

On a:

$$\widehat{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} \equiv LA^\beta + \nabla^\beta(\nabla_\alpha A^\alpha) \tag{2.2.10}$$

où L est l'opérateur différentiel hyperbolique défini par:

$$LA^\beta \equiv \nabla_\alpha \nabla^\alpha A^\beta - R^\beta_\alpha A^\alpha + \nabla_\alpha [A^\alpha, A^\beta] + [A_\alpha, F^{\alpha\beta}] \; . \tag{2.2.11}$$

Si A vérifie la condition de Lorentz:

$$\nabla_\lambda A^\lambda = 0 \tag{2.2.12}$$

alors vu (2.2.10), (2.2.3) se réduit à

$$LA^\beta = J^\beta \quad \text{(cf. [27])} \; . \tag{2.2.13}$$

Théorème 4 *Soit m un entier > 2. Soit $T > 0$ tel que $\mathcal{Y}_T \subset U$. Soient données sur $\mathcal{Y}_T$ $\;b = (b_o, b_1, b_2, b_3)$ à valeurs dans $\mathcal{G}^4$ et $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et vérifiant:*

(i) $x^\alpha b_\alpha = 0$ *dans* $\mathcal{Y}_T$ *et* $b_\alpha = \overline{b}_\alpha + \widetilde{b}_\alpha \in P^{2(m+1)}(\mathcal{Y}_T) + \widehat{F}^{m+2}(\mathcal{Y}_T)$

(ii) $\phi_k = \overline{\phi}_k + \widetilde{\phi}_k \in P^{2m}(\mathcal{Y}_T) + \widehat{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_T)$.

Alors il existe $T_o \in]0, T]$ et une unique solution (A,u) des Equations de Yang-Mills-Higgs (2.2.3), (2.2.4) sur $\mathcal{Y}_{T_o}$ telle que:

- $A = (A_\alpha) \in P^{2(m-1)}(\mathcal{Y}_{T_o}) + \widehat{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o})$; $y^\alpha (A_\alpha - b_\alpha)|_{\mathcal{C}_{T_o}} = 0$ *pour tout champ de vecteurs* (y^α) *tangent à* $\mathcal{C}_{T_o}$
- $u = (u^I) \in P^{2(m-1)}(\mathcal{Y}_{T_o}) + \widehat{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o})$; $u|_{\mathcal{C}_{T_o}} = \phi|_{\mathcal{C}_{T_o}}$.

Remarque 1 Ce problème a été résolu dans [34] pour les Equations de Yang-Mills pures sous des hypothèses de classe C^∞ sur les données.

Comme dans les Théorèmes 2 et 3-B, si les normes des données $b|_{\mathcal{C}_T}$ et $\phi|_{\mathcal{C}_T}$ sont assez petites, alors la solution (A, u) est globale: $T = T_o$.

2.3 Problème de l'évolution pour le système conforme régulier des Equations d'Einstein (cf. [6]) en coordonnées harmoniques

Préliminaires

Dans [6], Y. Choquet-Bruhat et M. Novello ont obtenu un système hyperbolique au sens de Leray, vérifié par une métrique g conforme à une métrique d'Einstein $G = \omega^{-2} g$ et le facteur de conformité ω. Ce système est dit régulier parce que ses coefficients sont réguliers en ce sens qu'ils ne comportent aucune puissance négative de ω. Il semble que l'étude de ce système et de sa variante déduite auparavent par Friedrich H. (cf. [15], [19], [20]) pourrait fournir des renseignements intéressants sur l'existence globale et le comportement asymptotique du champ gravitationnel défini par la métrique d'Einstein $G = \omega^{-2} g$; dans tous les cas, elle permettrait de mettre en évidence la compatibilité de la notion d'espace-temps asymptotiquement plat au sens de Penrose avec les Equations d'Einstein.

Pour écrire le "système conforme régulier des Equations d'Einstein", plaçons nous dans un système de coordonnées harmoniques d'une variété hyperbolique (M, g), de classe C^∞, de dimension 4.

Notons:

- $(g_{\alpha\beta})$ les composantes de la métrique hyperbolique g.
- $(d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu})$ les composantes du tenseur de Weyl de g, multiplié par ω^{-1}, ω étant une fonction C^∞ sur M ne s'annulant en aucun point de d'une sous-variété ouverte $\widetilde{M}$ de M telle que $\omega = 0$ et $d\omega \neq 0$ sur $\partial\widetilde{M}$,
- $r_{\alpha\beta})$ les composantes du tenseur de Ricci de g,
- $\sigma \equiv \nabla^\lambda \partial_\lambda \omega$, ∇^λ étant la dérivation covariante dans la métrique g.
- f la courbure scalaire de g.

Alors Y. Choquet-Bruhat et M. Novello ont montré que si $G = \omega^{-2} g$ est solution des Equations d'Einstein, $\mathrm{Ricc}\, G = 0$ dans $\widetilde{M}$.

Les fonctions $(g_{\alpha\beta})$, $(d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu})$, $(r_{\alpha\beta})$, ω, σ vérifient, pour f donnée, le système suivant, appelé "système conforme régulier des Equations d'Einstein":

(1) ${}^{(h)}R_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}$

(2) $\frac{1}{2}\nabla^\lambda\nabla_\lambda r_{\gamma\mu} - \frac{1}{2}R^{\lambda}_{\mu\gamma}{}^{\alpha} r_{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\mu} r_{\gamma\alpha} - \frac{1}{6}\nabla_\mu\partial_\gamma f - \frac{1}{12} g_{\gamma\mu}\nabla^\lambda\partial_\lambda f - d^{\alpha}_{\gamma\lambda\mu}\nabla^\lambda\partial_\alpha\omega = 0$

(3) $\nabla^\alpha\nabla_\alpha d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} + R^{\alpha}_{\mu\rho}{}^{\beta} d^{\rho}_{\alpha\gamma\lambda} + R^{\alpha}_{\mu\gamma}{}^{\rho} d^{\beta}_{\alpha\lambda\varrho} + R^{\alpha}_{\mu\lambda}{}^{\rho} d^{\beta}_{\gamma\alpha\rho} - \lambda \longleftrightarrow \mu = 0$

(4) $6\nabla^\alpha\nabla_\alpha\sigma - f\sigma + 12 r_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\partial^\beta\omega + 6\partial_\alpha f\partial^\alpha\omega + \omega\nabla^\alpha\partial_\alpha f = 0$

(5) $\nabla^\alpha\partial_\alpha\omega = \sigma$

où:

- $(R^{\lambda}_{\mu\gamma}{}^{\alpha})$ désigne la fonction de g, ∂g, $\partial^2 g$, qu'on obtient quand on exprime le tenseur de Riemann de g en fonction de g, ∂g, $\partial^2 g$,
- (R^{λ}_{μ}) désigne la fonction de g, ∂g, $\partial^2 g$, qu'on obtient quand on exprime le tenseur de Ricci de g en fonction de g, ∂g, $\partial^2 g$,
- ${}^{(h)}R_{\alpha\beta}$ désigne la fonction de g, ∂g, $\partial^2 g$, qu'on obtient quand on exprime le tenseur de Ricci de g en coordonnées harmoniques en fonction de g, ∂g, $\partial^2 g$.

On a alors le résultat suivant:

Théorème 5

1) *Soit m un entier ≥ 3, soit T un réel > 0. Soit $f = \overline{f} + f_1$ avec $\overline{f}$ fonction polynôme sur $\mathbb{R}^4$ de degré $\leq 2m$ et $f_1 \in \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_T)$. Soient données sur le conoïde $\mathcal{C}$, d'équation $x^o = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, $0 \leq x^o \leq T$, une métrique hyperbolique $\widehat{g} = (\widehat{g}_{\alpha\beta})$ et des fonctions $(\widehat{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}), (\widehat{r}_{\alpha\beta}), \widehat{\omega}, \widehat{\sigma}$ vérifiant:*

(i) *les conditions de structure:*

$$(6)\quad \begin{cases} \widehat{g}_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\alpha\beta}\big|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{g}_{\alpha\beta} \\ \widehat{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} = \overline{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}\Big|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} \\ \widehat{r}_{\alpha\beta} = \overline{r}_{\alpha\beta}\big|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{r}_{\alpha\beta} \\ \widehat{\omega} = \overline{\omega}\big|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{\omega} \\ \widehat{\sigma} = \overline{\sigma}\big|_{\mathcal{C}_T} + \widetilde{\sigma} \end{cases}$$

où:

$$(6')\quad \begin{cases} \overline{g}_{\alpha\beta}, \overline{\omega} \text{ sont des fonctions polynômes sur } \mathbb{R}^4 \text{ de degré } \leq 2m \\ \overline{r}_{\alpha\beta},\ \overline{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}, \overline{\sigma} \text{ sont des fonctions polynômes sur } \mathbb{R}^4 \text{ de degré} \\ \quad \leq 2(m-1) \widetilde{g}_{\alpha\beta}, \widetilde{\omega} \text{ sont des éléments de } \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{C}_T) \\ \widetilde{r}_{\alpha\beta}, \widetilde{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}, \widetilde{\sigma} \text{ sont des éléments de } \widetilde{F}^{m}(\mathcal{C}_T) \end{cases}$$

(ii) $\widehat{g}_{\alpha\beta}(0) = \overline{g}_{\alpha\beta}(0) = \eta_{\alpha\beta}$, $\forall \alpha, \beta = 0,1,2,3$*; les* $\eta_{\alpha\beta}$ *désignent les composantes de la métrique de Minkowski:* $\eta_{oo} = 1, \eta_{oi} = 0, \eta_{ij} = -\delta_{ij}\ \ i,j = 1,2,3.$

(iii) $\mathcal{C}_T$ *est isotrope relativement à la métrique* $(\widehat{g}_{\alpha\beta})$*, c'est-à-dire:*

$$X \equiv 0 \text{ sur } \mathcal{V}_T = \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 / (s,x^1,x^2,x^3) \in \mathcal{C}_T\}$$

avec

$$X(x^1,x^2,x^3) \equiv \widehat{g}^{oo}(s,x^1,x^2,x^3) - 2\sum_{i=1}^{3} g^{oi}(s,x^1,x^2,x^3)\frac{x^i}{s} + \sum_{1\leq i,j\leq 3} \widehat{g}^{ij}(s,x^1,x^2,x^3)\frac{x^i x^j}{s^2}$$

$(\widehat{g}^{\alpha\beta})$ *est la matrice inverse de la matrice* $(\widehat{g}_{\alpha\beta})$.

Alors:

a) *les données initiales* $((\widehat{g}_{\alpha\beta}), (\widehat{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}), (\widehat{r}_{\alpha\beta}), \widehat{\omega}, \widehat{\sigma})$ *peuvent se redécomposer sous la forme:*

$$(7)\quad \begin{cases} \widehat{g}_{\alpha\beta} = \overline{\overline{g}}_{\alpha\beta}\big|_{\mathcal{C}_T} + \overset{*}{g}_{\alpha\beta} \\ \widehat{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} = \overline{\overline{d}}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}\Big|_{\mathcal{C}_T} + \overset{*}{d}{}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} \\ \widehat{r}_{\alpha\beta} = \overline{\overline{r}}_{\alpha\beta}\big|_{\mathcal{C}_T} + \overset{*}{r}_{\alpha\beta} \\ \widehat{\omega} = \overline{\overline{\omega}}\big|_{\mathcal{C}_T} + \overset{*}{\omega} \\ \widehat{\sigma} = \overline{\overline{\sigma}}\big|_{\mathcal{C}_T} + \overset{*}{\sigma} \end{cases}$$

où $((\overline{\overline{g}}_{\alpha\beta}), (\overline{\overline{d}}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}), (\overline{\overline{r}}_{\alpha\beta}), (\overline{\overline{\omega}}), (\overline{\overline{\sigma}}))$ *est une fonction vectorielle à composantes polynomiales sur* $\mathbb{R}^4$ *de degré inférieur ou égal respectivement à* $2m$, $2(m-1)$, $2(m-1)$, $2m$, $2(m-1)$ *et vérifiant au point* 0 *le système non linéaire* $(\overset{*}{1})$, $(\overset{*}{2})$, $(\overset{*}{3})$, $(\overset{*}{4})$, $(\overset{*}{5})$

(déduit du système (1), (2), (3), (4), (5) *en remplaçant f par* $\overline{f}$*) et les équations dérivées jusqu'à l'ordre* $2(m-1)$ *pour* $(\overset{*}{1})$ *et* $(\overset{*}{5})$ *et jusqu'à l'ordre* $2(m-2)$ *pour* $(\overset{*}{2})$, $(\overset{*}{3})$ *et* $(\overset{*}{4})$, $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{\omega} \in \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{C}_T)$, $\overset{*}{d}{}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}$, $\overset{*}{r}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{\sigma} \in \widetilde{F}^{m}(\mathcal{C}_T)$.

b) $\exists T_o \in]0,T]$ *et une unique métrique hyperbolique* $(g_{\alpha\beta})$ *et une unique fonction vectorielle* $(d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}, r_{\alpha\beta}, \omega, \sigma)$ *telles que:*

$$(8)\quad \begin{cases} g_{\alpha\beta}, \omega \in P^{2m}(\mathcal{Y}_{T_o}) + \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_{T_o}) \\ r_{\alpha\beta}, d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}, \sigma \in P^{2(m-1)}(\mathcal{Y}_{T_o}) + \widetilde{F}^{m}(\mathcal{Y}_{T_o}) \end{cases}$$

et $((g_{\alpha\beta}),\ (d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}),\ (r_{\alpha\beta}),\ \omega, \sigma)$ *est solution dans le domaine* $\mathcal{Y}_{T_o}$ *du "système conforme régulier des Equations d'Einstein"* (1), (2), (3), (4), (5) *et vérifie la condition initiale:*

$$(9)\quad \begin{cases} g_{\alpha\beta}|_{\mathcal{C}_{T_o}} = \widehat{g}_{\alpha\beta}, \quad d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}\Big|_{\mathcal{C}_{T_o}} = \widehat{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}\ , \quad r_{\alpha\beta}|_{\mathcal{C}_{T_o}} = \widehat{r}_{\alpha\beta} \\ \omega|_{\mathcal{C}_{T_o}} = \widehat{\omega},\ \sigma|_{\mathcal{C}_{T_o}} = \widehat{\sigma} \end{cases}$$

Cette solution $((g_{\alpha\beta}), (d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}), (r_{\alpha\beta}), \omega, \sigma)$ *peut s'écrire sous la forme suivante:*

$$(10)\quad \begin{cases} g_{\alpha\beta} = \overline{\overline{g}}_{\alpha\beta} + \widetilde{\widetilde{g}}_{\alpha\beta} \ \textit{avec}\ \widetilde{\widetilde{g}}_{\alpha\beta} \in \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_{T_o}) \\ d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} = \overline{\overline{d}}{}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} + \widetilde{\widetilde{d}}{}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} \ \textit{avec}\ \widetilde{\widetilde{d}}{}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu} \in \widetilde{F}^{m}(\mathcal{Y}_{T_o}) \\ r_{\alpha\beta} = \overline{\overline{r}}_{\alpha\beta} + \widetilde{\widetilde{r}}_{\alpha\beta} \ \textit{avec}\ \widetilde{\widetilde{r}}_{\alpha\beta} \in \widetilde{F}^{m}(\mathcal{Y}_{T_o}) \\ \omega = \overline{\overline{\omega}} + \widetilde{\widetilde{\omega}} \ \textit{avec}\ \widetilde{\widetilde{\omega}} \in \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_{T_o}) \\ \sigma = \overline{\overline{\sigma}} + \widetilde{\widetilde{\sigma}} \ \textit{avec}\ \widetilde{\widetilde{\sigma}} \in \widetilde{F}^{m}(\mathcal{Y}_{T_o}) \end{cases}$$

2) *Les notations et hypothèses étant celles de* 1), *posons:*

- $\|\widehat{g}\|_{m+1,T} = \max\limits_{\alpha\beta} \|\widehat{g}_{\alpha\beta}\|_{m+1,T}$

  avec $\|\widehat{g}_{\alpha\beta}\|_{m+1,T} = \max\limits_{1\leq|\nu|\leq 2m} \left|D^{\nu}\overline{\overline{g_{\alpha\beta}}}(0)\right| + \left\|\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\right\|_{\widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{C}_T)}$

- $\|\widehat{\omega}\|_{m+1,T} = \max\limits_{|\nu|\leq 2m} \left|D^{\nu}\overline{\overline{\omega}}(0)\right| + \left\|\overset{*}{\omega}\right\|_{\widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{C}_T)}$

- $\left\|\widehat{d}\right\|_{m,T} = \max\limits_{\beta,\gamma,\lambda,\mu} \left\|\widehat{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}\right\|_{m,T}$

  avec $\left\|\widehat{d}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}\right\|_{m,T} = \max\limits_{|\nu|\leq 2(m-1)} \left|D^{\nu}\overline{\overline{d}}{}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}(0)\right| + \left\|\overset{*}{d}{}^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}\right\|_{\widetilde{F}^{m}(\mathcal{C}_T)}$

- $\|\widehat{r}\|_{m,T} = \max\limits_{\alpha,\beta} \|\widehat{r}_{\alpha\beta}\|_{m,T}$

  avec $\|\widehat{r}_{\alpha\beta}\|_{m,T} = \max\limits_{|\nu|\leq 2(m-1)} \left|D^{\nu}\overline{\overline{r}}_{\alpha\beta}(0)\right| + \left\|\overset{*}{r}_{\alpha\beta}\right\|_{\widetilde{F}^{m}(\mathcal{C}_T)}$

- $\|\widehat{\sigma}\|_{m,T} = \max\limits_{|\nu|\leq 2(m-1)} \left|D^{\nu}\overline{\overline{\sigma}}(0)\right| + \left\|\overset{*}{\sigma}\right\|_{\widetilde{F}^{m}(\mathcal{C}_T)}$

- $\left|\widehat{f}\right|_{m+1,T} = \max\limits_{|\nu|\leq 2m} \left|D^{\nu}\overline{f}(0)\right| + \|f_1\|_{\widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_T)}$.

Alors il existe un réel $p > 0$ *tel que si*

$$|f|_{m+1,T} + \|\widehat{g}\|_{m+1,T} + \|\widehat{\omega}\|_{m+1,T} + \left\|\widehat{d}\right\|_{m,T} + \|\widehat{r}\|_{m,T} + \|\widehat{\sigma}\|_{m,T} \leq p,$$

la solution $((g_{\alpha\beta}), (d^{\beta}_{\gamma\lambda\mu}), (r_{\alpha\beta}), \omega, \sigma)$ *du problème de Cauchy* (1), (2), (3), (4), (5), (9), (10) *est globale:* $T_o = T$.

Remarque 2 Le théorème s'applique au cas physiquement intéressant $\widetilde{M} = \mathcal{Y}$, $\partial\widetilde{M} = \mathcal{C}$ et la donnée initiale $\widehat{\omega} = 0$.

3 Preuve du Théorème 3

Preuve de la partie A du Théorème 3

L'opérateur ${}^{(h)}R_{\alpha\beta}\,(g)$ étant, vu (2.1.3), hyperbolique, la partie A du Théorème 3 est une conséquence immédiate des Théorèmes 1 et 2,

Preuve de la partie B du Théorème 3

Soit $(g_{\alpha\beta})$ la solution du problème de Cauchy:

(1) $g_{\alpha\beta} \in P^{2(m-1)}\,(\mathcal{Y}_{T_o}) + \tilde{F}^{m}\,(\mathcal{Y}_{T_0})$

(2) ${}^{(h)}R_{\alpha\beta}\,(g) = o$ dans $\mathcal{Y}_{T_o}$

(3) $g_{\alpha\beta}\,|_{\mathcal{C}_{T_o}} = h_{\alpha\beta} \qquad \forall\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$

Pour montrer que $(g_{\alpha\beta})$ est aussi solution des Equations d'Einstein du vide:

(4) $R_{\alpha\beta}\,(g) = 0 \quad$ dans $\quad \mathcal{Y}_{T_o} \qquad \forall\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$

il suffit, compte tenu de (2.1.2), de montrer que:

(5) $F^{\lambda}\,(g) = o \quad$ dans $\quad \mathcal{Y}_{T_o}. \qquad \forall\lambda = 0, 1, 2, 3.$

Or, $(g_{\alpha\beta})$ étant solution des Equations réduites (2), les $[\partial_o g_{\alpha\beta}]$ vérifient les relations:

(6) $${}^{(h)}R_{\alpha\beta}\,(g)\big|_{\mathcal{C}_{T_o}} \equiv -\frac{1}{2}\left([g^{oi}] - [g^{ij}]\,\frac{x_j}{s}\right)\partial_i\,[\partial_o g_{\alpha\beta}] + \tfrac{1}{2}\,[g^{ij}]\,\partial_i\left(\frac{x_j}{s}\right)[\partial_o g_{\alpha\beta}]$$
$$-\tfrac{1}{2}\,[g^{ij}]\,\partial_{ij}\,[g_{\alpha\beta}] + K_{\alpha\beta}\left(x^i, [g_{\mu\nu}]\,, [\partial_o g_{\mu\nu}]\,, \partial_i\,[g_{\mu\nu}]\right) = o$$
$(\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3;\ i, j = 1, 2, 3)$.

D'autre part, on sait que, par hypothèse, ces relations demeurent vraies si on y remplace les $[\partial_0 g_{\alpha\beta}]$ par les $\gamma_{\alpha\beta}$.

On en déduit, vu la forme des équations (6), que les $[\partial_o g_{\alpha\beta}] - \gamma_{\alpha\beta}$ sont solution d'un système linéaire d'inconnu $X = (X_{\alpha\beta})$ de la forme:

(7) $$\left([g^{oi}] - [g^{ij}]\,\frac{x_j}{s}\right)\partial_i X_{\alpha\beta} - [g^{ij}]\,\partial_i\left(\frac{x_j}{s}\right)X_{\alpha\beta} + B^{\mu\nu}_{\alpha\beta}X_{\mu\nu} = 0$$

avec: $B^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \in \mathcal{R} + \widetilde{F}^4\,(\mathcal{C}_{To})$ avec: $\mathcal{R} =$ l'espace des restrictions à $\mathcal{C}_{T_o}$ des polynômes sur $\mathbb{R}^4$, éventuellement multiplées par une fonction fraction rationnelle en x^i, s de degré 0, de dénominateur $s^{\ell}\,(\ell \in \mathbb{N})$.

Or, des calculs similaires (mais beaucoup plus faciles) à ceux de la preuve du Théorème 8.4 de [11] permettent de montrer que toute solution $X = (X_{\alpha\beta}) \in \mathcal{P} + \widetilde{F}^1 (\mathcal{C}_{T_o})$ ($\mathcal{P}$ = *espace des restrictions* à $\mathcal{C}_{To}$ des polynômes sur $\mathbb{R}^4$) vérifie une inégalité énergétique de la forme suivante:

(8) $||X||_{L^2(\sum_t)} \leq C \int_0^t ||X||^2_{L^2(\sum_\tau)} \, d\tau \qquad \forall t \in]0, T_o]$

ce qui entraîne d'après le lemme de Gronwall que $X \equiv (X_{\alpha\beta}) = 0$ sur $\mathcal{C}_{To}$, c'est-à-dire:

(9) $[\partial_o g_{\alpha\beta}] = \gamma_{\alpha\beta} \qquad \forall \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$

Il découle alors de (9) et de la deuxième condition intégro-différentielle sur les $\gamma_{\alpha\beta}$ que:

(10) $F^\lambda (g)\big|_{\mathcal{C}_{To}} = 0.$

Comme conséquence classique des Equations réduites (2) et des identités de Bianchi, les $F^\lambda (g)$ vérifient dans le domaine $\mathcal{Y}_{T_o}$ un système quasi-diagonal, linéaire, hyperbolique, homogène, du second ordre, de partie principale $g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}F^\lambda (g)$. D'après le résultat d'unicité contenu dans le Théorème 1, un tel système n'admet, dans le domaine $\mathcal{Y}_{T_o}$ et dans l'espace fonctionnel

$$P^{2(m-2)} (\mathcal{Y}_{T_o}) + \overset{\sim m-1}{F} (\mathcal{Y}_{T_o}), \ (m - 1 \geq 2)$$

que la seule solution nulle qui vérifie la condition initiale (10); donc: $F^\lambda (g) = 0$ dans $\mathcal{Y}_{T_o}$.

Remarque 3. Problème des contraintes initiales sur un conoïde caractéristique Pour pouvoir résoudre de façon complète le problème de Cauchy, avec donnée initiale sur un conoïde caractéristique, pour les Equations d'Einstein du vide, il serait très important de pouvoir discuter le problème du choix des données indépendantes à partir desquelles on pourrait générer, à l'aide de certaines équations de propagation portées par les géodésiques isotropes issues du point 0 et génératrices du demi-conoïde $\mathcal{C}$ de sommet 0 les données de Cauchy $(h_{\alpha\beta})$ vérifiant les conditions intégrodifférentielles imposées dans l'énoncé du Théorème 3. Ce problème qui a été résolu par Müller Zum Hagen et Hans Jürgen Seifert [29] d'une part et A.D. Rendall [33] d'autre part, dans le cas où l'hypersurface initiale est constituée de deux hypersurfaces régulières, caractéristiques et sécantes suivant une 2-surface spatiale, demeure encore à notre connaissance, largement ouvert dans le cas d'un conoïde caractéristique.

4 Preuve du Théorème 4

4.1 Début de la preuve

Soit $\sigma = -\left(x^o\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(x^i\right)^2$. Posons:

(1) $^o a_\alpha = b_\alpha + a\nabla_\alpha \sigma, \qquad \alpha = 0,1,2,3.$

Supposons que dans $\mathcal{Y}_T - \{0\}$, A_α et u admettent les développements limités respectifs:

(2) $A_\alpha =^o a_\alpha +^1 a_\alpha \sigma +^2 a_\alpha \sigma^2 + \widetilde{a}_\alpha$

(3) $u = \phi +^1 \phi\sigma + \widetilde{u}$

avec

(4) $\partial^\lambda \widetilde{a}_\alpha\Big|_{\mathcal{C}_T - \{0\}} = 0, \qquad \partial^\mu\, \widetilde{u}\Big|_{\mathcal{C}_T - \{0\}} = 0 \qquad \text{si } |\lambda| \leq 2,\ |\mu| \leq 1\ .$

Alors, des calculs presque identiques à ceux de [34], montrent que:

(5) $\left\{g^{\alpha\delta}\nabla_\delta\sigma\left(LA_\alpha - J_\alpha\right) - \left(g^{\beta\gamma}\nabla_\beta\nabla_\gamma\sigma - 4\right)\nabla_\lambda A^\lambda\right\}|_{\mathcal{C}_T - \{0\}} = 0$

si, sur $\mathcal{C}_T$, on a:

$$(6)\quad \begin{cases} g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\nabla_\delta\sigma(\nabla_\beta\nabla^o_\gamma a_\alpha - \nabla_\gamma\nabla^o_\alpha a_\beta - \nabla_\alpha\nabla^o_\beta a_\gamma - [^o a_\beta, \nabla^o_\alpha a_\gamma]) \\ -(g^{\varepsilon\tau}\nabla_\varepsilon\nabla_\tau\sigma - 4)\nabla^o_\beta a_\gamma g^{\beta\gamma} = M \equiv (M^I_L) \\ \text{avec } M^I_L \equiv 2x^\alpha(\nabla_\alpha\phi^*_L\phi^I + \phi^*_L\nabla_\alpha\phi^I) \end{cases} .$$

L'équation (6) se réduit à un système d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre d'inconnu (a,c), dans le domaine $\sqcup$, de la forme:

$$(7)_{\ b,\phi} \begin{cases} x^\alpha\partial_\alpha a = c \\ x^\beta\partial_\beta c + \left(\frac{3}{4}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma - 2\right)c + 1/8(g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma\left(g^{\gamma\delta}\nabla_\gamma\nabla_\delta\sigma - 4\right) \\ +2x^\gamma g^{\alpha\beta}\nabla_\gamma\nabla_\beta\sigma\nabla_\alpha\sigma)a = \rho \end{cases}$$

la fonction ρ étant une fonction C^∞ des seuls arguments $b_\alpha, \partial b_\alpha, \partial^2 b_\alpha, \phi, \partial\phi$.

La restriction à $\mathcal{C}_T$ de $(7)_{b,\phi}$ se réduit à un système d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre d'inconnu $([a],[c])$ de la forme:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{i=1,2,3} x^i\partial_i[a] - [c] = 0 \\ \sum_{i=1,2,3} x^i\partial_i[c] + 4[a] + 4[c] + sH[a] + sG[c] = [\rho] \end{cases}$$

avec: $[X]\left(x^1,x^2,x^3\right) = X\left(s,x^1,x^2,x^3\right)$, $s\cdot H$ et $s\cdot G$ étant les restrictions respectives à $\mathcal{C}_T$ des fonctions C^∞ dans $\sqcup$ et nulles en

$$0 : \frac{3}{4}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma - 6,\ \frac{1}{8}\left(g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma\left(g^{\gamma\delta}\nabla_\gamma\nabla_\delta\sigma - 4\right) + 2x^\gamma g^{\alpha\beta}\nabla_\gamma\nabla_\beta\sigma\nabla_\alpha\sigma\right) - 4\,.$$

$\big(H, G$ sont des fonctions bornées de x^1, x^2, x^3 sur $\mathcal{C}_T\big)$.

Dans la suite de cette preuve, on se propose de montrer:

- dans un premier temps, que lorsque les données b et ϕ sont de classe C^∞ dans $\mathcal{Y}$, alors le système $(7)_{b,\phi}$ possède une solution unique de classe C^∞ dans $\sqcup$,
- dans un second temps, que le système (8) qui est hyperbolique admet des inégalités énergétiques vérifiées par $[a]$ et $[c]$ dans l'espace fonctionnel

  $$P^{2(m-1)}\left(\mathcal{C}_T\right)+\tilde{F}^{m}\left(\mathcal{C}_T\right);$$

  en utilisant ensuite ces inégalités énergétiques dans des approximations par des fonctions C^∞, ainsi que le résultat d'existence C^∞ associé à $(7)_{b,\phi}$ pour b et ϕ de classe C^∞ dans $\sqcup$, on résout le système (8). L'extraction des composantes polynomiales de $[a]$ et $[c]$ se fera au moyen du système $(7)_{\bar{b},\bar{\phi}}$.

4.2 Résolution du système $(7)_{b,\phi}$ d'inconnu (a,c) dans l'espace $C^\infty\ (\mathcal{Y})$ lorsque les données b et ϕ sont de classe C^∞ dans $\mathcal{Y}$

On aura besoin de la formule suivante (cf. [13], page 132):

(9) $g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\gamma\sigma = 8+2x^\alpha\partial_\alpha\log|g|^{\frac{1}{2}}$ avec: $|g| = \det\left(g_{\alpha\beta}\right)$. En substituant (9) dans $(7)_{b,\phi}$, on peut mettre le système $(7)_{b,\phi}$ sous la forme suivante:

(10) $\begin{cases} x^\alpha\partial_\alpha a-b=0 \\ x^\alpha\partial_\alpha b+4a+4b+x^\alpha H_\alpha(x)\,a+x^\alpha K_\alpha(x)\,b=e \end{cases}$

où les K_α et H_α sont des fonctions C^∞ dans $\sqcup$.

Posons:

(11) $V=\binom{a}{b}$, $\mathrm{N}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}_\alpha(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_\alpha(x) & K_\alpha(x) \end{pmatrix}$, $\mathrm{R}=\binom{0}{\varrho}$.

Le système (10) peut alors se mettre sous la forme suivante:

(12) $x^\alpha\partial_\alpha\vee+N.\vee+x^\alpha M_\alpha(x)\vee=R.$

La matrice N a une seule valeur propre 2 de multiplicité géométrique 1. Soit P la matrice inversible telle que:

(13) $P^{-1}.N.P=D\equiv\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Faisons le changement de fonction inconnue:

(14) $W=P^{-1}.\vee$

on obtient:

(15) $x^\alpha\partial_\alpha W+DW+x^\alpha\widetilde{M}_\alpha(x)\,W=\widetilde{R}$

avec:

(16) $\widetilde{M}_\alpha(x)=P^{-1}.M_\alpha(x).P,\qquad \widetilde{R}=P^{-1}R$

Posons maintenant:

(17) $W=\begin{pmatrix} \widetilde{a} \\ \widetilde{b} \end{pmatrix}$, $\widetilde{M}_\alpha(x)=\begin{pmatrix} m_\alpha(x) & n_\alpha(x) \\ p_\alpha(x) & q_\alpha(x) \end{pmatrix}$, $\widetilde{R}=\begin{pmatrix} \widetilde{\varrho}_1 \\ \widetilde{\varrho}_2 \end{pmatrix}$.

Alors le système (15) s'écrit:

$$(18)\quad \begin{cases} x^\alpha \partial_\alpha \widetilde{a} + 2\,\widetilde{a} + x^\alpha m_\alpha(x)\,\widetilde{a} + x^\alpha n_\alpha(x).\widetilde{b} = \widetilde{\rho}_1 \\ x^\alpha \partial_\alpha \widetilde{b} + 2\,\widetilde{b} + \widetilde{a} + x^\alpha p_\alpha(x)\,\widetilde{a} + x^\alpha q_\alpha(x).\widetilde{b} = \widetilde{\rho}_2 \end{cases}.$$

Considérons l'équation:

(19) $x^\alpha \partial_\alpha a_1(x) + x^\alpha m_\alpha(x)\, a_1(x) = 0$

si on y remplace x par rx avec $0 \le r \le 1$, alors on obtient:

(20) $x^\alpha \partial_\alpha a_1(rx) + x^\alpha m_\alpha(rx)\, a_1(rx) = 0$

on en déduit que l'unique solution de (19) telle que $a_1(o) = 1$ est la fonction de classe C^∞ :

(21) $a_1(x) = e^{-\int_o^1 x^\alpha m_\alpha(sx)ds}$.

De même l'équation:

(22) $x^\alpha \partial_\alpha b_1(x) + x^\alpha q_\alpha(x)\, b_1(x) = 0$

admet comme unique solution telle que $b_1(o) = 1$, la fonction C^∞:

(23) $b_1(x) = e^{-\int_o^1 x^\alpha q_\alpha(sx)ds}$.

Les fonctions a_1 et b_1 permettent de réexprimer le système (18) sous la forme:

$$(24)\quad \begin{cases} x^\alpha \partial_\alpha \left(\dfrac{\widetilde{a}}{a_1}\right) + 2\left(\dfrac{\widetilde{a}}{a_1}\right) = -x^\alpha n_\alpha(x)\left(\dfrac{\widetilde{b}}{a_1}\right) + \dfrac{\widetilde{\rho}_1}{a_1} \\ x^\alpha \partial_\alpha \left(\dfrac{\widetilde{b}}{b_1}\right) + 2\left(\dfrac{\widetilde{b}}{b_1}\right) = -x^\alpha p_\alpha(x)\left(\dfrac{\widetilde{a}}{b_1}\right) - \left(\dfrac{\widetilde{a}}{b_1}\right) + \dfrac{\widetilde{\rho}_2}{b_1} \end{cases}.$$

Si on remplace dans (24) x par rx pour $r \in [0,1]$, on obtient:

$$(25)\quad \begin{cases} \partial_r \left\{ r^2 \dfrac{\widetilde{a}(rx)}{a_1(rx)} \right\} = -r^2 x^\alpha n_\alpha(rx)\, \dfrac{\widetilde{b}(rx)}{a_1(rx)} + r\dfrac{\widetilde{\rho}_1(rx)}{a_1(rx)} \\ \partial_r \left\{ r^2 \dfrac{\widetilde{b}(rx)}{b_1(rx)} \right\} = -r^2 x^\alpha p_\alpha(rx)\, \dfrac{\widetilde{a}(rx)}{b_1(rx)} - r\dfrac{\widetilde{a}(rx)}{b_1(rx)} + r\dfrac{\widetilde{\rho}_2(rx)}{b_1(rx)} \end{cases}.$$

Le système (24) est donc équivalent au système intégral:

$$(26)\quad \begin{cases} \widetilde{a}(x) = -a_1(x)\int_o^1 \left\{ s^2 x^\alpha n_\alpha(sx)\, \dfrac{\widetilde{b}(sx)}{a_1(sx)} - s\dfrac{\widetilde{\rho}_1(sx)}{a_1(sx)} \right\} ds \\ \widetilde{b}(x) = -b_1(x)\int_o^1 \left\{ s^2 x^\alpha p_\alpha(sx)\, \dfrac{\widetilde{a}(sx)}{b_1(sx)} + s\dfrac{\widetilde{a}(sx)}{b_1(sx)} - s\dfrac{\widetilde{\rho}_2(sx)}{b_1(sx)} \right\} ds \end{cases}.$$

On va montrer dans la suite comment on résout le système (26) en utilisant une méthode de point fixe. Il découle d'abord de (26) en faisant $x = 0$:

(27) $\widetilde{a}(o) = \dfrac{1}{2}\widetilde{\varrho}_1(0), \qquad \widetilde{b}(o) = \dfrac{1}{2}\widetilde{\varrho}_2(0) - \dfrac{1}{4}\widetilde{\varrho}_1(0).$

Plaçons nous sur la droite $\mathcal{D}$ (courbe géodésique passant par l'origine et le point ω de la sphère-unité (centrée à l'origine) de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors, sur la droite

$\mathcal{D}$, le système (26) se réduit au système différentiel d'inconnu la fonction $r \longrightarrow \left(\widetilde{a}\left(r\omega\right), \widetilde{b}\left(r\omega\right)\right)$:

$$(28)\quad \begin{cases} \widetilde{a}(r\omega) = -a_1(r\omega)\int_o^1 \left\{ s^2 r\omega^\alpha n_\alpha(sr\omega)\dfrac{\widetilde{b}(sr\omega)}{a_1(sr\omega)} - s\dfrac{\widetilde{\rho}_1(sr\omega)}{a_1(sr\omega)} \right\} ds \\ \widetilde{b}(r\omega) = -b_1(r\omega)\int_o^1 \left\{ s^2 r\omega^\alpha p_\alpha(sr\omega)\dfrac{\widetilde{a}(sr\omega)}{b_1(sr\omega)} + s\dfrac{\widetilde{a}(sr\omega)}{b_1(sr\omega)} - s\dfrac{\widetilde{\rho}_2(sr\omega)}{b_1(sr\omega)} \right\} ds \end{cases}$$

Faisons le changement de variable d'intégration:

(29) $u = sr$

et posons:

(30) $\widetilde{a}\left(r\omega\right) = a_\omega\left(r\right), \qquad \widetilde{b}\left(r\omega\right) = b_\omega\left(r\right).$

On obtient:

$$(31)\quad \begin{cases} a_\omega(r) = -\dfrac{a_{1(r\omega)}}{r^2}\int_0^r \left\{ u^2\omega^\alpha n_\alpha(u\omega)\dfrac{b_\omega(u)}{a_1(u\omega)} - u\dfrac{\widetilde{\rho}_1(u\omega)}{a_1(u\omega)} \right\} du \\ b_\omega(r) = -\dfrac{b_{1(r\omega)}}{r^2}\int_0^r \left\{ u^2\omega^\alpha p_\alpha(u\omega)\dfrac{a_\omega(u)}{b_1(u\omega)} + u\dfrac{a_\omega(u)}{b_1(u\omega)} - u\dfrac{\widetilde{\rho}_2(u\omega)}{b_1(u\omega)} \right\} du \end{cases}$$

qu'on va noter sommairement:

(32) $X_\omega\left(r\right) = F\left(X_\omega\left(r\right), r, \omega\right)$ en posant:

(33) $X_\omega\left(r\right) = \begin{pmatrix} a_\omega\left(r\right) \\ b_\omega\left(r\right) \end{pmatrix}.$

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on note $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \max\left\{|x|, |y|\right\}.$

Soit $\mathbb{L}$ un réel > 0 quelconque; soit k un réel > 0 dont la valeur sera fixée ultérieurement. Soit:

$$\mathcal{X}_L = \left\{ X \in \mathcal{C}\left(\left[0, L\right], \mathbb{R}^2\right) \mid \sup_{0 \le r \le L} e^{-kr} \left|\left|X\left(r\right)\right|\right| < +\infty \right\}$$

$\mathcal{X}_L$ est un espace de Banach pour la norme:

$$\|X\|_{\mathcal{X}_L} = \sup_{0 \le r \le L} e^{-kr} \left|\left|X\left(r\right)\right|\right|$$

Soit $\mathcal{A} : \mathcal{X}_\mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{X}_\mathbb{L}$ définie par $\left(\mathcal{A}X\right)\left(r\right) = F\left(X\left(r\right), r, \omega\right)$. Il existe une constante $M > 0$ ne dépendant que des bornes des coéfficients du système intégral linéaire (31) dans le compact $(u, \omega) \in [0, L] \times S_n$ $\left(S_n \text{ sphère-unité de } \mathbb{R}^{n+1}\right)$ telle que:

(34) $\left|\left|\mathcal{A}X - \mathcal{A}Y\right|\right|_{\mathcal{X}_L} \le \dfrac{M}{k} \left|\left|X - Y\right|\right|_{\mathcal{X}_L} \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}_L .$

Pour $k > M$, $\mathcal{A}$ admet un point fixe qui est la solution de (32) dans le domaine $r \in [0, L]$. Cette solution $X_\omega = \begin{pmatrix} a_\omega \\ b_\omega \end{pmatrix}$ dépend continûment de ω. En posant:

$$(35)\ X_{(x)} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{\frac{x}{||x||}}\left(||x||\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\widetilde{\rho}_1\left(0\right) \\ \frac{1}{2}\widetilde{\rho}_2\left(0\right) - \dfrac{1}{4}\widetilde{\rho}_1\left(0\right) \end{pmatrix} & \text{si } x = o \end{array} \right\}.$$

On définit une fonction continue dans $\sqcup$ qui est la solution du système intégral (26) dans $\sqcup$.

On peut ensuite montrer par récurrence que X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\sqcup$ et que sa dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^4$ s'obtient comme l'unique solution dans l'espace des fonctions continues dans $\sqcup$ du système (26) dérivé à l'ordre α.

On a ainsi montré que le système $(7)_{b,\phi}$ admet une unique solution $\binom{a}{b}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\sqcup$.

4.3 Résolution du système 8 sous conditions

Nous résolvons le système (8) dans l'espace fonctionnel

$$\left\{P^{2(m-1)}\left(\mathcal{C}_T\right) + \widehat{F}^m\left(\mathcal{C}_T\right)\right\}^2$$

lorsque les données b et ϕ vérifient les hypothèses de régularité suivantes:

$b_\alpha = \overline{b}_\alpha + \widetilde{b}_\alpha$ avec: $\overline{b}_\alpha \in P^{2(m+1)}\left(\mathcal{Y}_T\right), \widetilde{b}_\alpha \in \widehat{F}^{m+2}\left(\mathcal{Y}_T\right)$,

$\phi_k = \overline{\phi}_k + \widetilde{\phi}_k$ avec : $\overline{\phi}_k \in P^{2m}\left(\mathcal{Y}_T\right), \widetilde{\phi}_k \in \widehat{F}^{m+1}\left(\mathcal{Y}_T\right)$.

Comme $\widetilde{b}_\alpha \in \widehat{F}^{m+2}\left(\mathcal{Y}_T\right)$, il existe une suite $\left(\widetilde{b}_{\alpha,n}\right)$ d'éléments de $\mathcal{C}^\infty_\infty\left(\mathcal{Y}_T\right)$ qui converge vers $\widetilde{b}_\alpha$ dans $\widehat{F}^{m+2}\left(\mathcal{Y}_T\right)$; de même comme $\widetilde{\phi}_k \in \widehat{F}^{m+1}\left(\mathcal{Y}_T\right)$, il existe une suite $\left(\widetilde{\phi}_{k,m}\right)$ d'éléments de $\mathcal{C}^\infty_\infty\left(\mathcal{Y}_T\right)$ qui converge vers $\widetilde{\phi}_k$ dans $\widehat{F}^{m+1}\left(\mathcal{Y}_T\right)$.

Posons:

$$(36)\ \left\{ \begin{array}{ll} b_{\alpha,n} = \overline{b}_\alpha + \widetilde{b}_{\alpha,n} & ,\ b^{(n)} = \left(b_{\alpha,n}\right) \\ \phi_{k,n} = \overline{\phi}_k + \tilde{\phi}_{k,n} & ,\phi^{(n)} = \left(\phi_{k,n}\right) \end{array} \right.$$

Notons: $(\widetilde{a}, \widetilde{c})$ la solution définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\sqcup$ du système $(12)_{\overline{b},\overline{\phi}}$ avec $\overline{b} = \left(\overline{b}_\alpha\right)$, $\overline{\phi} = \left(\overline{\phi}_k\right)$.

Notons:

$\overline{a}$ le polynôme de Taylor d'ordre $2(m-1)$ en 0 de $\widetilde{a}$,

$\overline{c}$ le polynôme de Taylor d'ordre $2(m-1)$ en 0 de $\widetilde{c}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, notons (a_n, c_n) la solution définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\sqcup$ du système $(7)_{b^{(n)},\phi^{(n)}}$.

Alors il est évident que:

$$(37)\quad \left\{ \begin{array}{ll} a_n = \overline{a} + a_{1,n} & \text{avec } \ a_{1,n} \in \ \mathcal{C}^{\infty}_{2(m-1)}\left(\mathcal{Y}_T\right) \\ c_n = \overline{c} + c_{1,n} & \text{avec } \ c_{1,n} \in \ \mathcal{C}^{\infty}_{2(m-1)}\left(\mathcal{Y}_T\right) \end{array} \right\}$$

(ici $\mathcal{C}^{\infty}_{2(m-1)}\left(\mathcal{Y}_T\right)$ désigne l'espace des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ dans $\mathcal{Y}_T$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $2\left(m-1\right)$ sont nulles en 0).

$\forall n, q \in \mathbb{N}$ le couple $\left(a_{1,n} - a_{1,q}, c_{1,n} - c_{1,q}\right)$ vérifie le système différentiel:

$$(38)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(a_{1,n} - a_{1,q}\right) - \left(c_{1,n} - c_{1,q}\right) = 0 \\ x^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(c_{1,n} - c_{1,q}\right) + \left(3/4 g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\sigma - 2\right)\left(c_{1,n} - c_{1,q}\right) \\ +\dfrac{1}{8}(g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\sigma\left(g^{\gamma\delta}\nabla_{\gamma}\nabla_{\delta}\sigma - 4\right) + \\ 2x^{\gamma}g^{\alpha\beta}\nabla_{\gamma}\nabla_{\beta}\sigma\nabla_{\alpha}\sigma)\left(a_{1,n} - a_{1,q}\right) = \rho_n - \rho_q \end{array} \right.$$

Avec:

$$(39)\quad \rho_i = \rho\left(b^{(i)}, \partial b^{(i)}, \partial^2 b^{(i)}, \phi^{(i)}, \partial\phi^{(i)}\right) \qquad i = n \text{ ou } q.$$

La restriction du système (38) à $\mathcal{C}_T$ s'écrit:

$$(40)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^{i}\partial_{i}\left(\left[a_{1,n}\right] - \left[a_{1,q}\right]\right) - \left(\left[c_{1,n}\right] - \left[c_{1,q}\right]\right) = 0 \\ x^{i}\partial_{i}\left(\left[c_{1,n}\right] - \left[c_{1,q}\right]\right) + 4\left(\left[a_{1,n}\right] - \left[a_{1,q}\right]\right) + 4\left(\left[c_{1,n}\right] - \left[c_{1,q}\right]\right) \\ +sH\left(x^{i}\right)\left(\left[a_{1,n}\right] - \left[a_{1,q}\right]\right) + sG\left(x^{i}\right)\left(\left[c_{1,n}\right] - \left[c_{1,q}\right]\right) = \left[\rho_n\right] - \left[\rho_q\right] \end{array} \right.$$

Il découle de calculs similaires (mais beaucoup plus faciles) à ceux de [8] (pages 70–78) qu'il existe une constante $C > o$, indépendante de n et m, telle que:

$$(41)\quad ||[[a_{1,n}] - [a_{1,q}]]||_{\widehat{F}^m(\mathcal{C}_T)} + ||[c_{1,n}] - [c_{1,q}]||_{\widehat{F}^m(\mathcal{C}_T)} \leq C\, ||\rho_n - \rho_q||_{\widehat{F}^m(\mathcal{C}_T)}$$

Or par définition des ϱ_i (cf. (39)) et compte tenu des inégalités de substitution des Théorèmes 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6 et 2.1.7 de [8], il existe une constante $K > 0$, indépendante de n et q, telle que:

$$(42)\quad ||\rho_n - \rho_q||_{\widehat{F}^m(\mathcal{C}_T)} \leq K\left[\left|\left|b^{(n)} - b^{(q)}\right|\right|_{\widehat{F}^{m+2}(\mathcal{Y}_T)} + \ \left|\left|\phi^{(n)} - \phi^{(q)}\right|\right|_{\widehat{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_T)}\right] .$$

Les inégalités (41) et (42) entraînent que les suites $([a_{1,n}])$, $([c_{1,n}])$ sont de Cauchy dans l'espace de Banach $\widehat{F}^m\left(\mathcal{C}_T\right)$ donc convergent dans cet espace respectivement vers des éléments $[a_1]$, $[c_1]$.

Posons: $[a] = [\overline{a}] + [a_1] \qquad [c] = [\overline{c}] + [c_1]$.

Alors le couple $([a], [c])$ est l'unique solution du système (8) dans l'espace fonctionnel $\left[P^{2(m-1)}\left(\mathcal{C}_T\right) + \widehat{F}^m\left(\mathcal{C}_T\right)\right]^2$.

4.4 Fin de la preuve du Théorème 4

Considérons maintenant dans $\mathcal{Y}_T$ le problème $(2.2.4)$, $(2.2.13)$ avec les conditions initiales: $A_{\alpha}|_{\mathcal{C}_T} = b_{\alpha} + [a]\nabla_{\alpha}\sigma, \quad u|_{\mathcal{C}_T} = \phi|_{\mathcal{C}_T}$. D'après le Théorème 1, et vu (2.2.11) $\exists T_1 \in]0, T]$ tel que ce problème admet dans $\mathcal{Y}_{T_1}$ une solution unique (A, u) telle que: $A, u \in P^{2(m-1)}\left(\mathcal{Y}_{T_1}\right) + \widehat{F}^m\left(\mathcal{Y}_{T_1}\right)$. Comme dans $\mathcal{Y}_{T_1} - \{0\}$, (A, u) peut s'écrire sous la forme (2), (3), on en déduit vu le choix de $[a]$ et vu (5) qu'il existe $T_0 \in]0, T_1]$ tel que $(*)$: $\nabla_\lambda A^\lambda \ |_{\mathcal{C}_{T_0}} = 0$. D'autre part on sait que, toute solution (A, u) de (2.2.4) , (2.2.13) vérifie $\widehat{\nabla}_\beta J^\beta = 0$ dans $\mathcal{Y}_{T_0}$, donc aussi, puisque $\widehat{\nabla}_\beta \widehat{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} \equiv 0$ dans $\mathcal{Y}_{T_0}$:

$(**)$ $\nabla^\beta \nabla_\beta (\nabla_\alpha A^\alpha) + \left[A_\beta, \nabla^\beta (\nabla_\alpha A^\alpha)\right] = 0$ dans $\mathcal{Y}_{T_0}$.

Or, d'après le résultat d'unicité contenu dans le Théorème 1, le problème de Cauchy linéaire, caractéristique $(*)$, $(**)$ d'inconnu $\nabla_\alpha A^\alpha$ admet dans l'espace fonctionnel $P^{2(m-2)}(\mathcal{Y}_{T_0}) + \widehat{F}^{m-1}(\mathcal{Y}_{T_0})$ l'unique solution: $\nabla_\alpha A^\alpha = 0$ dans $\mathcal{Y}_{T_0}$. (A, u) est donc finalement solution des Equations de Yang-Mills-Higgs (2.2.3) , (2.2.4) et vérifie les conditions de structure et les conditions initiales annoncées dans l'énoncé du Théorème 4; de plus pour tout champ de vecteurs (y^α) tangent à $\mathcal{C}_{T_0}$, on a vu (1):

$$y^\alpha (A_\alpha - b_\alpha)|_{\mathcal{C}_{T_0}} = [a]\, y^\alpha \nabla_\alpha \sigma|_{\mathcal{C}_{T_0}} = 0.$$

5 Preuve du Théorème 5

Preuve de 1b) si on admet 1a)

Notons sommairement:

- $g = g_{\alpha\beta}$, $g_1 =$ une dérivée première des $g_{\alpha\beta}$,
- $\partial g_1 =$ une dérivée première de g_1,
- $\omega_1 =$ une dérivée première de ω,
- $\partial \omega_1 =$ une dérivée première de ω_1,
- $d = d^\beta_{\gamma\lambda\mu}$, $r = r_{\alpha\beta}$, $f_1 =$ une dérivée première de f,
- $\partial f_1 =$ une dérivée première de f_1,
- $\partial r =$ une dérivée première de r,

etc. ...

Alors le système conforme régulier des Equations d'Einstein (1), (2), (3), (4), (5) du Paragraphe 2.3 peut se noter sommairement:

$(1')$ $\quad \gamma^{\lambda\mu}(g) D_{\lambda\mu} g + h_1(g, g_1, r) = 0$

$(2')$ $\quad \gamma^{\lambda\mu}(g) D_{\lambda\mu} r + h_2(g, g_1, \partial g_1, r, f, f_1, \partial f_1) = 0$

$(3')$ $\quad \gamma^{\lambda\mu}(g) D_{\lambda\mu} d + h_3(g, g_1, \partial g_1, d) = 0$

$(4')$ $\quad \gamma^{\lambda\mu}(g) D_{\lambda\mu} \sigma + h_4(g, g_1, r, \sigma, \omega, \omega_1, \partial\omega_1, f, f_1, \partial f_1) = 0$

$(5')$ $\quad \gamma^{\lambda\mu}(g) D_{\lambda\mu} \omega + h_5(g, g_1, \sigma) = 0$.

Comme les seconds membres h_2, h_3, h_4 des équations $(2')$, $(3')$, $(4')$ contiennent les dérivées secondes de g ou de ω, on doit aussi considérer les équations dérivées de $(1')$ et $(5')$ qu'on notera respectivement $(1'')$ et $(5'')$. Ces équations peuvent s'écrire sommairement sous la forme suivante:

$(1'')$ $\quad \gamma^{\lambda\mu}(g) D_{\lambda\mu} g_1 + h_6(g, g_1, \partial g_1, r, \partial r) = 0$

$(5'')$ $\quad \gamma^{\lambda\mu}(g) D_{\lambda\mu} \omega_1 + h_7(g, g_1, \partial g_1, \sigma, \partial\sigma) = 0$.

Les conditions initiales (9) du Théorème 5 (Paragraphe 2.3) induisent sur les g_1, ω_1, des conditions initiales de la forme:

(11) $g_1|_{\mathcal{C}} = \widehat{\widehat{g}}_1\Big|_{\mathcal{C}}, \ \omega_1|_{\mathcal{C}} = \widehat{\widehat{\omega}}_1\Big|_{\mathcal{C}},$

où les $\widehat{\widehat{g}}_1$ et $\widehat{\widehat{\omega}}_1$ désignent respectivement les dérivées premières des fonctions $\widehat{\widehat{g}}$ et $\widehat{\widehat{\omega}}$ qui sont respectivement les solutions des problèmes de Cauchy caractéristiques non linéaires:

$$(12)\quad \begin{cases} \gamma^{\lambda\mu}(\widehat{\widehat{g}})D_{\lambda\mu}\widehat{\widehat{g}} + h_1(\widehat{\widehat{g}}, \widehat{\widehat{g}}_1, \widehat{\widehat{r}}) = 0 \text{ dans } \mathcal{Y} \\ \widehat{\widehat{g}}\Big|_{\mathcal{C}} = \widehat{g} \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \gamma^{\lambda\mu}(\widehat{\widehat{g}})D_{\lambda\mu}\widehat{\widehat{\omega}} + h_5(\widehat{\widehat{g}}, \widehat{\widehat{g}}_1, \widehat{\widehat{\sigma}}) = 0 \text{ dans } \mathcal{Y} \\ \widehat{\widehat{\omega}}\Big|_{\mathcal{C}} = \widehat{\omega}|_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

avec: $\widehat{\widehat{r}}_{\alpha\beta} = \overline{\overline{r}}_{\alpha\beta} + \widehat{\widehat{r}}_{1,\alpha\beta}$, $\widehat{\widehat{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}} + \widehat{\widehat{\sigma}}_1$ où $\overline{\overline{r}}_{\alpha\beta}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$ sont les polynômes intervenant dans les égalités (7) du Théorème 5 du Paragraphe 2.3,

$$\widehat{\widehat{r}}_{1,\alpha\beta},\ \widehat{\widehat{\sigma}}_1 \in \widetilde{F}^m(\mathcal{Y}_T) \quad \text{avec} \quad \widehat{\widehat{r}}_{1,\alpha\beta}\Big|_{\mathcal{C}_T} = \overset{*}{r}_{\alpha\beta},\ \widehat{\widehat{\sigma}}_1\Big|_{\mathcal{C}_T} = \overset{*}{\sigma}$$

($\overset{*}{r}_{\alpha\beta}, \overset{*}{\sigma}$ étant les éléments de $\widetilde{F}^m(\mathcal{C}_T)$ qui interviennent dans les égalités (7) du Paragraphe 2.3).

D'après le Théorème 1 et vu les relations (7) et (8) du Paragraphe 2.3 (car a) est admis), il existe $\mathrm{T}_1 \in]0, T]$ tel que:

$$\widehat{\widehat{g}} \in \{\overline{\overline{g}}\} + \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_{T_1}), \qquad \widehat{\widehat{\omega}} \in \{\overline{\overline{\omega}}\} + \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_{T_1}).$$

D'après le Théorème 1 et vu les relations (7), et (8) du Paragraphe 2.3, il existe $T_o \in]0, T_1]$ tel que le système (1′), (2′), (3′), (4′), (5′), (1″), (5″) admet alors, dans le domaine $\mathcal{Y}_{T_o}$, sous les conditions initiales (10) du Paragraphe 2.3 et (11), (12), (13), une solution unique $(g, g_1, r, d, \sigma, \omega, \omega_1) \in \{(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{g}}_1, \overline{\overline{r}}, \overline{\overline{d}}, \overline{\overline{\sigma}}, \overline{\overline{\omega}}, \overline{\overline{\omega}}_1)\} + [\widetilde{F}^m(\mathcal{Y}_{T_o})]^N$. On montre enfin facilement que $(g_1 - \partial g,\ \omega_1 - \partial\omega)$ vérifie dans le domaine $\mathcal{Y}_{T_o}$, un système quasi-diagonal linéaire, hyperbolique du second ordre de parties principales respectives $\gamma^{\lambda\mu}(g)\partial_{\lambda\mu}(g_1\text{-}\partial g)$, $\gamma^{\lambda\mu}(g)\partial_{\lambda\mu}(\omega_1 - \partial\omega)$ et de seconds membres nuls.

Comme $g_1 - \partial g|_{\mathcal{C}_{T_o}} = 0$ et $\omega_1 - \partial\omega|_{\mathcal{C}_{T_o}} = 0$, on a finalement d'après le résultat d'unicité contenu dans le Théorème 1:

$$g_1 = \partial g \quad \text{et} \quad \omega_1 = \partial\omega \quad \text{dans} \quad \mathcal{Y}_{T_o}.$$

On en déduit que:

$$g \in \{\overline{\overline{g}}\} + \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_{T_o}), \qquad \omega \in \{\overline{\overline{\omega}}\} + \widetilde{F}^{m+1}(\mathcal{Y}_{T_o})$$

$(g, , r, d, \sigma, \omega,)$ est alors l'unique solution du problème de Cauchy (1), (2), (3), (4), (5), (6), (6′), (9), (10) du Paragraphe 2.3.

Preuve du 2) sous la condition que 1.a) est vraie

Elle est identique à celle de la preuve précédente à condition d'appliquer une variante évidente du Théorème 2 à la place du Théorème 1.

Les preuves de 1.b) et 2) seront complètes si on démontre 1.a).

Preuve de 1)a)

En reprenant les notations précédentes reconsidérons les équations:

$(1')$ $\gamma^{\lambda\mu}(g)\, D_{\lambda\mu} g + h_1(g, g_1, r) = 0$

$(2'')$ $\gamma^{\lambda\mu}(g)\, D_{\lambda\mu} r + h_2\left(g, g_1, \partial g_1, r, \overline{f}, \overline{f}_1, \partial\overline{f}_1\right) = 0$

$(3')$ $\gamma^{\lambda\mu}(g)\, D_{\lambda\mu} d + h_3(g, g_1, \partial g_1, d) = 0$

$(4'')$ $\gamma^{\lambda\mu}(g)\, D_{\lambda\mu} \sigma + h_4\left(g, g_1, r, \sigma, \omega, \omega_1, \partial\omega_1, \overline{f}, \overline{f}_1, \partial\overline{f}_1\right) = 0$

$(5')$ $\gamma^{\lambda\mu}(g)\, D_{\lambda\mu} \omega + h_5(g, g_1, \sigma) = 0$

$(1'')$ $\gamma^{\lambda\mu}(g)\, D_{\lambda\mu} g_1 + h_6(g, g_1, \partial g_1, r, \partial r) = 0$

$(5'')$ $\gamma^{\lambda\mu}(g)\, D_{\lambda\mu} \omega_1 + h_7(g, g_1, \partial g_1, \sigma, \partial\sigma) = 0$.

(Les équations $(2'')$, $(4'')$ étant respectivement déduites de $(2')$, $(4')$ en remplaçant f par $\overline{f}$, f_1 par $\overline{f}_1$ et ∂f par $\partial\overline{f}_1$).

On munit le système $(1')$, $(2'')$, $(3')$, $(4'')$, $(5')$, $(1'')$, $(5'')$ des conditions initiales:

$$(14)\quad \begin{cases} g|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \overline{g}|_{\widetilde{\mathcal{C}}}\,;\ r|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \overline{r}|_{\widetilde{\mathcal{C}}}\,;\ d|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \overline{d}|_{\widetilde{\mathcal{C}}} \\ \omega|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \overline{\omega}|_{\widetilde{\mathcal{C}}}\,;\ \sigma|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \overline{\sigma}|_{\widetilde{\mathcal{C}}} \end{cases}$$

où $\widetilde{\mathcal{C}}$ est le demi-conoïde isotrope de sommet 0, orienté vers les $x^o \geq 0$, déterminé par la métrique $\gamma^{\lambda\mu}(\overline{g}(x^\alpha))$ qui est hyperbolique dans un voisinage U de $x^\alpha = 0$ dans $\mathbb{R}^4$. D'après [11] (cf. le Paragraphe III du Chapitre III de la 1ère partie de [11]), $\widetilde{\mathcal{C}}$ admet une représentation paramétrique de la forme: $x^o = S(x^1, x^2, x^3)$ où S est une fonction définie dans un voisinage $\widetilde{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^3$; S est positive et continue dans $\widetilde{V}$; S est de classe C^∞ dans $\widetilde{V}\backslash\{0\}$; S admet un développement limité en fractions rationnelles homogènes en $x^1, x^2, x^3, s = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ de la forme:

(15) $S(x^1, x^2, x^3) = s + O(s^{2m+1})$.

Notons:

$$\widehat{\mathcal{Y}} = \{(x^o, x^1, x^2, x^3) \in U /\ S(x^1, x^2, x^3) \leq x^o < +\infty\}$$

$$\widehat{\mathcal{Y}}_t = \widehat{\mathcal{Y}} \cap \{x^o < t\}.$$

Les conditions initiales (14) induisent sur les g_1, ω_1 des conditions initiales de la forme:

(16) $g_1|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = G_1|_{\widetilde{\mathcal{C}}}\ ; \omega_1|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \Omega_1|_{\widetilde{\mathcal{C}}}$

où G_1 et Ω_1 désignent respectivement les dérivées premières des fonctions G, Ω qui sont respectivement les solutions des problèmes de Cauchy caractéristiques, non linéaires, à données C^∞:

$$(17) \quad \begin{cases} \gamma^{\lambda\mu}(G)D_{\lambda\mu}G + h_1(G, G_1, \overline{r}) = 0, & \text{dans } \widetilde{\mathcal{Y}} \\ G|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \overline{g}|_{\widetilde{\mathcal{C}}} \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \gamma^{\lambda\mu}(G)D_{\lambda\mu}\Omega + h_5(G, G_1, \overline{\sigma}) = 0, & \text{dans } \widetilde{\mathcal{Y}} \\ \Omega|_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \overline{\omega}|_{\widetilde{\mathcal{C}}} \end{cases} .$$

D'après le Théorème 2 de [7], il existe $T_2 \in]0, T]$ tel que le problème de Cauchy caractéristique (1′), (2″), (3′), (4″), (5′), (1″), (5″), (14), (16) admet dans le domaine $\widetilde{\mathcal{Y}}_{T_2}$, une solution unique $(\overset{o}{g}, \overset{o}{g}_1, \overset{o}{r}, \overset{o}{d}, \overset{o}{\sigma}, \overset{o}{\omega}, \overset{o}{\omega}_1) \in C^\infty(\widetilde{\mathcal{Y}}_{T_2})$. On montre enfin facilement que $(\overset{o}{g}_1\text{-}\partial \overset{o}{g}, \overset{o}{\omega}_1\text{-}\partial \overset{o}{\omega})$ vérifie, dans le domaine $\widetilde{\mathcal{Y}}_{T_2}$, un système quasi-diagonal linéaire, hyperbolique, homogène, du second ordre de parties principales $\gamma^{\lambda\mu}(g)D_{\lambda\mu}(\overset{o}{g}_1 - \partial \overset{o}{g}); \gamma^{\lambda\mu}(g)D_{\lambda\mu}(\overset{o}{\omega}_1 - \partial \overset{o}{\omega})$. Comme de plus, $\overset{o}{g}_1 - \partial \overset{o}{g}\Big|_{\widetilde{\mathcal{C}}_{T_2}} = 0$, $\overset{o}{\omega}_1 - \partial \overset{o}{\omega}\Big|_{\widetilde{\mathcal{C}}_{T_2}} = 0$, on a enfin, d'après le résultat d'unicité contenu dans le Théorème 1:

$$\overset{o}{g}_1 = \partial \overset{o}{g}; \ \overset{o}{\omega}_1 = \partial \overset{o}{\omega} \quad \text{dans} \quad \widetilde{\mathcal{Y}}_{T_o}.$$

$(\overset{o}{g}, , \overset{o}{r}, \overset{o}{d}, \overset{o}{\sigma}, \overset{o}{\omega},)$ est alors l'unique solution du problème de Cauchy $(\overset{*}{1})$, $(\overset{*}{2})$, $(\overset{*}{3})$, $(\overset{*}{4})$, $(\overset{*}{5})$ dans le domaine $\widetilde{\mathcal{Y}}_{T_o}$ (cf. l'énoncé du Théorème 5 pour la définition des équations "étoilées").

On choisit:

$\overline{\overline{g}}$ = polynôme de Taylor d'ordre $2m$ de $\overset{o}{g}$ au point $x^\alpha = 0$

$\overline{\overline{\omega}}$ = polynôme de Taylor d'ordre $2m$ de $\overset{o}{\omega}$ au point $x^\alpha = 0$

$\overline{\overline{r}}$ = polynôme de Taylor d'ordre $2(m-1)$ de $\overset{o}{r}$ au point $x^\alpha = 0$

$\overline{\overline{d}}$ = polynôme de Taylor d'ordre $2(m-1)$ de $\overset{o}{d}$ au point $x^\alpha = 0$

$\overline{\overline{\sigma}}$ = polynôme de Taylor d'ordre $2(m-1)$ de $\overset{o}{\sigma}$ au point $x^\alpha = 0$.

Alors $(\overline{\overline{g}}, \overline{\overline{\omega}}, \overline{\overline{r}}, \overline{\overline{d}}, \overline{\overline{\sigma}})$ vérifie au point $x^\alpha = 0$ le système $(\overset{*}{1})$, $(\overset{*}{2})$, $(\overset{*}{3})$, $(\overset{*}{4})$, $(\overset{*}{5})$ et les équations dérivées jusqu'à l'ordre 2m pour $(\overset{*}{1})$, $(\overset{*}{5})$ et jusqu'à l'ordre $2(m-1)$ pour $(\overset{*}{2})$, $(\overset{*}{3})$ et $(\overset{*}{4})$.

On montre enfin, comme dans la preuve du Théorème 2 de [8], en utilisant (14), (15), que les données initiales $(\widehat{g}, \widehat{d}, \widehat{r}, \widehat{\omega}, \widehat{\sigma})$ associées au système conforme régulier des Equations d'Einstein (1), (2), (3), (4), (5) peuvent se redécomposer comme dans les égalités (7) du Théorème 5.

On a ainsi achevé la preuve de 1) a) et complété celles de 1) b) et 2).

Remerciements

Je voudrais remercier l'I.C.T.P. que j'ai visité, en 2000 et où a démarré la rédaction de ce travail. Mes remerciements vont aussi au C.D.E. (I.M.U.) qui a financé mon voyage Yaoundé-Trieste.

References

[1] R. Balean, "The null-timelike boundary problem for the linear wave equation", *Commun. in Partial Differential Equations* **22**, 1325–1360 (1997).

[2] R. Balean, R. Bartnik, "The Null-timelike boundary problem for Maxwell's Equations in Minkowski space" *Proc. R. Soc. Lond. A* **454**, 2041–2057 (1998).

[3] Y. Bruhat, "Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires", *Acta Matematica* **88**, 141–225 (1952).

[4] D. Christodoulou, "The problem of a self-graviting scalar field", *Commun. Math. Phys.* **105**, 337–361 (1986).

[5] D. Christodoulou, "Global existence of Generalized solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar field in the large", *Commun. Math. Phys.* **105**, 587–621 (1986).

[6] Y. Choquet-Bruhat, et M. Novello, "Le système conforme régulier des Equations d'Einstein", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **t.305**, série II, p. 155–160 (1987).

[7] M. Dossa, "Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques" *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **vol. 16**, n°1, 17–22 (1994).

[8] M. Dossa, "Espaces de Sobolev non isotropes à poids et problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un conoïde caractéristique" *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **vol. 66**, n°1, 37–107 (1997).

[9] M. Dossa, "Solutions de problèmes de Cauchy quasi-linéaires sur un conoïde caractéristique", *C.R. Acad. Sci. Paris* **318**, 935–938 (1994).

[10] M. Dossa, "Problèmes de Cauchy sur un conoïde caractéristique pour les Equations d'Einstein du vide et les Equations de Yang-Mills-Higgs", *C.R. Acad. Sci. Paris* **319**, 295–298 (1994).

[11] M. Dossa, Thèse d'Etat (1992), Université de Yaoundé.

[12] G.F.R. Ellis, S.D. Nel, R. Maartens, W.R. Stoeger et A.P. Whitman, *Physics Reports* **124**, 315–417 (1985).

[13] F.G. Friedlander, "The wave Equation on a curved space-time", Cambridge University Press, 1975.

[14] H. Friedrich, "On static and radiative space-times", *Commun. Math. Phys.* **119**, 51–73 (1988).

[15] H. Friedrich, "On purely radiative space-times", *Commun. Math. Phys.* **103**, 35–65 (1986).

[16] H. Friedrich, "Existence and structure of past asymptotically simple solutions of Einstein field equations with positive cosmological constant", *J. Geom. Phys.* **3**, 101–117 (1986).

[17] H. Friedrich, "On the existence of n-geodesically complete or futur complete solutions of Einstein's field equations with smooth asymptotic structure", *Commun. Math. Phys.* **107**, 587–609 (1986).

[18] H. Friedrich, "Cauchy problems for the conformal vacuum field equations in General Relativity", *Commun. Math. Phys.* **91**, 445–472 (1983).

[19] H. Friedrich, "The asymptotic characteristic initial value problem for Einstein's vacuum field equations as an initial value problem for a first-order quasi-linear symmetric hyperbolic system", *Proc. R. Soc. Lond. A* **378**, 401–421 (1981).

[20] H. Friedrich, "On the global existence and the asymptotic behavior of solutions to the Einstein-Maxwell-Yang-Mills equations" *J. Differ. Geom.* **34**, 275–345, (1991).

[21] H. Friedrich, "Einstein equations and conformal structure: Existence of anti-de Sitter type space-times", *J. Geom. Phys.* **17**, 125–184, (1995).

[22] H. Friedrich, "Gravitational fields near space-like and null infinity", *J. Geom. Phys.* **24**, 83–163 (1998).

[23] P. Hajicek, "Exact models of charged black holes II. Axisymmetric static horizons", *Commun. Math. Phys.* **34**, 53–76 (1973).

[24] P. Hajicek, "Exact models of charged black holes stationary horizons", *Commun. Math. Phys.* **36**, 305–320 (1974).

[25] R.A. Isaacson, J.S. Welling et J. Winicour, *J. Math. Phys.* **24**, 1824–1834 (1983).

[26] J. Kannar, "On the existence of C^∞ solutions to the asymptotic characteristic initial value problem in general relativity", *Proc. R. Soc. Lond. A* **452**, 945–952 (1996).

[27] R. Kerner, *Ann. Inst. Poincaré* **20**, 263–279 (1974).

[28] Moncrief et Isenberg, "Symmetries of cosmological Cauchy Horizon", *Commun. Math. Phys.* **89**, 387–413 (1983).

[29] H. Müller zum Hagen et F.H.J. Seifert, "On characteristic initial value and mixed problems", *Gen. Rel. Grav.* **8**, 259–301 (1977).

[30] E.T. Newman, T. Unti, *J. Math. Phys.* **3**, 891 (1962).

[31] R. Penrose, "Null hypersurface initial data for classical fields of arbitrary spin and for General Relativity" in *Aerospace Research Laboratories Report* 63–56 (1963); reprinted in *General Rel. Grav.* **12**, 225–264 (1980).

[32] A.D. Rendall, "Local and global existence theorems for the Einstein Equations" www. living reviews.org/Articles/vol m 3/2000-1rendall, Living Reviews in Relativity.

[33] A.D. Rendall, "Reduction of the characteristic initial value problem to the Cauchy problem and its applications to the Einstein equations", *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **427**, 221–239 (1990).

[34] A.D. Rendall, "The characteristic initial value problem for the Einstein Equations" Nonlinear hyperbolic equations and field theory (Lake Como 1991) Pitman, Res. Notes, Maths-ser., 253, Longman Sci. Harlow, 1992, 154–163.

[35] R.K. Sachs, "Characteristic initial value problem for gravitational theory", in Infeld, L., ed., Relativistic Theories of Gravitation, 93–105 (Pergamon Press, Oxford, 1964).

[36] J.M. Stewart dans Classical General Relativity (ed. W.B. Bonnor J.N. Islam et M.A.H. Mac Callum) Cambridge University Press.

Marcel Dossa
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Yaoundé I
B.P. 812 Yaoundé
Cameroun
email: mdossa@uycdc.uninet.cm

Communicated by Vincent Rivasseau
submitted 23/05/02, accepted 19/09/02