Ann. Henri Poincaré 4 (2003) 195 – 197

1424-0637/03/010195-3
DOI 10.1007/s00023-003-0126-8

Annales Henri Poincaré

Matrices de Diffusion pour l'Opérateur de Schrödinger en Présence d'un Champ Magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm Erratum: Annales I.H.P. Vol. 61, n° 3, 1994

François Nicoleau

Dans un preprint récent [4], Roux-Yafaev ont obtenu des résultats sur la matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique qui sont contradictoires avec ceux obtenus dans notre papier [2]. En effet, Roux-Yafaev montrent que, contrairement à ce qui est énoncé à tort dans le Théorème 2 de [2], la matrice de diffusion n'est pas forcément une perturbation compacte de l'identité et que son spectre peut recouvrir le cercle unité complexe. Notre erreur initiale impose en fait la correction de la plupart des énoncés de [2] (en particulier le théorème 6 et son corollaire) s'appuyant sur une approche perturbative.

Dans cet erratum, nous montrons comment corriger le papier [2]; nous reprenons toutes les notations de [2], ainsi que la numérotation des équations qui s'y trouvent. L'erreur initiale de [2] provenait d'un mauvais choix de microlocalisation dans la construction des opérateurs Fourier intégraux (O.F.I) $J_{j,A}$, $j = 1, 2$ (p. 336, lignes 13–17). Ces O.F.I étaient introduits afin d'obtenir une formule de représentation des matrices de diffusion (Equation (2.23)–(2.25)). Avec la microlocalisation donnée dans [2], la remarque (p. 337, lignes 4–5) est erronée. Pour que cette dernière soit exacte, il faut considérer la microlocalisation suivante ([1]).

Définition de la microlocalisation

Pour $j = 1, 2$, soient $\sigma_0^j,\ \sigma_1^j \in]0, 1[$, $\gamma > 0$ assez petit, tels que:

$$-1 < \sigma_0^1 - \gamma < \sigma_0^1 < \sigma_1^1 < \sigma_1^1 + \gamma < 0 < \sigma_0^2 - \gamma < \sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \sigma_1^2 + \gamma < 1 \ .$$

$$\Psi_j^+ \in C^\infty([-1, 1]),\ \Psi_j^+(\tau) = 1 \text{ si } \tau \in [\sigma_1^j, 1] \text{ et } \Psi_j^+(\tau) = 0 \text{ si } \tau \in [-1, \frac{\sigma_0^j + \sigma_1^j}{2}].$$

$$\Psi_j^- \in C^\infty([-1, 1]),\ \Psi_j^-(\tau) = 1 \text{ si } \tau \in [-1, \sigma_0^j] \text{ et } \Psi_j^-(\tau) = 0 \text{ si } \tau \in [\frac{\sigma_0^j + \sigma_1^j}{2}, 1].$$

$$\chi_{1,j} \in C^\infty([-1, 1]),\ \chi_{1,j}(\tau) = 1 \text{ si } \tau \in [-1, \sigma_0^j - \gamma] \text{ et } \chi_{1,j}(\tau) = 0 \text{ si } \tau \geq \sigma_0^j.$$

$$\chi_{2,j} \in C^\infty([-1, 1]),\ \chi_{2,j}(\tau) = 1 \text{ si } \tau \in [\sigma_1^j + \gamma, 1] \text{ et } \chi_{2,j}(\tau) = 0 \text{ si } \tau \leq \sigma_1^j.$$

La phase $\Phi_j(x,\xi)$ de l' O.F.I $J_{j,A}$ est donnée par (Equation (2.13), [2]) où Ψ_+, (resp. Ψ_-), est remplacé par Ψ_j^+, (resp. Ψ_j^-). L'amplitude $d_{j,A}(x,\xi)$ de l' O.F.I $J_{j,A}$ est donnée par (Equation (2.21), [2]) où χ_1, (resp. χ_2), est remplacé par $\chi_{1,j}$, (resp. $\chi_{2,j}$).

On a alors la formule de représentation des matrices de diffusion ([2], Equations (2.23)–(2.25)):

$$\begin{aligned} S_A(\lambda) - 1 &= -2i\pi\Gamma_0(\lambda)J_{1,A}^* T_{2,A}\Gamma_0^*(\lambda) \\ &\quad + 2i\pi\Gamma_0(\lambda)T_{1,A}^* R(\lambda+i0)T_{2,A}\Gamma_0^*(\lambda) \\ &:= B_A(\lambda) + C_A(\lambda). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Avec cette nouvelle microlocalisation, $C_A(\lambda)$ est un opérateur à noyau C^∞ sur $S^{n-1}\times S^{n-1}$.

Le terme prédominant de la matrice de transition est donc donné par $B_A(\lambda)$. Pour l'étudier, contrairement à [2], nous ne considérons plus $B_A(\lambda)$ comme une perturbation de $B_0(\lambda)$, mais comme un opérateur pseudo-différentiel sur la sphère; en suivant les techniques de [5], un calcul facile nous montre que $B_A(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel sur la sphère dans la classe $S^0_{\rho,1-\rho}$ de Hörmander, de symbole principal pour $\mid y \mid \gg 1$, $\mid \omega \mid = 1$ et $< y,\omega >= 0$:

$$b(\omega,y;\lambda) = e^{i\int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda^{-\frac12}y+s\omega).\omega\ ds} - 1. \tag{1.2}$$

Par conséquent, modulo un opérateur compact, $S_A(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel sur la sphère de symbole principal :

$$s(\omega,y;\lambda) = e^{i\int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda^{-\frac12}y+s\omega).\omega\ ds}. \tag{1.3}$$

En utilisant (1.3), Roux et Yafaev obtiennent en particulier le résultat suivant:

Proposition 1 ([4], Prop. 6.13)
On suppose que pour un point (y,ω) tel que $\mid \omega \mid = 1$, $< y,\omega >= 0$,

$$\limsup_{\tau\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau y+s\omega).\omega\ ds = \infty$$

ou

$$\liminf_{\tau\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau y+s\omega).\omega\ ds = -\infty\ .$$

Alors: le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité.

References

[1] H. Isozaki et H. Kitada, Scattering matrices for two-body Schrödinger operators, *Sci. Papers College Arts and Sci., Univ. Tokyo* **35**, 81–107 (1985).

[2] F. Nicoleau, Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm, *Annales I.H.P.* **Vol 61, 3**, 329–346 (1994).

[3] P. Roux et D. Yafaev, On the mathematical theory of the Aharonov-Bohm effect, mp-arc 02-165, (2002).

[4] P. Roux et D. Yafaev, The scattering matrix for the Schrödinger operator with a long-range electromagnetic potential, mp-arc 02-364, (2002).

[5] D. Yafaev, The scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long-range potential, *Comm. Math. Phys.* **191**, 183–218 (1998).

François Nicoleau
Laboratoire Jean Leray
UMR CNRS-UN 6629
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière
BP 92208
F-44322 Nantes cedex 03
France
email: nicoleau@math.univ-nantes.fr