

Empilements de cercles et discrétisation quasiconforme: comportement asymptotique des rayons

F. Mathéus

Université de Bretagne-Sud,
Laboratoire de Mathématiques et d'Applications des Mathématiques,
1 rue de la Loi, 56000, Vannes, France
Frederic.Matheus@univ-ubs.fr

Abstract. In a discretization scheme for conformal mappings with circle packings previously considered by Colin de Verdière and the author, a two-term asymptotic expansion of the radii of the image circles is obtained, with a control on the error. The vanishing of the second term characterizes Doyle spirals.

Résumé. Dans le cadre d'une méthode d'approximation de fonctions holomorphes au moyen d'empilements de cercles étudiée antérieurement par Colin de Verdière et l'auteur, nous obtenons un développement asymptotique à deux termes des rayons des cercles de l'empilement image, avec majoration du reste. L'annulation du second terme donne une caractérisation des empilements de type exponentiel.

1. Introduction

Depuis une dizaine d'années, l'utilisation des empilements de cercles pour discrétiser des fonctions holomorphes a fait l'objet d'abondants travaux. C'est d'abord l'uniformisation de Riemann d'un ouvert simplement connexe borné de \mathbb{C} qui a été étudiée par Rodin et Sullivan. Suivant une idée de Thurston (voir [Th]), ils en ont construit des approximations quasiconformes au moyen d'empilements de cercles finis à combinatoire hexagonale (voir [RS]). Par la suite, Stephenson, He, Rodin et Schramm ont généralisé le théorème d'approximation à des empilements de cercles dont la combinatoire et les rayons sont variables (voir [S1], [S2], [HR], et [HS]).

L'extension de ce procédé de discrétisation aux fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas, au moyen d'empilements immergés, a été menée en parallèle par Carter

et Rodin d'une part (voir [CR]), et par Colin de Verdière et l'auteur d'autre part (voir [CM]). Enfin, le cas où la dérivée s'annule a été étudié par Dubejko qui utilise pour cela des empilements ramifiés (voir [D1]).

Dans toutes les situations envisagées, il est rapidement apparu que les rayons des cercles des empilements construits permettaient d'accéder directement au module de la dérivée de la fonction discrétisée. L'idée—assez intuitive—est la suivante: si $z \in \mathbf{C}$ est un point en lequel la dérivée de f ne s'annule pas, et si C est un cercle d'un empilement source de rayon ε et contenant z , alors le rayon r du cercle C' de l'empilement image correspondant à C est équivalent à $\varepsilon|f'(z)|$. Dans la situation de [CM] est même obtenue l'estimation $r = \varepsilon|f'(z)| + O(\varepsilon^2)$.

Le but de ce travail est de comprendre quelles informations supplémentaires sur f on peut récupérer à partir des rayons des cercles des empilements images. On montre comment obtenir, dans le cadre du schéma d'approximation étudié dans [CM], un développement asymptotique de la forme:

$$r = \varepsilon|f'(z)| + \varepsilon^3 h(z) + O(\varepsilon^4 \log \varepsilon)$$

(cf. théorème 2.1). Le coefficient de ε^3 possède une interprétation géométrique. Son annulation nous permet de caractériser les fonctions entières f pour lesquelles on a une formule exacte $r = \varepsilon|f'(z)|$ (cf. corollaire 2.2): f est alors ou bien de la forme $f(z) = az + b$, ou bien de la forme $f(z) = e^{az+b} + c$. L'absence de coefficient en ε^2 permet d'avancer un début d'explication à un phénomène de rapidité de convergence observé par Dubejko et Stephenson (voir la section 4, exp. #3, p. 329, de [DS]).

Décrivons brièvement la structure de ce texte. Dans la section suivante on rappelle le schéma d'approximation étudié dans [CM] afin de donner un énoncé précis du théorème principal. Son corollaire y est énoncé et démontré. La section 3 est consacrée à une méthode de déformation d'empilements (de cercles) dont la courbure varie. Il s'agit d'une variante de celle utilisée dans [CM]. Des estimations a priori sur les rayons des cercles, de type principe du maximum, sont obtenues par voie probabiliste dans la section 4, au moyen de marches aléatoires et de martingales. Elles permettent, dans la section 5, de mener à bien la preuve du théorème principal. Celle-ci repose sur la discrétisation d'un problème de Dirichlet étudiée dans le cadre de la méthode des volumes finis.

2. Énoncé du théorème principal

Commençons par rappeler la définition d'un empilement de cercles. Soit \mathcal{T} une triangulation (finie ou infinie) d'un disque topologique et S l'ensemble des sommets de \mathcal{T} . Soit $r = (r_s)_{s \in S} \in (\mathbf{R}_+^*)^S$. On munit chaque triangle de \mathcal{T} de la métrique euclidienne g_r qui au côté ss' affecte la longueur $r_s + r_{s'}$. On obtient ainsi une variété riemannienne plate à singularités coniques, notée \mathcal{T}_r (voir [Tr]). Soit s un sommet d'un triangle T de \mathcal{T} . Si $\alpha(s, T)$ désigne l'angle en s dans le triangle T et si s est un sommet intérieur, alors la courbure en s est:

$$K_s(r) = 2\pi - \sum_{s \in T} \alpha(s, T).$$

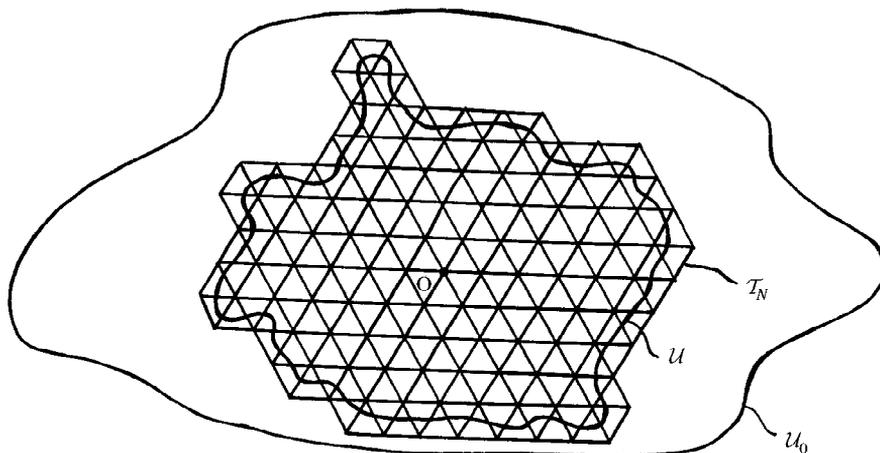


Fig. 1. Les ouverts \mathcal{U} et \mathcal{U}_0 , et la triangulation \mathcal{T}_N .

La famille de cercles $\mathcal{C} = \{C_s, s \in S\}$, où C_s est le cercle de \mathcal{T}_r de centre s , de rayon r_s , possède la propriété suivante: les cercles C_s et $C_{s'}$ sont tangents si et seulement si l'arête ss' appartient au 1-squelette \mathcal{T}^1 de la triangulation \mathcal{T} .

Si, pour tout sommet intérieur s , on a $K_s(r) = 0$, alors la variété \mathcal{T}_r est immergée isométriquement dans \mathbf{R}^2 (mais non plongée a priori). On dit alors que \mathcal{C} est un empilement de cercles immergé de combinatoire \mathcal{T}^1 .

Soit \mathcal{U} un ouvert borné, connexe, simplement connexe, contenant 0, à bord de classe \mathcal{C}^3 , et soit f une fonction holomorphe définie sur un voisinage \mathcal{U}_0 de l'adhérence $\bar{\mathcal{U}}$ de \mathcal{U} , et dont la dérivée ne s'annule pas. Pour $N \geq 1$, soit $\mathcal{T}_N(\mathbf{C})$ la triangulation de \mathbf{C} par des triangles équilatéraux de côté $1/N$, dont l'ensemble des sommets contient 0 et $1/N$. Soit \mathcal{T}_N la sous-triangulation de $\mathcal{T}_N(\mathbf{C})$ constituée des triangles de $\mathcal{T}_N(\mathbf{C})$ qui rencontrent $\bar{\mathcal{U}}$. Si N est assez grand ($\geq N_0$), \mathcal{T}_N est une triangulation d'un disque topologique (cf. fig. 1). On note S_N l'ensemble des sommets de \mathcal{T}_N , et H_N l'empilement constitué des cercles de rayon $1/2N$ et dont les centres sont les sommets de \mathcal{T}_N . On constate que la combinatoire de H_N n'est autre que \mathcal{T}^1 .

On construit un nouvel empilement, noté \tilde{H}_N , de la façon suivante. Il doit vérifier les deux conditions (i) et (ii) ci-dessous:

- (i) la combinatoire de \tilde{H}_N est \mathcal{T}^1 ;
- (ii) les rayons des cercles du bord de \tilde{H}_N sont donnés par $(1/2N)|f'(s)|$ où s décrit l'ensemble des sommets frontière de \mathcal{T}_N .

D'après le premier théorème de la section 4 de [C], il existe un empilement de cercles vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessus, et cet empilement est unique à isométrie près. Notons C_N^s le cercle de H_N centré en $s \in S_N$ et r_N^s le rayon du cercle \tilde{C}_N^s de \tilde{H}_N correspondant à C_N^s . L'empilement \tilde{H}_N sera parfaitement déterminé si l'on exige qu'il

satisfasse la condition suivante, dite de normalisation:

- (iii) le cercle \tilde{C}_N^0 est centré en $f(0)$, et le cercle $\tilde{C}_N^{1/N}$ est centré sur la demi-droite $f(0) + \mathbf{R}_+ \vec{f}'(0)$.

Dans toute la suite, \tilde{H}_N désignera l'unique empilement de cercles du plan satisfaisant aux conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus (cf. [CM] pour des figures).

Considérons maintenant l'application f_N définie sur \mathcal{T}_N , affine sur chaque triangle de \mathcal{T}_N , et envoyant le centre de tout cercle C de H_N sur le centre du cercle correspondant \tilde{C} de \tilde{H}_N . Dans [CM], Colin de Verdière et l'auteur démontrent que la suite des fonctions f_N converge uniformément sur $\tilde{\mathcal{U}}$ vers f , et obtiennent l'estimation suivante, uniforme sur $\tilde{\mathcal{U}}$:

$$r_N^s = \frac{|f'(s)|}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Soit $\check{f}: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\check{f} = \frac{1}{36} \left| \frac{f''}{f'} \right|^4 \left[\Re \left(\frac{f' f'''}{f''^2} \right) - \left| \frac{f' f'''}{f''^2} \right|^2 \right].$$

Il est aisé de vérifier que \check{f} est une fonction C^∞ sur \mathcal{U}_0 . Notons Δ l'opérateur $-\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$, et soit $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction de classe C^2 définie par:

$$\begin{cases} \Delta g = \check{f} & \text{sur } \mathcal{U}, \\ g = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{U} \end{cases}$$

(voir le théorème 6.14 p. 107 de [GT] pour la régularité de g).

Le théorème suivant, qui constitue le résultat principal de ce texte, précise le comportement asymptotique des rayons des cercles de l'empilement \tilde{H}_N :

Théorème 2.1. *Pour tout $s \in S_N$, on a*

$$r_N^s = \frac{|f'(s)|}{2N} \left(1 + \frac{g(s)}{N^2} \right) + O\left(\frac{\log N}{N^4}\right) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

uniformément sur S_N .

Le corollaire suivant caractérise le cas où l'on a une formule exacte:

Corollaire 2.2. *Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbf{C} comme ci-avant et $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière dont la dérivée ne s'annule pas. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- (i) $\forall N \geq N_0, \forall s \in S_N, r_N^s = |f'(s)|/2N$;
- (ii) $\forall N \geq N_0, \forall s \in S_N, r_N^s = |f'(s)|/2N + O((\log N)/N^4)$;
- (iii) $\exists (a, b, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^2$ tel que ou bien $f(z) = az + b$, ou bien $f(z) = e^{az+b} + c$.

Démonstration du corollaire 2.2. L'implication (i) \Rightarrow (ii) est banale. Prouvons (ii) \Rightarrow (iii). Considérons l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathcal{U} \mid f''(z) \neq 0\}$, et supposons-le non vide. Soit

\tilde{f} la fonction holomorphe sur Ω définie par $\tilde{f} = f' f''' / f''^2$. L'hypothèse entraîne que la fonction g introduite ci-avant est nulle sur une partie dense de \mathcal{U} —à savoir la réunion des S_N —donc sur \mathcal{U} , de sorte que $\Re \tilde{f} - |\tilde{f}|^2 = 0$ sur Ω . Ainsi, la fonction \tilde{f} prend ses valeurs dans un cercle, donc est constante d'après le théorème de l'image ouverte. Notons α la valeur de \tilde{f} . On observe que $(f'/f'')' = 1 - \tilde{f} = 1 - \alpha$, ce qui donne $f'(z) = [(1 - \alpha)z + \beta]f''(z)$ sur Ω , donc sur \mathbf{C} par prolongement analytique. Comme f' ne s'annule pas sur \mathbf{C} , on a $1 - \alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, donc $f'' = (1/\beta)f'$, puis $f'(z) = \exp((1/\beta)z + \gamma)$, ce qui prouve le point (iii) lorsque Ω n'est pas vide. Si Ω est vide, alors $f'' = 0$ sur \mathcal{U} , donc sur \mathbf{C} , et $f(z) = az + b$, ce qui achève la preuve de (iii).

Prouvons (iii) \Rightarrow (i). Si $f(z) = az + b$ alors tous les cercles de \tilde{H}_N ont pour rayon $|a|/2N = |f'(z)|/2N$. Si $f(z) = e^{az+b} + c$, l'assertion (i) résulte de la section III de [CM]. \square

3. Déformation d'empilements non plats

Rappelons que notre but est d'évaluer, de manière plus précise que dans [CM], l'écart entre la collection des rayons des cercles de l'empilement \tilde{H}_N et la collection $\{|f'(s)|/2N, s \text{ sommet de } \mathcal{T}_N\}$.

L'observation de départ est la suivante: lorsqu'on remplace le rayon r_N^s de chaque cercle de l'empilement \tilde{H}_N par $|f'(s)|/2N$, on crée, en chaque sommet s de \mathcal{T}_N , de la courbure au sens du début de la section précédente, notée \check{K}_N^s , et que l'on sait estimer grâce au lemme 1 de la section VI de [CM]: $\check{K}_N^s = O(1/N^4)$. En ce sens, il est apparu peu de courbure. L'idée est alors de faire varier continûment la courbure entre celle que l'on a créée, c'est-à-dire \check{K}_N^s , et celle correspondant à l'empilement \tilde{H}_N , à savoir 0, et ce tout en contrôlant les rayons des cercles.

Notons $\tilde{\mathcal{T}}_N^0$ la variété riemannienne plate à singularités (éventuelles) coniques définie à partir de la triangulation \mathcal{T}_N et de la collection $\{|f'(s)|/2N\}_{s \in S_N}$, et $\tilde{\mathcal{T}}_N^1$ la variété riemannienne plate—sans singularité—associée à l'empilement \tilde{H}_N . On se propose de réaliser $\tilde{\mathcal{T}}_N^1$ comme le temps 1 d'une déformation de la variété $\tilde{\mathcal{T}}_N^0$. On note B_N l'ensemble des sommets du bord de \mathcal{T}_N et I_N l'ensemble des sommets intérieurs. On a bien sûr $S_N = B_N \sqcup I_N$. Cette déformation est fournie par la

Proposition 3.1. *Pour tout $t \in [0, 1]$, il existe une unique collection de rayons $\{r_N^s(t)\}_{s \in S_N} \in (\mathbf{R}_+^*)^{S_N}$ vérifiant les propriétés suivantes:*

- (i) *pour tout $s \in I_N$, la courbure en s à l'instant t est donnée par $K_N^s(t) = (1-t)\check{K}_N^s$;*
- (ii) *pour tout $s \in B_N$, $r_N^s(t) = |f'(s)|/2N$.*

On note $\tilde{\mathcal{T}}_N^t$ la variété riemannienne plate à singularités coniques ainsi obtenue. Bien entendu, pour $t = 0$ et 1, cette notation est cohérente avec celle introduite précédemment.

Preuve de la proposition 3.1. Il s'agit d'une relecture des sections 2 et 4 de [C]. On fixe $N \geq N_0$ et $t \in [0, 1]$. Posons $u_N^s = \log r_N^s$, et fixons $u_N^s = \log(|f'(s)|/2N)$ pour $s \in B_N$.

On construit, exactement comme dans la section 2 de [C], une fonctionnelle $F_t: \mathbf{R}^{I_N} \rightarrow \mathbf{R}$, positive, strictement convexe, propre, et dont la différentielle est donnée, pour $u_N = (u_N^s)_{s \in I_N} \in \mathbf{R}^{I_N}$, par:

$$dF_t(u_N) = \sum_{s \in I_N} [K_N^s(u_N) - K_N^s(t)] du_N^s.$$

Pour pouvoir construire F_t , la seule condition à vérifier - outre la fermeture de la forme différentielle figurant au second membre de l'équation ci-dessus - est l'existence d'un système d'angles $\{\alpha^t(s, T) \in]0, \pi[, s \in S_N, T \text{ triangle de } \mathcal{T}_N \text{ contenant } s\}$ tel que:

- (a) $\forall s \in I_N, \sum_{T \ni s} \alpha^t(s, T) = 2\pi - K_N^s(t);$
 (b) $\forall T \in \mathcal{T}_N, \sum_{s \in T} \alpha^t(s, T) = \pi$

(comparer avec la définition du Section 2 de [C]). La condition (a) exprime que la courbure au sommet $s \in I_N$ vaut précisément $K_N^s(t)$, et la condition (b), que chaque triangle pris individuellement est euclidien. Il suffit pour cela de prendre $\alpha^t(s, T) = (1-t)\alpha^0(s, T) + t\alpha^1(s, T)$, où $\alpha^0(s, T)$ (resp. $\alpha^1(s, T)$) désigne l'angle en s dans le triangle T de la variété $\tilde{\mathcal{T}}_N^0$ (resp. $\tilde{\mathcal{T}}_N^1$).

Les propriétés de F_t - stricte convexité, propreté, positivité - lui assurent l'existence d'un unique point critique $u_N(t) \in \mathbf{R}^{I_N}$, et la collection de rayons définie par $r_N^s(t) = e^{u_N^s(t)}$ convient. \square

On va maintenant interpréter la famille $\{(d/dt)u_N^s(t)\}_{s \in S_N}$ comme solution d'un problème de Dirichlet discret. Pour ce faire, on dérive la relation du (i) de la proposition par rapport au paramètre t . Comme la courbure en s ne dépend que des rayons en s et aux sommets voisins, il vient:

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall s \in I_N, \quad \sum_{s' \in S_N, d_c(s, s') \leq 1} \frac{\partial K_N^s[u_N(t)]}{\partial u_N^{s'}} \dot{u}_N^{s'}(t) = -\check{K}_N^s,$$

où d_c désigne la distance combinatoire dans le graphe \mathcal{T}_N . Une formule explicite pour les dérivées partielles de la courbure K_N^s est donnée à la fin de la section 5.1, dans la preuve du corollaire 5.1.2.

À toute fonction $\varphi \in \mathbf{R}^{I_N}$ prolongée par 0 sur B_N on associe la fonction $\Delta_{N,t}\varphi = \Delta_N\varphi \in \mathbf{R}^{I_N}$ définie par:

$$\forall s \in I_N, \quad \Delta_N\varphi(s) = \sum_{s' \in S_N, d_c(s, s') \leq 1} \frac{\partial K_N^s[u_N(t)]}{\partial u_N^{s'}} \varphi(s').$$

Les relations suivantes (où l'on note $s' \sim s$ pour s' voisin de s):

$$\sum_{d_c(s, s') \leq 1} \frac{\partial K_N^s(u_N)}{\partial u_N^{s'}} = \frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^s} + \sum_{s' \sim s} \frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^{s'}} = 0; \quad \frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^s} > 0,$$

$$\frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^{s'}} < 0 \quad \text{si } s' \sim s, \quad \frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^{s'}} = \frac{\partial K_N^{s'}}{\partial u_N^s} \quad \text{si } s' \sim s,$$

font de l'opérateur Δ_N un laplacien discret sur \mathbf{R}^{I_N} , c'est-à-dire un endomorphisme symétrique défini positif de \mathbf{R}^{I_N} .

En résumé, le vecteur $\dot{u}_N(t) = \{\dot{u}_N^s(t)\}_{s \in S_N}$ est solution du problème de Dirichlet discret suivant:

$$\begin{cases} \Delta_N \dot{u}_N(s) = -\check{K}_N^s & \text{pour tout } s \in I_N, \\ \dot{u}_N^s = 0 & \text{pour tout } s \in B_N \end{cases}$$

(comparer avec la section V de [CM], ainsi qu'avec la section III de [M]).

Le lemme suivant permet d'estimer le second membre de cette E.D.P. discrète:

Lemme 3.2. *Pour tout $s \in I_N$, on a:*

$$\check{K}_N^s = \frac{\sqrt{3}}{24} \left| \frac{f''(s)}{f'(s)} \right|^4 \left[\left| \frac{f'(s)f'''(s)}{f''(s)^2} \right|^2 - \Re \left(\frac{f'(s)f'''(s)}{f''(s)^2} \right) \right] \frac{1}{N^4} + O\left(\frac{1}{N^6}\right)$$

quand $N \rightarrow \infty$, uniformément sur I_N .

Démonstration du lemme 3.2. L'essentiel du travail a déjà été fait dans la section VI de [CM] (voir le lemme 1 et la remarque qui le suit). On y démontre l'existence d'une constante $c = c_f(s)$ telle que

$$\check{K}_N^s = \frac{c}{N^4} + O\left(\frac{1}{N^6}\right),$$

et que cette constante est de la forme

$$c_f(s) = \lambda[\Re(f''(s)^2 \overline{f'''(s)}) - |f'''(s)|^2] + \mu \Im(f''(s)^2 \overline{f'''(s)}) + \nu[|f''(s)|^4 - |f'''(s)|^2]$$

lorsque f est normalisée pour que $f'(s) = 1$, les constantes λ, μ, ν ne dépendant ni de f , ni de s .

Pour les calculer, on commence par remarquer que \check{K}_N^s ne change pas lorsqu'on remplace f par \bar{f} , de sorte que $\mu = 0$. En calculant directement $c_f(0)$ pour $f(z) = \frac{1}{2}(1+z)^2$, on trouve $c_f(0) = \nu = 0$, et pour f telle que $f'(z) = \exp(\frac{1}{2}z^2)$, on trouve $c_f(0) = -\lambda = \sqrt{3}/24$. Il reste ensuite à remplacer f par $f/f'(s)$ dans l'expression de $c_f(s)$ pour obtenir l'expression voulue. \square

Ce lemme permet de réécrire le système vérifié par $\dot{u}_N(t)$, à l'aide de la fonction \check{f} introduite dans la section 2, sous la forme:

$$\begin{cases} \Delta_N \dot{u}_N(s) = \frac{3\sqrt{3}}{2N^4} \check{f}(s) + O\left(\frac{1}{N^6}\right), & \forall s \in I_N, \\ \dot{u}_N^s = 0, & \forall s \in B_N. \end{cases}$$

4. Principe du maximum pour les empilements non plats

L'objet de cette section est d'obtenir des estimations a priori sur les rayons $r_N^s(t)$ en vue de contrôler l'inverse du laplacien discret Δ_N . Ces estimations font l'objet du corollaire 4.3

dont le lecteur pressé peut tout de suite prendre connaissance avant de passer à la section suivante.

Un résultat couramment utilisé pour comparer les rayons des cercles de deux empilements de même combinatoire est le lemme de Schwarz–Pick discret (voir [BS], [CM] Section V, et [M] Section III). Malheureusement, ce type de résultat ne s’applique pas dans la situation présente, puisque nous étudions des empilements de cercles tracés sur des variétés euclidiennes non immergées isométriquement, car pourvues de singularités coniques. Que se passe-t-il lorsque la courbure en les sommets intérieurs varie? La réponse est fournie par la

Proposition 4.1. *Soit \mathcal{T} une triangulation finie d’un disque topologique, S (resp. B, I) l’ensemble des sommets de \mathcal{T} (resp. sommets du bord, sommets intérieurs), soit $r = (r_s)_{s \in S}$ et $r' = (r'_s)_{s \in S} \in (\mathbf{R}_+^*)^S$, et $\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_{r'}$ les variétés euclidiennes à singularités coniques définies à partir de \mathcal{T}, r et r' . On suppose que:*

- (i) $\forall s \in B, r_s = r'_s,$
- (ii) $\forall s \in I, K_s(r) \leq K_s(r').$

Alors on a $\forall s \in I, r_s \leq r'_s$, et si il y a égalité pour un sommet, il y a égalité pour tout sommet.

Preuve de la proposition 4.1. On réalise la variété $\mathcal{T}_{r'}$ comme le temps 1 d’une déformation $\{\mathcal{T}_t(t), t \in [0, 1]\}$ de la variété \mathcal{T}_r exactement comme dans la section précédente. En particulier, la courbure en tout sommet intérieur s de $\mathcal{T}_t(t)$ est définie par

$$K_s(t) = (1 - t)K_s(r) + tK_s(r').$$

Notons $u_s(t) = \log r_s(t)$. Pour tout t , il existe un laplacien discret Δ^t sur \mathcal{T} (au sens du Section 3) tel que

$$\begin{cases} \Delta^t \dot{u}(s) = K_s(r') - K_s(r), & \forall s \in I, \\ \dot{u}_s(t) = 0, & \forall s \in B. \end{cases}$$

Pour $s \in I$ et $s' \in S$ voisin de s , notons $p_{ss'}^t = -(\partial K_s^t / \partial u_{s'}) / (\partial K_s^t / \partial u_s)$. On rappelle que $p_{ss'}^t \in]0, 1[$ et que, si $s \in I$ est fixé, alors $\sum_{s' \sim s} p_{ss'}^t = 1$.

Par hypothèse, $\Delta^t \dot{u}(s) \geq 0$ pour tout $s \in I$, ce qui signifie $\dot{u}_s(t) \geq \sum_{s' \sim s} p_{ss'}^t \dot{u}_{s'}(t)$. On en déduit aussitôt que, si la fonction $s \rightarrow \dot{u}_s(t)$ définie sur S atteint son minimum en un sommet intérieur, alors elle est constante et égale à sa valeur sur le bord, à savoir 0. Si elle atteint son minimum en un sommet du bord, ce minimum est nul, de sorte que $\dot{u}_s(t) \geq 0$ pour tout t et tout sommet $s \in I$. On en déduit que $\log(r'_s/r_s) = u_s(1) - u_s(0) \geq 0$ pour tout $s \in I$, ce qui prouve la première partie de l’assertion.

La seconde partie résulte du fait que, si $r'_{s_0} = r_{s_0}$ pour un $s_0 \in I$, alors $\dot{u}_{s_0}(t) = 0$, donc $\dot{u}_s(t) = 0$ pour tout $s \in I$ comme on vient de le voir, donc $r'_s = r_s$. \square

Cet énoncé, également présent dans [D2], semble la généralisation la plus naturelle du lemme de Schwarz–Pick discret. Malheureusement, il ne suffit pas, à lui seul, pour obtenir un contrôle a priori des rayons $r_N^s(t)$ de la variété $\tilde{\mathcal{T}}_N(t)$. En effet, il ne s’applique que si \tilde{f} (cf. Section 2) garde un signe constant sur $\tilde{\mathcal{U}}$, puisqu’alors \check{K}_N^s ne change pas

de signe (pour N assez grand) sur S_N de sorte que $r_N^s(t)$ est une fonction monotone de t sur $[0, 1]$.

Cela étant, énonçons l'estimation que l'on a en vue:

Proposition 4.2. *Il existe deux constantes $k_0 \geq 0$ et $c_0 \geq 1$ vérifiant la propriété suivante:*

pour tout $N \geq N_0$, pour tout $r \in (\mathbf{R}_+^)^{S_N}$ définissant une métrique g_r sur \mathcal{T}_N telle que $\forall s \in I_N, |K_N^s(r)| \leq k_0/N^2$, on a:*

$$\max_{s \in S_N} r_s \leq c_0 \max_{s \in B_N} r_s \quad \text{et} \quad \min_{s \in S_N} r_s \geq \frac{1}{c_0} \min_{s \in B_N} r_s.$$

Corollaire 4.3. *Il existe trois constantes A, B et N_1 telles que, pour tout $N \geq N_1$, pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $s \in S_N$, on ait:*

$$0 < \frac{A}{N} \leq r_N^s(t) \leq \frac{B}{N}.$$

Démonstration du corollaire 4.3. D'après le lemme 3.2, il existe une constante M telle que, pour tout $s \in I_N$ et pour tout $N \geq N_0$, on ait $|K_N^s(t)| \leq M/N^4$, de sorte que, pour N assez grand ($\geq N_1$), on a $|K_N^s(t)| \leq k_0/N^2$, où k_0 est la constante fournie par la proposition 4.2. Notons $\tilde{A} = \min_{z \in \tilde{\mathcal{U}}} |f'(z)|$ et $\tilde{B} = \max_{z \in \tilde{\mathcal{U}}} |f'(z)|$. Compte tenu de la valeur de $r_N^s(t)$ lorsque $s \in B_N$ (cf. proposition 3.1), on a, avec la proposition 4.2,

$$\frac{1}{c_0} \cdot \frac{\tilde{A}}{2N} \leq r_N^s(t) \leq c_0 \cdot \frac{\tilde{B}}{2N},$$

et ce pour tous $N \geq N_1, t \in [0, 1]$ et $s \in I_N$, de sorte que l'on peut prendre $A = \tilde{A}/2c_0$ et $B = c_0\tilde{B}/2$. \square

Le reste de la section est consacré à la preuve de la proposition 4.2, que l'on obtient par voie probabiliste.

Preuve de la proposition 4.2. Le point de départ est une—modeste—généralisation de deux inégalités de convexité observées à cinq ans d'intervalle par Rodin d'une part (voir [R]), et Bárány et al. d'autre part (voir [BFP]):

Lemme 4.4. *Il existe une constante D possédant la propriété suivante: soit $k \in [0, \pi]$, soit r_0, \dots, r_6 sept réels > 0 , et soit, pour $1 \leq i \leq 5$, α_i (resp. α_6) l'angle en 0 dans le triangle euclidien de côtés $r_0 + r_i, r_i + r_{i+1}, r_{i+1} + r_0$ (resp. $r_0 + r_6, r_6 + r_1, r_1 + r_0$).*

Si $-k \leq 2\pi - \sum_{i=1}^6 \alpha_i \leq k$, alors

$$(a) \quad r_0 \leq \frac{1 + Dk}{6} \sum_{i=1}^6 r_i \quad \text{et} \quad (b) \quad \frac{1}{r_0} \leq \frac{1 + Dk}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{r_i}.$$

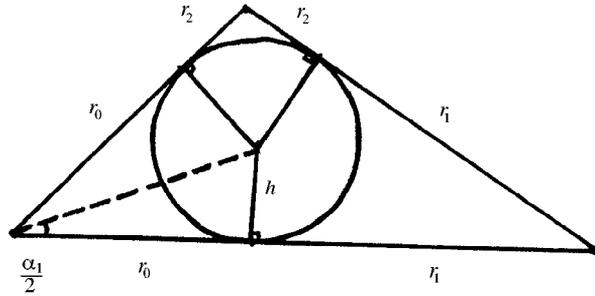


Fig. 2. Un triangle euclidien.

Démonstration du lemme 4.4. Prouvons (a). Lorsque $k = 0$, ça n'est rien d'autre que le lemme 2.1 de [R]. Relisons-en la preuve pour l'adapter à la situation présente. Soit h le rayon du cercle inscrit dans le triangle euclidien de côtés $r_0 + r_1$, $r_1 + r_2$, $r_2 + r_0$ (cf. fig. 2). Il est donné par la formule

$$h = \sqrt{\frac{r_0 r_1 r_2}{r_0 + r_1 + r_2}},$$

de sorte que $\tan(\alpha_1/2) = (h/r_0) = (1/r_0)\sqrt{r_0 r_1 r_2 / (r_0 + r_1 + r_2)}$.

Sachant que $\alpha_i \in]0, \pi[$, la convexité de la fonction tangente sur $]0, \pi/2[$ donne:

$$\tan\left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i}{2}\right) \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \tan \frac{\alpha_i}{2}.$$

Comme $2\pi - \sum_{i=1}^6 \alpha_i \leq k$, il vient:

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{k}{12}\right) \leq \frac{1}{6r_0} \left(\sqrt{\frac{r_0 r_1 r_2}{r_0 + r_1 + r_2}} + \dots + \sqrt{\frac{r_0 r_6 r_1}{r_0 + r_6 + r_1}} \right).$$

D'après l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométriques, on a $(r_0 r_1 r_2)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(r_0 + r_1 + r_2)$, donc $r_0 r_1 r_2 / (r_0 + r_1 + r_2) \leq \frac{1}{27}(r_0 + r_1 + r_2)^2$. Finalement, on obtient

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{k}{12}\right) \leq \frac{1}{18\sqrt{3}r_0} (6r_0 + 2(r_1 + \dots + r_6)),$$

ce qui donne

$$r_0 \leq \frac{c_1(k)}{6} \sum_{i=1}^6 r_i \quad \text{avec} \quad c_1(k) = \frac{2}{3\sqrt{3} \tan(\pi/6 - k/12) - 1} = 1 + O(k),$$

et l'inégalité (a) est prouvée.

Prouvons (b). Lorsque $k = 0$, ça n'est rien d'autre que le théorème 2 de [BFP]. Nous allons à nouveau en adapter la preuve à la situation présente. Ayant établi (cf. p. 573 de

[BFP]) que

$$\frac{h}{r_0} \left(\tan \frac{\alpha_1}{4} + \cotan \frac{\alpha_1}{4} - 2 \right) \leq \frac{h}{r_1} + \frac{h}{r_2},$$

il vient, en sommant,

$$\frac{1}{6r_0} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1}{\sin(\alpha_i/2)} - 1 \right) = \frac{1}{6r_0} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} \left(\tan \frac{\alpha_1}{4} + \cotan \frac{\alpha_1}{4} - 2 \right) \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{r_i}.$$

La convexité de $1/\sin$ sur $]0, \pi[$ fournit

$$\frac{1}{\sin(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (\alpha_i/2))} - 1 \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{1}{\sin(\alpha_i/2)} - 1 \right),$$

et comme $-k \leq 2\pi - \sum_{i=1}^6 \alpha_i$, on obtient en fin de compte

$$\frac{1}{r_0} \leq \frac{c_2(k)}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{r_i} \quad \text{avec} \quad c_2(k) = \left[\frac{1}{\sin(\pi/6 + k/12)} - 1 \right]^{-1} = 1 + O(k)$$

ce qui prouve l'inégalité (b). □

Le résultat suivant est un principe du maximum pour des fonctions “presque sous-harmoniques” discrètes. Joint au lemme 4.4, il permettra de prouver la proposition 4.2. Rappelons que $S_N = B_N \cup I_N$ désigne l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_N .

Lemme 4.5. *Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $c_0 \geq 1$ ayant la propriété suivante: pour toute fonction $\varphi: S_N \rightarrow \mathbf{R}$ telle que*

$$\forall s \in I_N, \quad \varphi(s) \leq \frac{1 + \alpha^2/N^2}{6} \sum_{s' \sim s} \varphi(s'),$$

on a

$$\max_{s \in S_N} \varphi(s) \leq c_0 \cdot \max_{s \in B_N} \varphi(s).$$

Admettons provisoirement ce lemme et déduisons-en la proposition 4.2. On pose $k_0 = \min(\alpha^2/D, \pi)$ où D est la constante fournie par le lemme 4.4. Soit $r \in (\mathbf{R}_+^*)^{S_N}$ tel que la métrique g_r sur \mathcal{T}_N vérifie $\forall s \in I_N, |K_N^s(r)| \leq k_0/N^2$. Le lemme 4.4 permet alors d'appliquer le lemme 4.5 aux fonctions $s \rightarrow r_s$ et $s \rightarrow 1/r_s$, ce qui permet de conclure.

Démonstration du lemme 4.5. Comme souvent en théorie discrète du potentiel, nous obtenons le résultat par voie probabiliste. Notons $S = (1/N)(\mathbf{Z} + e^{i\pi/3}\mathbf{Z})$ l'ensemble de tous les sommets de la triangulation équilatérale \mathcal{T} du plan euclidien par des triangles équilatéraux de côté $1/N$ et contenant 0 et $1/N$. Sur l'univers $\Omega = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \in S^{\mathbf{N}}\}$ on considère la tribu cylindrique Σ engendrée par les événements

$\{\omega_{i_1} = s_1, \dots, \omega_{i_p} = s_p\}$ où $p \in \mathbf{N}^*$, $i_1, \dots, i_p \in \mathbf{N}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, et $s_1, \dots, s_p \in S$. On note Z_n la variable aléatoire sur (Ω, Σ) à valeurs dans S et définie par $\forall \omega \in \Omega$, $Z_n(\omega) = \omega_n$.

Fixons un sommet $s \in S$. On définit la probabilité P_s sur (Ω, Σ) associée à la marche aléatoire partant de s de la façon suivante:

$$P_s(Z_0 = s) = 1, \quad \text{et} \quad P_s(Z_{n+1} = v \mid Z_n = u) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } v \sim u, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit τ_N le premier temps d'atteinte du bord B_N : c'est le temps d'arrêt défini par

$$\tau_N(\omega) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } Z_n(\omega) \in B_N\}.$$

On rappelle que τ_N est fini P_s -presque sûrement (voir par exemple le lemme 1 de la section VI de [M]). Notons \mathbf{E}_s l'espérance pour la probabilité P_s . Le lemme suivant jouera un rôle clé:

Lemme 4.6. *Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $c_0 \geq 1$ telles que*

$$\forall N \geq 1, \quad \forall s \in S_N, \quad \mathbf{E}_s \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{N^2} \right)^{\tau_N} \right] \leq c_0.$$

Démonstration du lemme 4.6. On commence par se ramener à un problème unidimensionnel. Notons Y_n l'ordonnée de Z_n et posons $y_n = (2/\sqrt{3})Y_n$: c'est une variable aléatoire sur (Ω, Σ) à valeurs dans $(1/N)\mathbf{Z}$. De plus, si $s = (\sqrt{3}/2)(\xi_s + i\eta_s)$, alors on a:

$$P_s(y_0 = \eta_s) = 1, \quad \text{et} \quad P_s \left(y_{n+1} = \frac{q}{N} \mid y_n = \frac{p}{N} \right) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } |q - p| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B} = \{|\Im z| \leq (\sqrt{3}/2)a\}$ une bande contenant le N_0 -voisinage de l'ouvert borné \mathcal{U} ($\cdot > \imath$). Ainsi, si $\sigma_N = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } |y_n| \geq a\}$, alors $\tau_N \leq \sigma_N$ P_s -presque sûrement.

Soit Ψ la fonction définie sur $] -\pi/2a, \pi/2a[$ par

$$\Psi(t) = \frac{\mathbf{E}_s(e^{it y_1})}{\mathbf{E}_s(e^{it y_0})} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \frac{t}{N}$$

et soit \mathcal{F}_n la tribu engendrée par y_0, y_1, \dots, y_n . On vérifie aisément que la suite $\{(\Psi(t))^{-n} e^{it y_n}, \mathcal{F}_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ est une martingale. Le théorème optionnel de Doob assure alors que $\{(\Psi(t))^{-n \wedge \sigma_N} e^{it y_{n \wedge \sigma_N}}, \mathcal{F}_{n \wedge \sigma_N}\}$, $n \in \mathbf{N}$ est également une martingale. En particulier, la suite des espérances est constante:

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{E}_s[\Psi(t)^{-n \wedge \sigma_N} e^{it y_{n \wedge \sigma_N}}] = e^{it \eta_s}.$$

En identifiant les parties réelles des deux membres, il vient

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{E}_s[\Psi(t)^{-n \wedge \sigma_N} \cos(t y_{n \wedge \sigma_N})] = \cos(t \eta_s).$$

Comme $|ty_{n \wedge \sigma_N}| < \pi/2$, chaque fonction intégrée est positive, donc, grâce au lemme de Fatou, on a :

$$\mathbf{E}_s[\Psi(t)^{-\sigma_N} \cos(ty_{\sigma_N})] \leq \cos(t\eta_s) \leq 1,$$

et comme $|y_{\sigma_N}| = a$, il vient finalement $\mathbf{E}_s[\Psi(t)^{-\sigma_N}] \leq 1/\cos(at)$. Compte tenu du fait que $\Psi(t)^{-1} = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(t/N))^{-1} \geq 1 + t^2/4N^2$ pour $t \in [-2\alpha, 2\alpha] \subset]-\pi/2a, \pi/2a[$ et que $\tau_N \leq \sigma_N$ P_s -presque sûrement, on en déduit l'inégalité voulue avec $c_0 = 1/\cos 2a\alpha$. \square

Fin de la preuve du lemme 4.5. Nous allons montrer que les constantes α et c_0 fournies par le lemme 4.6 conviennent. Soit donc $\varphi: S_N \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\forall s \in I_N, \quad \varphi(s) \leq \frac{1 + \alpha^2/N^2}{6} \sum_{s' \sim s} \varphi(s').$$

On a $\varphi(s) \leq (1 + \alpha^2/N^2)\mathbf{E}_s\varphi(Z_1)$, puis (réurrence) $\varphi(s) \leq (1 + \alpha^2/N^2)^n \mathbf{E}_s\varphi(Z_n)$. Plus généralement, on a l'inégalité suivante (comparer avec le lemme 2 de la section VI de [M]):

$$\varphi(s) \leq \mathbf{E}_s \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{N^2} \right)^{\tau_N} \varphi(Z_{\tau_N}) \right]. \quad (*)$$

Prouvons cette inégalité. On commence par observer que la suite $\{((1 + \alpha^2/N^2)^{n \wedge \tau_N} \varphi(Z_{n \wedge \tau_N}), \mathcal{F}_n), n \in \mathbf{N}\}$ est une surmartingale, de sorte que la suite des espérances est croissante. On en déduit:

$$\forall n \geq 0, \quad \varphi(s) \leq \mathbf{E}_s \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{N^2} \right)^{n \wedge \tau_N} \varphi(Z_{n \wedge \tau_N}) \right]. \quad (**)$$

Soit $M = \max_{s \in S_N} |\varphi(s)|$. On a, pour tout $n \geq 0$,

$$\left| \left(1 + \frac{\alpha^2}{N^2} \right)^{n \wedge \tau_N} \varphi(Z_{n \wedge \tau_N}) \right| \leq M \left(1 + \frac{\alpha^2}{N^2} \right)^{\tau_N},$$

et le second membre est une variable aléatoire P_s -intégrable d'après le lemme 4.6. Le théorème de convergence dominée permet alors d'obtenir l'inégalité (*) en faisant $n \rightarrow \infty$ dans l'inégalité (**).

Comme $Z_{\tau_N} \in B_N$, on a alors

$$\forall s \in S_N, \quad \varphi(s) \leq \mathbf{E}_s \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{N^2} \right)^{\tau_N} \right] \max_{B_N} \varphi,$$

ce qui, combiné au lemme 4.6, donne:

$$\max_{S_N} \varphi \leq c_0 \cdot \max_{B_N} \varphi,$$

terminant ainsi la preuve du lemme 4.5. \square

5. Fin de la preuve du théorème principal

Rappelons, avec les notations de la section 3, que le vecteur $\dot{u}_N = (\dot{u}_N^s)_{s \in S_N} \in \mathbf{R}^{S_N}$ est solution du système suivant:

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \Delta_N \dot{u}_N(s) = \frac{3\sqrt{3}}{2N^4} \check{f}(s) + O\left(\frac{1}{N^6}\right) & \text{pour } s \in I_N, \\ \dot{u}_N^s = 0 & \text{pour } s \in B_N. \end{cases}$$

La première étape dans l'étude de la solution de ce système consiste en des

5.1. Estimations sur l'opérateur Δ_N

L'opérateur Δ_N est un laplacien discret sur I_N , c'est-à-dire un endomorphisme symétrique défini positif de \mathbf{R}^{I_N} . Munissons \mathbf{R}^{I_N} de la norme L^2 donnée par $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{s \in I_N} u(s)^2}$, et $\text{End}(\mathbf{R}^{I_N})$ de la norme d'opérateur associée. Si $0 < \lambda_1^{(N)} \leq \lambda_2^{(N)} \leq \dots \leq \lambda_p^{(N)}$ sont les valeurs propres de Δ_N , alors $\|\Delta_N\|_2 = \lambda_p^{(N)}$ et $\|\Delta_N^{-1}\|_2 = 1/\lambda_1^{(N)}$.

Lemme 5.1.1. *Il existe une constante C ne dépendant que de f telle que, pour tout $N \geq N_1$, on ait*

$$\|\Delta_N^{-1}\|_2 \leq C \cdot N^2.$$

Démonstration du lemme 5.1.1. On cherche une estimation du type $\lambda_1^{(N)} \geq 1/CN^2$, ce qui est exactement le lemme 2 de la section VI de [CM]. Vérifions qu'on peut l'appliquer ici. La seule chose à voir est l'existence d'une constante c_1 telle que, si $s \in I_N$ et si $s' \sim s$, alors $-\partial K_N^s / \partial u_N^{s'} \geq c_1 > 0$. Mais ceci provient de l'existence d'une constante c_2 telle que

$$\forall N \geq N_1, \quad \forall s, s' \in S_N, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{c_2} \leq \frac{r_N^s(t)}{r_N^{s'}(t)} \leq c_2,$$

existence que l'on déduit immédiatement du corollaire 4.3. Le reste de la preuve est identique à celle du lemme 2 de la section VI de [CM]. \square

Ce lemme permet d'améliorer l'estimation des rayons $r_N^s(t)$, et donc des coefficients de Δ_N :

Corollaire 5.1.2. *On a, pour tout $s \in S_N$ et tout $t \in [0, 1]$, les estimations uniformes suivantes:*

- (i) $r_N^s(t) = |f'(s)|/2N + O(1/N^2)$;
- (ii) si $s \in I_N$ et si $s \sim s'$, alors $\partial K_N^s / \partial u_N^{s'} = -\sqrt{3}/3 + O(1/N)$.

Démonstration du corollaire 5.1.2. Prouvons (i). D'après le système (Σ) vérifié par \dot{u}_N , on a, pour tout $s \in I_N$, $\Delta_N \dot{u}_N(s) = O(1/N^4)$, et comme $\text{Card } I_N = O(N^2)$,

il vient:

$$\|\Delta_N \dot{u}_N\|_2 = \sqrt{\sum_{s \in I_N} (\Delta_N \dot{u}_N)(s)^2} = \sqrt{O\left(N^2 \times \frac{1}{N^8}\right)} = O\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

donc, avec le lemme 5.1.1, $\|\dot{u}_N(t)\|_2 \leq \|\Delta_N^{-1}\|_2 \cdot \|\Delta_N \dot{u}_N\|_2 = O(N^2 \times 1/N^3) = O(1/N)$. Il existe donc une constante M telle que

$$\forall N \geq N_1, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sqrt{\sum_{s \in I_N} \dot{u}_N^s(t)^2} \leq \frac{M}{N}.$$

On en déduit que, pour tout $s \in I_N$, $|\dot{u}_N^s(t)| \leq M/N$, de sorte qu'en intégrant entre 0 et t ,

$$|u_N^s(t) - u_N^s(0)| = \left| \log \frac{2Nr_N^s(t)}{|f'(s)|} \right| \leq \frac{M}{N},$$

d'où l'estimation annoncée.

Prouvons (ii). Si $s \sim s'$, alors on a, en notant s_1 et s_2 les sommets de \mathcal{T}_N voisins chacun de s et s' ,

$$\frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^{s'}} = -\frac{1}{r_N^s + r_N^{s'}} \left(\sqrt{\frac{r_N^s r_N^{s'} r_N^{s_1}}{r_N^s + r_N^{s'} + r_N^{s_1}}} + \sqrt{\frac{r_N^s r_N^{s'} r_N^{s_2}}{r_N^s + r_N^{s'} + r_N^{s_2}}} \right).$$

Comme $|s - s'| = 1/N$, on a, avec le point (i),

$$\frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^{s'}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad \square$$

5.2. Emploi de la méthode des volumes finis

Lorsqu'on écrit le système (Σ) sous la forme

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \Delta_N(N^2 \dot{u}_N)(s) = \frac{3\sqrt{3}}{2N^2} \check{f}(s) + O\left(\frac{1}{N^4}\right) & \text{pour } s \in I_N, \\ N^2 \dot{u}_N^s = 0 & \text{pour } s \in B_N, \end{cases}$$

il s'apparente à une discrétisation du problème de Dirichlet

$$(\Pi) \quad \begin{cases} \Delta g = \check{f} & \text{sur } \mathcal{U}, \\ g = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{U}. \end{cases}$$

L'objet de ce paragraphe est d'achever la preuve du théorème principal en estimant la convergence de $N^2 \dot{u}_N$ vers g . Voici l'estimation que l'on a en vue:

Proposition 5.2.1. *On a, pour tout $s \in S_N$ et tout $t \in [0, 1]$, l'estimation uniforme suivante:*

$$N^2 \dot{u}_N^s(t) = g(s) + O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

On en déduit aussitôt, en intégrant entre 0 et 1, que

$$u_N^s(1) - u_N^s(0) = \log \frac{2Nr_N^s}{|f'(s)|} = \frac{g(s)}{N^2} + O\left(\frac{\log N}{N^3}\right),$$

d'où:

$$r_N^s = \frac{|f'(s)|}{2N} \left(1 + \frac{g(s)}{N^2}\right) + O\left(\frac{\log N}{N^4}\right) \quad \text{quand } N \rightarrow \infty,$$

uniformément sur S_N , ce qui est bien le développement asymptotique énoncé dans le théorème 2.1. Nous terminons ce paragraphe par la

Démonstration de la proposition 5.2.1. Celle-ci repose sur l'utilisation de la méthode dite des volumes finis. Nous allons montrer comment elle permet de rendre compte efficacement de la discrétisation (Σ) du problème (Π).

Considérons la cellulation duale de la triangulation \mathcal{T}_N . C'est une collection $\Xi_N = \{\sigma_s, s \in S_N\}$ d'hexagones réguliers de côté $h = \sqrt{3}/3N$ et ayant chacun deux arêtes parallèles à l'axe imaginaire pur (cf. fig. 3). On note $\Xi_N^I = \{\sigma_s, s \in I_N\}$.

Le point de départ de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation $\Delta g = \check{f}$ sur chaque hexagone de la cellulation Ξ_N^I de manière à obtenir

$$\forall s \in I_N, \quad - \int_{\partial\sigma_s} \nabla g \cdot n = \int_{\sigma_s} \check{f},$$

où ∇g désigne le gradient de g et n la normale extérieure au bord $\partial\sigma_s$ de σ_s .

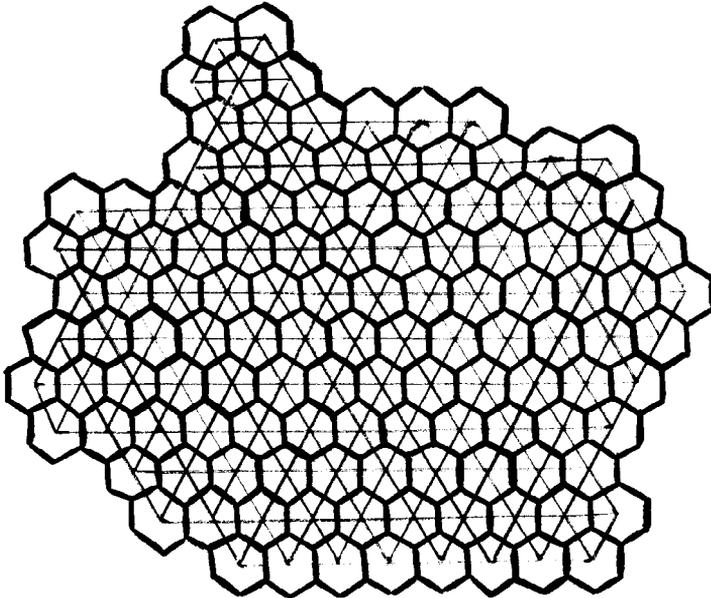


Fig. 3. La triangulation \mathcal{T}_N avec, en gras, la cellulation Ξ_N .

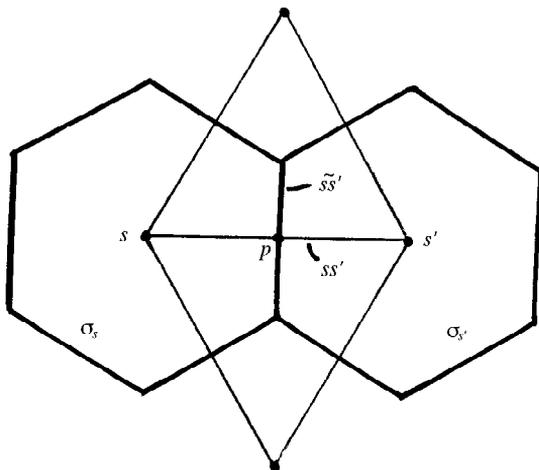


Fig. 4. Deux cellules adjacentes σ_s et $\sigma_{s'}$ et les arêtes ss' et \tilde{ss}' .

Notons \tilde{ss}' l'arête commune aux deux cellules σ_s et $\sigma_{s'}$ (cf. fig. 4), et introduisons les deux flux

$$\overline{F}_{s \rightarrow s'} = - \int_{\tilde{ss}'} \nabla g \cdot \tilde{n} \quad (\text{la normale } \tilde{n} \text{ est orientée de } s \text{ vers } s'),$$

$$\text{et } F_{s \rightarrow s'}^* = c_{ss'}(g(s') - g(s)) \quad \text{où } c_{ss'} = \frac{\partial K_N^s}{\partial u_N^{s'}}.$$

La quantité $F_{s \rightarrow s'}^*$ se révèle être une approximation du flux exact $\overline{F}_{s \rightarrow s'}$, comme en témoigne le

Lemme 5.2.2. *Pour $s \in I_N$ et $s' \in S_N$ voisin de s , on a l'estimation uniforme suivante:*

$$R_{s \rightarrow s'} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{F}_{s \rightarrow s'} - F_{s \rightarrow s'}^* = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Démonstration du lemme 5.2.2. Tout d'abord, on a, d'après le corollaire 5.1.2, $c_{ss'} = \partial K_N^s / \partial u_N^{s'} = -1/\sqrt{3} + O(1/N)$. Puisque $|s - s'| = 1/N$, et que g est de classe C^1 (en fait C^2) sur \overline{U} , on a

$$F_{s \rightarrow s'}^* = -\frac{1}{\sqrt{3}}(g(s') - g(s)) + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Notons p le point d'intersection de l'arête ss' et de l'arête \tilde{ss}' (cf. fig. 4). Un développement de Taylor à l'ordre 2 fournit d'une part

$$g(s') - g(s) = \nabla g(p) \cdot n \times \text{long}(ss') + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

et d'autre part

$$\int_{\tilde{s}s'} \nabla g \cdot n = \nabla g(p) \cdot n \times \text{long}(\tilde{s}s') + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Comme $\text{long}(ss') = \sqrt{3} \text{long}(\tilde{s}s')$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(g(s') - g(s)) - \int_{\tilde{s}s'} \nabla g \cdot n = O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

d'où le résultat. □

Réécrivons donc le problème (Π) sous la forme

$$(\tilde{\Pi}) \quad \begin{cases} -\int_{\partial\sigma_s} \nabla g \cdot n = \int_{\sigma_s} \check{f} & \text{pour } s \in I_N, \\ g = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{U}, \end{cases}$$

et discrétisons-le de cette manière, c'est-à-dire notons v_N la solution de:

$$(\tilde{\Sigma}) \quad \begin{cases} \Delta_N v_N(s) = \sum_{s' \sim s} c_{ss'}(v_N^{s'} - v_N^s) = \int_{\sigma_s} \check{f} & \text{pour } s \in I_N, \\ v_N^s = 0 & \text{pour } s \in B_N. \end{cases}$$

Il reste alors à estimer l'écart entre v_N et g d'une part, et l'écart entre v_N et $N^2 \dot{u}_N$ d'autre part.

Lemme 5.2.3. *On a, pour $s \in S_N$, l'estimation uniforme suivante:*

$$v_N^s - N^2 \dot{u}_N^s = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Démonstration du lemme 5.2.3. Nous allons évaluer l'image du vecteur $v_N - N^2 \dot{u}_N$ par l'opérateur Δ_N . Pour $s \in I_N$, on a:

$$\Delta_N(v_N - N^2 \dot{u}_N)(s) = \int_{\sigma_s} \check{f} - \frac{3\sqrt{3}}{2N^2} \check{f}(s) + O\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

Comme s est le centre de gravité de l'hexagone σ_s , on a, avec un développement de Taylor à l'ordre 2,

$$\int_{\sigma_s} \check{f} = \text{Aire}(\sigma_s) \left[\check{f}(s) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2N^2} \check{f}(s) + O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

d'où $\Delta_N(v_N - N^2 \dot{u}_N)(s) = O(1/N^4)$. Exactement comme dans la preuve du corollaire 5.1.2, en utilisant l'estimation $\|\Delta_N^{-1}\|_2 = O(N^2)$ du lemme 5.1.1, on en déduit que $v_N^s - N^2 \dot{u}_N^s = O(1/N)$ pour tout $s \in S_N$. □

Les estimations d'erreurs de la méthode des volumes finis vont permettre de mesurer l'écart entre v_N et g . Notons e la fonction "erreur" définie sur S_N par $e(s) = v_N^s - g(s)$. La non-nullité éventuelle de e sur B_N se révélera gênante pour obtenir une estimation de Sobolev H_0^1 discrète, ce qui est le point de départ des calculs d'erreurs dans la méthode des volumes finis.

Pour contourner cet écueil, on introduit la fonction e^* définie par

$$\begin{cases} \Delta_N e^*(s) = 0 & \text{pour } s \in I_N, \\ e^*(s) = e(s) & \text{pour } s \in B_N, \end{cases}$$

et enfin la fonction $\tilde{e} = e - e^*$. Cette perturbation de e est inoffensive. En effet, comme chaque sommet de B_N est à distance $\leq 1/N$ de $\partial\mathcal{U}$, et que g est nulle sur $\partial\mathcal{U}$, il existe une constante M telle que, pour tout $s \in B_N$, on ait $|e(s)| = |e^*(s)| \leq M/N$. D'après le principe du maximum pour les fonctions harmoniques discrètes, on a

$$|e^*(s)| = |\tilde{e}(s) - e(s)| \leq \frac{M}{N} \quad \text{pour tout } s \in S_N.$$

Lemme 5.2.4 (Estimation de Sobolev discrète). *Il existe une constante C ne dépendant que de f telle que, pour tout $N \geq N_1$,*

$$\sum_{s, s' \in S_N, s \sim s'} (\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s'))^2 \leq \frac{C}{N^2}.$$

Démonstration du lemme 5.2.4. Il s'agit d'évaluer l'énergie de \tilde{e} , c'est-à-dire la quantité $\langle \Delta_N \tilde{e} \mid \tilde{e} \rangle$.

Tout d'abord, puisque \tilde{e} est nulle sur B_N , on a

$$\langle \Delta_N \tilde{e} \mid \tilde{e} \rangle = \sum_{s \in I_N} \Delta_N \tilde{e}(s) \cdot \tilde{e}(s) = -\frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} c_{ss'} (\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s'))^2,$$

donc $\langle \Delta_N \tilde{e} \mid \tilde{e} \rangle \geq (c_1/2) \sum_{s \sim s'} (\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s'))^2$, où c_1 est la constante fournie par la preuve du lemme 5.1.1.

Par ailleurs, on a:

$$\Delta_N \tilde{e}(s) = \Delta_N e(s) = \Delta_N v_N(s) - \Delta_N g(s) = \int_{\sigma_s} \check{f} - \Delta_N g(s) = \sum_{s' \sim s} R_{s \rightarrow s'}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \Delta_N \tilde{e} \mid \tilde{e} \rangle &= \sum_{s \in I_N} \sum_{s' \sim s} R_{s \rightarrow s'} \cdot \tilde{e}(s) = \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} (\tilde{e}(s) R_{s \rightarrow s'} + \tilde{e}(s') R_{s' \rightarrow s}) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} |R_{s \rightarrow s'}| \cdot |\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s')| \end{aligned}$$

car $R_{s \rightarrow s'} = -R_{s' \rightarrow s}$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\langle \Delta_N \tilde{e} \mid \tilde{e} \rangle \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{s \sim s'} R_{s \rightarrow s'}^2} \cdot \sqrt{\sum_{s \sim s'} (\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s'))^2}.$$

En conclusion, il vient:

$$\frac{c_1}{2} \sum_{s \sim s'} (\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s'))^2 \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{s \sim s'} R_{s \rightarrow s'}^2} \cdot \sqrt{\sum_{s \sim s'} (\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s'))^2},$$

donc

$$\sum_{s \sim s'} (\tilde{e}(s) - \tilde{e}(s'))^2 \leq \frac{1}{c_1^2} \sum_{s \sim s'} R_{s \rightarrow s'}^2.$$

Le membre de droite de cette inégalité est une somme de $O(N^2)$ termes, chacun d'eux étant un $O(1/N^4)$ d'après le lemme 5.2.2, ce qui donne la majoration souhaitée. \square

Cette estimation de Sobolev discrète permet d'accéder à une estimation L^q discrète suivant un procédé standard en méthode des volumes finis (voir le lemme 3.4 et le corollaire 3.1 de [EGH] ainsi que le corollaire 1 de [CGH]):

Corollaire 5.2.5 (Estimation L^q discrète, $q \geq 1$). *Il existe une constante C' ne dépendant que de f telle que, pour tout $N \geq N_1$ et tout $q \in [1, +\infty[$, on ait*

$$\left(\sum_{s \in S_N} \text{Aire}(\sigma_s) |\tilde{e}(s)|^q \right)^{1/q} \leq \frac{C' \cdot q}{N}.$$

Puisque $\text{Aire}(\sigma_s) = 3\sqrt{3}/2N^2$ (et que $3\sqrt{3}/2 > 1$), on en déduit que

$$\max_{s \in S_N} |\tilde{e}(s)| \leq \left(\sum_{s \in S_N} |\tilde{e}(s)|^q \right)^{1/q} \leq C' \cdot q \cdot N^{2/q-1}.$$

Si N est fixé, le minimum de la fonction $q \rightarrow qN^{2/q-1}$ sur $[1, +\infty[$ est atteint pour $q = 2 \log N$, et vaut $2e \cdot (\log N)/N$, de sorte que

$$\max_{s \in S_N} |\tilde{e}(s)| = O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

Finalement, on a:

$$\begin{aligned} N^2 \dot{u}_N^s(t) - g(s) &= (N^2 \dot{u}_N^s(t) - v_N^s) + e^*(s) + \tilde{e}(s) \\ &= O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) + O\left(\frac{\log N}{N}\right) = O\left(\frac{\log N}{N}\right), \end{aligned}$$

uniformément en $s \in S_N$ et $t \in [0, 1]$, ce qui achève la preuve de la proposition 5.2.1. \square

Remerciements

Je remercie Richard Kenyon, Didier Piau et Marie-Hélène Vignal pour les fructueuses conversations dont ce travail a bénéficié, Philip Bowers et Ken Stephenson pour m'avoir invité à l'exposer à Cambridge, ainsi que Sylvain Gallot pour la relecture attentive qu'il en a faite.

References

- [BFP] Bárány, I., Füredi, Z., et Pach, J., Discrete convex functions and proof of the six circle conjecture of Fejes Tóth, *Canad. J. Math.* **36** (1984), 569–576.
- [BS] Beardon, A.-F., et Stephenson, K., The Schwarz–Pick lemma for circle packings, *Illinois J. Math.* **39**(4) (1991), 1383–1425.
- [CR] Carter, I., et Rodin, B., An inverse problem for circle packings and conformal mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **334**(2) (1992), 861–875.
- [C] Colin de Verdière, Y., Un principe variationnel pour les empilements de cercles, *Invent. Math.* **104** (1991), 655–669.
- [CM] Colin de Verdière, Y., et Mathéus, F., Empilements de cercles et approximations conformes, *Actes de la Table Ronde de Géométrie Riemannienne en l'honneur de Marcel Berger*, Arthur L. Besse (éd.), Collection SMF Séminaires et Congrès (no. 1) (1996), pp. 253–272.
- [CGH] Coudière, Y., Gallouët, T., et Herbin, R., Discrete Sobolev and L^p Error Estimates for Approximate Finite Volume Solutions of Convection Diffusion Equations, preprint LATP (Marseille) no. 98-13 (1998).
- [D1] Dubejko, T. Approximations of analytic functions with prescribed boundary conditions by circle packing maps, *Discrete Comput. Geom.* **17** (1997), 67–77.
- [D2] Dubejko, T. Recurrent random walks, Liouville’s theorem and circle packings, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **121** (1997), 531–546.
- [DS] Dubejko, T., et Stephenson, K., Circle packing: experiments in discrete analytic function theory, *Experimental Math.* **4**(4) (1995), 307–347.
- [EGH] Eymard, R., Gallouët, T., et Herbin, R., The Finite Volume Method, en préparation pour *The Handbook of Numerical Analysis*, Ph. Ciarlet et J.L. Lions (eds.).
- [GT] Gilbarg, D., et Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd edn., Springer-Verlag, New York, 1983.
- [HR] He, Z.X., et Rodin, B., Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mapping, *Comm. Anal. Geom.* **1**(1) (1993), 31–41.
- [HS] He, Z.X., et Schramm, O., On the convergence of circle packings to the Riemann map, *Invent. Math.* **125** (1996), 285–305.
- [M] Mathéus, F., Empilements de cercles et représentations conformes: une nouvelle preuve du théorème de Rodin–Sullivan, *Enseign. Math.* **42**(1–2) (1996), 125–152.
- [R] Rodin, B., Schwarz’s lemma for circle packings, *Invent. Math.* **89** (1987), 271–289.
- [RS] Rodin, B., et Sullivan, D., The convergence of circle packings to the Riemann mapping, *J. Differential Geom.* **26** (1987), 349–360.
- [S1] Stephenson, K., Circle packings in the approximation of conformal mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **23**(2) (1990), 407–415 (Research Announcements).
- [S2] Stephenson, K., A probabilistic proof of Thurston’s conjecture on circle packings, Preprint, University of Tennessee, Knoxville, 1993.
- [Th] Thurston, W., The finite Riemann mapping theorem. Invited talk, an International Symposium at Purdue University on the occasion of the proof of the Bieberbach Conjecture, March 1985.
- [Tr] Troyanov, M., Les surfaces euclidiennes à singularités coniques, *Enseign. Math.* **32** (1986), 79–94.

Received August 4, 1997, and in revised form September 30, 1998.