UN CAS DE REPRESENTATION CHAOTIQUE DISCRETE

par P.A. Meyer

Université Louis-Pasteur, F-67084 Strasbourg Cedex

Considérons une chaîne de Markov X_t à temps discret $t \in \{1, \ldots, \nu\}$, à valeurs dans un ensemble fini $E = \{1, \ldots, n\}$ — la v.a. initiale X_0 est supposée déterministe, et l'instant 0 n'est donc pas compté. *Nous supposerons que tous les coefficients* p_{ij} *de la matrice de transition sont* > 0, condition naturelle au moins pour les squelettes discrets des chaînes à temps continu. Nous allons construire pour commencer une famille de martingales orthogonales, nulles à l'instant 0, du type suivant

$$U^m(t) = \sum_{1 \leq k \leq t} u_k^m \quad \text{avec} \quad u_k^m = g^m(X_{k-1}, X_k)$$

pour $m = 1, \ldots, n-1$, les accroissements u_k^m possédant les propriétés

$$\mathbb{E}[u_k^m | \mathcal{F}_{k-1}] = 0 ,$$

$$\mathbb{E}[(u_k^m)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = 1 , \ \mathbb{E}[u_k^m u_k^p | \mathcal{F}_{k-1}] = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq p .$$

La construction est très simple. Fixons i et munissons $\mathbb{R}^n$ de la forme quadratique $\sum_k p_{il} x_l^2$. Construisons une base orthonormale de n vecteurs $g_i^1, \ldots, g_i^n$ (composantes notées g_{ik}^m), dont le dernier vecteur a toutes ses composantes égales à 1. Il suffit alors de poser sur $E \times E$ $g^m(i,j) = g_{ij}^m$ pour $m = 1, \ldots, n-1$.

On peut alors définir des v.a. développables en chaos de Wiener discrets par rapport à ces martingales, qui s'écrivent

$$f = \sum_p \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq \nu} f(k_1, m_1, \ldots, k_p, m_p) \, u_{k_1}^{m_1} \ldots u_{k_p}^{m_p} .$$

Montrons que ces v.a. remplissent tout $L^2(\Omega)$. Comme nous sommes en dimension finie, il suffit de compter les dimensions : celle du p-ième chaos est $\binom{\nu}{p}(n-1)^p$, d'où une dimension totale $((n-1)+1)^\nu$ égale à la dimension de $L^2(\Omega)$. On a donc bien "représentation chaotique" en temps discret.

Cela signifie que toute chaîne de Markov finie, satisfaisant à la condition simplificatrice du début, peut être réalisée comme une "diffusion quantique" au sens d'Evans–Hudson, sur un "bébé Fock" de dimension appropriée. En temps continu, il est facile d'écrire de bons candidats pour la décomposition chaotique, mais je ne sais pas établir celle-ci. A l'année prochaine !