Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
69, 187–242 (1985)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence

Y. Guivarc'h et A. Raugi

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cédex, France

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe. Soient μ une mesure de probabilité sur les boréliens de G et $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi μ sur G. Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique du produit $X_n = Y_1 \ldots Y_n$.

Ce problème a été abordé par divers auteurs, citons Furstenberg, Kesten [7, 9], Tutubalin [25], Virtser [26], Raugi [23]. Dans ces articles, on suppose que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de G (ou que plus généralement μ est étalée [1]), ou encore [9] que les Y_i sont positives.

Notre étude, faite sans hypothèse d'étalement ni positivité, précise les travaux précédemment cités. Pour illustrer les résultats obtenus, considérons, par exemple, le cas du groupe $G = Sl(d, \mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre d de déterminant 1.

Désignons par N (resp. $\tilde{N}$) le groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) ayant des «1» pour éléments diagonaux; par K le groupe $SO(d)$ des matrices orthogonales (i.e. ${}^tM = M^{-1}$) de déterminant 1. Alors nous savons que tout élément g de C s'écrit de façon unique:

$$g = u(g) \operatorname{Exp} b(g)\, k(g) \qquad \text{avec } b(g) = \operatorname{diag}(b_1(g), \ldots, b_d(g))$$

(décomposition d'Iwasawa)

$$u(g) \in N, \quad k(g) \in SO(d), \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\} \quad b_i(g) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} b_i(g) = 0.$$

D'autre part, tout élément g de G s'écrit $g = k_1 \operatorname{Exp} c(g)\, k_2$ avec $c(g) = \operatorname{diag}(c_1(g), \ldots, c_d(g))$ *(décomposition polaire)* avec $k_1, k_2 \in SO(d)$, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}\, c_i(g) \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{d} c_i(g) = 0$ et $c_1(g) \leqq \ldots \leqq c_d(g)$.

Les réels $c_i(g)$, $1 \leqq i \leqq d$, sont déterminés de façon unique par g tandis que le couple (k_1, k_2) n'est pas unique.

Lorsque $c_1(g)<\ldots<c_d(g)$, alors les autres décompositions polaires de g s'obtiennent en remplaçant le couple (k_1, k_2) par un couple $(k_1 m, m^{-1} k_2)$ avec

$$m\in M=\{\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)\in Sl(d, \mathbb{R}) \colon \varepsilon_i=\pm 1\}.$$

Soit $f_1, \ldots, f_d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $i\in\{1, \ldots, d-1\}$, nous appelons H_i le sous-groupe fermé de G qui laisse invariant en direction le $(d-i)$-vecteur $f_{i+1}\wedge\ldots\wedge f_d$. Nous avons $H_i=\{((a_{lk}))\in Sl(d, \mathbb{R})\colon a_{lk}=0,\ l\in\{1, \ldots, i\},\ k\in\{i+1, \ldots, d\}\}$; et l'espace homogène G/H_i s'identifie à l'espace des sous-espaces de dimensions $(d-i)$ de $\mathbb{R}^d$.

Si Θ est un sous-ensemble de $\Sigma=\{1, \ldots, d-1\}$, nous posons $\tilde{P}_\Theta=G$ si $\Theta=\Sigma$ et $\tilde{P}_\Theta=\bigcap_{i\in\Sigma-\Theta} H_i$ si $\Theta\neq\Sigma$; en particulier $H_i=\tilde{P}_{\Sigma-\{i\}}$. Les espaces homogènes $G/\tilde{P}_\Theta$, $\Theta\subset\Sigma$, sont des espaces de drapeaux. Par exemple, lorsque $\Sigma-\Theta=\{i_1, \ldots, i_l\}$ avec $i_1<\ldots<i_l$, l'espace homogène $G/\tilde{P}_\Theta$ s'identifie à l'espace des l-uples de sous-espaces de $\mathbb{R}^d$ $(E_{i_l}, \ldots, E_{i_1})$ tels que $\dim E_{i_j}=d-i_j$ et $E_{i_{j+1}}\subset E_{i_j}$, $j\in\{1, \ldots, l\}$.

Après ces préliminaires algébriques, donnons nous une mesure de probabilité μ sur les boréliens de G. Nous appelons G_μ [resp. T_μ] le sous-groupe [resp. le semi-groupe] fermé de G engendré par le support de μ. Nous faisons sur μ l'hypothèse (H) suivante:

(H) *G_μ et ses sous-groupes d'indice fini, agissent de façon irréductible sur $\mathbb{R}^d$ et ses puissances extérieures. Autrement dit G_μ ne laisse pas invariant une réunion finie de sous-espaces propres de $\bigwedge^k \mathbb{R}^d$ pour tout $k\in\{1, \ldots, d\}$.*

Les résultats s'énoncent alors en deux parties:

A. Comportement de X_n en coordonnées d'Iwasawa et polaires

Posons:

$$\Theta=\Theta_\mu=\{i\in\{1, \ldots, d-1\}\colon \sup_{g\in T_\mu}|c_{i+1}(g)-c_i(g)|<+\infty\}.$$

Il est clair que $\Theta=\Sigma$ si et seulement si $T_\mu=G_\mu$ est compact.

Nous montrons qu'il existe sur l'espace homogène $X_\mu=G/\tilde{P}_\Theta$ une unique mesure de probabilité μ-invariante (i.e. telle que $\mu*\nu=\nu$); et la suite de mesures $\{\varepsilon_{X_n}*\nu\}_{n\geq 1}$ converge vaguement, p.s., vers une mesure de Dirac ε_Z.

Par transposition, il s'ensuit qu'il existe sur $\tilde{X}_\mu=P_\Theta\backslash G$ (avec $P_\Theta={}^t\tilde{P}_\Theta$) une unique mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{\nu}$ (i.e. telle que $\tilde{\nu}*\mu=\tilde{\nu}$) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\nu}\cdot Y_n\ldots Y_1=\varepsilon_{\tilde{Z}}.$$

De ces convergences on déduit, pour le produit X_n, le comportement suivant:

i) Les images dans X_μ des composantes $k_1(X_n)$ et $u(X_n)$ convergent p.s. vers Z. Autrement dit pour tout $i\in\Sigma-\Theta$, les suites de v.a. $\{k_1(X_n)(f_{i+1}\wedge\ldots\wedge f_d)\}$ et $u(X_n)(f_{i+1}\wedge\ldots\wedge f_d)\}$, à valeurs dans l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension $(d-i)$ de $\mathbb{R}^d$, convergent p.s.

ii) $\sup_{1 \leqq i \leqq d} \sup_n |b_i(X_n) - c_i(X_n)| < +\infty$; et pour tout $i \in \Sigma - \Theta$, les suites $\{(b_i - b_{i+1})(X_n)\}$ et $\{(c_i - c_{i+1})(X_n)\}$ convergent p.s. vers $(-\infty)$.

iii) Les images dans $\tilde{X}_\mu$ des composantes $k_2(Y_n \dots Y_1)$ et $k(Y_n \dots Y_1)$ convergent p.s. vers $\tilde{Z}$; et par suite les images dans $\tilde{X}_\mu$ des composantes $k_2(X_n)$ et $k(X_n)$ convergent en loi vers $\tilde{\nu}$. Autrement dit, les suites de v.a., $(i \in \Sigma - \Theta)$, $\{(e_1 \wedge \dots \wedge e_i) k_2(X_n)\}$ et $\{(e_1 \wedge \dots \wedge e_i) k(X_n)\}$, à valeurs dans l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension i de ${}^t\mathbb{R}^d = \{(u_1, \dots, u_d): u_i \in \mathbb{R}\}$, convergent en loi $[(e_1, \dots, e_d)$ désigne la base canonique de ${}^t\mathbb{R}^d]$.

En particulier, lorsque $\Theta_\mu = \emptyset$, la composante $u(X_n)$ converge p.s.; l'image de $k_1(X_n)$ dans K/M converge p.s.; et les images de $k_2(X_n)$ et $k(X_n)$ dans $M \backslash K$ convergent en loi.

Supposons, outre l'hypothèse (H) que $\int_G \operatorname{Log} \|g\| \mu(dg) < +\infty$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, les suites $\left\{\frac{1}{n} b_i(X_n)\right\}$ et $\left\{\frac{1}{n} c_i(X_n)\right\}$ convergent p.s. vers des réels λ_i vérifiant:

$$\lambda_i < \lambda_{i+1} \quad \text{si } i \in \Sigma - \Theta, \qquad \lambda_i = \lambda_{i+1} \quad \text{si } i \in \Theta \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^d \lambda_i = 0.$$

Lorsque G_μ n'est pas compact (i.e. $\Theta \neq \Sigma$), on a donc nécessairement $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_d > 0$.

Ces résultats contiennent les théorèmes de Furstenberg qui portent sur la croissance exponentielle des vecteurs lignes de X_n et sur la décroissance exponentielle des angles de ces vecteurs [7].

En effet, on voit aisément: d'une part que les suites $\left\{\frac{1}{n} \operatorname{Log} \|u X_n\|\right\}$, $u \in {}^t\mathbb{R}^d$, et $\left\{\frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X_n\|\right\}$ convergent p.s. vers λ_d; d'autre part que les suites

$$\left\{\frac{1}{n} \operatorname{Log} \frac{\|u X_n \wedge v X_n\|}{\|u \wedge v\|}\right\},$$

u, $v \in {}^t\mathbb{R}^d$, u et v non colinéaires, convergent p.s. vers $(\lambda_{d-1} - \lambda_d)$. λ_d est strictement positif dès que G n'est pas compact et $(\lambda_{d-1} - \lambda_d)$ est strictement négatif si $\sup_{g \in T_\mu} |c_{d-1}(g) - c_d(g)| = +\infty$. Ces résultats peuvent s'interpréter géométriquement dans un compactifié naturel G/K étudié par Moore [18]: si $\Theta = \emptyset$, l'image canonique de X_n dans G/K converge vers un point frontière d'un type particulier et on peut préciser, en coordonnées polaires ou horosphériques, le comportement des diverses composantes.

En fait, l'espace G/K s'identifie à l'espace des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^d$, centrés en 0, de volume unité et les résultats précédents donnent le comportement asymptotique de l'image de la boule unité par X_n.

Une autre conséquence des résultats précédents concerne les exposants de Liapunoff du cocycle défini par X_n [20] dans le cas où $\Theta = \emptyset$ et $\int_G \operatorname{Log} \|g\| \mu(dg) < +\infty$: considérant les Y_k comme définies sur l'espace $G^{\mathbb{Z}}$ des suites bilatères muni du shift δ et de la mesure produit infini $\mu^{\mathbb{Z}}$, on peut trouver une application $\Gamma(\omega)$ de $G^{\mathbb{Z}}$ dans $Gl(d,\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Log}\|\Gamma(\omega)\|$ soit intégrable et que X_n s'écrive sous la forme:

$$X_n(\omega)=\Gamma(\omega)\,D_n(\omega)\,\Gamma^{-1}\circ\delta^n(\omega)$$

où D_n est diagonale et vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} D_n^{2/n}=\operatorname{diag}(e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\dots,e^{\lambda_d})$$

c'est-à-dire que X_n se comporte de manière analogue aux itérées d'une matriçe diagonale à termes diagonaux distincts.

L'ensemble de ces résultats est obtenu en utilisant de manière essentielle la proximalité de l'action de G sur l'espace des drapeaux, proximalité mise en évidence en [8], et qui permet de montrer la convergence vers une mesure de Dirac de la suite de mesures $\varepsilon_{X_n} * \nu$. Une hypothèse de moment permet alors de préciser grâce au théorème ergodique, ce résultat qualitatif ce qui fournit le comportement exponentiel des normes des vecteurs lignes et des angles entre vecteurs lignes.

B. Comportement des coefficients de X_n

Nous avons vu que $X_n\cdot\nu \xrightarrow{\text{p.s.}} \varepsilon_Z$, nous nous intéressons à présent à la convergence des suites $X_n\cdot u$, $u\in G/\tilde{P}_\Theta$.

Sous l'hypothèse (H), nous montrons que pour tout $u\in G/\tilde{P}_\Theta$ la suite $\{X_n\cdot u\}$ converge en probabilité vers Z.

Supposons, outre l'hypothèse (H) que $\int_G \|g\|^\alpha \mu(dg)<+\infty$ pour tout $\alpha>0$ (ou plus généralement pour un certain $\alpha>0$). Alors pour tout $u\in G/\tilde{P}_\Theta$, la suite $\{X_n\cdot u\}$ converge p.s. vers Z.

Pour prouver cette seconde affirmation, nous montrons que la mesure ν, (dont on sait seulement qu'elle existe), intégre certaines fonctions non bornées généralisant les potentiels logarithmiques.

Appelons $a_{ij}(n)$, $i,j\in\{1,\dots,d\}$, les coefficients de la matrice X_n. Supposons que μ vérifie l'hypothèse (H), que $\sup_{g\in T_\mu}|c_{d-1}(g)-c_d(g)|=+\infty$ et que $\int_G\|g\|^\alpha\mu(dg)<+\infty$, pour un certain $\alpha>0$. Des résultats précédents on déduit, pour le produit X_n, le comportement log-normal suivant:

i) $\forall i,j,\ \frac{1}{n}\operatorname{Log}|a_{ij}(n)| \xrightarrow{\text{p.s.}} \lambda_d$

ii) Il existe des réels >0, C et σ, tels que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{i,j}\left|\mathbb{P}\left[\frac{\log|a_{ij}(n)|-n\lambda_d}{\sigma\sqrt{n}}\leqq t\right]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right|\leqq\frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Pour obtenir ce type de résultat on observe selon [16] que la chaine de Markov définie par X_n^{-1} sur l'espace des drapeaux vérifie des propriétés de contraction conduisant à la quasi-compacité des opérateurs correspondants dans des espaces de fonctions Lipchitziennes; ceci résulte des propriétés particulières du comportement asymptotique de X_n. Grâce aux informations obtenues sur la mesure stationnaire ν, on peut alors contrôler les diverses composantes de X_n en coordonnées polaires et réduire le comportement des coefficients à celui de la partie diagonale de X_n.

1. Préliminaires algébriques

Nous donnons ci-dessous une description des décompositions d'Iwasawa, de Bruhat et polaire, d'un groupe de Lie semi-simple. Cette description résume des résultats classiques, exposés, par exemple, dans [13].

Soit G un groupe de Lie ayant $(\mathscr{G}, [\ ,\ ])$ pour algèbre de Lie. Nous appelons ad la représentation adjointe de $\mathscr{G}$ (i.e. $\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathscr{G}$). Nous disons que G [resp. $\mathscr{G}$] est semi-simple si la forme de Killing

$$F(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y), \qquad (X, Y \in \mathscr{G}),$$

est non dégénérée.

(1.1) Lorsque $\mathscr{G}$ est une algèbre de Lie semi-simple il existe des décompositions $\mathscr{G} = \mathscr{K} \oplus \mathscr{P}$ de $\mathscr{G}$ en la somme directe d'une sous-algèbre $\mathscr{K}$ et d'un sous-espace $\mathscr{P}$ vérifiant:

i) $[\mathscr{K}, \mathscr{K}] \subset \mathscr{K}$, $[\mathscr{K}, \mathscr{P}] \subset \mathscr{P}$, $[\mathscr{P}, \mathscr{P}] \subset \mathscr{K}$.

ii) La restriction de la forme de Killing à $\mathscr{K}$ [resp. à $\mathscr{P}$] est définie négative (resp. définie positive). $\mathscr{K}$ et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux pour F.

Ces décompositions sont dites de Cartan.

[Par exemple si $\mathscr{G} = sl(d, \mathbb{K}) = \{$matrices carrées d'ordre d à coefficients dans $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ de trace nulle$\}$, ou plus généralement si $\mathscr{G}$ est une algèbre de Lie semi-simple *auto-adjointe* de matrices (i.e. $X \in \mathscr{G} \Rightarrow {}^t\bar{X} \in \mathscr{G}$), alors la décomposition d'une matrice en la somme d'une matrice antihermitienne et d'une matrice hermitienne est une décomposition de Cartan].

Du fait que la forme de Killing est définie négative sur $\mathscr{K} \oplus i\mathscr{P}$, il résulte que l'algèbre de Lie de matrices $\operatorname{ad}(\mathscr{K} \oplus i\mathscr{P})$ est la conjuguée par un élément de $GL(\dim \mathscr{G}, \mathbb{C})$ d'une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des matrices antihermitiennes. Autrement dit, il existe une base de la complexifiée $\mathscr{G}^{\mathbb{C}}$ de $\mathscr{G}$ dans laquelle les matrices $\operatorname{ad} X$, $X \in \mathscr{K}$ (resp. $X \in \mathscr{P}$) sont antihermitiennes (resp. hermitiennes).

Choisissons une sous-algèbre abélienne maximale $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}$. Il existe alors une base de $\mathscr{G}$ dans laquelle les matrices de $\operatorname{ad} \mathscr{A}$ sont diagonales. Les éléments diagonaux de $\operatorname{ad} \mathscr{A}$ définissent des formes linéaires réelles sur $\mathscr{A}$ appelées racines.

Appelons Δ l'ensemble des racines et, pour tout $\alpha \in \Delta$, posons

$$\mathscr{G}_\alpha = \{X \in \mathscr{G} : \operatorname{ad} H(X) = \alpha(H) X, \forall H \in \mathscr{A}\};$$

nous obtenons la décomposition $\mathscr{G} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathscr{G}_\alpha$.

Appelons σ l'automorphisme involutif de $\mathscr{G}$ défini par $\sigma(X)=X$ si $X\in\mathscr{P}$ et $\sigma(X)=-X$ si $X\in\mathscr{K}$. On vérifie facilement que:

i) si $\alpha\in\Delta$, alors $(-\alpha)\in\Delta$ et $\mathscr{G}_{(-\alpha)}=\sigma(\mathscr{G}_\alpha)$,

ii) $\mathscr{G}_0=\mathscr{M}\oplus\mathscr{A}$, où $\mathscr{M}=\{X\in\mathscr{K}:[X,\mathscr{A}]=(0)\}$.

Soit $\mathscr{A}'$ l'ensemble des points de $\mathscr{A}$ où aucune racine de $\Delta-\{0\}$ ne s'annule. Les composantes connexes de $\mathscr{A}'$ (en nombre fini) sont les *chambres de Weyl*. Choisissons une chambre de Weyl W et notons Δ_- [resp. Δ_+] l'ensemble des racines, non nulles, négatives [resp. positives] sur W.

Posons

$$\mathscr{N}=\bigoplus_{\alpha\in\Delta_-}\mathscr{G}_\alpha \quad \text{et} \quad \tilde{\mathscr{N}}=\bigoplus_{\alpha\in\Delta_-}\mathscr{G}_{(-\alpha)}=\sigma(\mathscr{N}).$$

Des inclusions,

$$\forall\alpha,\beta\in\Delta, \qquad [\mathscr{G}_\alpha,\mathscr{G}_\beta]\subset\mathscr{G}_{\alpha+\beta}$$

(avec la convention $\mathscr{G}_{\alpha+\beta}=(0)$ si $\alpha+\beta\notin\Delta$), il résulte que $\mathscr{N}$ et $\tilde{\mathscr{N}}$ sont des sous-algèbres de Lie *nilpotentes* de $\mathscr{G}$. $\mathscr{A}\oplus\mathscr{N}$ et $\mathscr{A}\oplus\tilde{\mathscr{N}}$ sont des sous-algèbres de Lie *résolubles* de $\mathscr{G}$ et nous avons

$$\mathscr{N}=[\mathscr{A},\mathscr{N}], \qquad \tilde{\mathscr{N}}=[\mathscr{A},\tilde{\mathscr{N}}].$$

On obtient alors pour $\mathscr{G}$ les décompositions, dites «d'Iwasawa»,

$$\mathscr{G}=\mathscr{N}\oplus\mathscr{A}\oplus\mathscr{K} \quad \text{et} \quad \mathscr{G}=\tilde{\mathscr{N}}\oplus\mathscr{A}\oplus\mathscr{K}.$$

La seconde se déduisant de la première par l'automorphisme σ.

Ces décompositions dépendent des choix: de la décomposition de Cartan; du sous-espace abélien maximal $\mathscr{A}$ et de la chambre de Weyl W. On montre que deux décompositions d'Iwasawa se déduisent par un automorphisme intérieur.

D'autre part, nous obtenons aussi la décomposition dite «de Bruhat»:

$$\mathscr{G}=\mathscr{N}\oplus\mathscr{A}\oplus\tilde{\mathscr{N}}\oplus\mathscr{M}.$$

(1.2) Désignons par N, $\tilde{N}$, A et K les sous-groupes de Lie connexes de G ayant respectivement $\mathscr{N}$, $\tilde{\mathscr{N}}$, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{K}$ pour algèbre de Lie. N et $\tilde{N}$ sont des sous-groupes nilpotents simplement connexes de G. A est un sous-groupe abélien simplement connexe de G, donc isomorphe à $(\mathbb{R}^{\dim\mathscr{A}},+)$. K contient le centre discret $Z(G)$ de G et le quotient $K/Z(G)$ est un groupe compact.

Appelons Ad la représentation adjointe de G. Soient $\alpha\in\Delta$, $X\in\mathscr{G}_\alpha$ et $a\in A$; écrivons $a=\exp H$ avec $H\in\mathscr{A}$, nous avons

$$\operatorname{Ad}a(X)=\operatorname{Ad}(\exp H)(X)=\operatorname{Exp}\operatorname{ad}H(X)=e^{\alpha(H)}X;$$

autrement dit,

$$\operatorname{Ad}a(X)=\varphi_\alpha(a)X,$$

où φ_α est un homomorphisme de A dans $\mathbb{R}_+$.

Appelons M (resp. M') le centralisateur (resp. le normalisateur) de A dans K. M et M' sont des sous-groupes fermés de G ayant $\mathscr{M}$ pour algèbre de Lie. Comme M et M' contiennent le centre $Z(G)$ de G et comme $K/Z(G)$ est compact, M'/M est un groupe fini, appelé le groupe de Weyl. Chaque élément de M' permute les chambres de Weyl. Le groupe de Weyl opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des chambres de Weyl.

Ceci dit nous avons pour G les décompositions suivantes:

1) Décomposition d'Iwasawa de G. $G=NAK$ (ou $G=KAN$, $\tilde{N}AK$, $KA\tilde{N}$)

L'application qui au triplet (n, a, k) associe le produit nak est un isomorphisme de variétés analytiques de $N\times A\times K$ sur G.

2) Décomposition polaire de G. $G=K\exp\overline{W}K$

Tout élément g de G s'écrit $k_1\exp a k_2$, avec k_1, $k_2\in K$ et $a\in\overline{W}$ (fermeture de la chambre de Weyl W dans $\mathscr{A}$). L'élément a est déterminé de façon unique. Lorsque $a\in W$, les autres décompositions de g s'obtiennent en remplaçant le couple (k_1, k_2) par $(k_1 m, m^{-1}k_2)$ avec $m\in M$.

3) Décomposition de Bruhat de G. $G=\bigcup_{m\in M'/M} Nm\tilde{N}AM$

$$(\text{ou } G=\bigcup_{m\in M'/M} NmNAM=\bigcup_{m\in M'/M}\tilde{N}mNAM=\bigcup_{m\in M'/M}\tilde{N}m\tilde{N}AM).$$

Choisissons des représentants m_i, $1\leqq i\leqq s$, dans M' des éléments de M'/M. Alors G est la réunion disjointe des sous-variétés $Nm_i\tilde{N}AM$, $1\leqq i\leqq s$. $N\tilde{N}AM$ est une sous-variété ouverte de G et les autres sont des sous-variétés de dimensions strictement plus petites. L'application qui au quadruplet $(u, \tilde{u}, a, \gamma)$ associe le produit $u\tilde{u}a\gamma$ est un isomorphisme de variété analytique de $N\times\tilde{N}\times A\times M$ sur l'ouvert $N\tilde{N}AM$ de G.

Pour tout $m\in M'$, nous avons

$$(m^{-1}Nm)=[(m^{-1}Nm)\cap N][(m^{-1}Nm)\cap\tilde{N}];$$

et par suite

$$NmA\tilde{N}M=m[(m^{-1}Nm)\cap N]A\tilde{N}M=(N\cap mNm^{-1})mA\tilde{N}M.$$

Le groupe nilpotent $(m^{-1}Nm)\cap N$ admet pour algèbre de Lie

$$\bigoplus_{\{\alpha\in\Delta_-:\alpha\circ\mathrm{Ad}\,m\in\Delta_-\}}\mathscr{G}_\alpha.$$

Par suite $(m^{-1}Nm)\cap N=N\Leftrightarrow\alpha\circ\mathrm{Ad}\,m\in\Delta_-, \forall\alpha\in\Delta_-\Leftrightarrow m\in M$. Lorsque m envoie Δ_- sur Δ_+ (i.e. lorsque m correspond à l'élément du groupe de Weyl qui envoie W sur $(-W)$), nous avons $(m^{-1}Nm)\cap N=\{e\}$ et $NmA\tilde{N}M=mA\tilde{N}M$.

Dans la suite nous noterons m_s un représentant dans M' de l'élément de groupe de Weyl qui envoie W sur $(-W)$.

(1.3) *Exemple*

$G=SL(d,\mathbb{R})$

$N=\{$matrices triangulaires supérieures réelles à éléments diagonaux égaux à $1\}$

$\tilde{N}=\{$matrices triangulaires inférieures réelles à éléments diagonaux égaux à $1\}$

$A=\{$matrices diagonales à coefficients strictement positifs, de déterminant $1\}$

$K=SO(d)=\{$matrices orthogonales de déterminant $1\}$

$$M=\left\{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d)\colon \varepsilon_i=\pm 1, \prod_{i=1}^{d}\varepsilon_i=1\right\}.$$

Décomposition d'Iwasawa: $G = NAK$ (ou KAN, $\tilde{N}AK$, $KA\tilde{N}$)

Décomposition polaire: $G = K\left\{\operatorname{Exp}\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) : \sum_{i=1}^{d} x_i = 0, x_1 \leqq \ldots \leqq x_d\right\} K$

Décomposition de Bruhat: • *pour* $d = 2$, $M' = \left\{\pm I, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$,

$$\text{d'où } G = N\tilde{N}AM + N \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{N}AM = N\tilde{N}AM + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{N}AM$$

$$N\tilde{N}AM = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) : d \neq 0\right\} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{N}AM = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) : d = 0\right\}.$$

• *pour* $d = 3$, le groupe de Weyl admet les représentants suivants dans M':

$$\left\{I, m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left. m_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

On vérifie que:

$$NA\tilde{N}M = \left\{((a_{ij})) \in SL(3, \mathbb{R}) : a_{33} \neq 0 \text{ et } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\right\},$$

$$Nm_2 A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3, \mathbb{R}) : a_{33} = 0 \text{ et } \Delta_2 \neq 0\},$$

$$Nm_3 A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3, \mathbb{R}) : a_{33} \neq 0 \text{ et } \Delta_2 = 0\},$$

$$Nm_4 A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3, \mathbb{R}) : a_{33} = a_{23} = 0, a_{32} \neq 0\},$$

$$Nm_5 A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3, \mathbb{R}) : a_{32} = a_{33} = 0, a_{23} \neq 0\},$$

$$Nm_6 A\tilde{N}M = \{((a_{ij})) \in SL(3, \mathbb{R}) : a_{32} = a_{33} = a_{23} = 0\} = m_6 A\tilde{N}M.$$

Ces parties de G, en projection sur $G/A\tilde{N}M$ sont des orbites de N et elles s'interprètent géométriquenent comme suit. Comme $A\tilde{N}M$ est le stabilisateur du couple des sous-espaces engendrés par e_3 seul et (e_3, e_2), l'espace homogène $G/A\tilde{N}M$ est l'espace des drapeaux de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire des couples formés de deux sous-espaces emboités de dimension 1 et 2. D'autre part, l'espace des droites de $\mathbb{R}^3$ n'est autre que le plan projectif $\mathbf{P}^2$ et $G/A\tilde{N}M$ s'identifie donc également à l'ensemble des éléments de contact à $\mathbf{P}^2$, c'est-à-dire des couples $(x, [x, y])$ formés par un point $x \in \mathbf{P}^2$ et une droite passant par ce point et notée $[x, y]$. Alors, en notant de la même façon vecteurs et points correspondants de $\mathbf{P}^2$, les éléments m_i du groupe de Weyl se projettent suivant les 6 éléments de contact

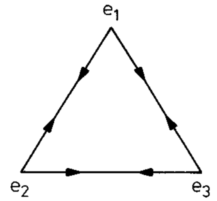

Fig. 1

$$(e_3, [e_3, e_2]), (e_3, [e_3, e_1]), (e_2, [e_2, e_3]),$$
$$(e_2, [e_2, e_1]), (e_1, [e_1, e_3]), (e_1, [e_1, e_2])$$

dont les orbites sous N sont respectivement:
– tous les éléments de contact d'origine extérieure à la droite $[e_1, e_2]$ et ne passant pas par e_1 (dim 3)
– tous les éléments de contact passant par e_1 mais d'origine non située sur $[e_1, e_2]$ (dim 2)
– tous les éléments de contact d'origine sur $[e_1, e_2]$ mais ne passant pas par e_1 (dim 2)
– tous les éléments de contact passant par e_1 mais distincts de $(e_1, [e_1, e_2])$
– tous les éléments de contact d'origine e_1 mais distincts de $(e_1, [e_1, e_2])$
– l'élément de contact $(e_1, [e_1, e_2])$.[1]

(1.4) Les groupes NAM (ou $\tilde{N}AM = m_s NAM m_s^{-1}$) de la section (1.2) sont des sous-groupes fermés moyennables de G: en effet NAM est une extension compacte du groupe résoluble $NAZ(G)$. Comme deux décompositions d'Iwasawa de G se déduisent par un automorphisme intérieur, ces groupes s'obtiennent, à partir de l'un d'eux, par conjugaison. En fait nous savons ([6] théorème (1.10)) que ces groupes sont des sous-groupes moyennables *maximaux* de G.

(1.5) *Définition.* Nous appelons sous-groupe parabolique de G, tout sous-groupe fermé de G contenant un des sous-groupes NAM.

(1.6) Donnons-nous une décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ de G et le sous-groupe moyennable maximal NAM correspondant.

Nous savons (voir, par exemple, [2] §11 ou [17] §2) que les sous-groupes fermés de G contenant NAM sont les sous-groupes P_Θ définis de la façon suivante.

Désignons par Δ_- l'ensemble des racines ayant servi à définir N; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_-. [Rappelons qu'une racine de Δ_- est simple si elle n'est pas la somme de deux racines de Δ_-; tout élément de Δ_- est alors, de façon unique, une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de racines simples].

Soit Θ un sous-ensemble de Σ; posons $A_\Theta = \{a \in A : \varphi_\alpha(a) = 1, \forall \alpha \in \Theta\}$ et appelons K_Θ le centralisateur de A_Θ dans K; alors P_Θ est le sous-groupe parabolique $K_\Theta AN = NAK_\Theta$. L'application $\Theta \to P_\Theta$ est visiblement croissante et de plus $P_\Theta \cap P_{\Theta'} = P_{\Theta \cap \Theta'}$, $P_\phi = MAN$, $P_{\Delta_-} = G$.

[1] Plus généralement, si on appelle Δ_k, $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ les mineurs principaux de la matrice $((a_{ij}))$ (voir (5.5)), alors $NA\tilde{N}M = \{((a_{i,j})) \in SL(d, \mathbb{R}) : \Delta_k \neq 0, \forall k \in \{1, \ldots, d-1\}\}$.

Notons $[\Theta]$ le sous-ensemble des racines de Δ qui sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de racines de Θ; l'algèbre de Lie de P_Θ est alors $\bigoplus_{\alpha\in[\Theta]\cup\Delta_-} \mathscr{G}_\alpha$.

Tout sous-groupe parabolique de G est donc un conjugué d'un des sous-groupes paraboliques standard P_Θ, $\Theta\subset\Sigma$. En outre, tout sous-groupe parabolique est son propre normalisateur.

Nous notons $\tilde{P}_\Theta$ le sous-groupe parabolique $K_\Theta A\tilde{N}=\tilde{N}AK_\Theta$. L'algèbre de Lie de $\tilde{P}_\Theta$ est $\bigoplus_{\alpha\in[\Theta]\cup\Delta_+} \mathscr{G}_\alpha$.

Nous avons

$$G=\bigcup_{m\in M'/M'_\Theta} Nm\tilde{P}_\Theta\Big(=\bigcup_m NmP_\Theta=\bigcup_m \tilde{N}mP_\Theta=\bigcup_m \tilde{N}m\tilde{P}_\Theta\Big),$$

où $M'_\Theta=M'\cap K_\Theta$. La sous-variété $Nm\tilde{P}_\Theta$ s'écrit aussi $mN^{m,\Theta}\tilde{P}_\Theta$, où $N^{m,\Theta}$ est le sous-groupe de Lie connexe de N ayant $\bigoplus_{\alpha\in(\Delta_-\circ\mathrm{Ad}m)\cap\complement[\Theta]\cap\Delta_-} \mathscr{G}_\alpha$ pour algèbre de Lie.

L'application qui au couple (u,p) associe le produit up est un isomorphisme de variétés analytiques de $N^{e,\Theta}\times\tilde{P}_\Theta$ sur l'ouvert $N^{e,\Theta}\tilde{P}_\Theta$ de G.

(1.7) Considérons une décomposition de Bruhat de G, soit

$$G=\bigcup_{m\in M'/M} Nm\tilde{N}AM.$$

Pour tout $m\in M'/M$, appelons W_m la fermeture de la sous-variété $Nm\tilde{N}AM$ dans G. W_m est la réunion de $Nm\tilde{N}AM$ et d'une réunion W'_m de sous-variétés $Nm'\tilde{N}AM$, $m'\in M'/M$, de dimensions strictement plus petites que celle de $Nm\tilde{N}AM$. $Nm\tilde{N}AM$ est un ouvert de W_m, pour la topologie induite.

(1.8) *Exemples*

- $G=SL(2,\mathbb{R})$

$$W_e=G \quad \text{et} \quad W_{m_s}=m_s\tilde{N}AM.$$

Les sous-groupes paraboliques de $SL(2,\mathbb{R})$ sont $SL(2,\mathbb{R})$ et les conjugués de NAM (ou $\tilde{N}AM$).

- $G=SL(3,\mathbb{R})$

$$W_e=G, \qquad W_{m_2}=N\{m_2,m_4,m_5,m_6\}\tilde{N}AM,$$

$$W_{m_3}=N\{m_3,m_4,m_5,m_6\}\tilde{N}AM, \qquad W_{m_4}=N\{m_4,m_6\}\tilde{N}AM,$$

$$W_{m_5}=N\{m_5,m_6\}\tilde{N}AM, \qquad W_{m_6}=m_6\tilde{N}AM.$$

Les sous-groupes paraboliques de $SL(3,\mathbb{R})$ sont $SL(3,\mathbb{R})$ et les conjugués des sous-groupes NAM (ou $\tilde{N}AM$), $\{((a_{ij}))\in SL(3,\mathbb{R})\colon a_{21}=a_{31}=0\}$ et $\{((a_{ij}))\in SL(3,\mathbb{R})\colon a_{31}=a_{32}=0\}$.

2. Résultats principaux

A) Suites contractantes

(2.1) *Définition.* Nous disons qu'une suite $\{g_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de G est *contractante* si pour une décomposition polaire $G=K\exp\overline{W}K$ de G, g_n s'écrit $x_n a_n k_n$ avec x_n, $k_n\in K$, $a_n\in\exp\overline{W}$ et $\varphi_\alpha(a_n)\to 0$, pour tout $\alpha\in\Delta_-$.

Nous allons à présent étudier de telles suites; en particulier nous allons voir que lorsque $\{g_n\}$ est une suite contractante, alors la propriété énoncée est vraie pour toutes les décompositions polaires (corollaire (2.3)).

(2.2) **Lemme.** *Soit $\tilde{u}_n$ [resp. u_n] une suite d'éléments d'un compact C de $\tilde{N}$ [resp. de N]. Soit a_n une suite d'éléments de A telle que $\varphi_\alpha(a_n)\to 0$, $\forall \alpha\in\Delta_-$. Alors $\tilde{u}_n a_n$ [resp. $a_n u_n$] s'écrit $x_n b_n k_n$ avec x_n, $k_n\in K$, $b_n\in\exp\overline{W}$ tels que $x_n\to e$, $k_n\to e$ et $a_n b_n^{-1}\to e$.*

Preuve. Ecrivons $\tilde{u}_n a_n = x'_n b_n k'_n$ avec x'_n, $k'_n\in K$ et $b_n\in\exp\overline{W}$.

1°) Supposons que la suite x'_n converge vers x. G possède la décomposition de Bruhat $G=\sum_{m\in M'/M}\tilde{N}mAMN$. Soit $m\in M'$ tel que $x\in\tilde{N}mAMN$. x appartient alors à l'ouvert $K\cap\tilde{N}AMNm$ de K; si bien qu'à partir d'un certain rang x'_n s'écrit:

$$x'_n=\tilde{v}_n v_n c_n \gamma_n m$$

avec $\tilde{v}_n\in\tilde{N}$, $v_n\in N$, $c_n\in A$, $\gamma_n\in M$ tel que $\tilde{v}_n\to\tilde{v}$, $v_n\to v$, $c_n\to c$, $\gamma_n\to\gamma$ et $x=\tilde{v}vc\gamma m$.

Nous avons alors:

$$\tilde{u}_n a_n = x_n(m b_n m^{-1})k_n$$

en posant $k_n=\gamma_n m k'_n$ et $x_n=x'_n(\gamma_n m)^{-1}=\tilde{v}_n v_n c_n\to\tilde{v}vc$.

Comme $a_n^{-1}\tilde{u}_n a_n$ et $a_n^{-1}\tilde{v}_n a_n$ convergent vers e, de l'égalité

$$(a_n^{-1}\tilde{u}_n a_n)=(a_n^{-1}\tilde{v}_n a_n)(a_n^{-1}v_n a_n)[a_n^{-1}c_n(m b_n m^{-1})]k_n,$$

il résulte (continuité de la décomposition d'Iwasawa $G=NAK$) que:

1) $a_n^{-1}v_n a_n\to e$; ce qui entraîne $v_n\to e=v$.

2) $c_n a_n^{-1}(m b_n m^{-1})\to e$; ce qui entraîne que $\varphi_\alpha(m b_n m^{-1})\to 0\ \forall\alpha\in\Delta_-$, donc $m b_n m^{-1}\in\exp W$ à partir d'un certain rang; par suite (puisque $b_n\in\exp\overline{W}$) $m\in M$ et $m b_n m^{-1}=b_n$.

3) $k_n\to e$.

Mais alors nous avons aussi $x_n\to\tilde{v}c\in\tilde{N}A\cap K=\{e\}$. Et le lemme est ainsi prouvé, dans le cas considéré.

2°) Cas général. D'après la première partie les valeurs d'adhérence de la suite x'_n sont dans M; autrement dit l'image de la suite $\{x'_n\}$ dans K/M est une suite convergeant vers l'image de l'élément neutre de K. Nous pouvons donc trouver une suite $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ de M telle que $x_n=x'_n\gamma_n\to e$. En écrivant $\tilde{u}_n a_n=x_n b_n k_n$ avec $k_n=\gamma_n^{-1}k'_n$, nous sommes alors ramenés à la situation envisagée au 1°). [Ce lemme généralise le lemme 4 de [26] qui suppose qu'en outre $\sup_n\frac{\alpha(\log a_n)}{\beta(\log a_n)}<+\infty$, pour α, $\beta\in\Delta_-$].

(2.3) **Corollaire.** *Si $\{g_n\}_{n\geq 1}$ est une suite contractante de G, alors pour tous x, $y\in G$ la suite $\{xg_n y\}_{n\geq 1}$ l'est aussi.*

Preuve. Soit $g_n=x_n a_n k_n$ avec x_n, $k_n\in K$ et $a_n\in\exp\overline{W}$ tel que $\varphi_\alpha(a_n)\to 0$, $\forall\alpha\in\Delta_-$.

Ecrivons $xx_n=k'_n\tilde{u}_n b_n$ avec $k'_n\in K$, $\tilde{u}_n\in\tilde{N}$ et $b_n\in A$. $\tilde{u}_n$ et b_n varient respectivement dans un compact de $\tilde{N}$ et de A. Appliquons le lemme (2.2) à la suite

$\tilde{u}_n b_n a_n$, $x g_n y$ s'écrit alors $x'_n c_n l_n y$ avec x'_n, $l_n \in K$ et $c_n \in \exp \overline{W}$ avec $\varphi_\alpha(c_n) \to 0$, $\forall \alpha \in \Delta_-$.

Le corollaire (2.3) s'obtient alors en écrivant

$$l_n y = d_n u_n l'_n \quad \text{avec } d_n \in A, \quad u_n \in N \quad \text{et} \quad l'_n \in K$$

et en appliquant le lemme (2.2) à la suite $c_n d_n u_n$.

(2.4) **Corollaire.** *Soit $\{g_n\}_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de G. Alors nous avons l'équivalence:*

i) *g_n admet une décomposition polaire $x_n a_n k_n$ telle que*

$$x_n \to x \in NAM\tilde{N} \quad \text{et} \quad \varphi_\alpha(a_n) \to 0 \ \forall \alpha \in \Delta_-.$$

ii) *g_n admet la décomposition d'Iwasawa $u_n a'_n k'_n$ ($u_n \in N$, $a'_n \in A$, $k'_n \in K$) telle que $u_n \to u$ et $\varphi_\alpha(a'_n) \to 0$ $\forall \alpha \in \Delta_-$.*

Dans ce cas on a nécessairement: $\zeta(u) = \zeta(x)$, où ζ: $G \to G/MA\tilde{N}$; la suite $\{a'_n a_n^{-1}\}$ converge p.s. *et $k'_n = k''_n k_n$ où $\{k''_n\}$ est une suite d'éléments de K convergeant vers un élément de M.*

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii).

Ecrivons, avec des notations évidentes,

$$x_n = u_n b_n m_n \tilde{u}_n \in NAM\tilde{N} \to x = u b m \tilde{u}.$$

Alors $a_n^{-1} \tilde{u}_n a_n \to e$ et $a_n^{-1} \tilde{u}_n a_n$ s'écrit $v_n c_n k''_n$ avec $v_n \in N$, $c_n \in A$, $k''_n \in K$ tels que $v_n \to e$, $c_n \to e$ et $k''_n \to e$.

D'où g_n s'écrit $u'_n a'_n k'_n$ avec

$$u'_n = u_n(b_n m_n a_n v_n a_n^{-1} m_n^{-1} b_n^{-1}) \to u,$$

$$a'_n = a_n b_n c_n \quad \text{et} \quad a'_n a_n^{-1} \xrightarrow{\text{p.s.}} b,$$

$$k'_n = m_n k''_n k_n.$$

ii) $\Rightarrow$ i).

Ecrivons $u_n = l_n \tilde{u}_n b_n$ avec $l_n \in K$, $b_n \in A$ et $\tilde{u}_n \in \tilde{N}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme (2.2) à la suite $\tilde{u}_n b_n a'_n$.

B) Théorème principal

(2.5) *Définitions.* 1) Soit $\tilde{N}AM$ un sous-groupe moyennable maximal de G construit dans la première section. Une mesure de probabilité ν sur l'espace homogène $B = G/\tilde{N}AM$ est dite irréductible si

$$g\nu(\zeta(Nm)) = 0, \qquad \forall g \in G, \ \forall m \in M'/M - \{\bar{e}\};$$

où ζ désigne l'application naturelle de G sur B.

Si μ est une mesure de probabilité sur G, nous appelons T_μ (resp. G_μ) le semi-groupe (resp. le sous-groupe) fermé engendré par le support de μ.

2) Soit H un sous-groupe fermé de G. Nous disons que H est *totalement irréductible* s'il n'existe pas des éléments $x, g_1, \ldots, g_r$ de G tels que:

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{r} g_i(\complement N A \tilde{N} M) x.$$

Dans le cas de $SL(d, \mathbb{R})$, un sous-groupe H est totalement irréductible si et seulement si il n'existe pas des éléments $x, g_1, \ldots, g_r$ de G et un entier $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ tels que:

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{r} \Delta_k(g_i H x) \equiv 0$$

(voir (5.5) pour la définition des Δ_k, $k \in \{1, \ldots, d-1\}$).

En posant,

$$u_0 = x(f_{d-k+1} \wedge \ldots \wedge f_d) \quad \text{et} \quad v_i = g_i^{-1}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_{d-k}), \qquad (i \in \{1, \ldots, r\}),$$

l'égalité $(*)$ équivaut à:

$$H u_0 \subset \bigcup_{i=1}^{r} \{u \in \bigwedge_k \mathbb{R}^d \colon v_i \wedge u = 0\}.$$

On en déduit que tout sous-groupe H de $SL(d, \mathbb{R})$ qui ne laisse pas invariant une réunion finie de sous-espace propre de $\bigwedge_k \mathbb{R}^d$, $(k \in \{1, \ldots, d-1\})$, est totalement irréductible.

(2.6) **Théorème.** *Soient μ une mesure de probabilité sur G et $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ, définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, *à valeurs dans G.*

Supposons que T_μ contienne une suite contractante (definition (2.1)) *et que G_μ soit totalement irréductible.*

Soient $G = NAK$ une décomposition d'Iwasawa de G et $G = K(\exp \overline{W})K$ la décomposition polaire de G correspondante. (W est la chambre de Weyl qui a servi à définir N). Nous appelons M le centralisateur de A dans K.

Alors il existe une unique mesure de probabilité μ-invariante sur $B = G/\tilde{N}AM$ et cette mesure est irréductible (définition (2.5)). *Pour toute mesure de probabilité irréductible λ sur B et pour tous $y, g \in G$, la suite de mesures $\{y Y_1 \ldots Y_n g \lambda\}_{n \geqq 1}$ converge* $\mathbb{P}$-p.s. *vers une mesure de Dirac $\varepsilon_{y \cdot Z}$ indépendante de g.*

De plus, si nous écrivons $y Y_1 \ldots Y_n g = x_n a_n k_n$ avec $x_n, k_n \in K$ et $a_n \in \exp \overline{W}$, alors l'image de x_n dans $G/\tilde{N}AM$ converge p.s. *vers la* v.a. *$y \cdot Z$ et pour tout $\alpha \in \Delta$, la suite $\{\varphi_\alpha(A_n)\}$ converge vers zéro.*

En prenant $\tilde{B} = NAM \backslash G$ et la marche aléatoire gauche $Y_n \ldots Y_1$, on a évidemment un résultat analogue. Si $\tilde{\zeta}$ désigne l'application naturelle de G sur $\tilde{B}$, on en déduit que les lois des v.a. $\tilde{\zeta}(k_n)$ sont les mêmes que celles d'une suite de v.a. convergente. D'où le corollaire:

(2.7) **Corollaire.** *Avec les hypothèses et les notations du théorème* (2.6), *il existe une unique mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{\nu}$ sur $\tilde{B} = NAM \backslash G$ et l'image de la suite $\{k_n\}$ dans $\tilde{B}$ converge en loi vers $\tilde{\nu} \cdot g$.*

D'autre part d'après le corollaire (2.4), nous avons aussi:

(2.8) **Corollaire.** *Avec les hypothèses et les notations du théorème* (2.6), *écrivons* $yY_1\dots Y_n g = N_n A_n K_n$ *avec* $N_n\in N$, $A_n\in A$ *et* $K_n\in K$.

Alors la suite N_n *converge* p.s. *vers une* v.a. N_∞ *ayant* $y\cdot Z$ *pour image dans* $G/\tilde{N}AM$; *la suite* $A_n \bar{a}_n^{-1}$ *converge* p.s. (*pour tout* $\alpha\in\Delta_-$, *la suite* $\varphi_\alpha(A_n)$ *converge donc vers zéro*); *et la suite* $\tilde{\zeta}(K_n)$ *converge en loi vers* $\tilde{v}g$.

C) Preuve du théorème (2.6)

La démonstration découle de plusieurs lemmes.

(2.9) Nous désignons par ζ l'application naturelle de G sur $B=G/\tilde{N}AM$. Soient $a\in A$ et $u\in N$; écrivons $u=\exp\sum\limits_{\alpha\in\Delta_-} X_\alpha$ avec $X_\alpha\in\mathscr{G}_\alpha$. Pour tout élément m de M', nous avons

$$\zeta(aum)=\zeta(aua^{-1}m)=\exp(\sum_{\alpha\in\Delta_-}\varphi_\alpha(a)X_\alpha)\cdot\zeta(m)$$

puisque $B=\sum\limits_{m\in M'/M}\zeta(Nm)$, nous voyons que l'homéomorphisme de B associé à un élément a de A est déterminé de façon unique par la famille des réels $\{\varphi_\alpha(a), \alpha\in\Sigma\}$; où Σ désigne l'ensemble des racines simples de Δ_- (voir (1.6)). Ce qui n'est pas étonnant puisque a lui-même est déterminé par cette famille; il suffit de noter que Σ engendre $\mathscr{A}^*$.

Réciproquement considérons une famille de réels positifs ou nuls $\{r_\alpha, \alpha\in\Sigma\}$. Nous définissons une transformation $\tau(\{r_\alpha, \alpha\in\Sigma\})$ de B, en posant, pour $m\in M'$ et $u=\exp(\sum\limits_{\alpha\in\Delta_-}X_\alpha)\in N$,

$$\tau(\zeta(um))=\exp(\sum_{\alpha\in\Delta_-}r_\alpha X_\alpha)\cdot\zeta(m);$$

où, pour $\alpha\in\Delta_- - \Sigma$, r_α se déduit de façon évidente des réels $\{r_\alpha, \alpha\in\Sigma\}$.

Il est clair que $\tau(\{r_\alpha, \alpha\in\Sigma\})$ s'écrit $a\circ\tau(\{\delta_\alpha, \alpha\in\Sigma\})$ avec $a\in A$ et $\delta_\alpha\in\{0,1\}$, $\forall\alpha\in\Sigma$. L'élément a de A n'étant unique que si $r_\alpha>0$, $\forall\alpha\in\Sigma$.

Nous notons $\mathfrak{T}$ l'ensemble des transformations de B associées à des éléments $\{\delta_\alpha, \alpha\in\Sigma\}$ de $\{0,1\}^\Sigma$.

Nous avons:

(2.10) **Lemme.** *De toute suite* $\{g_n\}$ *d'éléments de* G, *on peut extraire une sous-suite* $\{g_{\psi(n)}\}$ *pour laquelle il existe des éléments* $x, k\in K$, $a\in A$ *et* $\tau\in\mathfrak{T}$ *telle que, pour tout* z *appartement à l'ouvert* $\zeta(k^{-1}N)$ *de* B, *la suite* $\{g_{\psi(n)}\cdot z\}_{n\geqq 1}$ *converge vers* $x\,a\,\tau k\cdot z$.

La suite $\{g_n\}$ *est contractante si et seulement si toutes «ses valeurs d'adhérence* $xa\tau k$» *sont telles que* τ *corresponde à élément nul de* $\{0,1\}^\Sigma$.

Preuve. Ecrivons $g_n=x_n a_n k_n$ avec $x_n, k_n\in K$ et $a_n\in\exp\overline{W}$. Nous avons, $\forall\alpha\in\Delta_-$, $\varphi_\alpha(a_n)\in\,]0,1]$ car $a_n\in\exp\overline{W}$. Choisissons une suite d'entiers $\{\psi(n)\}_{n\geqq 1}$ telle que:

$$k_{\psi(n)}\to k,\quad x_{\psi(n)}\to x \quad \text{et}\quad \forall\alpha\in\Sigma,\quad \varphi_\alpha(a_{\psi(n)})\to\lambda_\alpha\in[0,1].$$

On vérifie aisément que pour tout $z \in \zeta(k^{-1}N)$,

$$g_{\psi(n)} \cdot z \to x\,\tau(\{\lambda_\alpha,\ \alpha \in \Sigma\})\,k \cdot z.$$

Ce qui prouve la première assertion du lemme. La deuxième assertion est évidente.

(2.11) **Lemme.** *Soit* $\{g_n\}$ *une suite d'éléments de* G *et* β *une mesure de probabilité irréductible sur* B *telle que la suite de mesures* $\{g_n \cdot \beta\}_{n \geqq 1}$ *converge vers une mesure de Dirac* ε_u. *Ecrivons* $g_n = x_n a_n k_n$ *avec* $x_n, k_n \in K$ *et* $a_n \in \exp \overline{W}$.

Alors la suite $\zeta(x_n)$ *converge vers* u *et* g_n *est une suite contractante. Si bien que, pour toute mesure de probabilité irréductible* λ *sur* B, $g_n \cdot \lambda$ *converge vers* ε_u.

Preuve. On voit aisément que les seules valeurs d'adhérence $x a \tau k$ de la suite $\{g_n\}$ sont telles que:

i) τ est l'élément de $\mathfrak{T}$ associé à l'élément nul de $\{0,1\}^\Sigma$.

ii) $\zeta(x) = u$.

De i) il résulte (lemme (2.10)) que $\{g_n\}$ est une suite contractante. De ii) il résulte que la suite $\zeta(x_n)$ n'admet que la valeur d'adhérence u; ce qui montre que $\zeta(x_n)$ converge vers u.

(2.12) **Lemme.** *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* G. *Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes* (*definitions* (2.5)):

i) G_μ *est totalement irréductible.*

ii) *Toutes les mesures* μ*-invariantes* ν *sur* B *sont irréductibles.*

Preuve i) $\Rightarrow$ ii)

Cas de $SL(d, \mathbb{R})$

L'espace homogène $B = G/A\tilde{N}M$ s'identifie à l'espace des drapeaux $\mathscr{D}$, c'est-à-dire à l'ensemble des $(d-1)$-couples de sous-espaces de $\mathbb{R}^d$, $(E_1, \ldots, E_{d-1})$, tels que

$$\dim E_i = i \quad \text{et} \quad E_i \subset E_{i+1} \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, d-1\},\ (E_d = \mathbb{R}^d).$$

Si $g \in \complement NA\tilde{N}M$, nous avons $\Delta_k(g) = 0$ pour un entier k de $\{1, \ldots, d-1\}$; ce qui équivaut à:

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_{d-k} \wedge (g f_{d-k+1} \wedge \ldots \wedge g f_d) = 0.$$

L'image d'un translaté $x \complement MA\tilde{N}M$ de $\complement NA\tilde{N}M$ de B s'identifie alors à l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{d-1} \mathscr{D}_k(u)$ des drapeaux où:

$$\mathscr{D}_k(u) = \{(E_1, \ldots, E_{d-1}) \in \mathscr{D} : u \wedge E_k = 0\} \qquad \text{avec } u = x(f_1 \wedge \ldots \wedge f_{d-k}) \in \bigwedge_{d-k} \mathbb{R}^d.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, d-1\}$, l'ensemble des sous-espaces de dimension i de $\mathbb{R}^d$ s'identifie de façon naturelle à l'espace projectif $\mathbf{P}(\bigwedge_i \mathbb{R}^d)$ associé à l'espace vectoriel $\bigwedge_i \mathbb{R}^d$. Si H_i désigne le sous-groupe fermé de G laissant invariant l'élément $\overline{f_{d-i+1} \wedge \ldots \wedge f_d}$ de $\mathbf{P}(\bigwedge_i \mathbb{R}^d)$, cet espace s'identifie aussi à G/H_i. Nous appelons Π_i l'application naturelle de B sur G/H_i.

Si ν est une mesure de probabilité μ-invariante, *non irréductible* sur B, ν charge un des ensembles $\mathscr{D}_k(u)$, $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, $u \in \bigwedge_{d-k} \mathbb{R}^d$.

Par suite $\Pi_k(\nu)$ charge $\{\bar{v} \in \mathbf{P}(\bigwedge_k \mathbb{R}^d): u \wedge \bar{v} = 0\}$.

Soit $\mathscr{L}$ la famille des sous-espaces vectoriels de $\bigwedge_k \mathbb{R}^d$ contenu dans le sous-espace $\{w \in \bigwedge_k \mathbb{R}^d: u \wedge w\}$ de $\bigwedge_k \mathbb{R}^d$. Parmi les éléments de $\mathscr{L}$ dont l'image dans $\mathbf{P}(\bigwedge_k \mathbb{R}^d)$ est chargée par $\Pi_k(\nu)$, choisissons en un V de dimension minimum. Pour tout $g \in G$, $gV \cap V$ est soit égal à V, soit un sous-espace de $\bigwedge_k \mathbb{R}^d$ de dimension strictement plus petite que V. Par suite, si $\bar{V}$ désigne l'image de V dans $\mathbf{P}(\bigwedge_k \mathbb{R}^d)$, $g\bar{V} \cap \bar{V}$ est soit égal à $\bar{V}$, soit de $\Pi_k(\nu)$-mesure nulle.

Il s'ensuit que, pour tous $\delta > 0$, l'ensemble des $g\bar{V}$, $g \in G$, tels que $\Pi_k(\nu)(g\bar{V}) \geqq \delta$ est fini. Il existe donc un élément de G tel que

$$\Pi_k(\nu)(h\bar{V}) = \sup_{g \in G} \Pi_k(\nu)(g\bar{V})$$

et l'ensemble $\mathscr{S} = \{g\bar{V}: \Pi_k(\nu)(g\bar{V}) = \Pi_k(\nu)(h\bar{V})\}$ est fini.

L'équation de convolution:

$$\Pi_k(\nu)(h\bar{V}) = \int_G \Pi_k(\nu)(g^{-1}h\bar{V})\,\mu(dg)$$

montre que T_μ^{-1} et par suite G_μ applique $\mathscr{S}$ dans lui-même. Si $\operatorname{card}\mathscr{S} = r$, il existe donc des éléments $g_1, \ldots, g_r$ tels que

$$G_\mu\left(\bigcup_{i=1}^r g_i\bar{V}\right) \subset \bigcup_{i=1}^r g_i\bar{V}.$$

Par suite,

$$G_\mu g_1\bar{V} \subset \bigcup_{i=1}^r g_i\{\bar{v} \in \mathbf{P}(\bigwedge_k \mathbb{R}^d): u \wedge \bar{v} = 0\}.$$

Si y désigne un élément de G dont l'image dans G/H_k appartient à $g_1\bar{V}$ et $x \in G$ est tel que $x(f_1 \wedge \ldots \wedge f_{d-k}) = u$, nous avons alors:

$$G_\mu y \subset \bigcup_{i=1}^r g_i x\{g \in G: \Delta_k(g) = 0\};$$

c'est-à-dire,

$$\prod_{i=1}^r \Delta_k(x^{-1}g_i^{-1}G_\mu y) \equiv 0.$$

Cas général

Supposons qu'il existe une mesure de probabilité μ-invariante ν non irréductible sur B. Il existe alors un translaté $g_0\bar{W}_m$ d'une variété $\bar{W}_m$ chargé par ν (on note $\bar{W}_m$ l'image de W_m dans B (voir (1.7))). Considérons alors toutes les sous-variétés algébriques de B obtenues en prenant les intersections d'un nombre fini de translatés de $\bar{W}_m$ et appelons $\mathscr{V}$ la famille de leurs composantes irréductibles.

Parmi tous éléments de $\mathscr{V}$ chargés par ν, choisissons en un de dimension minimum, soit Π. Pour tout $g \in G$, la sous variété $g\Pi \cap \Pi$ est soit égale à Π, soit une réunion finie de sous-variétés de dimensions inférieures et donc $\nu(g\Pi \cap \Pi) = 0$.

Par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas de $SL(d, \mathbb{R})$, on montre alors que l'ensemble

$$\mathscr{S} = \{g^{-1}\Pi : \nu(g^{-1}\Pi) = \sup_{x \in G} \nu(x^{-1}\Pi)\}$$

est fini, non vide et invariant par G_μ.

D'où si card $\mathscr{S} = r$, il existe $g_1, \ldots, g_r \in G$ tels que

$$G_\mu \left(\bigcup_{j=1}^{r} g_j \Pi \right) \subset \bigcup_{j=1}^{r} g_j \Pi$$

où Π est contenu dans un translaté de $\bar{W}_m$; par suite

$$G_\mu u \subset \bigcup_{j=1}^{r} g'_j \bar{W}_m$$

où $u \in \bigcup_{j=1}^{r} g_j \Pi$ et $g'_1, \ldots, g'_r \in G$; et donc

$$G_\mu \subset \bigcup_{j=1}^{r} g'_j W_m x^{-1},$$

pour $x \in G$ ayant pour image u dans B.

ii) $\Rightarrow$ i)

Réciproquement si G_μ n'est pas totalement irréductible,

$$G_\mu \subset \bigcup_{i=1}^{r} g_i (\complement N A \tilde{N} M) x,$$

pour $x, g_1, \ldots, g_r \in G$.

La fermeture de l'image de $G_\mu x^{-1}$ dans B est alors un fermé G_μ-invariant contenu dans $\bigcup_{i=1}^{r} g_i \complement \zeta(N)$. Ce fermé G_μ-invariant porte nécessairement une mesure de probabilité μ-invariante ν qui n'est donc pas irréductible.

Remarque. Il résulte de la démonstration du lemme précédent qu'un sous-groupe fermé H de G est totalement irréductible si et seulement l'une quelconque des assertions suivantes est satisfaite:

i) pour toute mesure de probabilité μ sur H adaptée à H (i.e. telle que $G_\mu = H$) les mesures μ-invariantes ν sur B sont irréductibles,

ii) H ne laisse pas invariant une réunion finie de translatés d'une sous-variété algébrique d'un des W_m, $m \in M'/M$.

(2.13) **Lemme.** *Soient μ une mesure de probabilité sur G et $(Y_i)_{i \geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ, définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans G. Soit ν une mesure de probabilité μ-invariante sur B. Nous appelons X_n le produit $Y_1 \dots Y_n$ et nous notons λ la mesure $\sum_{n \geqq 1} \frac{1}{2^n} \mu^n$.*

Alors pour $\mathbb{P} \otimes \lambda$-presque tout $(\omega, \xi) \in \Omega \times G$, les suites de mesures de probabilité $\{X_n(\omega) \cdot \nu\}_{n \geqq 1}$ et $\{X_n(\omega)\, \xi \cdot \nu\}_{n \geqq 1}$ convergent vaguement vers la même limite $\theta(\omega)$.

Preuve. Elle repose sur la théorie des martingales et sur une idée utilisée dans ([22] lemme (1.7)).

Notons $C(B)$ l'espace des fonctions continues sur B. Pour tout $\varphi \in C(B)$, la fonction $F_\varphi(g) = g\nu(\varphi)$, $g \in G$, est une fonction μ-harmonique bornée sur G (i.e. $\int_G F_\varphi(gg')\mu(dg') = F_\varphi(g)$). Il s'ensuit que la suite de v.a. $(F_\varphi(X_n))_{n \geqq 1}$ est une martingale bornée; par conséquent $F_\varphi(X_n)$ converge $\mathbb{P}$-p.s.

D'autre part, pour tout $\varphi \in C(B)$ et pour tous entiers p et r, nous avons

$$\sum_{k=1}^{p} \mathbb{E}\left[\int (F_\varphi(X_k \xi) - F_\varphi(X_k))^2 \mu^r(d\xi)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \left[\int_G F_\varphi^2(g)\, \mu^{k+r}(dg) - \int_G F_\varphi^2(g)\, \mu^k(dg)\right]$$

(en utilisant le fait que F_φ est μ-harmonique)

$$\leqq 2r \|\varphi\|_\infty^2.$$

On en déduit que pour $\mathbb{P} \otimes \lambda$-presque tout $(\omega, \xi) \in \Omega \times G$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (F_\varphi(X_k(\omega)\,\xi) - F_\varphi(X_k(\omega)))^2 < +\infty;$$

ce qui entraîne que pour $\mathbb{P} \otimes \lambda$-presque tout $(\omega, \xi) \in \Omega \times G$,

$$\lim_n F_\varphi(X_n(\omega)\,\xi) = \lim_n F_\varphi(X_n(\omega)).$$

Le lemme (2.13) se déduit alors de ce qui précède en notant qu'une suite de mesures de probabilité $\{\nu_n\}$ sur B converge vaguement si et seulement si la suite $\{\nu_n(\varphi_i)\}_{n \geqq 1}$ converge pour une suite dense $\{\varphi_i\}_{i \geqq 1}$ de $C(B)$.

(2.14) **Lemme.** *Soient μ une mesure de probabilité sur G et ν une mesure de probabilité, μ-invariante, sur B. Supposons que T_μ contienne une suite contractante et que toute mesure de probabilité μ-invariante sur B soit irréductible.*

Alors la suite de mesures $\{X_n \nu = Y_1 \dots Y_n \nu\}_{n \geqq 1}$ converge p.s. *vers une mesure de Dirac.*

Preuve. D'après le lemme (2.13), nous pouvons trouver une suite $\{\xi_i\}_{i \geqq 1}$ dense dans T_μ et un sous-ensemble mesurable Ω' de Ω de $\mathbb{P}$-mesure 1 tels que:

$$(*) \qquad \forall \omega \in \Omega', \quad \forall i \geqq 1, \quad \lim_n X_n(\omega)\, \xi_i \cdot \nu = \lim_n X_n(\omega) \cdot \nu = \theta(\omega).$$

Soient $\omega\in\Omega'$ et $x(\omega)\,a(\omega)\,\tau(\omega)\,k(\omega)$ une valeur d'adhérence de la suite $\{X_n(\omega)\}_{n\geqq 1}$ (lemme (2.10)); c'est-à-dire que, pour une suite d'entiers $\{\psi(n)\}_{n\geqq 1}$

$$X_{\psi(n)}(\omega)\cdot z\to x(\omega)\,a(\omega)\,\tau(\omega)\,k(\omega)\cdot z,\qquad \forall\, z\in\zeta([k(\omega)]^{-1}N).$$

La mesure ν étant irréductible, de $(*)$ il résulte que

$$\forall\, i\geqq 1,\qquad x(\omega)\,a(\omega)\,\tau(\omega)\,k(\omega)\,\xi_i\cdot\nu=x(\omega)\,a(\omega)\,\tau(\omega)\,k(\omega)\cdot\nu=\theta(\omega).$$

En particulier, nous avons

$$\forall\, i\geqq 1\qquad \tau(\omega)\,k(\omega)\,\xi_i\cdot\nu=\tau(\omega)\,k(\omega)\cdot\nu;$$

ce qui entraîne en passant à la fermeture

$$(**)\qquad \tau(\omega)\,k(\omega)\,\xi\cdot\nu=\tau(\omega)\,k(\omega)\cdot\nu,\qquad \forall\,\xi\in T_\mu.$$

L'élément ω de Ω' étant toujours fixé, prenons une suite contractante $\{\xi_n\}_{n\geqq 1}$ de T_μ. Ecrivons $\xi_n=x_n a_n l_n$ avec $x_n,\, l_n\in K$ et $a_n\in\exp\overline{W}$. Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que $x_n\to x$ et $l_n\to l$. D'autre part si $x\notin k^{-1}(\omega)N\tilde{N}AM$, nous pouvons trouver $\xi\in T_\mu$ tel que $\xi x\in k^{-1}(\omega)N\tilde{N}AM$. En effet dans le cas contraire, $T_\mu x$ serait contenu dans le fermé

$$\bigcup_{m\in M'/M-\{\bar e\}} k^{-1}(\omega)\,N m\tilde{N}AM=\complement\, k^{-1}(\omega)\,N\tilde{N}AM$$

de B. Il existerait alors une mesure de probabilité μ-invariante portée par ce fermé et donc non irréductible.

Nous avons alors

$$\forall\, z\in\zeta(l^{-1}N),\quad k(\omega)\,\xi\,\xi_n\cdot z\to\zeta(k(\omega)\,\xi x)\in\zeta(N)\qquad \text{et par suite,}$$

puisque ν est irréductible et $\tau(\omega)$ est une transformation continue de $\zeta(N)$,

$$\tau(\omega)\,k(\omega)\,\xi\,\xi_n\,\nu\to\varepsilon_{\tau(\omega)(\zeta(k(\omega)\,\xi x))}.$$

De l'égalité $(**)$, il résulte alors que $\tau(\omega)\,k(\omega)\,\nu$ et par suite $\theta(\omega)$ sont des mesures de Dirac. Le lemme est ainsi prouvé.

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème (2.6).

(2.15) *Preuve du théorème* (2.6). Sous les hypothèses du théorème (2.6), toute mesure de probabilité μ-invariante ν sur B est irréductible (lemme (2.12)).

D'après le lemme (2.14), $X_n\cdot\nu$ converge alors p.s. vers une mesure de Dirac ε_Z. Mais alors, pour tous $y, g\in G$, la suite $yX_n g$ contracte p.s. la mesure irréductible $g^{-1}\nu$ en la mesure de Dirac $\varepsilon_{y\cdot Z}$. D'après le lemme (2.11), $yX_n g$ s'écrit $x_n a_n k_n$, $x_n, k_n\in K$ et $a_n\in\exp\overline{W}$, avec $\zeta(x_n)\xrightarrow{\text{p.s.}} y\cdot Z$ et $\forall\,\alpha\in\Delta_-$, $\varphi_\alpha(a_n)\xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.

Pour toute mesure de probabilité irréductible λ sur B nous avons alors (lemme (2.10)) $yX_n g\cdot\lambda\to\varepsilon_{y\cdot Z}$.

Enfin la seule mesure de probabilité μ-invariante sur B est évidemment la loi de la v.a. Z.

Notons aussi que des lemmes (2.10) et (2.11) il résulte que l'on a:

(2.16) **Corollaire.** *Une suite $\{g_n\}$ d'éléments de G est contractante si et seulement si pour une (ou toute) mesure de probabilité quasi-invariante λ d'un espace homogène G/NAM, les seules valeurs d'adhérence de la suite de mesures $\{g_n \cdot \lambda\}_{n \geqq 1}$ sont des mesures de Dirac.*

D) Généralisation du théorème principal

Dans ce qui précède, nous avons priviligié les sous-groupes paraboliques minimaux de G.

Donnons-nous à présent un sous-groupe parabolique quelconque P de G et considérons «la classe de conjugaison de P»; c'est-à-dire l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G qui sont les conjugués de P. Nous notons $C(P)$ cette classe et nous appelons $H(P)$ la classe d'espaces homogènes de $G\{G/P', P' \in C(P)\}$.

Posons la définition:

(2.17) *Définition.* Nous disons qu'une suite $\{g_n\}_{n \geqq 1}$ d'éléments de G est *contractante* vis à vis de la classe d'espaces homogènes $H(P)$ si pour une (ou toute) mesure de probabilité quasi-invariante λ d'un espace homogène G/P, les seules valeurs d'adhérence de la suite $\{g_n \cdot \lambda\}_{n \geqq 1}$ sont des mesures de Dirac.

(2.18) Il est clair qu'une suite $\{g_n\}$ d'éléments de G est contractante vis-à-vis de $H(P)$ si et seulement si pour une (ou pour toute) décomposition d'Iwasawa $G=NAK$ de G elle vérifie la propriété suivante:

Désignons par W (resp. Δ_-) la chambre de Weyl (resp. l'ensemble des racines) ayant servi à définir N; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_-. Soit Θ le sous-ensemble de Σ tel que le sous-groupe parabolique $\tilde{P}_\Theta$ (voir (1.6)) appartienne à $C(P)$. Alors g_n s'écrit $x_n a_n k_n$ avec $x_n, k_n \in K$, $a_n \in \exp \bar{W}$ et $\varphi_\alpha(a_n) \to 0$, pour tout $\alpha \in \Sigma - \Theta$ (et par suite pour tout $\alpha \in \Delta_- \cap \complement [\Theta]$).

Nous avons alors le théorème:

(2.19) **Théorème.** *Soient μ une mesure de probabilité sur G et $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ. Soit P un sous-groupe parabolique de G.*

Supposons que T_μ contienne une suite contractante vis-à-vis de la classe d'espaces homogènes $H(P)$ et que G_μ soit totalement irréductible.

Soit $G=NAK$ une quelconque décomposition d'Iwasawa de G. Désignons par W(resp. Δ_-) *la chambre de Weyl* (resp. *l'ensemble des racines*) *ayant servi à définir N; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_-. Soit Θ le sous-ensemble de Σ tel que le sous-groupe parabolique $\tilde{P}_\Theta$ soit un conjugué de P.*

Alors il existe une unique mesure de probabilité μ-invariante ν sur $G/\tilde{P}_\Theta$ et cette mesure est irréductible (i.e. $g\nu(Nm\tilde{P}_\Theta)=0$, $\forall g \in G$, $\forall m \in M'/M'_\Theta - \{\bar{e}\}$).

Soient $\{y_n\}$ et $\{g_n\}$ deux suites d'éléments de G convergeant vers des éléments y et g de G. Alors pour toute mesure de probabilité irréductible λ sur $G/\tilde{P}_\Theta$, la suite de mesures $\{y_n Y_1 \dots Y_n g_n \cdot \lambda\}_{n \geqq 1}$ converge p.s. *vers une mesure de Dirac $\varepsilon_{y \cdot Z}$ indépendante de $\{g_n\}$. De plus, si nous écrivons $y_n Y_1 \dots Y_n g_n = x_n a_n k_n$ avec x_n, $k_n \in K$ et $a_n \in \exp \bar{W}$, alors: l'image de la suite x_n dans $G/\tilde{P}_\Theta$ converge* p.s. *vers $y \cdot Z$; la suite $\varphi_\alpha(a_n)$ converge* p.s. *vers zéro, pour tout $\alpha \in \Sigma - \Theta$; il existe sur*

$P_\Theta \backslash G$ une unique mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{\nu}$ et l'image de la suite k_n dans $P_\Theta \backslash G$ converge en loi vers $\tilde{\nu} \cdot g$.

Le théorème (2.19) se démontre de la même façon que le théorème (2.6) qui correspond au cas particulier des sous-groupes paraboliques minimaux de G.

On en déduit immédiatement les deux corollaires suivants:

(2.20) **Corollaire.** *Soient μ une mesure de probabilité sur G et $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ. Supposons que G_μ soit totalement irréductible.*

Soient $\{y_n\}$ et $\{g_n\}$ deux suites convergentes d'éléments de G, nous notons $x_n a_n k_n$ la décomposition polaire du produit $y_n Y_1 \dots Y_n g_n$.

Alors pour tout $\alpha \in \Sigma$, nous avons l'alternative suivante:

ou bien, $\varphi_\alpha(a_n)$ converge p.s. *vers zéro;*

ou bien, pour tous $y, g \in G$, il existe un réel $c(y, g) > 0$ tel que

$$y T_\mu g \subset K\{a \in \exp \overline{W}\colon c(y, g) \leqq \varphi_\alpha(a) \leqq 1\} K.$$

(2.21) **Corollaire.** *Soit T un semi-groupe fermé de G engendrant un sous-groupe fermé de G totalement irréductible.*

Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G.

Alors T contient une suite contractante vis-à-vis de $H(P)$ et une suite contractante vis-à-vis de $H(P')$ si et seulement si elle contient une suite contractante vis-à-vis de $H(P \cap P')$.

Dans notre nouvelle situation, le corollaire (2.8) devient:

(2.22) **Proposition.** *Avec les hypothèses et notations du théorème* (2.19), *écrivons $y_n Y_1 \dots Y_n g_n = N_n A_n K_n$ avec $N_n \in N$, $A_n \in A$ et $K_n \in K$.*

Alors l'image de la suite N_n dans $G/\tilde{P}_\Theta$ converge p.s. *vers la* v.a. *$y \cdot Z$; la suite $\{A_n a_n^{-1}\}$ reste presque sûrement dans un compact de A (pour tout $\alpha \in \Sigma - \Theta$, nous avons donc $\varphi_\alpha(A_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$); et l'image de la suite K_n dans $P_\Theta \backslash G$ converge en loi vers $\tilde{\nu} \cdot g$.*

Preuve de la proposition (2.22). Quitte à remplacer Θ par un sous-ensemble de Θ, nous pouvons supposer que

$$\Theta = \{\alpha \in \Sigma\colon \text{la suite } \{\varphi_\alpha(a_n)\} \text{ ne converge pas vers zéro}\}.$$

D'après le corollaire (2.20) il existe alors un réel $c > 0$ tel que

$$\forall \alpha \in \Theta, \quad \inf_n \varphi_\alpha(a_n) \geqq c \quad \text{p.s.}$$

La proposition (2.22) résulte alors du théorème (2.19) et du lemme suivant:

(2.23) **Lemme.** *Soit $\{g_n\}$ une suite d'éléments de G dont les décompositions polaires $x_n a_n k_n$ vérifient:*

i) *l'image de la suite $\{x_n\}$ dans $G/\tilde{P}_\Theta$ converge vers un élément x appartenant à l'image de N dans $G/\tilde{P}_\Theta$.*

ii) $\varphi_\alpha(a_n) \to 0$, $\forall \alpha \in \Sigma - \Theta$ *et* $0 < c \leqq \varphi_\alpha(a_n) \leqq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \Theta$.

Soit $g_n = N_n A_n K_n$ la décomposition d'Iwasawa de g_n. Alors l'image de N_n dans $G/\tilde{P}_\Theta$ converge vers x; la suite $\{A_n a_n^{-1}\}$ reste dans un compact de A; et K_n

$=k'_n k_n$, *où* $\{k'_n\}$ *est une suite d'éléments de* K *dont l'image dans* $P_\Theta\backslash G$ *converge vers l'image de l'élément neutre.*

Preuve du lemme. Nous avons $\tilde{P}_\Theta=\tilde{N}AK_\Theta$, où K_Θ est le centralisateur de $A_\Theta=\{a\in A: \varphi_\alpha(a)=1; \forall\alpha\in\Theta\}$ dans K. L'espace homogène $G/\tilde{P}_\Theta$ s'identifie alors à l'espace K/K_Θ. D'après l'hypothèse i), x_n s'écrit $x'_n k'_n$, où $\{x'_n\}$ est une suite d'éléments de K convergeant vers un élément de $N\tilde{P}_\Theta$ et $\{k'_n\}$ est une suite d'éléments de K_Θ.

D'autre part, nous avons

$$N\tilde{P}_\Theta=N^{e,\Theta}\tilde{P}_\Theta=P_\Theta\tilde{N}^{e,\Theta}=\bigcup_{m\in M'_\Theta/M} NmA\tilde{N}M$$

$$\text{où } N^{e,\Theta}=\exp\Big(\bigoplus_{\alpha\in\complement[\Theta]\cap\Delta-}\mathscr{G}_\alpha\Big),\qquad \tilde{N}^{e,\Theta}=\exp\Big(\bigoplus_{\alpha\in\complement[\Theta]\cap\Delta+}\mathscr{G}_\alpha\Big).$$

De plus l'application qui au couple (u,p) associe le produit up est un isomorphisme de variétés analytiques des produits cartésiens $N^{e,\Theta}\times\tilde{P}_\Theta$ et $P_\Theta\times\tilde{N}^{e,\Theta}$ sur l'ouvert $N\tilde{P}_\Theta$ de G.

Puisque la suite $\{x'_n\}$ converge vers un élément de l'ouvert $N\tilde{P}_\Theta$, à partir d'un certain rang, x'_n s'écrit $p_n\tilde{u}_n$, où $\{p_n\}$ [resp. vers$\{\tilde{u}_n\}$] est une suite d'éléments de P_Θ [resp. $\tilde{N}^{e,\Theta}$] convergeant vers $p\in P_\Theta$ [resp. vers $\tilde{u}\in\tilde{N}^{e,\Theta}$].

Considérons les deux éléments a'_n et a''_n de A définis par:

$$\begin{aligned}
&\varphi_\alpha(a'_n)=1 &&\forall\alpha\in\Theta \quad\text{et}\quad \varphi_\alpha(a'_n)=\varphi_\alpha(a_n) &&\forall\alpha\in\Sigma-\Theta;\\
&\varphi_\alpha(a''_n)=\varphi_\alpha(a_n) &&\forall\alpha\in\Theta \quad\text{et}\quad \varphi_\alpha(a''_n)=1 &&\forall\alpha\in\Sigma-\Theta.
\end{aligned}$$

a'_n et a''_n sont respectivement des éléments de A_Θ et $A_{\Sigma-\Theta}$ et nous avons $a_n=a'_n a''_n$.

Comme $P_\Theta=NAK_\Theta$, p_n s'écrit $u_n b_n k''_n$ où $\{u_n\}$ [resp. $\{b_n\}$, $\{k''_n\}$] est une suite d'éléments de N [resp. A, K_Θ] convergeant vers $u\in N$ [resp. $b\in A$, $k''\in K_\Theta$].

On en déduit que:

$$\begin{aligned}
x_n a_n&=u_n b_n k''_n\tilde{u}_n k'_n a'_n a''_n\\
&=u_n b_n a'_n k''_n(a'^{-1}_n\tilde{u}_n a'_n)k'_n a''_n
\end{aligned}$$

car les éléments de A_Θ commutent avec ceux de K_Θ.

D'après l'hypothèse ii), la suite $\{a''_n\}$ reste dans un compact de $A_{\Sigma-\Theta}$ et la suite $\{a_n^{-1}\tilde{u}_n a_n\}$ converge vers l'élément neutre de G. Par suite, $k''_n(a'^{-1}_n u_n a'_n)k'_n a''_n$ s'écrit $v_n c_n l_n$ où $\{v_n\}$ [resp. $\{c_n\}$, $\{l_n\}$] est une suite d'éléments d'un compact de N [resp. de A, de K].

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
N_n&=u_n(b_n a'_n v_n a'^{-1}_n b_n^{-1}),\\
A_n&=b_n a'_n c_n,\\
K_n&=l_n k_n.
\end{aligned}$$

Le lemme se déduit de ces égalités en remarquant aussi que les seules valeurs d'adhérence de la suite $\{b_n a'_n v_n a'^{-1}_n b_n^{-1}\}$ (resp. $\{l_n\}$) appartiennent à

$$N\cap P_\Theta=\exp\Big(\bigoplus_{\alpha\in[\Theta]\cap\Delta-}\mathscr{G}_\alpha\Big)\qquad[\text{resp. à } K_\Theta].$$

Notons aussi que l'on a:

(2.24) *Remarque.* Avec les hypothèses du lemme (2.23), soit α un élément de $\mathscr{A}^*$ tel que $\varphi_\alpha(a(K_\Theta A_{\Sigma-\Theta}))=1$, où, pour $g\in G$, on note $a(g)$ la composante de g sur A dans la décomposition d'Iwasawa $G=NAK$. Alors la suite $\varphi_\alpha(A_n a_n^{-1})$ converge p.s.

3. Applications

A) Cocycles μ-négatifs

Nous choisissons une décomposition d'Iwasawa $G=NAK$ de G. Nous désignons par Δ_- l'ensemble des racines ayant servi à définir N; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_- et par M le centralisateur de A dans K.

(3.1) *Définition* [7]. Soit E un espace sur lequel G opère continûment à droite. On appelle cocycle sur E, toute application continue ρ de $E\times G$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\rho(u,g_1g_2)=\rho(u,g_1)+\rho(u\cdot g_1,g_2) \qquad (u\in E, g_1,g_2\in G).$$

Nous disons qu'un cocycle sur E est K-invariant si, en outre,

$$\rho(u,k)=0 \qquad (u\in E, k\in K).$$

[Nous avons alors $\rho(u,gk)=\rho(u,g)\,(u\in E, k\in K, g\in G)$].

Nous avons évidemment une définition analogue pour un G-espace à gauche.

(3.2) Si (k,g) est un élément de $K\times G$, désignons par $\tilde{H}(k,g)$ la composante sur $\mathscr{A}$, dans la décomposition d'Iwasawa $N(\exp\mathscr{A})K$, de l'élément kg de G. On vérifie que:

i) $\tilde{H}(k,g_1g_2)=\tilde{H}(k,g_1)+\tilde{H}(k\cdot g_1,g_2)$, $(k\in K,\ g_1,\ g_2\in G)$, où $k\cdot g_1$ désigne la composante sur $K(=NA\backslash G)$ de l'élément kg_1 de G.

ii) $\tilde{H}(\gamma k,g)=\tilde{H}(k,g)\,(\gamma\in M, k\in K, g\in G)$.

Pour $u\in\tilde{B}=NAM\backslash G$ et $g\in G$, posons alors

$$H(u,g)=\tilde{H}(k,g)$$

où k est un quelconque des éléments de K dont l'image dans $\tilde{B}$ est u. Nous obtenons alors une fonction de $\tilde{B}\times G$ dans $\mathscr{A}$ vérifiant

$$*\begin{cases} H(u,g_1g_2)=H(u,g_1)+H(u\cdot g_1,g_2) & (u\in\tilde{B}, g_1,g_2\in G)\\ H(u,k)=0 & (u\in\tilde{B}, k\in K)\end{cases}$$

On montre alors que l'on a [7]:

(3.3) **Lemme.** *Tout cocycle K-invariant sur $\tilde{B}=NAM\backslash G$ est de la forme $\rho(u,g)=\alpha(H(u,g))$, pour une certaine forme linéaire réelle α sur $\mathscr{A}$.*

(3.4) L'ensemble des cocycles K-invariant sur $\tilde{B}$ forme un espace vectoriel réel dont la dimension est égale à celle de l'espace vectoriel réel $\mathscr{A}$. Une base de l'espace des cocycles K-invariants sur $\tilde{B}$ est constituée par $\{\alpha \circ H, \alpha \in \Sigma\}$.

Soit μ une mesure de probabilité sur G. Nous disons qu'un cocycle K-invariant ρ est *μ-négatif* si, pour tout $u \in B$, la suite $\{\rho(u, Y_1 \dots Y_n)\}$ converge p.s. vers $(-\infty)$; où $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ désigne une suite de v.a. indépendantes de loi μ à valeurs dans G.

Le théorème suivant nous dit que les cocycles $\{\alpha \circ H, \alpha \in \Delta_-\}$ sont μ-négatifs pour une grande classe de mesures de probabilité μ.

(3.5) **Théorème.** *Soient μ une mesure de probabilité sur G et $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de loi μ à valeurs dans G.*

Supposons que T_μ contienne une suite contractante (définition (2.1)) *et que G_μ soit totalement irréductible.*

Alors pour tout $u \in \tilde{B}$ et tout $\alpha \in \Delta_-$,

$$\alpha(H(u, Y_1 \dots Y_n)) \xrightarrow{\text{p.s.}} (-\infty).$$

Supposons en outre que, pour un certain $\alpha \in \Delta_-$, $\int_G \sup_{u \in \tilde{B}} |\alpha \circ H(u, g)|\, \mu(dg) < +\infty$. Alors, si nous appelons $\tilde{\nu}$ l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur $\tilde{B}$ (corollaire (2.7)), *pour tout $u \in \tilde{B}$, la suite $\left\{\frac{1}{n}\alpha(H(u, Y_1 \dots Y_n))\right\}_{n \geqq 1}$ converge* p.s. *vers le réel strictement négatif $\int_G \int_{\tilde{B}} \alpha(H(u,g))\, \tilde{\nu}(du)\, \mu(dg)$.*

Preuve. La première assertion résulte du corollaire (2.8).

Lorsque $\int_G \sup_{u \in \tilde{B}} |\alpha \circ H(u, g)|\, \mu(dg) < +\infty$, nous savons ([7], lemme (7.3)) que, pour tout $u \in \tilde{B}$,

$$\frac{1}{n} \alpha \circ H(u, Y_1 \dots Y_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_G \int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u, g)\, \tilde{\nu}(du)\, \mu(dg).$$

Le théorème (3.5) résulte alors du lemme suivant, bien connu en théorie ergodique.

(3.6) **Lemme.** *Soient (X, T, λ) un système dynamique $(T\lambda = \lambda,\ \lambda(X) = 1)$ et f une fonction intégrable à valeurs réelles. Si l'on a p.p. $\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = -\infty$, alors $\int_X f\, d\lambda < 0$.*

Preuve. Par des arguments standards de la théorie ergodique, on se ramène au cas où T est inversible et λ est ergodique.

Cela dit considérons le produit $Y = X \times \mathbb{R}$ et la transformation S de Y définie par $S(x, r) = (Tx, r + f(x))$ qui préserve la mesure $\nu = \lambda \otimes \rho$ où ρ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Comme

$$S^n(x, r) = \left(T^n x, r + \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x)\right) = (T^n x, s_n(x, r)),$$

il suffit de voir que si $\int_X f\,d\lambda=0$, alors pour tout $\varepsilon>0$ donné, il existe, pour presque tout $(x,r)\in Y_\varepsilon=X\times[-\varepsilon,\varepsilon]$, une infinité d'entiers n tels que $S^n(x,r)\in Y_\varepsilon$.

Un sous ensemble A de Y est dit *errant pour* S, si A est non ν-négligeable et les $S^k A\,(k>0)$ sont disjoints relativement à ν. Montrons que si $\int_X f\,d\lambda=0$ il ne peut y avoir de sous-ensemble errant. L'ergodicité de λ donne $\lim_n(s_n(x,r)/n)=0$ p.p.; on peut donc trouver $B\subset A$ non ν-négligeable tel que, uniformément sur B on ait $\lim_n(s_n(x,r)/n)=0$, ce qui donne $\lim_n(\nu(\bigcup_{0\leqq k\leqq n} S^k B)/n)=0$. Mais si les $S^k B$ étaient tous ν-disjoints on aurait $\nu(\bigcup_{0\leqq k\leqq n} S^k B)=n\,\nu(B)$; ce qui contredit la relation précédente.

Soit alors C l'ensemble des points de Y_ε dont les images successives par S n'appartiennent pas à Y_ε; en raison de l'inversibilité de S, C est errant s'il est non ν-négligeable. On obtient alors que presque tout élément de Y_ε revient dans Y_ε par l'itération de S. Une transformation $\tilde{S}$ de Y se trouve alors définie par la formule $\tilde{S}(x,r)=S^{n(x,r)}(x,r)$ où $n(x,r)$ désigne le premier temps de retour de (x,r) dans Y_ε. On obtient par itération de $\tilde{S}$ une infinité de retours de (x,r) dans Y_ε, ce qui justifie le lemme.

Plus généralement nous avons:

(3.7) **Théorème.** *Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que G_μ soit totalement irréductible. Soit $\{Y_i\}_{i\geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ, à valeurs dans G.*

Appelons Θ le plus petit sous-ensemble de Σ tel que T_μ contienne une suite contractante vis-à-vis de la classe d'espaces homogènes $H(\tilde{P}_\Theta)$ (définition (2.17)). *Alors, pour toute suite convergente $\{u_n\}$ d'éléments de $\tilde{B}$, nous avons:*

$$\forall\alpha\in\Sigma-\Theta,\qquad \alpha(H(u_n,Y_1\dots Y_n))\xrightarrow{\text{p.s.}}(-\infty)$$

$$\forall\alpha\in\Theta,\qquad \sup_n|\alpha(H(u_n,Y_1\dots Y_n))|<+\infty\quad\text{p.s.}$$

Supposons en outre que pour un certain $\alpha\in\Delta_-$, $\int_G\sup_u|\alpha\circ H(u,g)|\,\mu(dg)<+\infty$. Alors l'expression $\tau_\mu(\alpha)=\int_G\int_{\tilde{B}}\alpha\circ H(u,g)\,\tilde{\nu}(du)\,\mu(dg)$ est indépendante de la mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{\nu}$ sur $\tilde{B}$; les suites $\left\{\frac{1}{n}\alpha\circ H(u_n,Y_1\dots Y_n)\right\}_{n\geqq 1}$ et $\left\{\frac{1}{n}\operatorname{Log}\varphi_\alpha(a_n)\right\}$, où $Y_1\dots Y_n=x_n a_n k_n$ (décomposition polaire), convergent toutes vers $\tau_\mu(\alpha)$ qui est strictement négatif si $\alpha\in\Sigma-\Theta$ (et par suite si $\alpha\in\complement[\Theta]\cap\Delta_-$).

Preuve. La première assertion résulte du théorème (2.19), du corollaire (2.20) et de la proposition (2.22).

Lorsque $\int_G\sup_u|\alpha\circ H(u,g)|\,\mu(dg)<+\infty$, désignons par π une mesure de probabilité μ-invariante extrémale de $\tilde{B}$. D'après le théorème ergodique, pour $\pi\otimes\mathbb{P}$ - presque tout $(u,\omega)\in\tilde{B}\times\Omega$, la suite $\left\{\frac{1}{n}\alpha\circ H(u,Y_1(\omega)\dots Y_n(\omega))\right\}$ converge vers $\tau_\pi(\alpha)$.

Soit k un élément de K et écrivons:

$$k Y_1 \dots Y_n = N_n(k)\, A_n(k)\, K_n(k) \qquad \text{(décomposition d'Iwasawa)}$$

$$k Y_1 \dots Y_n = k x_n a_n k_n \qquad \text{(décomposition polaire).}$$

D'après la proposition (2.22) nous savons que, pour toute suite convergente $\{k_n\}$ d'éléments de K, la suite $\{A_n(k_n) a_n^{-1}\}$ reste p.s. dans un compact de A. Comme $\alpha \circ H(u, Y_1 \dots Y_n) = \operatorname{Log}(\varphi_\alpha(A_n(k))$ pour tout $k \in K$ ayant u pour image dans $\tilde{B}$, il résulte de ce qui précède que les suites

$$\left\{\frac{1}{n} \alpha(H(u_n, Y_1 \dots Y_n))\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\frac{1}{n} \operatorname{Log} \varphi_\alpha(a_n)\right\}$$

convergent vers $\tau_\pi(\alpha)$. On en déduit que cette intégrale est indépendante de la mesure de probabilité μ-invariante π. D'autre part, lorsque $\alpha \in \Sigma - \Theta$, le lemme (3.6) nous dit que cette intégrale est strictement négative.

(3.8) **Corollaire.** *Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que G_μ soit totalement irréductible.*

Soient $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ une suite de v.a. *indépendantes et de loi μ, à valeurs dans G. Soit ρ un cocycle K-invariant sur $\tilde{B} \times G$ tel que $\int_G \sup_u |\rho(u, g)|\, \mu(dg) < +\infty$.*

Alors l'expression $\tau(\mu) = \iint \rho(u, g)\, \tilde{\nu}(du)\, \mu(dg)$ est indépendante de la mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{\nu}$; pour toute suite convergente $\{u_n\}$ d'éléments de $\tilde{B}$, la suite de v.a.r. *$\left\{\frac{1}{n} \rho(u_n, Y_1 \dots Y_n)\right\}$ converge* p.s. *vers $\tau(\mu)$; et la suite de fonctions $\left\{\frac{1}{n} \mathbb{E}[\rho(\cdot, Y_1 \dots Y_n)]\right\}$ converge uniformément sur $\tilde{B}$ vers $\tau(\mu)$.*

Preuve. Les deux premières assertions résultent immédiatement du théorème (3.7).

Pour prouver la dernière assertion, il suffit de prouver que pour toute suite $\{v_n\}$ d'éléments de $\tilde{B}$, la suite $U_n = \mathbb{E}[w_n]$, où $w_n = \rho(v_n, Y_1 \dots Y_n)$, converge vers $\tau(\mu)$. Soit α une valeur d'adhérence de U_n; il existe alors une suite d'entiers $\{n_k\}$ telle que $U_{n_k} \to \alpha$ et $v_{n_k} \to v$. D'après ce qui précède, la suite w_{n_k} converge p.s. vers $\tau(\mu)$.

D'autre part, l'inégalité $|w_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sup_u |\rho(u, Y_k)|$ montre que la suite de v.a. $\{w_n\}$ est équi-intégrable. On en déduit que la suite de v.a. $\{w_{n_k}\}$ converge, p.s. et dans $\mathbb{L}^1$, vers $\tau(\mu)$. $\tau(\mu)$ est donc la seule valeur d'adhérence de la suite U_n et le corollaire est démontré.

Signalons au passage la conséquence suivante:

(3.9) **Corollaire.** *Soit μ une mesure de probabilité sur G ayant un moment d'ordre 1 et telle que G_μ soit totalement irréductible.*

Alors pour tout $\alpha \in \Delta_-$,

$$\int_G \int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u, g)\, \tilde{\nu}(du)\, \mu(dg) = -\int_G \int_{\tilde{B}} \alpha \circ \operatorname{Ad} m_s(H(u, g))\, \check{\nu}(du)\, \check{\mu}(dg)$$

où $\check{\mu}$ est l'image de μ par l'application $g \in G \to g^{-1}$; $\tilde{\nu}$(resp. $\check{\nu}$) *est une quelconque mesure de probabilité μ-invariante (*resp. *$\check{\mu}$-invariante) sur $\tilde{B}$.*

Preuve. Notons d'abord que si $\alpha \in \Delta_-$ alors $\alpha \circ \mathrm{Ad}\, m_s \in \Delta_+$ et $(-\alpha \circ \mathrm{Ad}\, m_s) \in \Delta_-$.

D'autre part soit V un voisinage compact de l'élément neutre dans G, nous disons que μ possède un moment d'ordre 1 si $\int_G \delta_V(g)\, \mu(dg) < +\infty$, où

$$\delta_V(g) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : g \in V^n\}.$$

Cette définition est évidemment indépendante du choix de V.

Ceci dit nous avons vu que l'expression $\tau_\mu(\alpha) = \int_G \int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u,g)\, \tilde{\nu}(du)\, \mu(dg)$ est indépendante de la mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{\nu}$ et l'on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log}(\varphi_\alpha(a_n)) = \tau_\mu(\alpha),$$

où $Y_1 \ldots Y_n = x_n a_n k_n$ (décomposition polaire).

De même si $Y_1^{-1} \ldots Y_n^{-1} = \check{x}_n \check{a}_n \check{k}_n$ (décomposition polaire), alors l'expression $\tau_{\check{\mu}}(\alpha) = \int_G \int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u,g)\, \check{\nu}(du)\, \check{\mu}(dg)$ est indépendante de la mesure de probabilité $\check{\mu}$-invariante $\check{\nu}$ et l'on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log}(\varphi_\alpha(\check{a}_n)) = \tau_{\check{\mu}}(\alpha).$$

Mais les v.a. $(Y_n \ldots Y_1)^{-1}$ et $(Y_1 \ldots Y_n)^{-1}$ ont la même loi. En outre $(Y_1 \ldots Y_n)^{-1}$ admet la décomposition polaire $(k_n^{-1} m_s)(m_s^{-1} a_n^{-1} m_s)(m_s^{-1} x_n^{-1})$. On en déduit que les v.a. $\check{a}_n$ et $m_s^{-1} a_n^{-1} m_s$ ont la même loi. D'où le résultat.

B) Cocycles négatifs $(G = SL(d, \mathbb{R}))$

La propriété de négativité de la limite de la v.a. $\alpha(H(u, Y_1 \ldots Y_n))$, pour $u \in \tilde{B} = NAM \backslash G$ et $\alpha \in \Delta_-$, peut être reliée à la négativité de certaines intégrales par rapport à la mesure K-invariante $\tilde{m}$ sur $\tilde{B}$.

(3.10) *Définition.* Un cocycle K-invariant ρ sur $\tilde{B}$ est dit *négatif* si

$$\int_{\tilde{B}} \rho(u,g)\, \tilde{m}(du) \leqq 0, \qquad \forall g \in G.$$

(3.11) **Théorème.** *Les formes linéaires α sur $\mathscr{A}$ telles que le cocycle K-invariant $\alpha \circ H$ soit négatif forment un cône convexe dont les génératrices extrémales sont engendrées par les racines simples négatives (*i.e. *par Σ).*

Avant de justifier cet énoncé, nous montrons deux lemmes, pour $G = SL(d, \mathbb{R})$. Pour tout $l \in \{1, \ldots, d-1\}$ et pour tout $g = ((a_{ij})) \in G$, nous appelons $\Delta_l(g)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{d-l+1\, d-l+1} & \cdots & a_{d-l+1\, d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d\, d-l+1} & \cdots & a_{dd} \end{vmatrix}.$$

Nous posons $\delta(g)=\inf\{|\Delta_l(g)|: l\in\{1,\dots,d-1\}\}$. Si g est un élément de G, nous désignons par $a(g)$ la composante sur A, dans la décomposition d'Iwasawa $G=NAK$, de g et nous notons $\|g\|=\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^d_*}\frac{\|gu\|}{\|u\|}$.

(3.12) **Lemme.** *Il existe un entier $p\geqq 1$ et une constante $C>0$ tels que, pour tout élément k de K,*

$$\sup_{x\in\operatorname{Exp}\overline{W}}\|x^{-1}a(kx)\|\leqq C(\delta(k))^{-p}.$$

Preuve. Si $\delta(k)=0$, l'inégalité est triviale. Lorsque $\delta(k)>0$, k s'écrit $k=ub\tilde{u}\gamma$ avec $u\in N$, $b\in A$, $\tilde{u}\in\tilde{N}$, $\gamma\in M$; et les coefficients des matrices u, a et $\tilde{u}$ sont des polynômes en les coefficients de k et les inverses des mineurs $\Delta_l(k)$, $l\in\{1,\dots,d-1\}$. Il existe donc une constante $C_1>0$ et un entier $p\geqq 1$ tels que

$$\forall k\in K,\qquad \|b(k)\|\,\|\tilde{u}(k)\|\leqq C_1(\delta(k))^{-p}.$$

D'autre part, pour tout élément g de G, $\|a(g)\|\leqq\|g\|$. En effet la décomposition d'Iwasawa de g s'obtient en procédant à l'orthogonalisation du système de vecteurs colonnes $\{gf_d,\dots,gf_1\}$ de g; si bien que les éléments de la matrice diagonale $a(g)$ sont respectivement inférieurs aux normes de ces vecteurs colonnes.

Ceci dit nous avons, pour $x\in\operatorname{Exp}\overline{W}$ et $k\in K$ avec $\delta(k)>0$,

$$kx=nbx(x^{-1}\tilde{u}x)\gamma$$

et

$$\|x^{-1}a(kx)\|=\|ba(x^{-1}\tilde{u}x)\|\leqq\|b\|\,\|x^{-1}\tilde{u}x\|.$$

Puisque $x\in\operatorname{Exp}\overline{W}$, chaque élément de la matrice triangulaire inférieure $x^{-1}\tilde{u}x$ est, en module, inférieur au module de l'élément correspondant de la matrice $\tilde{u}$. Il existe donc une constante $C_2>0$ telle que

$$\sup_{x\in\operatorname{Exp}\overline{W}}\|x^{-1}\tilde{u}x\|\leqq C_2\|\tilde{u}\|.$$

On en déduit alors l'inégalité voulue avec $C=C_1C_2$.

(3.13) **Lemme.** *Il existe une constante $C>0$ telle que pout tout $0<\varepsilon<1$,*

$$m_K(\{k\in K: \delta(k)<\varepsilon^{d-1}\})\leqq C\varepsilon$$

Cette inégalité est justifiée en ([24], corollaire du lemme 1).

(3.14) **Corollaire.** *Si α est une forme linéaire sur $\mathscr{A}$, la fonction F_α définie par*

$$F_\alpha(u)=\sup_{X\in\overline{W}}|\alpha\circ H(u,\operatorname{Exp}X)-\alpha(X)|\qquad(u\in\tilde{B}),$$

est $\tilde{m}$-intégrable.

Preuve. Du lemme (3.13), il résulte que la fonction $u\in\tilde{B}\to\operatorname{Log}\delta(u)$ est $\tilde{m}$-intégrable [on notera que $\delta(k\gamma)=\delta(\gamma k)=\delta(k)$, $\forall k\in K$, $\forall\gamma\in M$ et donc δ peut être considérée comme une fonction sur $M\backslash K\approx\tilde{B}$].

Le corollaire (3.14) est alors une conséquence de l'inégalité du lemme (3.12).

(3.15) *Preuve du théorème* (3.11). Montrons d'abord la négativité de l'intégrale $\int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u,g)\tilde{m}(du)$ pour $\alpha \in \Delta_-$. Comme cette intégrale est une fonction de g K-bi-invariante, elle est aussi égale à

$$\int_G \int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u,y)\,\tilde{m}(du)\,\mu(dy),$$

où μ est la probabilité K-bi-invariante $m_K * \varepsilon_g * m_K$ sur G.

Lorsque $g \notin K$, la mesure μ vérifie les hypothèses du théorème (3.5). D'après ce théorème, nous avons donc

$$\int_{\tilde{B}} \alpha(H(u,g))\,\tilde{m}(du) = \int_G \int_{\tilde{B}} \alpha(H(u,g)\,\tilde{m}(du)\,\mu(dg) < 0.$$

Inversement, supposons que $\int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u,g)\,\tilde{m}(du) \leqq 0$, $\forall g \in G$, et montrons que α est une combinaison linéaire à coefficients positifs des racines négatives.

Pour tout $X \in \overline{W}$ et tout entier $n \geqq 1$, nous avons, en posant $b = \operatorname{Exp} X$:

$$\begin{aligned} n\alpha(X) &\leqq \alpha \circ H(u,b^n) + F_\alpha(u) \\ &\leqq \int_{\tilde{B}} \alpha \circ H(u,b^n)\,\tilde{m}(du) + \int_{\tilde{B}} F_\alpha(u)\,\tilde{m}(du); \end{aligned}$$

et donc, d'après l'hypothèse,

$$n\alpha(X) \leqq \int_{\tilde{B}} F_\alpha(u)\,\tilde{m}(du).$$

On en déduit que $\alpha(X) \leqq 0$, $\forall X \in \overline{W}$; c'est-à-dire $\alpha \in \Delta_-$.

Le théorème (3.11) est ainsi prouvé.

C) Compactification de l'espace symétrique (*cas* $G = Sl(d, \mathbb{R})$)

On donne ici une interprétation géométrique de la convergence de $X_n(\omega)v$ vers une mesure de Dirac: l'image canonique de $X_n(\omega)$ dans l'espace symétrique G/K convenablement compactifié, converge vers un point frontière de G/K et l'ensemble de ces limites s'identifie à la frontière de Furstenberg $B = G/\tilde{N}AM$.

Désignons par m_B la mesure K-invariante sur B, par $\Lambda = \overline{Gm_B}$ la fermeture en topologie vague de l'orbite de m_B sous G, espace qui contient G/K comme partie dense [6], l'identification étant réalisée par $g \to gm_B$. La structure de Λ comme G-espace a été étudiée par C.C. Moore (cf. en particulier [18]) dans le cas général d'un groupe semi-simple. On retrouve ici simplement ces résultats, dans le cas particulier $G = Sl(d, \mathbb{R})$, grâce à une réalisation particulière de Λ.

Notons cependant que dans le cas général, on peut préciser les éléments de Λ grâce au lemme (2-10); ce seront en effet des translatées des mesures τm_B avec $\tau \in \mathfrak{T}$. Si τ correspond aux δ_α avec $\delta_\alpha = 1$, si $\alpha \in \Theta \subset \Sigma$, τm_B sera la mesure K_Θ-invariante portée par $K_\Theta/M \subset G/MA\tilde{N}$: En effet, pour $u = \exp \sum_{\alpha \in \Delta_-} x_\alpha X_\alpha \in N$

et $a \in A$, on a les formules:

$$a \cdot \zeta(u) = \zeta[\exp \sum_{\alpha \in \Delta_-} \varphi_\alpha(a) x_\alpha X_\alpha]$$

$$\tau \zeta(u) = \zeta[\exp \sum_{\alpha \in \Delta_-} r_\alpha x_\alpha X_\alpha].$$

Tout élément $\sum_{\alpha \in \Delta_-} r_\alpha x_\alpha X_\alpha$ s'écrit $\sum_{\alpha \in \Delta_- \cap [\Theta]} y_\alpha X_\alpha$ et tout élément de ce type est obtenu; comme l'algèbre de Lie de $\tilde{P}_\Theta$ est égale à $\bigoplus_{\alpha \in [\Theta] \cup \Delta_+} \mathscr{G}_\alpha$, l'ensemble de ces éléments s'identifie à l'espace tangent en $MA\tilde{N}$ à la sous-variété $\tilde{P}_\Theta/MA\tilde{N} = K_\Theta/M$. Il en découle que τm_B est portée par cette sous-variété. Pour voir que τm_B est K-invariante, il suffit d'observer que τ est limite, en dehors d'une sous-variété de B, de transformations associées aux $a_n \in A_\Theta$; comme K_Θ centralise A_Θ, il commute avec τ ce qui donne:

$$k \tau m_B = \tau m_B \qquad (k \in K_\Theta).$$

Soit C la partie de la grassmannienne de $\mathscr{G}$ formée des sous-algèbres de Lie R maximales pour la propriété: «les valeurs caractéristiques de tout élément de R sont imaginaires pures». Le groupe G opère sur C par conjugaison et la structure de C apparait ci-dessous.

(3.16) **Théorème.** *L'application $g \to g m_B$ définit un homéomorphisme de G/K sur un ouvert de Λ. Les G-espaces Λ et C s'identifient naturellement; ils sont formés de 2^{d-1} orbites et la seule orbite compacte de Λ est formée des mesures de Dirac sur B.*

Preuve. Elle consiste en une description des mesures de Λ et de certains sous-groupes associés. On désigne par $(q) = (q_0, q_1, \ldots, q_{r-1})$ une suite de formes quadratique positives «emboitée» au sens suivant: q_0 est une forme quadratique sur $V_0 = \mathbb{R}^d$ de noyau $V_1 \subset V_0$ et, par récurrence, q_i est une forme quadratique sur V_i de noyau $V_{i+1} \subset V_i$ $(0 \leqq i \leqq r-1)$. La donnée de (q) définit donc une suite (V_i) de sous-espaces emboités et des produits scalaires sur les V_i/V_{i+1}.

On notera par Q l'ensemble des telles suites (q).

Soit R_q la composante neutre du stabilisateur de (q), c'est-à-dire de l'ensemble de $g \in G$ avec $g q_0 = q_0$, $g q_i = q_i$ $(0 \leqq i \leqq r-1)$.

Afin de préciser la structure de R_q et d'identifier les algèbres de Lie correspondantes aux éléments de C, introduisons des supplémentaires W_i de V_{i+1} dans V_i. Par définition de (q) et R_q, il est clair que R_q fixe les V_i et agit orthogonalement sur chaque V_i/V_{i+1}. Si alors N_q est le sous-groupe des g opérant trivialement sur chaque V_i/V_{i+1} et K_q le produit des groupes de rotation des W_i, le groupe R_q est produit semi-direct de son sous-groupe distingué nilpotent N_q par le groupe compact K_q. Les valeurs caractéristiques de $g \in R_q$ sont de module 1 et un calcul immédiat montre d'autre part que $\dim R_q = \frac{q(q-1)}{2}$. Si la première de ces propriétés est vraie d'un sous-groupe connexe H elle implique d'après [4], l'existence d'une suite de sous-espaces emboités $\mathbb{R}^d = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_{r-1} \supset V_r = 0$ et d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ tel que

H laisse invariant les V_i et agisse orthogonalement sur chaque V_i/V_{i+1}. On en déduit l'existence de $(q)\in Q$ avec $H\subset R_q$ et $\dim H \leqq \frac{q(q-1)}{2}$. Ceci prouve qu'un sous-groupe de la forme R_q est maximal pour la propriété étudiée; par ailleurs si H est maximal la relation $H\subset R_q$ implique bien $H=R_q$. D'où l'identification de C et de la famille des algèbres de Lie des R_q. L'ensemble C est compact puisque la dimension $\left[\text{ici } \frac{d(d-1)}{2}\right]$ est conservée par passage à la limite ainsi que la nullité de la partie réelle des valeurs caractéristiques. Enfin, remarquons que le normalisateur S_q de R_q est formé des $g\in G$ laissant les V_i invariants et opérant par similitudes dans les V_i/V_{i+1}; c'est un sous-groupe moyennable maximal d'après [12] et R_q apparaît comme son sous-groupe distingué de type R maximum. De plus, l'orbite de R_q, ou de son algèbre de Lie, sous G, est l'espace homogène G/S_q; l'orbite de dimension maximum est l'espace symétrique G/K et l'orbite de dimension minimum la frontière de Furstenberg $G/\tilde{N}AM$. La donnée de (q) définit une sous-variété algébrique particulière L_q de B et une mesure de probabilité λ_q de support L_q. En effet, le choix d'une suite de drapeaux dans chaque V_i/V_{i+1} définit un raffinement maximal de la suite des sous-espaces emboités V_i; les drapeaux ainsi obtenus forment la sous-variété L_q qui s'identifie au produit des espaces de drapeaux associés aux V_i/V_{i+1}. Le stabilisateur de L_q est le sous-groupe «parabolique» P_q laissant la suite des V_i invariante et le sous-groupe laissant fixes tous les points de L_q est l'ensemble H_q des $g\in G$ opérant par homothéties sur les V_i/V_{i+1}; ce dernier sous-groupe H_q contient N_q, est inclus dans S_q et la composante neutre de S_q/H_q est K_q. Sur les espaces de drapeaux associés aux V_i/V_{i+1} est définie une mesure naturelle, invariante par rotation; la mesure produit λ_q, de support L_q est K_q-invariante et est donc fixée par S_q. De plus le stabilisateur de λ_q est égal à S_q. En effet, de $g\lambda_q=\lambda_q$ on déduit $gL_q=L_q$, soit $g\in P_q$; écrivant g comme produit d'un élément de N_q et d'éléments des groupes linéaires des W_i, on obtient que ces derniers stabilisent les mesures naturelles sur les espaces de drapeaux de W_i, et donc définissent des similitudes sur chaque W_i. L'orbite de λ_q sous G s'identifie alors à G/S_q et il y a donc bijection naturelle entre l'ensemble des λ_q et celui des R_q.

Montrons que l'ensemble des λ_q est égale à Λ, ce qui montrera en particulier sa compacité en topologie vague. Etant donné $(q)\in Q$ et une suite de réels positifs $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1})$ avec $\alpha_0\leqq\alpha_1\leqq\dots\leqq\alpha_{r-1}$, considérons l'élément σ_α de H_q qui en restriction aux W_i se réduit aux homothéties de rapports α_i. Si maintenant la suite $\alpha^n=(\alpha_0^n,\dots,\alpha_{r-1}^n)$ est telle que $\alpha_1^n=o(\alpha_{i+1}^n)$ $(0\leqq i\leqq r-2)$ on a bien $\lambda_q=\lim_n \sigma_{\alpha^n} m_B$ puisque cette limite est portée par L_q et est K_q- invariante comme chaque $\sigma_{\alpha^n} m_B$.

Donc l'ensemble des λ_q est contenu dans Λ. Inversement, considérons une suite g^n de G décomposée sous forme polaire $g^n=k^n a^n k'^n$ où a^n est diagonale et k^n, k'^n orthogonales. On peut supposer, par extraction de sous-suite que k^n converge vers $k\in K$ et que a^n s'écrit $u^n\sigma_{\alpha^n}$ où u^n converge vers u et σ_{α^n} est du type précédemment envisagé pour un certain $(q)\in Q$ défini à partir de la base canonique. La limite de la suite de mesures $g^n m_B$ s'écrira donc $ku\lambda_q$ et sera encore de la forme $\lambda_{q'}$ avec $q'=ku(q)$.

Pour vérifier que la bijection canonique $R_q \to \lambda_q$ entre les espaces compacts C et Λ est un homéomorphisme il suffit de vérifier sa continuité: si la suite R_{q^n} converge vers R_q et si $\lambda_{q'}$ est valeur d'adhérence de la suite des λ_{q^n} on peut affirmer que $\lambda_{q'}$ est R_q-invariante et ceci implique bien $R_q = R_{q'}$, soit $\lambda_q = \lambda_{q'}$.

Il est clair que la frontière de Furstenberg $G/\tilde{N}AM$ est plongée avec sa topologie naturelle dans Λ. Pour vérifier la même propriété de G/K, il suffit de voir que l'orbite correspondante dans Λ est ouverte, ou encore que l'ensemble des λ_q pour $L_q \neq B$ est fermé. Si la suite λ_{g^n} converge vers λ_q, la suite de compacts L_{q^n} a pour valeurs d'adhérence des compacts contenant le support L_q de λ_q, en particulier $\dim L_q \leqq \limsup_n (\dim L_{q^n})$, ce qui justifie que l'ensemble des L_q avec $L_q \neq B$ est fermé.

Pour conclure, la convergence de la suite $X_n(\omega) m_B$ vers une mesure de Dirac s'interprète donc dans Λ ou C comme une convergence de la suite de G/K associée à $X_n(\omega)$ vers un point frontière appartenant à la G-orbite de dimension minimum, c'est-à-dire à B.

4. Exemple: Application au groupe $SL(d, \mathbb{R})$

(4.1) Prenons pour $SL(d, \mathbb{R})$ les décompositions d'Iwasawa et polaire considérées en (1.3). Nous avons

$\mathscr{A} = \{$matrices diagonales réelles de trace nulle$\}$.

$\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}\}$, où pour tout $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ α_i est l'homomorphisme d'algèbre de Lie qui à $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) \in \mathscr{A}$ associe $\alpha_i(X) = x_i - x_{i+1}$.

$W = \{\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) \in \mathscr{A} : x_1 < \ldots < x_d\}$.

Pour $g \in G$, nous écrivons:

$$g = u(g) \operatorname{Exp} \operatorname{diag}(b_1(g), \ldots, b_d(g))\, k(g) \qquad \text{(décomposition d'Iwasawa)}$$

où $u(g) \in N$, $k(g) \in SO(d)$ et $b_i(g) \in \mathbb{R}$ avec $\sum_{i=1}^{d} b_i(g) = 0$;

$$g = k_1 \operatorname{Exp} \operatorname{diag}(c_1(g), \ldots, c_d(g))\, k_2 \qquad \text{(décomposition polaire)}$$

où $k_1, k_2 \in SO(d)$ et $c_i(g) \in \mathbb{R}$ avec $\sum_{i=1}^{d} c_i(g) = 0$, $c_1(g) \leqq \ldots \leqq c_d(g)$. Les réels $c_i(g)$, $1 \leqq i \leqq d$, sont déterminés de façon unique par g tandis que le couple (k_1, k_2) n'est pas unique. Lorsque $c_1(g) < \ldots < c_d(g)$, alors les autres décompositions polaires de g s'obtiennent en remplaçant le couple (k_1, k_2) par un couple $(k_1 m, m^{-1} k_2)$ avec $m \in M$.

Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que G_μ soit totalement irréductible.

Nous désignons par $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de loi μ, à valeurs dans G; nous posons $X_n = y_n Y_1 \ldots Y_n g_n$, pour deux suites convergentes $\{y_n\}$ et $\{g_n\}$ d'éléments de G.

(4.2) *Comportement des suites de* v.a. $b_i(X_n)$ *et* $c_i(X_n)$, $1 \leqq i \leqq d$

Nous écrivons $b_i(n)$ et $c_i(n)$ au lieu de $b_i(X_n)$ et $c_i(X_n)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, nous avons (proposition (2.22))

$$(*) \qquad \sup_n |b_i(n) - c_i(n)| < +\infty \quad \text{p.s.}$$

D'autre part, pour tout $i \in \{1, \ldots, d-1\}$, nous avons l'alternative suivante (corollaire (2.20)):

ou bien les suites réelles $\{b_i(n) - b_{i+1}(n)\}$ et $\{c_i(n) - c_{i+1}(n)\}$ convergent p.s. vers $(-\infty)$.

ou bien, pour tous $g_1, g_2 \in G$, il existe un réel $\gamma(g_1, g_2) > 0$, tel que

$$g_1 T_\mu g_2 \subset K \{\operatorname{Exp} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) \in \operatorname{Exp} \overline{W}\colon x_{i+1} - x_i \leqq \gamma(g_1, g_2)\} K;$$

par suite

$$\sup_n |c_i(n) - c_{i+1}(n)| \leqq \gamma(y, g) \quad \text{p.s.}$$

et

$$\sup_n |b_i(n) - b_{i+1}(n)| < +\infty \quad \text{p.s.}$$

Lorsque T_μ est compact (ce qui entraine que $G_\mu = T_\mu$ est compact), nous nous trouvons dans la deuxième alternative pour tout $i \in \{1, \ldots, d-1\}$.

Lorsque T_μ n'est pas compact, on se trouve dans la première alternative pour au moins un entier de $\{1, \ldots, d-1\}$. De l'égalité

$$c_d(n) = d^{-1} \left[\sum_{k=1}^{d-1} k(c_{k+1}(n) - c_k(n)) \right],$$

il résulte alors que les suites $\{c_d(n)\}$ et $\{b_d(n)\}$ convergent p.s. vers $(+\infty)$; et les suites $c_1(n)$ et $b_1(n)$ convergent p.s. vers $(-\infty)$.

Lorsque T_μ contient une suite contractante, on se trouve dans la première alternative pour tout i; c'est en particulier le cas si T_μ est d'intérieur non vide d'après une conséquence non triviale de [6].

Supposons que $\int_G \operatorname{Log} \|g\| \, \mu(dg) < +\infty$. Alors (théorème (3.7)), pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, les suites $\left\{\frac{1}{n}(b_i(n) - b_{i+1}(n))\right\}$ et $\left\{\frac{1}{n}(c_i(n) - c_{i+1}(n))\right\}$ convergent p.s. vers un réel τ_i strictement négatif ou nul selon que les suites $\{(b_i(n) - b_{i+1}(n))\}$ et $\{(c_i(n) - c_{i+1}(n))\}$ convergent vers $(-\infty)$ ou sont bornées p.s.

On en déduit que les suites $\left\{\frac{1}{n} b_i(n)\right\}$ et $\left\{\frac{1}{n} c_i(n)\right\}$, $1 \leqq i \leqq d$, convergent vers des réels λ_i vérifiant $\lambda_1 \leqq \ldots \leqq \lambda_d$. De plus $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ excepté si pour tous $g_1, g_2 \in G$, il existe un réel $\gamma(g_1, g_2) > 0$ tel que

$$g_1 T_\mu g_2 \subset K \{\operatorname{Exp} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_d) \in \operatorname{Exp} \overline{W}\colon x_{i+1} - x_i \leqq \gamma(g_1, g_2)\} K.$$

Lorsque T_μ n'est pas compact, $\lambda_d > 0$ et $\lambda_1 < 0$.

Notons enfin que d'après le corollaire (3.9), lorsqu'on change μ en $\check{\mu}$ les réels λ_i sont remplacés par les réels $\check{\lambda}_i = -\lambda_{d+1-i}$. De la même façon si on change μ en ${}^t\mu$ les réels λ_i sont inchangés.

(4.3) *Comportement des suites de* v.a. $k_1(X_n)$ *et* $u(X_n)$

Supposons que $c_l(n) - c_{l+1}(n) \xrightarrow{\text{p.s.}} (-\infty)$ pour un certain $l \in \{1, \dots, d-1\}$. Alors la suite de sous-espaces vectoriels de dimension $(d-l)$ de $\mathbb{R}^d$ engendrés par $\{k_1(X_n)f_d, \dots, k_1(X_n)f_{l+1}\}$, où $\{f_1, \dots, f_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$, [resp. par $\{u(X_n)f_d, \dots, u(X_n)f_{l+1}\}$], converge vers un sous-espace vectoriel de dimension $(d-l)$ de $\mathbb{R}^d$. [On notera que l'espace F_{d-l} des sous-espaces vectoriels de dimension $(d-l)$ de $\mathbb{R}^d$ s'identifie à l'un quelconque des espaces homogènes $\tilde{G}/\tilde{P}$ où $\tilde{P}$ est un conjugué du groupe parabolique standard $\tilde{P}_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{d-1}\}}$ qui est le stabilisateur dans G de l'élément de F_{d-1} engendré par $\{f_d, \dots, f_{l+1}\}$].

Les résultats précédents nous permettent d'améliorer les théorèmes (8.6) et (8.3) de [7].

Nous appelons $\mathbf{P}^{d-1}$ [resp. ${}^t\mathbf{P}^{d-1}$] l'espace projectif associé à

$$\mathbb{R}^d = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{bmatrix} : u_i \in \mathbb{R},\ 1 \leqq i \leqq d \right\} [\text{resp. à } {}^t\mathbb{R}^d = \{(u_1, \dots, u_d) : u_i \in \mathbb{R},\ 1 \leqq i \leqq d\}].$$

$\mathbf{P}^{d-1}$ s'identifie à la classe d'espaces homogènes $H(\tilde{P}_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}\}})$; $\tilde{P}_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}\}}$ étant le stabilisateur dans G de l'élément f_d de $\mathbf{P}^{d-1}$.

Pour $u = (u_1, \dots, u_d)$, nous posons $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{d} u_i^2 \right)^{1/2}$; et pour $g \in SL(d, \mathbb{R})$, nous notons $\|g\| = \sup_{u \in {}_t\mathbb{R}_d - \{0\}} \frac{\|ug\|}{\|u\|}$. Nous désignons par ρ le cocycle sur ${}^t\mathbf{P}^{d-1} \times G$ défini par

$$\rho(\bar{u}, g) = \operatorname{Log} \frac{\|ug\|}{\|u\|} \qquad (\bar{u} \in {}^t\mathbf{P}^{d-1},\ g \in G),$$

où u désigne un représentant de $\bar{u}$ dans ${}^t\mathbb{R}^d$.

Nous avons alors le théorème qui précise, avec des hypothèses supplémentaires, un résultat de [7].

(4.4) **Théorème.** *Soient μ une mesure de probabilité sur $SL(d, \mathbb{R})$ et $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ. Supposons que G_μ soit non compact et totalement irréductible.*

Appelons X_n le produit $y_n Y_1 \dots Y_n g_n$, pour deux suites convergentes $\{y_n\}$ et $\{g_n\}$ d'éléments de G.

Alors, pour toute suite convergente $\{u_n\}$ d'éléments de ${}^t\mathbb{R}^d - \{0\}$, ne convergeant pas vers zéro,

$$\|u_n X_n\| \xrightarrow{\text{p.s.}} (+\infty)$$

et

$$0<\inf_n \frac{\|u_n X_n\|}{\|X_n\|} \leqq \sup_n \frac{\|u_n X_n\|}{\|X_n\|} \leqq \|u_n\| \qquad \text{p.s.}$$

Lorsque $\int_G \operatorname{Log}\|g\|\,\mu(dg)<+\infty$, *l'expression* $\int_G \int_{{}^t\mathbf{P}^{d-1}} \rho(u,g)\,\tilde{\nu}(du)\,\mu(dg)$ *est strictement positive et indépendante de la mesure de probabilité* μ*-invariante* $\tilde{\nu}$ *sur* ${}^t\mathbf{P}^{d-1}$; *et nous avons*

$$\lim_n \left(\frac{1}{n} \operatorname{Log}\|u_n X_n\|\right) \overset{\text{p.s.}}{=} \lim_n \left(\frac{1}{n} \operatorname{Log}\|X_n\|\right) \overset{\text{p.s.}}{=} \int_G \int_{{}^t\mathbf{P}^{d-1}} \rho(u,g)\,\tilde{\nu}(du)\,\mu(dg)>0.$$

Supposons en outre que T_μ *contienne une suite contractante vis-à-vis de l'espace projectif* $\mathbf{P}^{d-1}$. *Alors la suite* $\left\{\frac{\|u_n X_n\|}{\|X_n\|}\right\}$ *converge* p.s. *vers une* v.a. *strictement positive et il existe sur* ${}^t\mathbf{P}^{d-1}$ *une unique mesure de probabilité* μ*-invariante* $\tilde{\nu}$.

Preuve du théorème. Nous pouvons supposer que les vecteurs u_n sont normés; nous écrivons alors $u_n=e_d k_n$, où $\{k_n\}$ est une suite convergente d'éléments de $SO(d)$.

Nous avons alors $\|X_n\|=e^{c_d(X_n)}$ et $\|u_n X_n\|=e^{b_d(k_n X_n)}$.

Soit $\Theta=\{\alpha_i\in\Sigma$: la suite $\{c_i(X_n)-c_{i+1}(X_n)\}$ ne converge pas p.s. vers $(-\infty)\}$. Puisque T_μ n'est pas compact, Θ n'est pas égal à Σ et la suite $c_d(X_n)$ converge p.s. vers $(+\infty)$.

D'autre part d'après la proposition (2.22) nous avons:

$$(*) \qquad \sup_n |c_d(X_n)-b_d(k_n X_n)|<+\infty \qquad \text{p.s.}$$

Les deux premières assertions du théorème résultent alors, via le théorème ergodique, de ce qui a été dit en (4.2).

Lorsque T_μ contient une suite contractante vis-à-vis de $\mathbf{P}^{d-1}$ nous savons (théorème (2.19)) qu'il existe une unique mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{\nu}$ sur ${}^t\mathbf{P}^{d-1}$ et que:

i) la suite $\{c_{d-1}(n)-c_d(n)\}$ converge vers $(-\infty)$,

ii) la suite $\{k_n k_1(X_n)\cdot \bar{f}_d\}$ converge p.s. (voir (4.3)). Ceci signifie, en posant $x_n=k_n k_1(X_n)\in SO(d)$, que les suites de v.a. $\left\{\frac{x_n(i,d)}{x_n(d,d)}\right\}$, $1\leqq i\leqq d-1$, converge p.s. vers des v.a. $x(i,d)$; par suite, puisque $x_n\in SO(d)$,

$$|x_n(d,d)| \xrightarrow{\text{p.s.}} \left(1+\sum_{i=1}^{d-1}(x(i,d))^2\right)^{-1/2}.$$

Le calcul montre que

$$\frac{\|u_n X_n\|}{\|X_n\|}=|x_n(d,d)|\,(1+O(e^{c_{d-1}(n)-c_d(n)}));$$

d'où le résultat.

(4.5) Pour deux éléments $u=(u_1,\dots,u_d)$ et $v=(v_1,\dots,v_d)$ de ${}^t\mathbb{R}^d$, nous posons

$$\|u\wedge v\|=\Big[\sum_{i\leq i<j\leq d}(u_iv_j-u_jv_i)^2\Big]^{1/2} \quad \text{et} \quad \langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{d} u_iv_i.$$

Nous avons $\|u\wedge v\|^2+(\langle u,v\rangle)^2=\|u\|^2\,\|v\|^2$.

Nous appelons δ la distance sur ${}^t\mathbf{P}^{d-1}$ définie par

$$\delta(\bar u,\bar v)=\frac{\|u\wedge v\|}{\|u\|\,\|v\|},$$

où u et v sont des représentants de $\bar u$ et $\bar v$ dans ${}^t\mathbb{R}^d$. Si $\theta(u,v)$ désigne l'angle des vecteurs u et v, nous avons

$$\delta(\bar u,\bar v)=|\sin\theta(u,v)|.$$

Pour tout $g\in G$, nous posons

$$\|g\|_{(2)}=\sup_{\substack{u,v\in{}^t\mathbb{R}^d\\ \bar u\neq\bar v}}\frac{\|ug\wedge vg\|}{\|u\wedge v\|}.$$

Considérons l'espace $\mathbf{P}^{d-1}_{1,2}$ des drapeaux de dimension 2; c'est-à-dire l'espace des couples (E_1,E_2) de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ tels que $E_1\subset E_2$ et $\dim E_i=i$, $i=1,2$. L'espace $\mathbf{P}^{d-1}_{1,2}$ s'identifie à la classe d'espaces homogènes $H(\tilde P_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-3}\}})$; $\tilde P_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-3}\}}$ étant le stabilisateur dans G de l'élément $(f_d,[f_{d-1},f_d])$ de $\mathbf{P}^{d-1}_{1,2}$.

Appelons M l'espace constitué par l'espace produit $\mathbf{P}^{d-1}\times\mathbf{P}^{d-1}$ auquel on a retiré sa diagonale. Nous compactifions M en lui adjoignant l'espace des drapeaux $\mathbf{P}^{d-1}_{1,2}$ de dimension 2; nous disons qu'une suite $\{(\bar u_n,\bar v_n)\}$ d'éléments de M converge vers l'élément $(\bar u,[\bar u,\bar v])$ de $\mathbf{P}^{d-1}_{1,2}$ si la suite $\{(\bar u_n,[\bar u_n,\bar v_n])\}$ de $\mathbf{P}^{d-1}_{1,2}$ associée à la suite $\{(\bar u_n,\bar v_n)\}$ converge vers $(\bar u,[\bar u,\bar v])$. Nous notons $\bar M$ ce compactifié de M.

Posons alors:

$\sigma((\bar u,\bar v),g)=\operatorname{Log}\dfrac{\delta(\bar u\cdot g,\bar v\cdot g)}{\delta(\bar u,\bar v)}$ $(g\in G,\ (\bar u,\bar v)\in{}^tM)$, où u (resp. v) est un représentant dans ${}^t\mathbb{R}^d$, de norme 1, de $\bar u$ (resp. $\bar v$); et

$\sigma((\bar u,[\bar u,\bar v]),g)=\operatorname{Log}\dfrac{\|ug\wedge vg\|}{\|ug\|^2\,\|u\wedge v\|}$ $(g\in G,\ (\bar u,[\bar u,\bar v])\in{}^t\mathbf{P}^{d-1}_{1,2})$, où u (resp. v) est un représentant dans ${}^t\mathbb{R}^d$, de norme 1, de $\bar u$ (resp. $\bar v$).

L'application σ est alors un cocycle sur ${}^t\bar M\times G$.

(4.6) **Théorème.** *Soient μ une mesure de probabilité sur $SL(d,\mathbb{R})$ et $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ. Supposons que G_μ soit totalement irréductible et que T_μ contienne une suite contractante vis-à-vis de l'espace projectif $\mathbf{P}^{d-1}$. Nous posons $X_n=y_nY_1\dots Y_ng_n$ pour deux suites convergentes $\{y_n\}$ et $\{g_n\}$ de G.*

Alors pour toute suite $(\bar u_n,\bar v_n)$ d'éléments de ${}^tM$, convergeant dans ${}^tM$,

$$\delta(n)=\delta(\bar u_n\cdot X_n,\bar v_n\cdot X_n)\xrightarrow{\text{p.s.}}0$$

et

$$0 < \inf_n \frac{\delta(n)\,\|X_n\|^2}{\|X_n\|_{(2)}} \leq \sup_n \frac{\delta(n)\,\|X_n\|^2}{\|X_n\|_{(2)}} < +\infty \qquad \text{p.s.}$$

Lorsque $\int_G \operatorname{Log}\|g\|\,\mu(dg) < +\infty$, *l'expression* $\int_G \int_{{}^t\mathbf{P}_{d-1}} \sigma(u,g)\,\tilde{\nu}(du)\,\mu(dg)$, *est strictement négative et indépendante de la mesure de probabilité* μ*-invariante* $\tilde{\nu}$ *sur* ${}^t\mathbf{P}_{1,2}^{d-1}$; *et nous avons*

$$\lim_n \left(\frac{1}{n}\operatorname{Log}\delta(n)\right) \overset{\text{p.s.}}{=} \lim_n \left(\frac{1}{n}\operatorname{Log}\frac{\|X_n\|_{(2)}}{\|X_n\|^2}\right) \overset{\text{p.s.}}{=} \int_G \int_{{}^t\mathbf{P}_{d-1}} \sigma(u,g)\,\tilde{\nu}(du)\,\mu(dg) < 0.$$

Supposons en outre que T_μ *contienne une suite contractante vis-à-vis de l'espace des drapeaux* $\mathbf{P}_{1,2}^{d-1}$ *de dimension* 2. *Alors la suite* $\left\{\frac{\delta(n)\,\|X_n\|^2}{\|X_n\|_{(2)}}\right\}$ *converge* p.s. *vers une* v.a. *strictement positive; et il existe sur* ${}^t\mathbf{P}_{1,2}^{d-1}$ *une unique mesure de probabilité* μ*-invariante* $\tilde{\nu}$.

Preuve. D'après le théorème (4.4), on peut remplacer $\{\delta(n)\}$ par la suite

$$\delta'(n) = \frac{\|u_n X_n \wedge v_n X_n\|}{\|X_n\|^2}.$$

Nous pouvons supposer que les vecteurs u_n et v_n sont normés et orthogonaux; nous écrivons alors $u_n = e_d k_n$ et $v_n = e_{d-1} k_n$ où $\{k_n\}$ une suite convergente d'éléments de $SO(d)$.

Nous avons alors

$$\delta'(n) = e^{b_{d-1}(k_n X_n) - b_d(k_n X_n)} \quad \text{et} \quad \|X_n\|_{(2)} = e^{c_{d-1}(X_n) - c_d(X_n)}.$$

La démonstration du théorème (4.6) est alors analogue à celle du théorème (4.4). La dernière assertion est à rapprocher de la remarque (2.24).

(4.7) **Corollaire.** *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* $SL(d,\mathbb{R})$ *et* $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ *une suite de* v.a. *indépendantes et de loi* μ. *Supposons: que* G_μ *soit totalement irréductible; que* T_μ *contienne une suite contractante vis-à-vis de l'espace projectif* $\mathbf{P}^{d-1}$ *et que* μ *possède un moment d'ordre* 1. *Nous appelons* X_n *le produit* $Y_1 \dots Y_n$.

Alors la suite de fonctions $\left\{\frac{1}{n}\mathbb{E}[\sigma(.,X_n)]\right\}$, *définies sur* ${}^t\overline{M}$, *converge uniformément vers* $\tau(\mu) = \iint \sigma(u,g)\,\tilde{\nu}(du)\,\mu(dg) < 0$.

Preuve. Soit $(\bar{u},\bar{v}) \in {}^tM$. Nous désignons par u et v des représentants normés de $\bar{u}$ et $\bar{v}$; et nous posons

$$w = (v - \langle u,v\rangle u)/\|v - \langle u,v\rangle u\|.$$

Soit k et k' des éléments de $SO(d)$ tel que:

$u = e_d k$, $w = e_{d-1} k$ et $v = e_d k'$. Nous avons:

$$\sigma((\bar{u},\bar{v}),g) = e^{b_{d-1}(kg) - b_d(k'g)}$$

$$\sigma((\bar{u},[\bar{u},\bar{v}]),g) = e^{b_{d-1}(kg) - b_d(kg)}.$$

D'après le corollaire (3.8), la suite de fonctions $\left\{\frac{1}{n}\mathbb{E}[\sigma(.,X_n)]\right\}$ converge alors uniformément sur ${}^t\overline{M}$ vers $\lambda_{d-1}-\lambda_d$.

Exposants de Liapounoff

(4.8) Soit μ une mesure de probabilité sur $SL(d,\mathbb{R})$ et $(Y_i)_{i\geqq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi μ, à valeurs dans G. Nous supposons que T_μ contient une suite contractante, que G_μ est totalement irréductible et que μ possède un moment d'ordre 1.

Ecrivons, pour $y, g\in G$,

$$X_n = yY_1\dots Y_n g = N_n \operatorname{Exp}\operatorname{diag}(b_1(n),\dots,b_d(n))K_n \qquad \text{(décomposition d'Iwasawa)},$$
$$X_n = yY_1\dots Y_n g = x_n \operatorname{Exp}\operatorname{diag}(c_1(n),\dots,c_d(n))k_n \qquad \text{(décomposition polaire)}.$$

Nous avons

$$X_n{}^tX_n = x_n \operatorname{Exp}\operatorname{diag}(c_1^2(n),\dots,c_d^2(n))x_n^{-1}.$$

Puisque l'image de x_n dans K/M converge, quitte à remplacer x_n par $x_n\gamma_n$ avec $\gamma_n\in M$, nous pouvons supposer que x_n converge vers une v.a. x_∞ à valeurs dans $SO(d,\mathbb{R})$. Compte tenu de (4.2), on en déduit que la suite de matrices $(X_n{}^tX_n)^{1/2n}$ converge p.s. vers la matrice

$$x_\infty \operatorname{Exp}\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)x_\infty^{-1}.$$

D'autre part, nous avons la proposition

(4.9) **Proposition.** *Désignons par* $\{e_1,\dots,e_d\}$ *la base canonique de* ${}^t\mathbb{R}^d$ *et par* N_∞ *la limite* p.s. *de la suite de* v.a. $\{N_n\}_{n\geqq 0}$ *(voir* (4.3)*). Alors pour tout* $i\in\{1,\dots,d\}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|e_iN_\infty^{-1}X_n\| = \lambda_i.$$

Preuve. Pour simplifier l'écriture, posons

$$A_n = \operatorname{Exp}\operatorname{diag}(b_1(n),\dots,b_d(n)) \qquad (n\geqq 1).$$

Le produit de matrice $N_\infty^{-1}N_n$ s'écrit

$$N_\infty^{-1}N_n = \lim_{p\to+\infty} T_{n+p}\dots T_{n+1}T_n$$

en posant

$$T_m = A_m[u(K_mY_{m+1})]^{-1}A_m^{-1}, \qquad m\geqq 1.$$

Si $g\in G$ et $x\in K=SO(d)$, écrivons

$$xg = u(xg)\,a(xg)\,k(xg) \qquad \text{(décomposition d'Iwasawa } G=NAK\text{)}.$$

Nous avons $\|u(xg)^{-1}\|\leqq\|g^{-1}\|\sup_{x\in K}\|a(xg)\|$. μ ayant un moment d'ordre 1, il s'ensuit que la fonction $g\to\log\sup_{x\in K}\|u(xg)^{-1}\|$ est μ-intégrable et par suite $\limsup_m\|u(K_mY_{m+1})^{-1}\|^{1/m}\leqq 1$.

Du comportement des suites $\{b_i(m): m \geqq 1\}$, (voir (4.2), il résulte alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que:

$$\forall m \geqq N(\varepsilon), \quad \forall 1 \leqq i < j \leqq d, \quad |t_{ij}(m)| \leqq e^{m(\lambda_i - \lambda_j + \varepsilon)} \quad \text{où} \quad T_k = ((t_{ij}(m))).$$

Comme

$$\begin{aligned}&\lim_{p \to +\infty} T_{n+p} \dots T_{n+1} T_n \\ &\quad = I + \sum_{i_1 \geqq n} (T_{i_1} - I) + \dots + \sum_{i_{d-1} > \dots > i_1 \geqq n} (T_{i_{d-1}} - I) \dots (T_{i_1} - I),\end{aligned}$$

on en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, suffisamment petit pour que $\forall i \in \{1, \dots, d-1\}$ $\lambda_i - \lambda_{i+1} + (d-1)\varepsilon < 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ et un réel positif C tels que

$$(*) \qquad \forall n \geqq N(\varepsilon) \quad \forall 1 \leqq i < j \leqq d, \quad |\tau_{ij}(n)| \leqq C e^{n(\lambda_i - \lambda_j + (j-i)\varepsilon)}$$

où $N_\infty^{-1} N_n = ((\tau_{ij}(n)))$.
En écrivant alors

$$a_i(n)^2 \leqq \|e_i N_\infty^{-1} N_n A_n K_n\|^2 = \sum_{j=i}^{d} (\tau_{ij}(n)\, a_j(n))^2,$$

la proposition découle de $(*)$ et de (4.2).

(4.10) Considérons à présent l'automorphisme involutif σ de $SL(d, \mathbb{R})$ qui à une matrice g de $SL(d, \mathbb{R})$ associe ${}^t g^{-1}$.

Nous avons, en désignant par m une matrice de $SO(d, \mathbb{R})$ dont les seuls éléments non nuls sont ceux de la diagonale secondaire.

$$m^{-1} \sigma(X_n) = \sigma(m^{-1} N_n m) \operatorname{Exp} \operatorname{diag}(-b_d(n), \dots, -b_1(n)) m^{-1} K_n$$
(décomposition d'Iwasawa)

$$m^{-1} \sigma(X_n) = (m^{-1} x_n m) \operatorname{Exp} \operatorname{diag}(-c_d(n), \dots, -c_1(n)) m^{-1} k_n$$
(décomposition polaire).

La proposition (4.2) appliquée à cette nouvelle situation, nous dit que

$$\frac{1}{n} \log \|e_i \sigma(m^{-1} N_\infty^{-1}) \sigma(X_n)\| \to -\lambda_{d+1-i},$$

ou encore que

$$\frac{1}{n} \log \|e_i \sigma(N_\infty^{-1}) \sigma(X_n)\| \to -\lambda_i.$$

Appelons V_i (resp. V_i^σ) le sous-espace de ${}^t\mathbb{R}^d$ formé des vecteurs u tels que:

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \|u X_n\| \leqq \lambda_i \qquad \left(\text{resp. } \lim_n \frac{1}{n} \|u\, \sigma(X_n)\| \leqq -\lambda_i\right)$$

nous avons

$$V_i = \left(\bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{R}\, e_j\right) N_\infty^{-1} \quad \text{et} \quad V_i^\sigma = \left(\bigoplus_{j=i}^{d} \mathbb{R}\, e_j\right) \sigma(N_\infty^{-1});$$

si bien que $V_i \cap V_i^\sigma$ est un sous-espace de dimension 1 de ${}^t\mathbb{R}^d$. En fait, puisque N_∞ et x_∞ [resp. $\sigma(m^{-1}N_\infty m)$ et $\sigma(m^{-1}x_\infty m)$] ont même image dans B, nous avons

$$V_i = \left(\bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{R}\, e_j\right) x_\infty^{-1} \quad \text{et} \quad V_i^\sigma = \left(\bigoplus_{j=i}^{d} \mathbb{R}\, e_j\right) x_\infty^{-1};$$

si bien que $V_i \cap V_i^\sigma = \mathbb{R}\, e_i x_\infty^{-1}$.

(4.11) Considérons à présent une suite Y_n de v.a. indépendantes et de loi μ, indexées par $\mathbb{Z}$, définies sur $(\Omega = G^{\mathbb{Z}}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Posons,

$$\begin{aligned} &S_n = Y_0 \dots Y_n && \text{si } n>0 \\ &S_n = e && \text{si } n=0 \\ &S_n = Y_{-1}^{-1} \dots Y_n^{-1} && \text{si } n<0. \end{aligned}$$

La suite de v.a. S_n vérifie la relation de cocycle vis-à-vis du shift δ sur $G^{\mathbb{Z}}$;

$$S_{m+n} = (S_m \circ \delta^n) S_n \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

On suppose que μ vérifie les hypothèses considérées en (4.8).

D'après la proposition (4.9), appliquée à μ et à $\check{\mu}$ (image de μ par l'application $g \to g^{-1}$), nous avons:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|e_i N_\infty^{-1} S_n\| \to \lambda_i$$

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{1}{|n|} \log \|e_i M_\infty^{-1} S_n\| \to -\lambda_{d+1-i}$$

où $N_\infty = \lim_{n \to +\infty} u(S_n)$ et $M_\infty = \lim_{n \to -\infty} u(S_n)$.

Appelons V_i^+ (resp. V_i^-) le sous-espace de ${}^t\mathbb{R}^d$ formé des vecteurs u tels que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|u S_n\| \leqq \lambda_i \qquad \left(\text{resp. } \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{|n|} \log \|u S_n\| \leqq -\lambda_i\right).$$

Nous avons

$$V_i^+ = \left(\bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{R}\, e_j\right) N_\infty^{-1} \quad \text{et} \quad V_i^- = \left(\bigoplus_{j=1}^{d+1-i} \mathbb{R}\, e_j\right) M_\infty^{-1}.$$

Ecrivons, pour $n<0$,

$$S_n^{-1} = Y_n \dots Y_{-1} = \tilde{K}_n \tilde{A}_n \tilde{N}_n \qquad \text{(décomposition d'Iwasawa } G = KA\tilde{N}\text{)}.$$

S_n^{-1} est une marche aléatoire gauche mais les résultats obtenus pour une marche aléatoire droite nous disent, par transposition, que: la suite de v.a. $\tilde{N}_n$ converge p.s. vers une v.a. $\tilde{N}_\infty$ à valeurs dans $\tilde{N}$. Il s'ensuit que

$$m S_n = (m \tilde{N}_n^{-1} m^{-1})(m \tilde{A}_n^{-1} m^{-1})(m \tilde{K}_n) \qquad \text{(décomposition d'Iwasawa } G = KAN\text{)}.$$

Par suite (proposition (4.9) appliquée à $\check{\mu}$)

$$\frac{1}{n} \log \|e_i (m \tilde{N}_\infty^{-1} m^{-1})^{-1} m S_n\| \to -\lambda_{d+1-i},$$

ou encore

$$\frac{1}{n}\log\|e_i\tilde{N}_\infty S_n\| \to -\lambda_i.$$

D'où on a aussi $V_i^- = \left(\bigoplus_{j=i}^{d}\mathbb{R}e_j\right)\tilde{N}_\infty$, et $V_i^+ \cap V_i^-$ est un sous-espace vectoriel de ${}^t\mathbb{R}^d$ de dimension 1.

Pour tout élément $u \in V_i^+ \cap V_i^-$, on a alors nécessairement

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\|uS_n\| = \lambda_i.$$

On retrouve ainsi, dans le cas particulier ici envisagé, les résultats de [20] et [21].

5. Comportement des suites $Y_1 \dots Y_n \cdot u$, $u \in G/\tilde{P}_\Theta$-application

Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que G_μ soit totalement irréductible.

Nous désignons par $\{Y_i\}_{i\geqq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de loi μ, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Nous appelons X_n le produit $Y_1 \dots Y_n$ et nous écrivons $X_n = x_n a_n k_n$ (décomposition polaire).

(5.0) Nous choisissons une décomposition d'Iwasawa $G = NAK$ de G. Nous désignons par Δ_- l'ensemble des racines ayant servi à définir N; par Σ l'ensemble des racines simples de Δ_- et par M le centralisateur de A dans K. Nous appelons $G = K(\exp\overline{W})K$ la décomposition polaire correspondante de G.

D'après le corollaire (2.20), pour tout $\alpha \in \Sigma$, nous avons l'alternative:

ou bien $\varphi_\alpha(a_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$

ou bien pour tous $y, g \in G$ il existe un réel $\gamma(y,g) > 0$ tel que

$$y T_\mu g \subset K\{a \in A : \gamma(y,g) \leqq \varphi_\alpha(a) \leqq 1\} K.$$

Appelons Θ l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ satisfaisant à la deuxième alternative. Lorsque T_μ n'est pas compact (i.e. G_μ n'est pas compact), Θ n'est pas égal à Σ; le sous-groupe parabolique standard $\tilde{P}_\Theta$ correspondant à Θ est donc différent de G et T_μ contient une suite contractante vis-à-vis de la classe d'espaces homogènes $H(\tilde{P}_\Theta) = \{G/P : P \text{ conjugué de } \tilde{P}_\Theta\}$.

D'après le théorème (2.19), nous savons alors qu'il existe sur $G/\tilde{P}_\Theta$ une unique mesure de probabilité μ-invariante ν; ν est irréductible et la suite de mesure $\{X_n \cdot \nu\}$ converge p.s. vers une mesure de Dirac ε_Z.

Nous nous intéressons dans cette section au comportement des suites $\{X_n \cdot u\}$, $u \in G/\tilde{P}_\Theta$. Nous montrons d'abord que $\forall u \in G/\tilde{P}_\Theta$, la suite $\{X_n \cdot u\}$ converge en probabilité vers Z. Nous étudions ensuite la convergence p.s. de ces suites dans le cas de $SL(d, \mathbb{R})$ et nous en déduisons le comportement asymptotique des coefficients d'un produit de matrices aléatoires.

A) Convergence en probabilité

(5.1) **Proposition.** *Reprenons les notations de* (5.0) *et désignons par* δ *une distance sur* $G/\tilde{P}_\Theta$, *K-invariante à gauche.*

Alors pour toutes suites convergentes $\{u_n\}$ *et* $\{v_n\}$ *d'éléments de* $G/\tilde{P}_\Theta$, *la suite*

$$\{\delta(Y_n \dots Y_1 \cdot u_n, Y_n \dots Y_1 \cdot v_n)\}$$

converge vers zéro. La suite $\{\sup_{u,v \in G/\tilde{P}_\Theta} \mathbb{E}[\delta(X_n \cdot u, X_n \cdot v)]\}$ *décroit vers zéro.*

Preuve. Posons $\tilde{X}_n = Y_n \dots Y_1$ et écrivons $\tilde{X}_n = \tilde{x}_n \tilde{a}_n \tilde{k}_n$. L'analogue du théorème (2.19) pour la marche aléatoire gauche, nous dit qu'il existe sur $P_\Theta \backslash G$ une unique mesure de probabilité μ-invariante $\tilde{v}$; $\tilde{v}$ est irréductible et la suite de mesures $\tilde{v} \cdot \tilde{X}_n$ converge p.s. vers une mesure de Dirac $\varepsilon_{\tilde{Z}}$. De plus $\varphi_\alpha(\tilde{a}_n) \to 0$, $\forall \alpha \in \Sigma - \Theta$; l'image de $\tilde{k}_n$ dans $P_\Theta \backslash G$ converge p.s. vers $\tilde{Z}$ et l'image de $\tilde{x}_n$ dans $G/\tilde{P}_\Theta$ converge en loi vers v.

Soit $\{l_n\}$ une suite convergente d'éléments de K. L'image de $\tilde{k}_n l_n$ dans $P_\Theta \backslash G$ converge alors p.s. vers une v.a. à valeurs presque sûrement dans l'ouvert $P_\Theta \tilde{N} = N\tilde{P}_\Theta$ de G. On en déduit (voir preuve du lemme (2.23)) qu'à partir d'un certain rang $\tilde{k}_n l_n$ s'écrit $u_n \tilde{p}_n$ où $\{u_n\}$ (resp. $\{\tilde{p}_n\}$) est une suite d'éléments d'un compact de $N^{e,\Theta}$(resp. de $\tilde{P}_\Theta$). Comme $\tilde{a}_n u_n \tilde{a}_n^{-1} \xrightarrow[\text{p.s.}]{} e$, on en déduit que pour toute suite convergente $\{u_n\}$ d'éléments de $G/\tilde{P}_\Theta$, la suite $\{\tilde{a}_n \tilde{k}_n \cdot u_n\}$ converge p.s. vers l'image de l'élément neutre de G dans $G/\tilde{P}_\Theta$. D'où la première assertion de la proposition.

Posons $\delta(n) = \sup_{u,v \in G/\tilde{P}_\Theta} \mathbb{E}[\delta(X_n \cdot u, X_n \cdot v)]$. Il est clair que la suite $\delta(n)$ est décroissante et que pour tout entier naturel n,

$$\delta(n) = \mathbb{E}[\delta(\tilde{X}_n \cdot u_n, \tilde{X}_n \cdot v_n)],$$

pour un certain couple (u_n, v_n) d'éléments de $G/\tilde{P}_\Theta$.

Du théorème de convergence dominée, via la première assertion de la proposition (5.1), il résulte alors que la seule valeur d'adhérence de la suite $\{\delta(n)\}$ est zéro.

(5.2) **Corollaire.** *Avec les notations de* (5.0), *pour tout* $u \in G/\tilde{P}_\Theta$, *la suite de* v.a. $\{X_n \cdot u\}$ *converge en probabilité vers la* v.a. Z*; et pour toute fonction* f *continue sur* $G/\tilde{P}_\Theta$,

$$\lim_n \sup_{u \in G/\tilde{P}_\Theta} \left|\int f(g \cdot u)\, \mu^n(dg) - \int f(v)\, v(dv)\right| = 0.$$

Preuve. Nous avons

$$\sup_u \mathbb{E}[\delta(X_n \cdot u, Z)] \leq \sup_{u,v} \mathbb{E}[\delta(X_n \cdot u, X_n \cdot v)] + \mathbb{E}\left[\int \delta(X_n \cdot v, Z)\, v(dv)\right].$$

D'après la proposition (5.1), le premier terme du second membre décroit vers zéro. Quant au second terme, il converge aussi vers zéro d'après le théorème de convergence dominée et le fait que $X_n \cdot v \xrightarrow{\text{p.s.}} \varepsilon_Z$. On en déduit donc que: $\sup_u \mathbb{E}[\delta(X_n \cdot u, Z)] \to 0$. D'où le corollaire.

B) Convergence presque sûre $(G = SL(d, \mathbb{R}))$

(5.3) *Définitions.* Nous disons que μ est étalée s'il existe un entier $p \geqq 1$ tel que la convolée μ^p de μ ne soit pas singulière par rapport à la mesure de Haar de G.

Nous disons que μ possède des moments exponentiels si $\int_G e^{\alpha \delta_V(g)} \mu(dg) < +\infty$ pour tout $\alpha > 0$; où V est un voisinage compact de l'élément neutre de G et

$$\delta_V(g) = \inf_n \{n \in \mathbb{N}^* : g \in V^n\}.$$

Si $u \in B = G/\tilde{N}AM$, nous posons $|\Delta_l(u)| = |\Delta_l(k)|$, où k est un élément de K ayant u pour image dans B.

Nous avons alors le théorème suivant si μ est étalée.

(5.4) **Théorème.** *Soient $G = SL(d, \mathbb{R})$ et μ une mesure de probabilité sur G étalée et vérifiant $\int_G \operatorname{Log} \|g\| \mu(dg) < +\infty$. Nous désignons par $\{Y_i\}_{i \geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ; nous notons X_n le produit $Y_1 \dots Y_n$. Nous appelons m_B la mesure de probabilité K-invariante sur l'espace homogène $B = G/\tilde{N}AM$.*

Alors, pour m_B-presque tout $u \in B$, la suite de v.a. *$\{X_n \cdot u\}$ converge* p.s. *vers une* v.a. *Z dont la loi est l'unique mesure de probabilité μ-invariante ν sur B.*

Si en outre μ possède des moments exponentiels (définition (5.3)), *alors*

$$\int_B \operatorname{Log} |\Delta_l(u)| \, \nu(du) < +\infty, \qquad \forall l \in \{1, \dots, d-1\}$$

et pour tout $u \in B$, $X_n \cdot u \xrightarrow{\text{p.s.}} Z$.

Avant de prouver ce théorème (section (5.16)), nous allons établir un certain nombre de résultats importants par eux-mêmes dans le cas général. Ensuite, pour montrer le théorème, on développera des arguments de compacité basés sur l'étalement de μ. En l'absence d'étalement, l'essentiel de ces arguments restera valable, grâce aux propriétés de contraction en remplaçant les fonctions continues par des fonctions Lipchitziennes, [16].

Le théorème (5.4) et ses conséquences s'étendront alors essentiellement au cas général. Notons aussi que si $\mathring{T}_\mu \neq \emptyset$, les hypothèses du théorème (2.6) sont satisfaites: l'existence d'une suite contractante dans T_μ est un résultat de [6] et on a ici $G_\mu = G$ car G_μ est ouvert donc fermé.

(5.5) Nous prenons pour $SL(d, \mathbb{R})$ la décomposition d'Iwasawa considérée dans la section 4.

Si $g = ((a_{ij})) \in SL(d, \mathbb{R})$, pour $l \in \{1, \dots, d-1\}$, nous appelons $\Delta_l(g)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{d-l+1\, d-l+1} & \cdots & a_{d-l+1\, d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d\, d-l+1} & & a_{dd} \end{vmatrix}.$$

Un élément g de G s'écrit sous la forme $g = u\tilde{p}$ avec $u \in N^{e,\Theta}$ et $\tilde{p} \in \tilde{P}_\Theta$ si et seulement si $\Delta_l(g) \neq 0$, pour l appartenant à un sous-ensemble J_Θ de

$\{1, \ldots, d-1\}$. (Par exemple si $\Theta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ avec $k \in \{1, \ldots, d-2\}$, alors $J_\Theta = \{1, \ldots, d-k-1\}$). Les éléments u et $\tilde{p}$ sont alors des polynômes en les coefficients a_{ij} de g et les inverses des mineures $\Delta_l(g)$, $l \in J_\Theta$.

Pour tout élément x de $G/\tilde{P}_\Theta$ (resp. $P_\Theta \backslash G$), posons,

$$\delta_l(x) = \operatorname{Log} |\Delta_l(k)|, \qquad l \in J_\Theta,$$

où k est un élément de K dont l'image dans $G/\tilde{P}_\Theta$ (resp. $P_\Theta \backslash G$) est x.

Comme, pour tout $k_0 \in K_\Theta = K \cap \tilde{P}_\Theta = K \cap P_\Theta$,

$$\Delta_l(k k_0) = \Delta_l(k_0 k) = \Delta_l(k)\, \Delta_l(k_0)\ \forall k \in K$$

et

$$|\Delta_l(k_0)| = 1,$$

les applications δ_l, $l \in J_\Theta$, sont bien définies.

Nous avons alors:

(5.6) **Lemme.** *Avec les notations de* (5.0) *et* (5.5), *écrivons* $X_n = N_n A_n K_n$ *(décomposition d'Iwasawa). Supposons que* $\int_G \operatorname{Log} \|g\|\, \mu(dg) < +\infty$. *Soit* k *un élément de* K *tel que*

$$\limsup_n |\Delta_l(K_n k)|^{-1/n} \overset{\text{p.s.}}{\leqq} 1, \qquad \forall l \in J_\Theta.$$

Alors si u *désigne l'image de* k *dans* $G/\tilde{P}_\Theta$, $X_n \cdot u \xrightarrow{\text{p.s.}} Z$.

Preuve. D'après le théorème (3.6) et la proposition (2.22), nous avons:

i) $\forall \alpha \in \Sigma - \Theta, \dfrac{1}{n} \operatorname{Log} \varphi_\alpha(A_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} \tau_\mu(\alpha) < 0$.

ii) l'image de N_n dans $G/\tilde{P}_\Theta$ converge p.s. vers Z.

Nous appelons Ω' le sous-ensemble de Ω constitué des éléments ω pour lesquels i), ii) et $\limsup_n |\Delta_l(K_n k)|^{-1/n} \leqq 1$, $\forall l \in J_\Theta$, sont vérifiés. Pour tout $\omega \in \Omega'$, il existe un entier $n_0(\omega)$ tel que pour $n \geqq n_0(\omega)$, $K_n(\omega) k$ s'écrit $u_n(\omega) \tilde{p}_n(\omega)$ avec $u_n(\omega) \in N^{e,\Theta}, \tilde{p}_n(\omega) \in \tilde{P}_\Theta$; et les racines enièmes des modules des éléments de la matrice $u_n(\omega)$ ont une «lim sup» inférieure à 1. Mais alors d'après i), la suite $\{A_n(\omega)\, u_n(\omega)\, A_n^{-1}(\omega)\}$ converge vers e et par suite d'après ii), $X_n(\omega) \cdot u \to Z(\omega)$.

(5.7) Appelons K l'espace des cocycles K-invariants sur $P_\Theta \backslash G$. K s'identifie de façon évidente à un sous-espace de cocycles K-invariants sur $\tilde{B} = NAM \backslash G$.

Pour tout $\rho \in \mathsf{K}$, nous appelons S_ρ la représentation de G dans l'espace $C(P_\Theta \backslash G)$ des fonctions continues sur $P_\Theta \backslash G$ définie par

$$S_\rho(g)\, \phi(u) = e^{\rho(u,g)}\, \phi(u \cdot g) \qquad (u \in P_\Theta \backslash G).$$

Le dual $S_\rho^*(g)$ de $S_\rho(g)$ opère sur l'espace $M(P_\Theta \backslash G)$ des mesures bornées sur $P_\Theta \backslash G$ de la façon suivante:

$$S_\rho^*(g)(\nu)(du) = \int_{P_\Theta \backslash G} e^{\rho(u,g)}\, \varepsilon_{u \cdot g}\, \nu(du).$$

Nous notons $S_\rho(\mu)$ et $S_\rho^*(\mu)$ les opérateurs

$$\int_G S_\rho(g)\, \mu(dg) \quad \text{et} \quad \int_G S_\rho^*(g)\, \mu(dg).$$

Dans ce qui suit nous établissons certaines propriétés de ces opérateurs. Ces opérateurs ont déjà été utilisés par divers auteurs; citons par exemple [25] et [3].

Si ν est une mesure de probabilité sur $P_\Theta \backslash G$ et ψ une fonction positive sur K telle que $\psi(k_1 k k_2)=\psi(k)$, $\forall k\in K$, $\forall k_1, k_2 \in K_\Theta$, nous définissons une fonction $\psi * \nu$ sur $P_\Theta \backslash G$ en posant:

$$\psi * \nu(u)=\int_{P_\Theta \backslash G} \psi(k x^{-1})\, \nu(d v) \qquad (u\in P_\Theta \backslash G);$$

où k (resp. x) est un quelconque élément de K ayant u(resp. v) pour image dans $P_\Theta \backslash G$ ($\approx K_\Theta \backslash K$).

D'autre part, pour $l\in J_\Theta$, appelons β_l la forme linéaire sur $\mathscr{A}$ qui à la matrice $X=\operatorname{diag}(x_1,\dots,x_d)$ associe $x_d+\dots+x_{d-l+1}$. Nous désignons par ρ_l le cocycle $\beta_l \circ H$. On voit facilement que $\rho_l \in \mathsf{K}$, pour $l\in J_\Theta$ et que ces cocycles forment une base de K.

Nous avons alors

(5.8) **Lemme.** *Avec les notations précédentes nous avons les relations d'entrelacement*

$$|\Delta_l|^r * S^*_{r\rho_l}(g)[\nu]=S_{r\rho_l}({}^t g)[|\Delta_l|^r * \nu],$$

pour tout $g\in G$, *tout* $r\in\mathbb{R}$, *tout* $l\in J_\Theta$ *et toute mesure positive* ν *sur* $P_\Theta \backslash G$.

Preuve. Ecrivons Δ_l au lieu de $|\Delta_l|$.

On vérifie aisément les relations suivantes, pour tout $l\in\{1,\dots,d-1\}$.

$$\Delta_l(u g \tilde{u})=\Delta_l(g), \qquad \forall g\in G,\ \forall u\in N,\ \forall \tilde{u}\in \tilde{N}.$$

$$\Delta_l(g a)=\Delta_l(a g)=(\lambda_{d-l+1}\cdots\lambda_d)(a)\,\Delta_l(g), \qquad \forall g\in G,\ \forall a=\operatorname{diag}(\lambda_1(a),\dots,\lambda_d(a))\in A.$$

Si (k,g) est un élément de $K\times G$, nous notons

$$k g=u(k g)\, a(k g)(k\cdot g)$$

la décomposition d'Iwasawa de l'élément kg de G.

Nous avons, pour tous k, $k_0\in K$ et tout $g\in G$: d'une part,

$$\begin{aligned}\Delta_l(k\,{}^t g k_0^{-1}) &= \Delta_l^r(a(k\,{}^t g)(k\cdot {}^t g)k_0^{-1})\\ &= [(\lambda_{d-l+1}\cdots\lambda_d)(a(k\,{}^t g))]^r\, \Delta_l^r((k\cdot {}^t g)k_0^{-1})]\\ &= S_{r\rho_l}({}^t g)[\Delta_l^r * \varepsilon_{k_0}](u),\end{aligned}$$

où u est l'image de k dans $P_\Theta \backslash G$; et d'autre part,

$$\begin{aligned}\Delta_l^r(k\,{}^t g k_0^{-1}) &= \Delta_l^r(k\,{}^t(k_0 g))\\ &= \Delta_l^r(k(k_0\cdot g)^{-1}\, a(k_0 g)\,{}^t[n(k_0 g)])\\ &= [(\lambda_{d-l+1}\cdots\lambda_d)(a(k_0 g))]^r\, \Delta_l^r(k(k_0\cdot g)^{-1})\\ &= \Delta_l^r * S^*_{r\rho_l}(g)[\varepsilon_{k_0}]\end{aligned}$$

D'où le résultat.

On en déduit le corollaire:

(5.9) **Corollaire.** *Soit ρ un élément de* K; *ρ s'écrit $\sum_{l\in J_\Theta} r_l\rho_l$ pour des réels r_l, $l\in J_\Theta$. Posons $\Delta_\rho=\prod_{l\in J_\Theta}|\Delta_l|^{r_l}$.*

Alors, nous avons

$$\Delta_\rho * S_\rho^*(g)[\nu]=S_\rho^*({}^t g)[\Delta_\rho * \nu],$$

pour tout $g\in G$ et tout mesure positive ν sur $P_\Theta\backslash G$.

(5.10) **Proposition.** *Avec les notations et hypothèses de* (5.0), (5.5) *et* (5.7), *supposons que μ possède des moments exponentiels. Soit ρ un élément de* K *qui s'écrit $\rho=\sum_{l\in J_\Theta} r_l\rho_l$ avec $r_l\geqq 0$.*

Alors, en tant qu'opérateur de $C(P_\Theta\backslash G)$, $S_\rho(\mu)$, noté plus simplement S possède, à un réel >0 près, une unique fonction propre strictement positive ϕ associée à une valeur propre positive β égale au rayon spectral de S et strictement supérieure au module de toute autre valeur propre de S. L'opérateur S s'écrit:

$$S=\beta\frac{\nu(\cdot)}{\nu(\phi)}\phi+Q,$$

où $Q\phi=0$ et ν est une mesure de probabilité sur $P_\Theta\backslash G$ vérifiant $S^*\nu=\beta\nu$. De même l'opérateur $\hat S=S_\rho({}^t\mu)$ s'écrit (avec des notations évidentes),

$$\hat S=\beta\frac{\hat\nu(\cdot)}{\hat\nu(\hat\phi)}\hat\phi+\hat Q.$$

Et nous avons $\phi=\Delta*\hat\nu$ et $\hat\phi=\Delta*\nu$, où $\Delta=\prod_{l\in J_\Theta}|\Delta_l|^{r_l}$.

Preuve. Nous notons X l'espace homogène $P_\Theta\backslash G$ et nous appelons E le support de l'unique mesure de probabilité μ-invariante $\tilde\nu$ sur $P_\Theta\backslash G$.

Pour $s>0$, nous appelons H_s le cône des mesures de Radon λ sur X telles que $S^*\lambda\leqq s\lambda$. Puisque X est compact, H_s est un cône à base compacte pour la topologie de la convergence étroite.

Soit $\beta=\inf\{s>0: H_s\neq\emptyset\}$. L'intersection des cônes H_s non vides est donc non vide et égale à H_β. L'opérateur S^* opère continûment sur le cône H_β; d'après le théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff, il existe une mesure ν de H_β et un réel $\gamma>0$ tel que $S^*\nu=\gamma\nu$. Puisque $\gamma\leqq\beta$, on a nécessairement $\gamma=\beta$.

La fonction $\hat\phi=\Delta*\nu$ est alors un élément positif de $C(X)$ vérifiant $\hat S\hat\phi=\beta\hat\phi$ (corollaire (5.9)). L'irréductibilité de la probabilité μ-invariante $\tilde\nu$, nous assure que $\hat\phi$ n'est pas nulle sur E. D'après le lemme (5.10), la fonction $\hat\phi$ est donc strictement positive sur X.

Appelons σ et $\hat\sigma$ les rayons spectraux des opérateurs S et $\hat S$. σ et $\hat\sigma$ sont les inverses des rayons de convergence des séries entières $\sum_{k\geqq 0} z^k S^k$ et $\sum_{k\geqq 0} z^k\hat S^k$. De l'égalité $\hat S\hat\phi=\beta\hat\phi$, avec $\hat\phi$ strictement positive, il résulte que $\hat\sigma\leqq\beta$. D'autre part soient ε un réel >0 et λ_1 une mesure de probabilité sur E; la mesure positive

λ_2 définie par

$$\lambda_2(f)=\lambda_1\left(\sum_{k\geqq 0}\frac{1}{(\sigma+\varepsilon)^k}S^k f\right)\qquad (f\in C(X)),$$

vérifie

$$S^*\lambda_2=(\sigma+\varepsilon)(\lambda_2-\lambda_1)\leqq(\sigma+\varepsilon)(\lambda_2);$$

par suite $\beta\leqq\sigma$.

En échangeant les rôles des mesures μ et ${}^t\mu$ on obtient de la même façon l'existence d'une fonction ϕ strictement positive de $C(X)$ vérifiant $S\phi=\hat\beta\phi$ avec $\sigma\leqq\hat\beta\leqq\hat\sigma$.

On en déduit alors que $\sigma=\hat\sigma=\hat\beta=\beta$.

Soit ψ une fonction propre de S associée à une valeur propre de module β, nous avons donc $S\psi=\beta e^{i\alpha}\psi$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Posons $\zeta=\dfrac{\psi}{\phi}$, nous avons, pour tous $u\in X$ et $p\in\mathbb{N}$,

$$(*)\qquad \int_G e^{\rho(u,g)}\frac{\phi(u\cdot g)}{\beta^p\phi(u)}\xi(u\cdot g)\,\mu^p(dg)=e^{pi\alpha}\xi(u)$$

et

$$\int_G e^{\rho(u,g)}\frac{\phi(u\cdot g)}{\beta^p\phi(u)}\mu^p(dg)=1.$$

Soit u_0 un élément de X tel que $\xi(u_0)=\sup_{u\in X}|\xi(u)|$.

Les relations précédentes entrainent alors que

$$\xi(\overline{u_0\cdot T_\mu})=\{\xi(u_0)\}.$$

D'où $\alpha=0$ et $\psi(u)=\xi(u_0)\,\phi(u)$ pour tout $u\in\overline{u_0\cdot T_\mu}$.

La fonction $\eta=\psi-\xi(u_0)\phi$ vérifie alors $S\eta=\beta\eta$. Le même raisonnement que précédemment nous conduit à

$$\forall u\in\overline{u_1\cdot T_\mu},\ \psi(u)-\xi(u_0)\,\phi(u)=\eta(u_1)\,\phi(u).$$

pour un élément u_1 de X tel que $\dfrac{\eta}{\phi}(u_1)=\sup_{u\in X}\left|\dfrac{\eta}{\phi}(u)\right|$.

Or les ensembles $u_0\cdot T_\mu$ et $u_1\cdot T_\mu$ portent nécessairement la mesure de probabilité μ-invariante $\tilde\nu$. Il s'ensuit que $\eta=0$ et $\psi=\xi(u_0)\phi$.

La proposition (5.10) est ainsi prouvée.

(5.11) **Lemme.** *Supposons que μ possède des moments exponentiels et que μ possède une densité Φ par rapport à la mesure de Haar m_G de G. Dans ce cas nous avons $G_\mu=G$ et T_μ contient une suite contractante* (i.e. $\Theta=\emptyset$, $\tilde P_\Theta=\tilde NAM$). *Appelons $\mathfrak{B}$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $\tilde B$.*

Alors, pour tout cocycle ρ sur $\tilde B=NAM\backslash G$, $S_\rho(\mu)$ est un opérateur compact de $\mathfrak{B}$ (i.e. *qu'il envoie la boule unité de $\mathfrak{B}$ dans un sous-ensemble relativement compact de $C(\tilde B)$*).

Preuve. Appelons F la fonction définie par

$$F(g)=e^{\sup_{u\in B}|\rho(u,g)|}\,\Phi(g)\qquad (g\in G).$$

Puisque μ possède des moments exponentiels, F est un élément de $\mathbb{L}^1(G, m_G)$. La compacité de l'opérateur $S = S_\rho(\mu)$ résulte alors du théorème d'Ascoli et des inégalités

$$\sup_{u \in B} |Sf(u \cdot k) - Sf(u)| \leqq \|f\|_\infty \|F(k^{-1}.) - F(\cdot)\|_1 Sf \qquad (k \in K, f \in \mathfrak{B}).$$

Le lemme (5.11) admet les corollaires suivants:

(5.12) **Corollaire.** *Supposons que μ soit étalée. Appelons $\tilde{\nu}$ l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur $\tilde{B} = NAM \backslash G$ et $\mathfrak{B}$ l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $\tilde{B}$.*

Alors l'opérateur $(S_0(\mu) - \tilde{\nu})$ de $\mathfrak{B}$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Preuve. Lorsque $\mu = \Phi \cdot m_G$, il résulte de la preuve du lemme (5.11) que $S_0(\mu)$ est un opérateur compact de $\mathfrak{B}$ (on n'a pas besoin pour $S_0(\mu)$ de moments exponentiels!).

Compte tenu des propriétés de ces opérateurs et du corollaire (5.2) (pour la marche aléatoire gauche), il résulte que $(S_0(\mu) - \tilde{\nu})$ est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Le cas étalé se ramène aisément au cas précédent.

(5.13) **Théorème.** *Supposons que $\mu = \Phi \cdot m_G$ possède des moments exponentiels, écrivons $\rho = \sum_{l=1}^{d-1} r_l \rho_l$ et supposons $\sum_{r_l < 0} (-r_l) < \frac{1}{d-1}$. Alors $S_\rho(\mu)$ possède une fonction propre $\phi(\rho)$ correspondant à son rayon spectral $\beta(\rho)$. Cette fonction est unique (à un coefficient près) continue, strictement positive et $S_\rho(\mu)$ se décompose sous la forme:*

$$S_\rho(\mu) = \beta(\rho) \langle \nu(\rho), \cdot \rangle \phi(\rho) + Q_\rho$$

où $\nu(\rho)$ est l'unique probabilité propre pour $S_\rho^*(\mu)$, l'opérateur Q_ρ commute avec $S_\rho(\mu) - Q_\rho$ et annulle $\phi(\rho)$. Enfin le rayon spectral de Q_ρ est strictement inférieur à $\beta(\rho)$.

Preuve. La démonstration de la proposition (5.10) reste ici valable, le point essentiel à justifier étant la régularité de $\Delta * \hat{\nu}$.

On peut d'abord trouver une mesure $\hat{\nu}$ ayant une densité; cette densité est en effet fonction propre d'un opérateur $S_{\rho'}(\mu)$ où $\rho\rho'$ est le cocycle Jacobien de g. Cet opérateur étant compact d'après le lemme (5.11), il possède au moins une fonction propre continue positive qui fournit donc la mesure $\hat{\nu}$ cherchée.

La valeur propre correspondante ne peut d'ailleurs être nulle car alors les translatées de $\hat{\nu}$ par les éléments du support de μ seraient nulles. D'autre part, lorsque $\sum_{r_l < 0} (-r_l) < \frac{1}{d-1}$, il résulte du lemme 3-13 et de l'inégalité de Hölder que la fonction $\Delta_\rho = \prod_1^{d-1} |\Delta_l|^{r_l}$ est m_B-intégrable. On en déduit que $\Delta_\rho * \hat{\nu}$ est continue et strictement positive car $\hat{\nu}$ admet une densité continue bornée.

La preuve de (5-10) montre alors que $\phi(\rho)$ est l'unique fonction propre (à un scalaire près) correspondant à une valeur propre positive et la valeur propre correspondante $\beta(\rho)$ est bien le rayon spectral de $S_\rho(\mu)$.

Pour obtenir la décomposition de $S_\rho(\mu)$ voulue, il suffit, en vertu des propriétés des opérateurs compacts, de voir que la valeur propre $\beta(\rho)$ est simple, c'est-à-dire ici l'absence de blocs de Jordan associés à $\beta(\rho)$. Par relativisation à l'aide de ϕ_ρ qui ne s'annulle pas, on se ramène à un opérateur markovien et à la valeur propre 1. Le sous-espace caractéristique correspondant est de dimension finie et puisque la norme de l'opérateur est 1, l'absence de blocs de Jordan est bien vérifiée.

(5.14) **Corollaire.** *Supposons que μ soit étalée et possède des moments exponentiels. Soit ρ un cocycle sur $\tilde{B}$.*

Alors il existe un réel positif η tel que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda|<\eta$:

$$S_{\lambda\rho}(\mu)=\beta(\lambda)\langle\nu(\lambda),\cdot\rangle\,\phi(\lambda)+Q_\lambda,$$

et

$$S_{\lambda\rho}({}^t\mu)=\beta(\lambda)\langle\hat{\nu}(\lambda),\cdot\rangle\,\hat{\phi}(\lambda)+\hat{Q}_\lambda$$

où $\phi(\lambda)$ [resp. $\hat{\phi}(\lambda)$] est une fonction propre strictement positive de $S_{\lambda\rho}(\mu)$ [resp. de $S_{\lambda\rho}({}^t\mu)$] associée à la valeur propre $\beta(\lambda)>0$; $\nu(\lambda)$ et $\hat{\nu}(\lambda)$ sont des mesures de probabilité sur $\tilde{B}$ vérifiant $\langle\nu(\lambda),\phi(\lambda)\rangle=\langle\hat{\nu}(\lambda),\hat{\phi}(\lambda)\rangle=1$; $Q_\lambda\phi(\lambda)=\hat{Q}_\lambda\hat{\phi}(\lambda)=0$; les rayons spectraux des opérateurs Q_λ et $\hat{Q}_\lambda$ sont strictement inférieurs à $\beta(\lambda)$; et les applications $\lambda\to\beta(\lambda)$ [resp. $\phi(\lambda)$, $\hat{\phi}(\lambda)$, $\nu(\lambda)$, $\hat{\nu}(\lambda)$] sont de classe C^∞.

En outre les fonctions $\Delta_{\lambda\rho}*\hat{\nu}(\lambda)$ et $\Delta_{\lambda\rho}*\nu(\lambda)$ sont non nulles et colinéaires respectivement aux fonctions $\phi(\lambda)$ et $\hat{\phi}(\lambda)$.

Preuve. Puisque μ est étalée, il existe un entier $p\geqq 1$ tel que

$$\mu^p=\Phi_p\cdot m_G+\nu_p$$

où la mesure ν_p est singulière par rapport à m_G et $\|\nu_p\|=\tau<1$.

L'application $\lambda\to S_{\lambda\rho}(\mu^p)$ est de classe C^∞ pour la topologie de la norme. D'après le corollaire (5.13) et la théorie des perturbations (voir [5, 14]), le rayon spectral de l'opérateur $S_{\lambda\rho}(\mu^p)$ tend vers 1 quand λ tend vers zéro.

D'autre part, nous avons

$$\|S_{\lambda\rho}(\nu_p)\|\leqq\int_G e^{\lambda\sup_{u\in\tilde{B}}\rho(u,g)}\,\nu_p(dg)$$

qui tend vers $\tau<1$ lorsque λ tend vers zéro.

Toutes les assertions du corollaire, exceptée l'avant dernière, s'obtiennent alors en appliquant le théorème (5.13) à la mesure $\Phi_p\cdot m_G$.

Enfin l'avant dernière affirmation résulte de la théorie des perturbations.

(5.15) *Preuve du théorème* (5.4). Ecrivons $X_n=N_nA_nK_n$ (décomposition d'Iwasawa). L'image de K_n dans $M\backslash K$ s'identifie à une chaine de Markov sur $\tilde{B}=NAM\backslash G$ d'opérateur de transition $S_0(\mu)$.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, la condition

$$\limsup_n|\Delta_l(K_nk)|^{-1/n}\underset{\text{p.s.}}{\leqq}1$$

du lemme (5.6) est impliquée par

$$\forall\alpha>0,\qquad\sum_{n\geqq 1}\mathbb{P}\{\delta_l(K_nk)<-n\alpha\}<+\infty;$$

D'après le corollaire (5.13) cette dernière condition est équivalente à

$$\forall \alpha>0, \qquad \sum_{n\geqq 1} \tilde{v}[\{u\in\tilde{B}: \delta_l(u\cdot k)< -n\alpha\}]<+\infty$$

c'est-à-dire à

$$\int_{\tilde{B}} |\delta_l(u\cdot k)|\, \tilde{v}(du)<+\infty. \tag{1}$$

Or la convolée de $\tilde{v}$ par m_K est égale à $\tilde{m}$ et d'après le lemme (3.13) les fonctions $|\delta_i|$ sont $\tilde{m}$-intégrables. On en déduit donc que (1) a lieu pour m_K-presque tout $k\in K$. D'où la première assertion du théorème (5.4).

Quant à la dernière assertion elle résulte du lemme:

(5.16) **Lemme.** *Supposons que μ soit étalée et possède des moments exponentiels. Soit $\tilde{v}$ l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur $\tilde{B}$. Alors pour tout $i\in\{1,\dots,d-1\}$ et pour tout $k\in K$,*

$$\int_{\tilde{B}} |\delta_i(u\cdot k)|\, \tilde{v}(du)<+\infty.$$

Preuve. Observons que, pour tout $x>0$, $\dfrac{1-x^\lambda}{\lambda}$ croit vers $(-\operatorname{Log} x)$ lorsque λ décroit vers zéro.

Pour $i\in\{1,\dots,d-1\}$, nous avons, en appliquant le corollaire (5.14) au cocycle ρ_i et en faisant un abus de notations,

$$\psi(\lambda)(u)=\int_{\tilde{B}} |\Delta_i|^\lambda(uv^{-1})\, v(\lambda)(dv)=\Big[\int_{\tilde{B}} \psi(\lambda)(v)\,\tilde{m}(dv)\Big]\, \phi(\lambda)(u),$$

pour λ voisin de zéro, où $\lambda\to\phi(\lambda)$ est de classe C^∞.

Or nous avons

$$\gamma(\lambda)=\int_{\tilde{B}} \psi(\lambda)(u)\,\tilde{m}(du)=\int_{\tilde{B}} |\Delta_i|^\lambda(u)\,\tilde{m}(du)$$

et la fonction γ est dérivable à droite en zéro; en effet

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{\gamma(\lambda)-1}{\lambda}&=\lim_{\lambda\downarrow 0}\uparrow\int\frac{1-|\Delta_i|^\lambda}{\lambda}\,\tilde{m}(du)\\&=\int_{\tilde{B}}[-\operatorname{Log}|\Delta_i|(u)]\,\tilde{m}(du).\end{aligned}$$

Comme $v(\lambda)$ converge vaguement vers $\tilde{v}$ lorsque $\lambda\to 0$, on en déduit, par un raisonnement classique, que

$$\begin{aligned}\int_{B}[-\operatorname{Log}|\Delta_i|(uv^{-1})]\,\tilde{v}(dv)&\leqq\liminf_{\lambda\downarrow 0}\int_{\tilde{B}}\frac{1-|\Delta_i|^\lambda(uv^{-1})}{\lambda}\,v(\lambda)(dv)\\&\leqq\lim_{\lambda\downarrow 0}\left(\frac{1-\gamma(\lambda)\,\phi(\lambda)(u)}{\lambda}\right)\\&\leqq\gamma_d'(0)+\phi'(0)(u).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Les résultats précédents, nous permettent aussi de compléter les résultats de la section 4.

(5.17) **Proposition.** *Soit μ une mesure de probabilité sur $SL(d,\mathbb{R})$ étalée et ayant des moments exponentiels; nous désignons par $\{Y_i\}_{i\geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ. Pour deux éléments y et g de $SL(d,\mathbb{R})$, nous posons*

$$X_n = y\,Y_1 \dots Y_n g = ((a_{ij}(n))), \quad i \text{ et } j \in \{1, \dots, d\}.$$

Alors pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} |a_{ij}(n)| \overset{\text{p.s.}}{=} \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X_n\| \overset{\text{p.s.}}{=} \int_G \int_{\mathbf{P}^{d-1}} \rho(u,g)\, \nu(du)\, \mu(dg) > 0.$$

Pour tout $l \in \{2, \dots, d-1\}$, la suite $\frac{1}{n} \operatorname{Log}\left(\frac{|\Delta_l(X_n)|}{\|X_n\|^2}\right)$ converge p.s. *vers un réel $\tau < 0$.*

Preuve. Il suffit de prouver la première assertion pour $a_{dd}(n) = \Delta_1(X_n)$. Les autres s'obtiennent alors par un changement du couple (y, g).

Ecrivons $X_n = N_n \operatorname{diag}(\beta_1(n), \dots, \beta_d(n))\, K_n$ (décomposition d'Iwasawa).

Nous avons alors

$$\frac{|a_{dd}(n)|}{\beta_d(n)} = |K_n(d,d)| + O\left(\frac{\beta_{d-1}}{\beta_d}(n)\right).$$

Nous savons que la suite $\left\{\frac{1}{n} \log \beta_{d-1}/\beta_d(n)\right\}$ converge p.s. vers un réel <0 et que $\left\{\frac{\beta_d(n)}{\|X_n\|}\right\}$ converge p.s. vers un réel >0.

D'autre part en (5.15), nous avons prouvé que

$$\limsup_n |K_n(d,d)|^{-1/n} = \limsup_n |\Delta_1(K_n)|^{-1/n} \leqq 1.$$

Comme $|K_n(d,d)| \leqq 1$, on en déduit que $\lim_n |K_n(d,d)|^{1/n} = 1$; et par suite $\lim_n \left(\frac{|a_{dd}(n)|}{\|X_n\|}\right)^{1/n} = 1$. D'où la première assertion de la proposition.

La deuxième assertion se prouve de façon analogue.

Montrons maintenant comment, grâce aux techniques de [16] on peut étendre ces résultats:

(5.18) **Théorème.** *Soit μ une mesure de probabilité sur $G = SL(d,\mathbb{R})$ possédant des moments exponentiels. Supposons que G_μ, soit totalement irréductible et que T_μ contienne une suite contractante vis-à-vis de l'espace projectif $\mathbf{P}^{d-1}$. Soit $\{Y_i\}_{i\geqq 1}$ une suite de* v.a. *indépendantes et de loi μ; nous notons X_n le produit $Y_1 \dots Y_n$. Nous désignons par ν l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur $\mathbf{P}^{d-1}$.*

Alors,

$$\int_{\mathbf{P}^{d-1}} \operatorname{Log} |\Delta_1(\bar{u})|\, \nu(d\bar{u}) = \int_{\mathbf{P}^{d-1}} \operatorname{Log} \left| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, e_d \right\rangle \right| \nu(d\bar{u}) < +\infty$$

et pour tout $\bar{u} \in \mathbf{P}^{d-1}$, la suite de v.a. *$\{X_n \cdot \bar{u}\}$ converge* p.s. *vers une* v.a. *Z.*

Si, pour deux éléments y et g de $SL(d, \mathbb{R})$, *nous notons* $((a_{ij}(n)))$ *la matrice* $yX_n g$, *alors pour tout* $i,j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} |a_{ij}(n)| \overset{\text{p.s.}}{=} \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X_n\| \overset{\text{p.s.}}{=} \int_G \int_{{}^t\mathbf{P}^{d-1}} \rho(\bar{u}, g)\, \tilde{\nu}(d\bar{u})\, \mu(dg) > 0.$$

Le théorème (5.18) se démontre de la même façon que le théorème (5.4), en utilisant la proposition (5.19) ci-dessous qui permet de se passer de l'hypothèse d'étalement.

Si $f \in C(\mathbf{P}^{d-1})$, on définit pour $\lambda > 0$,

$$m_\lambda(f) = \sup_{\substack{u, v \in \mathbf{P}^{d-1} \\ u \neq v}} \frac{|f(u) - f(v)|}{\delta^\lambda(u, v)} \qquad \text{(voir (4.5))}.$$

Nous appelons L_λ l'espace des fonctions f de $C(\mathbf{P}^{d-1})$ telles que

$$|f|_\lambda = \|f\|_\infty + m_\lambda(f) < +\infty.$$

L'espace des cocycles K-invariants sur ${}^t\mathbf{P}^{d-1} \times G$ est engendré par le cocycle ρ_1, noté plus simplement ρ, défini par

$$\rho(\bar{u}, g) = \operatorname{Log} \frac{\|ug\|}{\|u\|} \qquad (\bar{u} \in {}^t\mathbf{P}^{d-1},\ g \in G),$$

où u est un représentant de $\bar{u}$ dans ${}^t\mathbb{R}^d$.

Nous avons:

(5.19) **Proposition.** *Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème* (5.18). *Alors pour tout réel* β, $S_{\beta\rho}(\mu)$ *est un opérateur borné de* L_λ, *pour* $0 < \lambda \leqq 1$, *et l'application* $\beta \to S_{\beta\rho}(\mu)$ *de* $\mathbb{R}$ *dans l'espace de Banach des opérateurs bornés de* L_λ *est analytique. Il existe un réel* $0 < \lambda_0 \leqq 1$ *tel que pout tout* $0 < \lambda < \lambda_0$, $(S_0(\mu) - \tilde{\nu})$ *soit un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à* 1 *sur* L_λ.

Nous résumons ci-dessous la preuve de la proposition (5.19). Pour les détails nous renvoyons le lecteur à [16].

On prouve les deux lemmes suivants:

(5.20) **Lemme.** *Pour tout réel* $\lambda > 0$, *posons*

$$\gamma_\lambda(n) = \sup_{\xi \in {}^t\bar{M}} \mathbb{E}[e^{\lambda\sigma(\xi, X_n)}].$$

Alors il existe $0 < \lambda_0 \leqq 1$ *tel que pour tout* $\lambda < \lambda_0$, $\lim_n (\gamma_\lambda(n))^{1/n} < 1$.

Preuve. Pour tout $\lambda > 0$, $\{\gamma_\lambda(n)\}$ est une suite sous-multiplicative si bien que $\lim_n (\gamma_\lambda(n))^{1/n} = \inf (\gamma_\lambda(n))^{1/n}$.

Le lemme (5.20) résulte alors du corollaire (4.7) et du fait que, pour tout réel a, $\dfrac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda}$ décroit vers a lorsque λ décroit vers zéro.

(5.21) **Lemme.** *Nous avons les inégalités:*

$$\sup_{(u,v)\in {}^tM} \frac{|e^{\beta\rho(u,g)}-e^{\beta\rho(v,g)}|}{\delta(u,v)} \leqq \begin{cases} C(\beta)[\sigma(g)]^{\beta} & \text{si } \beta>0 \\ C(\beta)[\sigma(g)]^{3|\beta|} & \text{si } \beta<0 \end{cases}$$

$$\sup_{(u,v)\in {}^tM} \frac{|\rho(u,g)-\rho(v,g)|}{\delta(u,v)} \leqq C'(\sigma(g))^2;$$

où $\sigma(g)=\sup\{\|g\|, \|g^{-1}\|\}$ et $C(\beta)$ ne dépend que de β.

La première assertion de la proposition (5.19) résulte alors du lemme (5.21). La deuxième assertion résulte de l'inégalité

$$|S_0^n(\mu)f|_\lambda \leqq \gamma_\lambda(n)|f|_\lambda + \|f\|_\infty,$$

du lemme (5.20), du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu [19] et du corollaire (5.2).

Le théorème (5.18) se généralise de la façon suivante:

(5.22) **Théorème.** *Avec les notations et hypothèses de* (5.0) *et* (5.5), *appelons μ l'unique mesure de probabilité μ-invariante sur $G/\tilde{P}_\Theta$. Supposons en outre que μ possède des moments exponentiels.*

Alors

$$\int_{G/\tilde{P}_\Theta} \mathrm{Log}|\Delta_l(u)|\,\nu(du) < +\infty, \qquad \forall\, l\in J_\Theta$$

et pour tout $u\in G/\tilde{P}_\Theta$, la suite de v.a. *$\{X_n\cdot u\}$ converge* p.s. *vers une* v.a. *Z.*

Le théorème (5.18) *correspond au cas $\Theta=\{\alpha_1,\dots,\alpha_{d-2}\}$. Pour traiter le cas général on considère la distance K-invariante sur $P_\Theta\backslash G$ définie par*

$$\delta(u,v)=\sum_{l\in J_\Theta}(1-\Delta_l^2(kk'^{-1})) \qquad (u,v\in P_\Theta\backslash G),$$

où k et k' sont des éléments quelconques de K ayant respectivement u et v pour images dans $P_\Theta\backslash G\approx K_\Theta\backslash K$.

Nous terminons cette section en donnant une autre conséquence des résultats précédents.

(5.23) **Théorème.** *Avec les hypothèses et les notations du théorème* (5.18), *appelons γ le réel strictement positif*

$$\int_G \int_{{}^t\mathbf{P}^{d-1}} \rho(\bar{u},g)\,\bar{\nu}(d\bar{u})\,\mu(dg).$$

Alors nous avons l'alternative suivante:

ou bien il existe des réels strictement positifs C et σ tels que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\ \sup_{k,k'\in SO(d)} \left| \mathbb{P}\left[\frac{\mathrm{Log}|\Delta_1(kX_nk')|-n\gamma}{\sigma\sqrt{n}} \leqq t\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \right| \leqq \frac{C}{\sqrt{n}};$$

ou bien:

(∗) *il existe une fonction continue h sur ${}^t\mathbf{P}^{d-1}$ telle que $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, g\in\mathrm{Supp}\,\mu^k$, $\forall\,\bar{u}\in\mathrm{Supp}\,\tilde{\nu}$, $\rho(\bar{u},g)=k\gamma+h(\bar{u}\cdot g)-h(\bar{u})$.*

Avant de prouver le théorème, remarquons que la première alternative est satisfaite dans les divers cas suivants:

1) Le semi-groupe T_μ est d'intérieur non vide. (C'est le cas si μ est étalée).

2) Il existe des entiers p et $q \geqq 1$ tels que

$$\operatorname{supp} \mu^p \cap \operatorname{supp} \mu^{p+q} \neq \emptyset.$$

3) $\operatorname{Supp} \tilde{v} = \mathbf{P}^{d-1}$.

Preuve du théorème (5.23). Nous notons Δ_1 au lieu de $|\Delta_1|$.

Posons

$$Z_n(k, k') = \operatorname{Log} \Delta_1(k X_n k');$$

et écrivons

$$Z_n(k, k') = U_n(k) + V_n(k, k')$$

avec

$$U_n(k) = \operatorname{Log} \|e_d k X_n\|$$

$$V_n(k, k') = \operatorname{Log} \frac{|e_d k X_n k' f_d|}{\|e_d k X_n\|} = \operatorname{Log} \Delta_1(k \cdot X_n k')$$

(où $k \cdot X_n k'$ désigne la composante sur K, dans la décomposition d'Iwasawa $G = NAK$, du produit $k X_n k'$).

Pour tous réels σ et $\alpha > 0$ nous avons

$$\left| \mathbb{P}\left[\frac{Z_n(k, k') - n\gamma}{\sigma \sqrt{n}} \leqq t\right] - \mathbb{P}\left[\frac{U_n(k) - n\gamma}{\sigma \sqrt{n}} \leqq t\right] \right| \leqq 2\, \mathbb{P}\left[\frac{|V_n(k, k')|}{\sigma \sqrt{n}} \geqq \alpha\right] + \mathbb{P}\left[t - \alpha < \frac{U_n(k) - n\gamma}{\sigma \sqrt{n}} < t + \alpha\right].$$

D'après ([16] théorème 2), nous savons que:

i) la suite $\left\{\frac{1}{n} \mathbb{E}[(U_n(k) - n\gamma)^2]\right\}$ converge vers une constante σ^2 indépendante de $k \in SO(d)$. Le réel σ est >0 excepté si la condition (*) du théorème (5.23) est vérifiée.

ii) lorsque $\sigma > 0$, il existe une constante $c' > 0$ telle que:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{k \in SO(d)} \left| \mathbb{P}\left[\frac{U_n(k) - n\gamma}{\sigma \sqrt{n}} \leqq t\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leqq \frac{c'}{\sqrt{n}}.$$

Pour prouver le théorème (5.23), il nous reste alors à montrer que pour tout réel $\beta > 0$, la suite $\sup_{k, k' \in SO(d)} \{\sqrt{n}\, \mathbb{P}[|V_n(k, k')| \geqq \beta \sqrt{n}]\}$ est bornée.

Nous avons

$$\mathbb{P}[|V_n(k, k')| \geqq \beta \sqrt{n}] = [S_0(\mu)]^n S_0(k') [\phi_n \circ \Delta_1](\bar{k}),$$

$$\text{où } \phi_n(x) = 1_{[0, e^{-\beta \sqrt{n}}]}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}_+^*).$$

Lorsque μ est étalée, du lemme (5.11), il résulte que:

$$\sup_{k,k' \in K} \mathbb{P}[|V_n(k,k')| \geqq \beta \sqrt{n}] \leqq \sup_{k' \in K} \tilde{v}(S_0(k')[\phi_n \circ \Delta_1]) + C\rho^n$$

avec $0 \leqq \rho < 1$.

Or

$$\begin{aligned} \tilde{v}(S_0(k')[\phi_n \circ \Delta_1]) &= \tilde{v} \cdot k'[-\operatorname{Log} \Delta_1 \geqq \beta \sqrt{n}] \\ &\leqq \frac{1}{\beta \sqrt{n}} \tilde{v} \cdot k'[|\operatorname{Log} \Delta_1|] \\ &\leqq \frac{1}{\beta \sqrt{n}} (\gamma'_d(0) + \phi'(0)[\overline{k'^{-1}}]) \end{aligned}$$

(d'après la preuve du lemme (5.16));
d'où le résultat.

Lorsque μ n'est pas étalée, considérons la suite de fonction réelle $\{\psi_n\}$ définie par:

$$\psi_n(x) = \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } 0 \leqq x \leqq e^{-\beta \sqrt{n}} \\ 2e^{2\beta\sqrt{n}}(x - 2e^{-\beta\sqrt{n}})^2 & \text{pour } \frac{3}{2} e^{-\beta\sqrt{n}} \leqq x \leqq 2e^{-\beta\sqrt{n}} \\ 1 - 2e^{2\beta\sqrt{n}}(e^{-\beta\sqrt{n}} - x)^2 & \text{pour } e^{-\beta\sqrt{n}} \leqq x \leqq \frac{3}{2} e^{-\beta\sqrt{n}} \end{array}$$

$a_n = e^{-\beta \sqrt{n}}$

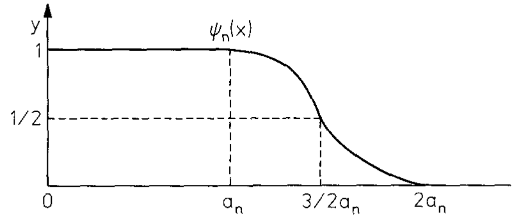

Fig. 2

Nous avons $\|\psi'_n\|_\infty = 2e^{\beta\sqrt{n}}$. De la proposition (5.20) il résulte alors que:

$$\mathbb{P}[|V_n(k,k')| \geqq \beta \sqrt{n}] \leqq \tilde{v} \cdot k'(\psi_n \circ \Delta_1) + C\rho^n(2e^{\beta\sqrt{n}} + 1).$$

Or, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \tilde{v} \cdot k'(\psi_n \circ \Delta_1) &\leqq \tilde{v} \cdot k'(\{u : \Delta_1(u) \leqq 2e^{-\beta\sqrt{n}}\}) \\ &\leqq \tilde{v} \cdot k' \left(\left\{ u : -\operatorname{Log} \Delta_1(\mathrm{u}) \geqq \frac{\beta}{2} \sqrt{n} \right\} \right) \\ &\leqq \frac{2}{\beta\sqrt{n}} \tilde{v} \cdot k'[|\operatorname{Log} \Delta_1|]; \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

(5.24) **Corollaire.** *Avec les hypothèses et notations des théorèmes* (5.18) *et* (5.19), *supposons que la condition* (∗) *du théorème* (5.19) *ne soit pas vérifiée. Alors il existe des réels strictement positifs* σ *et* C *tels que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{i,j\in\{1,\dots,d\}} \left| \mathbb{P}\left[\frac{\operatorname{Log}|a_{ij}(n)|-n\gamma}{\sigma\sqrt{n}} \leqq t\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \right| \leqq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Bibliographie

1. Azencott, R.: Espaces de Poisson des groupes localement compacts. Lecture Notes, n° 148. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
2. Borel, A.: Introduction aux groupes arithmétiques. Paris: Hermann 1969
3. Bougerol, P.: Théorème central limite local sur certains groupes de Lie. (à paraître)
4. Conze, J.P., Guivarc'h, Y.: Remarques sur la distalité dans les espaces vectoriels. C.R.A.S. t. 278, p. 1083-1086, 1974
5. Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear operators. New York: Interscience 1958
6. Furstenberg, H.: A Poisson formula for semi-simple Lie groupe. Ann. Math. **77**, 335-386 (1963)
7. Furstenberg, H.: Non commuting random products. Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 377-428 (1963)
8. Furstenberg, H.: Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. Proc. Symp. Pure Math. **26**, 193-229 (1972)
9. Furstenberg, H., Kesten, H.: Products of random matrices. Ann. Math. Statist. **31**, 457-469 (1960)
10. Guivarc'h, Y.: Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires. Lecture notes 774. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
11. Guivarc'h, Y.: Sur les exposants de Liapunoff des marches aléatoires à pas Markovien. Séminaire de Rennes 1981
12. Guivarc'h, Y.: Croissance polynominale et périodes des fonctions harmoniques. Bulletin SMF **101**, 333-379 (1973)
13. Helgason, S.: Differential geometry and symetric spaces. Academic Press: New York 1962
14. Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
15. Krein, M.G., Rutman, M.A.: Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. A.M.S. Trans. **26**, 200-325 (1950)
16. LePage, E.: Théorèmes limites pour les produits de matrices. Séminaire de probabilités de Rennes 1981; note du C.R.A. S. t. 290, p. 559-662, 1980
17. Mostow, G.D.: Strong rigidity of locally symmetric spaces. Ann. Math. Studies, Princeton: University Press 1973
18. Moore, C.C.: Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows. Israel J. Math. **34**, 121-138 (1979)
19. Norman, F.: Markov processes and learning models. New York: Academic Press, vol. 84, 1972
20. Oseledec, V.I.: A multiplicative ergodic theorem. Trans. Moscow Math. Soc. **19**, 197-231 (1968)
21. Raghunathan, M.S.: A proof of Oseledec multiplicative theorem. Israel J. Math. **32**, 356-362 (1979)
22. Raugi, A.: Pèriodes des fonctions harmoniques bornées. Séminaire de probabilités de Rennes, 1978
23. Raugi, A.: Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches gléatoires sur les groupes. Bull. Soc. Math. France, mémoire 54, 1977
24. Tutubalin, V.N.: Some theorems of the type of the strong law of large numbers. Theory Probability Appl. **14**, 313-319 (1969)
25. Tutubalin, V.N.: On limit theorems for a product of random matrices. Theory Probability Appl. **10**, 25-27 (1965)
26. Virtser, A.D.: Central limit theorem for semi-simple Lie groups. Theory Probability Appl. **15**, 667-687 (1970)

Reçu le 1er Octobre 1983