Anelli Henseliani topologici (*) (**).

Paolò Valabrega

Summary. – *In the present work we give a generalization of the concept of « ring henselian with respect to its ideal* $\mathfrak{m}$ *», by introducing the concept of « ring henselian with respect to the ideal* $\mathfrak{m}$ *and the linear topology* τ *». Then we get the henselization of a triple* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *(ring, ideal, linear topology) and investigate its relations with completion, mainly in the «* $\mathfrak{m}$*-adic » situation. Among our results there is also a reformulation, with less restrictive hypothesis, of the Hensel lemma as it is given in Bourbaki.*

Introduzione.

Il concetto di anello locale henseliano è stato introdotto da G. Azumaya [1] sulla base della tesi del lemma di Hensel classico ([15], cap. V, n. 30, pag. 103). Esso ha dato origine alla teoria dell'henselizzazione di un anello locale rispetto al suo ideale massimo, elaborata in tre importanti articoli da M. Nagata [14] e consistente nella soluzione di un problema universale per la categoria degli anelli locali con omomorfismi locali.

Sempre basandosi sulla tesi del lemma di Hensel classico, il caso locale ora descritto può estendersi mediante la nozione di « anello henseliano A rispetto a un suo ideale $\mathfrak{m}$ » ovvero di « coppia $(A, \mathfrak{m})$ henseliana ». Il problema universale di henselizzazione di una coppia è stato affrontato da Lafon in [13], da Greco in [11], da Raynaud in [16] e risolto in vari modi.

Nel presente lavoro ci siamo basati sulla versione Bourbaki del lemma di Hensel (cfr. [5], Cap. III, Theor. 1, § 4, n. 3) che estende quella classica mediante una topologia lineare non discreta sull'anello base, per introdurre il concetto di terna henseliana costituita da un anello, un suo ideale e una topologia lineare sull'anello. Naturalmente nella nostra teoria pretendiamo di estendere i concetti relativi alle coppie, nel senso che una terna henseliana, privata della topologia, deve restare una coppia henseliana. Tale esigenza ci porta a due definizioni diverse, di terna henseliana e di terna forte (cfr. n. 2).

Il lavoro è diviso in sei sezioni.

Nel n. 1 riprendiamo l'henselizzazione delle coppie, per estendere alcuni risultati già noti in modo utile per lo studio delle terne.

(*) Entrata in Redazione il 24 marzo 1971.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Contratti di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Nel n. 2 discutiamo le principali definizioni relative alle terne (terne henseliane, terne forti, morfismi, ecc.).

Nei nn. 3 e 4 ci occupiamo di limiti proiettivi di sistemi proiettivi di coppie henseliane e della immersione di una terna qualsiasi in una fortemente henseliana, ottenendo, fra l'altro, una generalizzazione del lemma di HENSEL versione BOURBAKI. I risultati ottenuti consentono nel n. 5 di risolvere il problema universale dell'henselizzazione (non forte) delle terne.

Infine concludiamo il lavoro con un gruppo di esempi (n. 6), fra i quali ha particolare interesse l'esempio 2); esso ci permette infatti di dimostrare che il concetto di terna henseliana è effettivamente più restrittivo (non solo in apparenza) di quello di coppia henseliana, e di dare quindi un senso al problema della henselizzazione delle terne.

Restano aperte varie questioni: ad esempio vedere se una terna henseliana è sempre forte, oppure, in caso contrario, vedere se esiste sempre l'henselizzazione forte, distinta dall'henselizzazione che viene costruita in questo lavoro.

1. – Riprendiamo in questo numero i concetti principali relativi alle coppie henseliane come vengono presentati in [11], per poter fare alcune osservazioni e generalizzare qualche risultato.

In [11] tutti gli anelli sono commutativi unitari, gli omomorfismi di anelli trasformano 1 in 1 e le algebre sono unitarie. A queste condizioni ci atterremo in tutto il presente lavoro, anche trattando di terne.

In [11] una coppia $(A, \mathfrak{m})$ è costituita da un anello A e da un suo ideale qualsiasi $\mathfrak{m}$. Un morfismo di coppie $\varphi\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ è un omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$, tale che $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Questa definizione estende quella di omomorfismo locale (cfr. [4], cap. II, § 3, n. 1, definizione 2), cui fa sempre riferimento NAGATA nella sua teoria degli anelli locali henseliani (cfr. [14], [15]).

Una H-coppia $(A, \mathfrak{m})$ (o coppia henseliana) soddisfa per definizione alle seguenti condizioni:

1) $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}(A)$;

2) è verificata la tesi del lemma di HENSEL classico ([15], cap. V, n. 30, pag. 103).

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la coppia $(A, \mathfrak{m})$ sia henseliana è che siano soddisfatte le due seguenti condizioni:

1') $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}(A)$;

2') se $F(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ è un qualsiasi polinomio a coefficienti in A tale che $a_0 \in \mathfrak{m}$ e a_1 è unitario modulo $\mathfrak{m}$, allora $F(X)$ ammette una radice in $\mathfrak{m}$ ($F(X)$ si dice N-polinomio).

La H-chiusura (o chiusura henseliana) di una coppia $(A, \mathfrak{m})$ è una H-coppia $(B, \mathfrak{n})$ con un morfismo $\varphi\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ tale che, preso comunque un morfismo

ψ: $(A, \mathfrak{m}) \to (B', \mathfrak{n}')$, dove la seconda è una coppia henseliana, esiste uno e un solo morfismo ψ': $(B, \mathfrak{n}) \to (B', \mathfrak{n}')$ per cui si ha: $\psi' \circ \varphi = \psi$.

Un morfismo φ: $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ si dice stretto se sono verificate le due seguenti condizioni:

i) $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cdot B$ ($\mathfrak{m} \cdot B$ è una notazione abbreviata per indicare $\varphi(\mathfrak{m}) \cdot B$);

ii) φ induce un isomorfismo: $(A/\mathfrak{m}) \to (B/\mathfrak{n})$.

Si può dimostrare che il morfismo canonico di una coppia nella sua H-chiusura è stretto.

Per costruire la H-chiusura si comincia con la definizione di N-estensione semplice di una coppia $(A, \mathfrak{m})$:

«Se $F(X)$ è un N-polinomio in $A[X]$, e si pone $A[x] = A[X]/(F(X))$, $S = 1 + (\mathfrak{m}, x) \cdot A[x]$, $B = S^{-1} \cdot A[x]$, diciamo che $(B, \mathfrak{m}B)$ è una N-estensione semplice di $(A, \mathfrak{m})$».

Una N-estensione di $(A, \mathfrak{m})$ si ottiene mediante un numero finito di N-estensioni semplici. Se $(B, \mathfrak{n})$ è una N-estensione di $(A, \mathfrak{m})$ esiste un morfismo canonico φ: $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ che è stretto ([11], proposizione 2.6).

L'insieme delle N-estensioni della coppia $(A, \mathfrak{m})$ è diretto quando in esso si introduca la seguente relazione di ordine parziale: $(A', \mathfrak{m}') \leqslant (A'', \mathfrak{m}'')$ se e solo se, detti φ' e φ'' i morfismi canonici di $(A, \mathfrak{m})$ nelle due N-estensioni, esiste un morfismo ψ: $(A', \mathfrak{m}') \to (A'', \mathfrak{m}'')$ tale che $\psi \circ \varphi' = \varphi''$ (questo morfismo, se esiste, è unico).

La H-chiusura della coppia $(A, \mathfrak{m})$ è quindi definita come il limite diretto delle sue N-estensioni, mentre il morfismo canonico di $(A, \mathfrak{m})$ nella H-chiusura è il corrispondente limite diretto dei morfismi canonici nelle N-estensioni. Il fatto che la H-chiusura così definita risolva il problema universale proposto dipende in modo ovvio dalla seguente proprietà: Se φ: $(A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ è il morfismo canonico della coppia $(A, \mathfrak{m})$ nella sua N-estensione $(A', \mathfrak{m}')$ e ψ: $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ è un morfismo nella H-coppia $(B, \mathfrak{n})$, allora esiste uno e un solo morfismo ψ': $(A', \mathfrak{m}') \to (B, \mathfrak{n})$ tale che $\psi' \circ \varphi = \psi$ ([11], Lemma 3-4).

Vogliamo ora apportare qualche modifica alla costruzione precedente.

In primo luogo osserviamo che la costruzione della H-chiusura si può fare quando ci si metta in una categoria lievemente più generale. Lasciamo cioè invariato il concetto di coppia, ma alteriamo il concetto di morfismo con la seguente

DEFINIZIONE 1. – φ: $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ *si dice morfismo di coppie se e solo se è un morfismo di anelli tale che* $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

Vale allora il seguente

TEOREMA 1. – *La H-chiusura è soluzione del problema universale proposto anche nella categoria delle coppie con i nuovi morfismi della Definizione* 1.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $(A', \mathfrak{m}')$ una N-estensione di $(A, \mathfrak{m})$ e φ: $(A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ il morfismo canonico (che è del tipo di GRECO). Allora, se ψ: $(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ è un morfismo in una H-coppia, esiste uno e un solo morfismo ψ' che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} (A, \mathfrak{m}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & (A', \mathfrak{m}') \arrow[d, "\psi'"] \\ & (B, \mathfrak{n})\,. \end{tikzcd} \tag{1}$$

In effetti, supposto che $(A', \mathfrak{m}')$ sia una N-estensione semplice, sia $F(X)$ un N-polinomio sopra $(A, \mathfrak{m})$ usato per costruirla. Il polinomio $G(X) = \psi(F(X))$ è un N-polinomio sopra $(B, \mathfrak{n})$: infatti, se $F(X) = a_0 + a_1X + \ldots + X^n$, $\psi(a_0) \in \mathfrak{n}$ e $\psi(a_1)$ è un elemento invertibile modulo $\mathfrak{n}$, come segue dal fatto che un'identità del tipo $a_1 \cdot b_1 - 1 = m \in \mathfrak{m}$, si trasforma nell'identità: $\psi(a_1)\cdot\psi(b_1) - 1 = \psi(m) \in \mathfrak{n}$. Perciò $G(X)$ ha una radice $y \in \mathfrak{n}$, per definizione. Esiste dunque un omomorfismo di anelli $\varrho\colon A[x] = A[X]/(F(X)) \to B$, tale the $\varrho(x) = y$ e $\varrho/A = \psi$. Poichè $\psi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ e $y \in \mathfrak{n}$, si ha: $\varrho\big((\mathfrak{m}, x)\cdot A[x]\big) \subseteq \mathfrak{n}$. Ma ogni elemento di $1 + \mathfrak{n}$ è invertibile, in quanto $\mathfrak{n} \subseteq \subseteq \mathrm{Rad}\,(B)$ per definizione. Ne segue che ϱ si estende a $\psi'\colon S^{-1}\cdot A[x] \to B$, dove $S = 1 + (\mathfrak{m}, x)\cdot A[x]$, cioè ϱ si estende ad A'. Inoltre $x \in \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}\cdot A'$ ([11], Lemma 2-3) e quindi ψ' è un morfismo di coppie: $(A', \mathfrak{m}') \to (B, \mathfrak{n})$. La commutatività del diagramma (1) è ovvia.

Si tratta ora di stabilire l'unicità di ψ'. Supponiamo allora per assurdo che esista un secondo morfismo ψ'' con la stessa proprietà di ψ'. Poichè $x \in \mathfrak{m}'$ ([11], Lemma 2-3), si ha: $y_1 = \psi''(x) \in \mathfrak{n}$. Allora y_1 è radice di $G(X) = \psi(F(X))$, esattamente come l'elemento y sopra costruito. Ne segue che $y_1 = y$, in quanto ogni N-polinomio ammette una e una sola radice in $\mathfrak{n}$ ([11], Lemma 1-5). Di qui si deduce subito la conclusione.

È poi immediato il passaggio alle N-estensioni non semplici e quindi al loro limite diretto, cioè alla H-chiusura.

Si osservi che la nostra dimostrazione ricalca perfettamente il Lemma 3-1 e il Lemma 3-4 di [11], nei quali appunto si fa uso soltanto del fatto che i morfismi considerati soddisfano alla condizione meno restrittiva da noi indicata nella Definizione 1.

D'ora in poi, in questa come nelle successive sezioni, intenderemo i morfismi di coppie nel senso indicato dalla Definizione 1, *salvo esplicito avviso in contrario.*

COROLLARIO 1. – *Se $(B, \mathfrak{n})$ è l'henselizzato di $(A, \mathfrak{m})$ e $\mathfrak{a}$ è un ideale qualsiasi di A, allora, posto $C = A/\mathfrak{a}$, l'henselizzazione di $(C, \mathfrak{m}C)$ coincide con la coppia $\big(B/(\mathfrak{a}\cdot B)$, $\mathfrak{n}(B/(\mathfrak{a}\cdot B))\big)$, cioè l'henselizzazione commuta sempre con il passaggio al quoziente.*

DIMOSTRAZIONE. – Il risultato, noto quando $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ ([11, Corollario 6.4), si estende nel modo seguente. Posto $(C', \mathfrak{m}') = \big(B/(\mathfrak{a}B), \mathfrak{n}(B/(\mathfrak{a}B))\big)$, è noto che $(C', \mathfrak{m}')$ è una H-coppia, in quanto C' è un'algebra intera sopra B ([10], Teorema 4.6). Dimostriamo allora che $(C', \mathfrak{m}')$ soddisfa alla proprietà universale caratteristica della chiusura henseliana di $(C, \mathfrak{m}C)$. In primo luogo è da osservare che, detto φ il morfismo canonico di $(A, \mathfrak{m})$ in $(B, \mathfrak{n})$, se ne può dedurre, per passaggio al quoziente, un morfismo di coppie $\varphi'\colon (C, \mathfrak{m}C) \to (C', \mathfrak{m}')$ tale che, detti $\pi\colon (A, \mathfrak{m}) \to (C, \mathfrak{m}C)$ e ${}^h\pi\colon (B, \mathfrak{n}) \to (C', \mathfrak{m}')$ i morfismi canonici nei quozienti, si ha: $\varphi' \circ \pi = {}^h\pi \circ \varphi$. Sia ora $\psi\colon (C, \mathfrak{m}C) \to (\bar{C}, \bar{\mathfrak{m}})$ un morfismo nella coppia henseliana $(\bar{C}, \bar{\mathfrak{m}})$. È chiaro (per il Teorema 1) che esiste uno e un solo morfismo di coppie $\psi'\colon (B, \mathfrak{n}) \to (\bar{C}, \bar{\mathfrak{m}})$ tale che $\psi \circ \pi = \psi' \circ \varphi$. Inoltre $\mathfrak{a} \cdot B \subseteq \ker \psi'$, quindi, per passaggio al quoziente, si ottiene un morfismo di coppie $\bar{\psi}'\colon (C', \mathfrak{m}') \to (\bar{C}, \bar{\mathfrak{m}})$, tale che $\bar{\psi}' \circ \varphi' = \psi$. Il morfismo $\bar{\psi}'$ è unico in quanto si ha: $\psi' = \bar{\psi}' \circ {}^h\pi$, e ${}^h\pi$ è suriettivo e ψ' unico.

COROLLARIO 2. – *Sia $(B, \mathfrak{n})$ la H-chiusura di $(A, \mathfrak{m})$ e sia $\bar{A}$ una A-algebra intera sopra l'anello A. Posto $\bar{B} = \bar{A} \otimes_A B$, $(\bar{B}, \mathfrak{n}\bar{B})$ è la H-chiusura di $(\bar{A}, \mathfrak{m}\bar{A})$.*

DIMOSTRAZIONE. – Il risultato è noto quando $\bar{A}$ è un sopranello di A ([12], Propositione 5.11). Ci si può ricondurre a questa situazione osservando che, se $\mathfrak{a}$ è il nucleo dell'omomorfismo canonico $f\colon A \to \bar{A}$, allora $\bar{A}$ è un sopranello di $A/\mathfrak{a}$, intero su questo. Applicando il risultato noto, si deduce che la H-chiusura di $(\bar{A}, \mathfrak{m}\bar{A})$ coincide con la coppia seguente: $\big(\bar{A} \otimes_{A/\mathfrak{a}} (B/\mathfrak{a}B), \mathfrak{n}(\bar{A} \otimes_{A/\mathfrak{a}} (B/\mathfrak{a}B))\big)$. Poichè $\mathfrak{a}$ è contenuto nell'annullatore di $\bar{A}$, le due algebre $\bar{A} \otimes_A B$ e $\bar{A} \otimes_{A/\mathfrak{a}} (B/\mathfrak{a}B)$ sono canonicamente isomorfe ([2], Corollario 3 alla Proposizione 6) e la tesi segue immediatamente.

TEOREMA 2. – *Sia $\varphi\colon (A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ un morfismo di coppie suriettivo (cioè $\varphi(A) = A'$, $\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$) e siano $i\colon (A, \mathfrak{m}) \to {}^h(A, \mathfrak{m}) = (B, \mathfrak{n})$ e $i'\colon (A', \mathfrak{m}') \to {}^h(A', \mathfrak{m}') = (B', \mathfrak{n}')$ i corrispondenti morfismi canonici nelle rispettive H-chiusure. Allora è pure suriettivo l'unico morfismo $\psi\colon (B, \mathfrak{n}) \to (B', \mathfrak{n}')$ tale che $\psi \circ i = i' \circ \varphi$.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\mathfrak{a}$ il nucleo di φ. Allora si ha: $A' = A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}(A/\mathfrak{a})$. Per il Corollario 1 al Teorema 1, la chiusura henseliana della coppia $(A', \mathfrak{m}')$ coincide con la coppia $\big(B/(\mathfrak{a}B), \mathfrak{n}(B/(\mathfrak{a}B))\big)$. Il morfismo $\psi\colon (B, \mathfrak{n}) \to (B', \mathfrak{n}')$ non è quindi altro che l'applicazione canonica di $(B, \mathfrak{n})$ nel quoziente $\big(B/(\mathfrak{a}B), \mathfrak{n}(B/(\mathfrak{a}B))\big)$, che è ovviamente una suriezione.

2. – In questa sezione fissiamo alcune definizioni.

Una terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è formata da un anello commutativo unitario A, da un suo ideale $\mathfrak{m}$ e da una topologia lineare τ sopra A, cioè da una topologia compatibile con la struttura di anello munita di una base per gli intorni dello 0 di A i cui elementi sono ideali ([17], Definizione 1).

Inoltre restringiamo il nostro studio alle terne in cui la topologia è *separata* e l'ideale *chiuso*, in quanto avremo spesso da considerare l'anello $A\{X\}$ delle serie ristrette in una indeterminata X sopra A, come pure l'anello $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ ([17], Definizione 2); potremo quindi escludere serie ristrette del tipo: $f(X) = a + a \cdot X + \ldots + a \cdot X^n + \ldots$, dove a è un elemento che appartiene all'aderenza dello 0 senza essere 0. In effetti una simile serie ristretta ha l'evidente inconveniente che non ha senso «raccogliere» a, in quanto $g(X) = 1 + X + \ldots + X^n + \ldots$ non è certo mai ristretta. È poi ben noto che l'anello topologico $A/\mathfrak{m}$ è separato se e solo se $\mathfrak{m}$ è chiuso nella topologia τ ([8], § 2, n. 6, Proposizione 18).

L'ipotesi che τ sia separata ha, oltre al resto, l'indubbio vantaggio che il morfismo canonico di A nel suo separato completato $\hat{A}$ è una inclusione algebrica e topologica ([7], Cap. II, § 3, n. 7, Corollario alla Proposizione 12).

Nel n. 5 tuttavia ci libereremo di questa ipotesi di separazione, andando a considerare la terna topologica separata associata a quella data in modo canonico (con il passaggio al quoziente rispetto alla aderenza dello 0).

Per ragioni di semplicità supponiamo ancora che l'ideale $\mathfrak{m}$ sia contenuto nel radicale di A; si intuisce l'utilità di questa ipotesi dal fatto che il morfismo canonico di una coppia $(A, \mathfrak{m})$ nella sua chiusura henseliana ${}^h(A, \mathfrak{m})$ è un'inclusione algebrica se e solo se $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Rad}(A)$ ([11], Corollario 6.7). Naturalmente ci libereremo in seguito (n. 5) anche di questa ipotesi, con la considerazione dell'anello delle frazioni di A rispetto al sistema moltiplicativo $S = 1 + \mathfrak{m}$.

Un morfismo di terne $\varphi\colon (A, \mathfrak{m}, \tau) \to (A', \mathfrak{m}', \tau')$ *è un omomorfismo di anelli* $\varphi\colon A \to A'$, *continuo e tale che* $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}'$.

DEFINIZIONE 2. – *Una terna* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *si dice terna henseliana (o anche* H*-terna) se e solo se soddisfa alle seguenti condizioni:*

1) $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Rad}(A)$;

2) *per ogni serie ristretta* $R \in A\{X\}$, *la cui immagine canonica in* $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ *è prodotto di un polinomio unitario* $\bar{P}$ *e di una serie ristretta* $\bar{Q}$ *fra loro coprimi* (1), *esiste una e una sola coppia* (P, Q), *formata da un polinomio unitario* P *e da una serie ristretta* Q, *appartenenti ad* $A\{X\}$, *tale che* $R = P \cdot Q$ *e che le immagini canoniche di* P *e* Q *in* $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ *siano rispettivamente* $\bar{P}$ *e* $\bar{Q}$. *Inoltre, se* R *è un polinomio, allora anche* Q *è un polinomio.*

DEFINIZIONE 3. – *Una terna* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *si dice fortemente henseliana (o* H*-terna forte) se e solo se è una* H*-terna e il polinomio* P *e la serie ristretta di cui alla Definizione* 2 *sono coprimi in* $A\{X\}$.

Equivalente alla Definizione 3 è la seguente

DEFINIZIONE 3'. – *Una terna* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *si dice fortemente henseliana se e solo se soddisfa alla tesi del lemma di* HENSEL *versione* BOURBAKI ([5], Cap. III, § 4, n. 3, Teorema 1).

L'equivalenza delle Definizioni 3 e 3' dipende dal fatto che una terna soddisfacente alla tesi del lemma di HENSEL versione BOUBAKI è tale che la coppia $(A, \mathfrak{m})$, dedotta prescindendo dalla topologia, è una H-coppia, il che significa che $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Rad}(A)$ (si veda, per esempio, [13], Proposizione 1).

(1) Due elementi a, b dell'anello commutativo unitario A si dicono «coprimi» se generano l'ideale (1), cioè se esitono a' e b' in A tali che $a \cdot a' + b \cdot b' = 1$.

OSSERVAZIONE 1. – Nel proporre le Definizioni 2, 3 e 3′ abbiamo voluto mantenere la caratteristica proprietà delle coppie henseliane che l'ideale è contenuto nel radicale. Tuttavia la situazione per le coppie e per le terne è essenzialmente diversa. In effetti, se $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia che soddisfa alla tesi del lemma di HENSEL classico (cioè per i soli polinomi unitari), l'ideale $\mathfrak{m}$ è automaticamente contenuto nel radicale; se viceversa $(A, \mathfrak{m})$ è una coppia qualsiasi tale che $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}(A)$, allora due polinomi P e Q unitari in $A[X]$ sono coprimi se e solo se sono coprimi i due polinomi $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ loro immagini canoniche in $(A/\mathfrak{m})[X]$ ([5], Cap. III, § 4, n. 1, Proposizione 2). Tutto ciò significa che nella definizione di H-coppia da noi data nel n. 1 possiamo o togliere la condizione che $\mathfrak{m}$ sia contenuto nel radicale o non richiedere esplicitamente che polinomi coprimi di $(A/\mathfrak{m})[X]$ siano rimontati in coprimi di $A[X]$, senza alterare con questo il concetto di H-coppia.

Per quanto riguarda invece le terne, è problema aperto stabilire se il fatto che $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}(A)$ implichi che il polinomio unitario P e la serie ristretta Q di cui alla Definizione 2 siano coprimi in $A\{X\}$. Dunque risulta del tutto spontaneo estendere la definizione di H-coppia nei due modi indicati, o richiedendo direttamente che $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}(A)$, oppure imponendo la condizione sui coprimi. La Definizione 3 è ovviamente più forte della Definizione 2; inoltre, se $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ soddisfa alle condizioni della Definizione 2 oppure 3, allora $(A, \mathfrak{m})$ è una H-coppia. Ciò significa che le nostre definizioni estendono quella relativa alle coppie. Resta ancora aperto il problema se non siano per caso equivalenti anche le Definizioni 2 e 3, cioè se tutte le terne henseliane siano forti.

OSSERVAZIONE 2. – *Se $(A, \mathfrak{m})$ è una H-coppia, la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau_d)$ che si ottiene introducendo in A la topologia discreta τ_d è henseliana, anzi fortemente henseliana (la dimostrazione di trova in* S. GRECO: « *Una generalizzazione del lemma di* HENSEL », *lavoro in preparazione*). Si tenga presente che il fatto non è banale, in quanto, nella nella definizione di H-coppia intervengono solo polinomi unitari, mentre in una H-terna discreta si pretende di rimontare una decomposizione di un qualsiasi polinomio R, non necessariamente unitario. Questa osservazione ci permette di presentare la nostra teoria come una generalizzazione della teoria delle coppie, nel senso che le coppie possono essere pensate come terne in modo canonico, cioè come terne discrete.

3. – Prima di occuparci del problema dell'immersione di una terna topologica in una H-terna forte, come primo passo verso la risoluzione del problema della henselizzazione delle terne, diamo qualche risultato sui limiti proiettivi di certi sistemi proiettivi di terne henseliane discrete.

Supponiamo che $((B_i, \mathfrak{M}_i), \varphi_{ii'})$ sia un sistema proiettivo di coppie henseliane relativo al sistema di indici $\{i\} = I$, filtrante crescente. Abbiamo osservato che, se in ogni anello B_i introduciamo la topologia discreta, otteniamo una H-terna forte (n. 2, Osservazione 2). Ha quindi senso il limite proiettivo del sistema proiettivo di H-terne discrete $((B_i, \mathfrak{M}_i, \tau_{d_i}), \varphi_{ii'})$, che è la terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ costituita dall'anello

$B = \varprojlim B_i$, dall'ideale $\mathfrak{M} = \varprojlim \mathfrak{M}_i$ e dalla topologia canonica sul limite proiettivo. $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ è una terna in quanto B è un anello topologico separato completo ([8], Cap. III, § 7, n. 2) e quindi $\mathfrak{M}$, essendo anch'esso separato completo, è chiuso in B ([7], Cap. II, § 3, n. 4, Proposizione 8).

Vale il seguente

TEOREMA 3. – *Sia $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ il limite proiettivo di un sistema proiettivo $((B_i, \mathfrak{M}_i, \tau_{d_i}), \varphi_{ii'})$ di H-terne discrete. Tale terna è fortemente henseliana, sotto la condizione che tutte le proiezioni canoniche $p_i\colon B \to B_i$ siano morfismi suriettivi*

DIMOSTRAZIONE. – Un sistema fondamentale di intorni per lo 0 di B in σ è notoriamente formato dalla famiglia di aperti $\{\mathfrak{b}_i = \ker p_i\}_{i\in I}$ ([7], Cap. I, § 4, n. 4, Proposizione 9). L'anello quoziente $B/\mathfrak{b}_i$, per ogni $i \in I$, è incluso algebricamente e topologicamente in B_i e coincide con questo nella nostra ipotesi di suriettività delle proiezioni p_i. Allora possiamo identificare l'anello delle serie ristrette $B\{X\}$ con il limite proiettivo degli anelli di polinomi $B_i[X]$, in senso algebrico e topologico, quando si introduca in $B\{X\}$ la topologia lineare in cui una base degli intorni dello 0 è formata dagli ideali $\mathfrak{b}_i\{X\}$ (serie ristrette a coefficienti in $\mathfrak{b}_i$) ([5], Cap. III, § 4, n. 2, Proposizione 3).

Inoltre tutte le coppie $(B_i, \mathfrak{M}B_i)$ sono henseliane e quindi fortemente henseliane quando in esse si introduca la topologia discreta, in quanto $\mathfrak{M}B_i \subseteq \mathfrak{M}_i$, per ogni i, e, se in una H-coppia si rimpicciolisce l'ideale, si ottiene ancora una H-coppia ([11], Proposizione 4.8).

A questo punto la dimostrazione del nostro enunciato è perfettamente analoga a quella del lemma di HENSEL versione BOURBAKI, parte 4) ([5], Cap. III, § 4, n. 3, Teorema 1), quando si osservi che nella dimostrazione di BOURBAKI viene utilizzato esclusivamente il fatto che le coppie $(A/\mathfrak{i}, \mathfrak{m}(A/\mathfrak{i}))$ sono fortemente henseliane rispetto alla topologia discreta di cui sono naturalmente munite, senza alcun riferimento alla proprietà degli ideali $\mathfrak{m}(A/\mathfrak{i})$ di essere formati di elementi nilpotenti.

OSSERVAZIONE 1. – L'ipotesi che tutti i morfismi $p_i\colon B \to B_i$ siano suriettivi, la quale ci permette di identificare $B\{X\}$ con $\varprojlim B_i[X]$, è certo verificata quando tutti gli omomorfismi $\varphi_{ii'}$ sono suriettivi e inoltre il sistema proiettivo dato ammette una parte cofinale numerabile ([6], § 7, n. 4, Proposizione 5), ovvero quando sia assegnato in partenza l'anello topologico separato completo B, con il suo ideale chiuso $\mathfrak{M}$, e gli anelli B_i si costruiscano di conseguenza con passaggio al quoziente. In questo ultimo caso va rilevato che si ha anche: $\mathfrak{M}B_i = \mathfrak{M}_i$, per ogni i.

OSSERVAZIONE 2. – Dal Teorema 3 risulta chiaramente che, affinchè una terna topologica soddisfi alla tesi del lemma di HENSEL nella versione di BOURBAKI, non è necessario che l'ideale sia formato di elementi topologicamente nilpotenti. Vedremo in seguito (esempio del n. 4) un esempio concreto di terna fortemente henseliana in cui l'ideale non è formato di elementi topologicamente nilpotenti. Resta in ogni caso chiarito che le ipotesi del lemma di HENSEL nella versione BOURBAKI si possono modificare in modo da includere altri tipi di terne (n. 4, Teorema 5).

4. – Ci proponiamo in questa sezione di immergere una terna topologica in una fortemente henseliana.

Siano dunque $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna e $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ una base per gli intorni dello 0 formata di ideali di A. Posto $A_i = A/\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cdot A_i$, la coppia $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ è dotata in modo naturale della topologia discreta, in quanto $\mathfrak{a}_i$ è aperto nella topologia τ ([8], Cap. III, § 2, n. 6, Proposizione 18 *b*)). Inoltre, se $\mathfrak{a}_{i'} \subseteq \mathfrak{a}_i$, si può definire l'omomorfismo canonico $\varphi_{ii'}\colon (A_{i'}, \mathfrak{m}_{i'}) \to (A_i, \mathfrak{m}_i)$. Abbiamo così un sistema proiettivo di coppie con morfismi, relativo al sistema filtrante crescente di indici I, quando in questo si definisca il seguente ordinamento: $i \leqslant i'$ se e solo se $\mathfrak{a}_i \supseteq \mathfrak{a}_{i'}$.

Per ogni indice $i \in I$, possiamo associare ad $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ la sua H-chiusura ${}^h(A_i, \mathfrak{m}_i) = (B_i, \mathfrak{M}_i)$. Il morfismo canonico $f_i\colon (A_i, \mathfrak{m}_i) \to (B_i, \mathfrak{M}_i)$ è iniettivo, in quanto $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Rad}(A)$ e quindi $\mathfrak{m}_i \subseteq \operatorname{rad}(A_i)$, per ogni i ([11], Proposizione 5.2). Essendo tutte le coppie discrete, possiamo affermare che ogni coppia $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ è inclusa algebricamente e topologicamente in $(B_i, \mathfrak{M}_i)$.

Per ogni coppia di indici i, i', tali che $i \leqslant i'$, il morfismo $\varphi_{ii'}$ è suriettivo; dunque, per il Teorema 2 del n. 1, esiste uno e un solo morfismo suriettivo $\psi_{ii'}\colon (B_{i'}, \mathfrak{M}_{i'}) \to (B_i, \mathfrak{M}_i)$ che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} (A_{i'}, \mathfrak{m}_{i'}) & \xrightarrow{f_{i'}} & (B_{i'}, \mathfrak{M}_{i'}) \\ {\scriptstyle\varphi_{ii'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{ii'}} \\ (A_i, \mathfrak{m}_i) & \xrightarrow{f_i} & (B_i, \mathfrak{M}_i) \end{array} \tag{2}$$

Introdotta in ogni coppia $(B_i, \mathfrak{M}_i)$ la topologia discreta τ_{d_i}, come abbiamo detto, otteniamo dunque un sistema proiettivo di terne discrete fortemente henseliane, nel senso del n. 3.

LEMMA. – *Sia* ${}^h(A, \mathfrak{m}) = ({}^hA, {}^h\mathfrak{m})$ *la chiusura henseliana di* $(A, \mathfrak{m})$. *Allora, per ogni* $i \in I$, *si ha*: $(B_i, \mathfrak{M}_i) = (({}^hA/\mathfrak{a}_i \cdot {}^hA), {}^h\mathfrak{m}({}^hA/\mathfrak{a}_i \cdot {}^hA))$.

DIMOSTRAZIONE. – È una diretta applicazione del Corollario 1 al Teorema 1 del n. 1, in base al quale l'henselizzazione commuta sempre con il passaggio al quoziente.

TEOREMA 4. – *La terna* $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$, *limite proiettivo del sistema proiettivo* $((B_i, \mathfrak{M}_i, \tau_{d_i}), \psi_{ii'})$, *formato con gli henselizzati delle coppie* $(A_i, \mathfrak{m}_i)$, *è fortemente henseliana. Inoltre* B *è il separato completato dell'anello* ${}^hA$, *rispetto alla topologia* ${}^h\tau$, *che ha una base di intorni dello* 0 *costituita dagli ideali* ${}^h\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i \cdot {}^hA$.

DIMOSTRAZIONE. – B è l'anello topologico separato completato di ${}^hA$ rispetto alla topologia ${}^h\tau$, ed $\mathfrak{M}$ il separato completato di ${}^h\mathfrak{m}$ per il precedente Lemma (si veda [5], Cap. III, § 4, n. 2, in cui si trova la caratterizzazione del separato completato di un anello topologico che qui ci interessa, cioè come limite proiettivo degli anelli discreti che si ottengono passando al quoziente rispetto a una base di intorni dello 0).

Ne possiamo dedurre che la terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ soddisfa alle ipotesi del Teorema 3, n. 3 (si veda l'Osservazione 1 a tale teorema); quindi $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ è fortemente henseliana.

Naturalmente dal Teorema 4 si deduce immediatamente che la terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ è associata alla terna $(A, \mathfrak{M}, \tau)$ in modo indipendente dalla base $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ di intorni dello 0 di A utilizzata per la costruzione. Ovviamente $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ è definita a meno di isomorfismi, come avviene sempre per i completamenti ([7], Cap. II, § 3, n. 7, Teorema 3).

OSSERVAZIONE. – La terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ include ovviamente, in senso algebrico e topologico, la terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)^\wedge$, che si ottiene introducendo nell'anello topologico $\hat{A}$, separato completato di A rispetto alla topologia τ, e nell'ideale $\hat{\mathfrak{m}}$, separato completato di $\mathfrak{m}$, la topologia canonica del completamento. In effetti, per ogni $i\in I$, la coppia $(A_i, \mathfrak{m}_i)$ è inclusa algebricamente e topologicamente in $(B_i, \mathfrak{M}_i)$, quando tutti gli anelli siano muniti della topologia discreta, e tale inclusione si conserva nel passaggio al limite proiettivo (che porta al completamento: [5], Cap. III, § 4, n. 2).

Sono anche verificati i seguenti fatti:

1) $\mathfrak{b}_i$ giace su $\hat{\mathfrak{a}}_i$, per ogni $i\in I$;

2) $\mathfrak{M}\cap\hat{A}=\hat{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{M}\cap A=\mathfrak{m}$.

Per la proprietà 1) basta osservare che $\hat{\mathfrak{a}}_i=\ker(\hat{A}\to A_i)=\ker(B\to B_i)\cap\hat{A}= =\mathfrak{b}_i\cap\hat{A}$.

Per vedere la 2) bisogna soltanto ricordare che $\mathfrak{M}_i$ giace su $\mathfrak{m}_i$, per ogni $i\in I$ ([11], Teorema 3.5).

D'ora in poi indicheremo con $\hat{f}$ l'inclusione di $\hat{A}$ in B e con f la sua restrizione ad A, cioè l'inclusione di A in B. Si osservi che f ed $\hat{f}$ sono morfismi di terne, nel senso indicato nel n. 2.

COROLLARIO. – *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *una terna tale che* $(A, \mathfrak{m})$ *sia una coppia henseliana. Allora si ha*: $(B, \mathfrak{M}, \sigma)=(A, \mathfrak{m}, \tau)^\wedge$.

DIMOSTRAZIONE. – Nelle nostre ipotesi si ha: ${}^hA=A$, ${}^h\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$, ${}^h\tau=\tau$. Di qui segue immediatamente: $(A_i, \mathfrak{m}_i)=(B_i, \mathfrak{M}_i)$, per ogni $i\in I$, il che permette di dedurre il risultato.

OSSERVAZIONE. – Fra le terne soddisfacenti all'ipotesi del precedente Corollario ci sono ovviamente le H-terne e le H-terne forti.

Possiamo a questo punto precisare meglio il lemma di HENSEL versione BOURBAKI:

TEOREMA 5 (*Lemma di* HENSEL *forte*). – *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *una terna tale che l'anello* A *è separato completo ed* $\mathfrak{m}$ *chiuso rispetto alla topologia* τ. *Allora le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti*:

1) $(A, \mathfrak{m})$ *è una* H-*coppia*;

2) $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *è una H-terna;*

3) $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *è una H-terna forte;*

4) *Per ogni ideale* $\mathfrak{a}$ *di* A *la coppia* $(A/\mathfrak{a}, \mathfrak{m}(A/\mathfrak{a}))$ *è henseliana;*

5) *Esiste una base* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ *di intorni dello* 0 *di* A *in* τ, *formata di ideali, tale che tutte le coppie* $(A/\mathfrak{a}_i, \mathfrak{m}(A/\mathfrak{a}_i))$ *sono henseliane.*

DIMOSTRAZIONE. – Le condizioni 1), 2), 3) sono palesemente equivalenti per il Corollario al Teorema 4 (si veda anche l'Osservazione precedente). Se vale la condizione 1), allora tutte le coppie $(A/\mathfrak{a}, \mathfrak{m}(A/\mathfrak{a}))$ sono henseliane, qualsiasi sia l'ideale $\mathfrak{a}$, perciò la 1) implica la 4) (e quindi la 5)). Se è soddisfatta la condizione 5), la terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ del TEOREMA 4 coincide con $(A, \mathfrak{m}, \tau)\hat{} = (A, \mathfrak{m}, \tau)$, quindi questa è fortemente henseliana, il che significa che è soddisfatta la 3). E questo completa la dimostrazione del Teorema.

COROLLARIO (*Lemma di* HENSEL *versione* BOURBAKI). – *Se* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *è una terna completa tale che l'ideale* $\mathfrak{m}$ *è formato di elementi topologicamente nilpotenti, allora* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *è una H-terna forte.*

DIMOSTRAZIONE. – Basta osservare che, detta $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ una base degli intorni dello 0 di A formata di ideali, tutte le coppie $(A/\mathfrak{a}_i, \mathfrak{m}(A/\mathfrak{a}_i))$ sono henseliane ([5], Cap. III, Teorema 1, parti 1), 2), 3)). È quindi soddisfatta la condizione 5) del Teorema 5.

Per mettere in rilievo l'interesse del Teorema 5 vogliamo ora presentare un esempio di terna fortemente henseliana in cui l'ideale *non* è formato di elementi topologicamente nilpotenti:

ESEMPIO. – Siano K un campo qualsiasi e $K[[X, Y]]$ l'anello locale delle serie formali in due indeterminate. È noto ([15], Cap. V, Teorema 30.3) che la coppia $(K[[X, Y]], (X, Y))$ è henseliana. Quindi lo è pure la coppia $(K[[X, Y]], (X))$, in quanto, rimpicciolendo l'ideale di una H-coppia, si ottiene ancora una H-coppia ([11], n. 4, Proposizione 4.8). Inoltre l'anello $K[[X, Y]]$ è completo rispetto alla topologia (Y)-adica τ_Y. Dunque, per il Teorema 5, la terna $(K[[X, Y]], (X), \tau_Y)$ è fortemente henseliana. Ora è ovvio che l'ideale generato da X in $K[[X, Y]]$ non è formato di elementi topologicamente nilpotenti nella topologia τ_Y. Ne segue che la nostra terna soddisfa alla tesi ma non alle ipotesi del lemma di HENSEL versione BOURBAKI.

OSSERVAZIONE. – Il Teorema 5 indica tutta *una categoria di terne henseliane che sono anche fortemente henseliane, cioè le terne complete henseliane.* Dunque, quando si restringe l'attenzione alle terne complete, la Definizione 2 e la Definizione 3 sono equivalenti. Non sappiamo se ciò sia vero in generale.

5. – Ci occupiamo in questa sezione del problema universale della henselizzazione delle terne (continuando, per il momento, a mantenere l'ipotesi che l'ideale sia contenuto nel radicale).

La nostra costruzione dell'henselizzazione è valida sotto la condizione che *la topologia delle terne considerate sia dotata di una base numerabile per gli intorni dello* 0 *formata di ideali*. Tale base può naturalmente essere sempre ordinata per inclusione in una successione decrescente; questo, in altre parole, significa che la topologia è deducibile da una filtrazione ([5], Cap. III, § 2, n. 1, Definizione 2).

Nel presente numero *l'ipotesi di numerabilità sarà sempre sottointesa*, salvo precisazione in senso diverso.

Cominciamo col fissare la seguente

DEFINIZIONE 4. – *Una coppia* $((A', \mathfrak{m}', \tau'), j)$, *costituita da una H-terna (forte)* $(A', \mathfrak{m}', \tau')$ *e da un morfismo di terne* $j\colon (A, \mathfrak{m}, \tau) \to (A', \mathfrak{m}', \tau')$ *si dice H-chiusura (forte), o anche chiusura henseliana (forte), della terna* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *se e solo se, per ogni morfismo g della terna* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *in una H-terna (forte)* $(C, \mathfrak{n}, \delta)$, *esiste uno e un solo morfismo* $g'\colon (A', \mathfrak{m}', \tau') \to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ *tale che si abbia*: $g = g' \circ j$.

Essendo la H-chiusura (forte) soluzione di un problema universale, è noto che, se esiste, è unica a meno di isomorfismi (cioè morfismi di terne biiettivi e bicontinui).

Per poter dimostrare l'esistenza della H-chiusura nella nostra categoria di terne (di tipo numerabile) con morfismi, ci occorrono parecchi risultati preliminari, che qui premettiamo.

Nel seguito indicheremo sempre con $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ la terna costruita nel n. 4, cioè la terna formata dall'anello B e dall'ideale $\mathfrak{M}$, separati completati rispettivamente di ${}^{h}A$ e di ${}^{h}\mathfrak{m}$ rispetto alla topologia ${}^{h}\tau$, e dalla topologia canonica del completamento (*n*. 4, Teorema 4).

LEMMA. – *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *una terna, con topologia qualsiasi*, φ *il morfismo canonico della coppia* $(A, \mathfrak{m})$ *nella sua H-chiusura* ${}^{h}(A, \mathfrak{m})$, i *l'applicazione canonica dell'anello topologico* ${}^{h}A$, *munito della topologia* ${}^{h}\tau$, *nel suo separato completato B*, f *l'immersione di A in B. Allora si ha*: $f = i \circ \varphi$. *Inoltre* $i\colon {}^{h}(A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{M})$ *è l'unico morfismo di coppie che soddisfa a questa condizione.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia f' il morfismo canonico di A nel suo completamento $\hat{A}$ rispetto alla topologia τ, $\hat{f}$ il morfismo canonico di $\hat{A}$ in B (cfr. Osservazione 1 al Teorema 4, n. 4), che si ottiene come limite proiettivo dei morfismi $f_i\colon (A_i, \mathfrak{m}_i) \to (B_i, \mathfrak{M}_i)$ (n. 4). Di qui segue subito che $\hat{f} \circ f' = f = i \circ \varphi$. L'unicità di i dipende dal fatto che $(B, \mathfrak{M})$ è una H-coppia.

TEOREMA 6. – *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *una terna con topologia qualsiasi e g un morfismo di* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *nella H-terna* $(C, \mathfrak{n}, \delta)$. *Esiste allora uno e un solo morfismo* $u\colon (B, \mathfrak{M}, \sigma) \to (C, \mathfrak{n}, \delta)\hat{}$ *tale che il seguente diagramma sia commutativo*

(3)
$$\begin{array}{ccc} (A, \mathfrak{m}, \tau) & \xrightarrow{f} & (B, \mathfrak{M}, \sigma) \\ g \downarrow & & \downarrow u \\ (C, \mathfrak{n}, \delta) & \xrightarrow{h} & (C, \mathfrak{n}, \delta)^{\wedge} \end{array}$$

essendo f l'immersione di A in B e h l'immersione di C nel suo completamento rispetto alla δ-topologia.

DIMOSTRAZIONE. – Poichè g si può pensare come un morfismo della coppia $(A, \mathfrak{m})$ nella coppia henseliana $(C, \mathfrak{n})$, esiste uno e un solo morfismo ${}^hg$: $({}^hA, {}^h\mathfrak{m}) \to (C, \mathfrak{n})$ che rende commutativo il seguente diagramma:

(4)
$$\begin{array}{ccc} (A, \mathfrak{m}) & \xrightarrow{\varphi} & ({}^hA, {}^h\mathfrak{m}) \\ & {}_{g}\searrow & \downarrow {}^hg \\ & & (C, \mathfrak{n}) \end{array}$$

Se in ${}^hA$ si introduce la topologia ${}^h\tau$, ${}^hg$ risulta continuo. In effetti, detto $\mathfrak{c}$ un qualsiasi ideale aperto di C, esiste almeno un ideale $\mathfrak{a}$, intorno dello 0 di A, tale che $g(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{c}$. Ma $({}^hg)^{-1}(\mathfrak{c})$ contiene il sottoinsieme $\varphi(\mathfrak{a})$ di ${}^hA$ (coincidente con $\mathfrak{a}$, in quanto φ è iniettiva) e quindi anche l'ideale ${}^h\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot {}^hA$, da esso generato in ${}^hA$, che è per definizione un intorno dello 0 di ${}^hA$ in ${}^h\tau$.

Poichè B è il separato completato di ${}^hA$ rispetto alla ${}^h\tau$-topologia, esiste uno e un solo morfismo continuo $u: B \to \widehat{C}$, tale che si abbia: $h \circ {}^hg = u$. È chiaro che u è un morfismo di terne, in quanto ${}^hg({}^h\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$, e quindi $u(\mathfrak{M}) \subseteq \hat{\mathfrak{n}}$.

Sia ora v: $(B, \mathfrak{M}, \sigma) \to (C, \mathfrak{n}, \delta)^{\wedge}$ un secondo morfismo di terne tale che $v \circ f = h \circ g$. Allora, detto i l'omomorfismo canonico di ${}^hA$ in B e φ quello di $(A, \mathfrak{m})$ nella sua H-chiusura, si ha (per il lemma): $v \circ i \circ \varphi = v \circ f = h \circ g$. Dunque $v \circ i = {}^hg$, per la proprietà universale della H-chiusura e quindi $v = u$, per la proprietà universale del separato completato.

COROLLARIO. – *Sia g: $(A, \mathfrak{m}, \tau) \to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ un morfismo di terne in cui la seconda è una terna henseliana completa (quindi forte). Allora esiste uno e un solo morfismo u: $(B, \mathfrak{M}, \sigma) \to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ tale che si abbia: $g = u \circ f$.*

Il precedente Corollario permette di introdurre un concetto di henselizzazione più restrittivo di quello della Definizione 4:

DEFINIZIONE 5. – *Una terna $(A', \mathfrak{m}', \tau')$, insieme con un morfismo j della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ nella terna $(A', \mathfrak{m}', \tau')$ si dice « H-chiusura completa » della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ se è una terna henseliana completa e se, per ogni morfismo g: $(A, \mathfrak{m}, \tau) \to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ in una terna henseliana completa, esiste uno e un solo morfismo g': $(A, \mathfrak{m}', \tau') \to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ tale che $g = j \circ g'$.*

Il Corollario precedente può essere quindi formulato come segue:

PROPOSIZIONE 1. – *La terna* $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ *è la H-chiusura completa della terna* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$.

OSSERVAZIONE 1. – Dalla Proposizione 1 si deduce in particolare che la terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$ costituisce la H-chiusura forte della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ quando si restringa la categoria delle terne considerando soltanto quelle complete.

OSSERVAZIONE 2. – La Proposizione 1 e l'Osservazione 1 indicano ovviamente dei casi in cui *è possibile costruire una H-chiusura di tipo forte*, mentre è ignoto se questo si possa fare nella più generale categoria di tutte le terne.

PROPOSIZIONE 2. – *Sia* $(C, \mathfrak{n}, \delta)$ *una terna henseliana (con base numerabile per gli intorni dello* 0). *Allora l'ideale* $\mathfrak{n}$ *è completo.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia $y \in \hat{\mathfrak{n}}$ e si consideri l'elemento $x = 1 + y \in 1 + \hat{\mathfrak{n}}$. Poichè la terna $(C, \mathfrak{n}, \delta)^\wedge$ è fortemente henseliana (n. 4, Corollario 1 al Teorema 4), l'ideale $\hat{\mathfrak{n}}$ sta nel radicale di $\hat{C}$ e perciò x è invertibile in $\hat{C}$ ([13], Proposizione 1). Osserviamo inoltre che, giacendo $\hat{\mathfrak{n}}$ sopra $\mathfrak{n}$, $C/\mathfrak{n}$ è un sottoanello topologico di $\hat{C}/\hat{\mathfrak{n}}$, anzi ammette quest'ultimo come completamento ([9], § 3, n. 1, Corollario 1 alla Proposizione 4). Si considerino le due serie seguenti (nell'indeterminata T):

$$G(T) = x + T, \qquad H(T) = (1/x)\cdot T + g_2 \cdot T^2 + \ldots + g_n \cdot T^n + \ldots,$$

dove i g_n sono elementi di $\hat{C}$, per il momento incogniti, da determinarsi in modo che 1) $H(T)$ sia ristretta e 2) i coefficienti di $F(T) = G(T)\cdot H(T)$ stiano in C. Osserviamo che ogni $z \in \hat{C}$ è somma di una serie a termini in C (in più modi, ovviamente): $z = z_0 + z_1 + \ldots + z_n + \ldots$. Se fissiamo una filtrazione $\{\mathfrak{c}_n\}_{n\in N}$ da cui si deduce la topologia δ, possiamo anche supporre (ricorrendo eventualmente alla proprietà associativa) che $z_n \in \hat{\mathfrak{c}}_n$ per ogni intero $n \in N$, il che significa che $z_n \in \mathfrak{c}_n$, in quanto $C \cap \hat{\mathfrak{c}}_n = \mathfrak{c}_n$ ([5], Cap. III, § 2, n. 12).

Scegliamo allora $g_2 = (1-(1/x))/x$ e, detto a_0 il primo termine $\neq 0$ di una serie del tipo indicato di cui g_2 sia somma, poniamo: $g_3 = (a_0 - g_2)/x$, che sta ovviamente in $\hat{\mathfrak{n}} \cap \hat{\mathfrak{c}}_1$; si procede poi per induzione, cioè, una volta scelto $g_n \in \hat{\mathfrak{n}} \cap \hat{\mathfrak{c}}_{n-2}$, si pone: $g_{n+1} = (a_{n-2} - g_n)/x \in \hat{\mathfrak{n}} \cap \hat{\mathfrak{c}}_{n-1}$, quando si sia indicato con a_{n-2} il primo termine $\neq 0$ di una qualsiasi serie di cui g_n è somma.

Si ha allora: $F(T) = T + T^2 + \ldots + (x\cdot g_n + g_{n-1})\cdot T^n + \ldots$ ed è chiaro che i coefficienti di $F(T)$ dal terzo in poi stanno tutti in $\mathfrak{n}$. Nel quoziente $(C/\mathfrak{n})\{T\}$ l'immagine canonica di $F(T)$ si spezza nel prodotto dei due polinomi coprimi (vedi nota a pag. 288) T e $1 + T$. Pensando $F(T)$ come elemento di $\hat{C}\{T\}$, la sua immagine canonica in $(\hat{C}/\hat{\mathfrak{n}})\{T\}$ si spezza egualmente negli stessi due polinomi coprimi. Questo ultimo spezzamento viene ovviamente rimontato in $\hat{C}\{T\}$ in uno e un solo modo, cioè mediante la coppia $(G(T), H(T))$. D'altra parte, essendo la terna $(C, \mathfrak{n}, \delta)$ henseliana, deve esistere una coppia $(G'(T), H'(T))$ che rimonta lo spezzamento di $F(T)$

in $(C/\mathfrak{n})\{T\}$. Per l'unicità si ha:

$$G(T) = G'(T), \qquad H(T) = H'(T),$$

cioè i coefficienti di $G(T)$ e di $H(T)$ stanno in C. In particolare x, e perciò y, appartiene a C. Ne segue che $\hat{\mathfrak{n}} \subset C$ e, essendo $\mathfrak{n}$ chiuso (n. 2), si ha: $\hat{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$.

PROPOSIZIONE 3. – *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna (con base numerabile per gli intorni dello 0) e $(A', \mathfrak{M}, \tau')$ una terna tale che $A + \mathfrak{M} \subseteq A' \subseteq B$ e che la topologia τ' sia indotta su A' da τ. Allora $(A', \mathfrak{M}, \tau')$ è henseliana e A' è denso in B.*

DIMOSTRAZIONE. – In primo luogo l'ideale $\mathfrak{M}$ è contenuto nel radicale di A', in quanto, se $1 + x \in 1 + \mathfrak{M}$, allora $1 + x$ è invertibile in B, cioè esiste $z \in B$ tale che $1 = z \cdot (1 + x) = z + z \cdot x$. Perciò $z = 1 - z \cdot x \in 1 + \mathfrak{M} \subseteq A'$.

In secondo luogo, sia $R = a_0 + a_1 \cdot T + \ldots + a_n \cdot T^n + \ldots \in A'\{T\}$ una serie ristretta avente immagine canonica in $(A'/\mathfrak{M})\{T\}$ spezzata nel prodotto $\bar{P}\bar{Q}$, dove $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ sono rispettivamente un polinomio unitario e una serie ristretta coprimi. Tenendo presente che $A'/\mathfrak{M}$ è un sottoanello topologico di $B/\mathfrak{M}$, si vede che lo spezzamento della immagine di R si può rimontare in uno ed un solo modo in $B\{T\}$: $R = P \cdot Q$. I coefficienti di P e Q differiscono dai rappresentanti dei coefficienti di $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ per elementi di $\mathfrak{m}$ e quindi stanno in $A' + \mathfrak{M} = A'$.

Ricordiamo ora che, detta $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_n\}_{n \in N}$ una filtrazione di A da cui si deduce la topologia τ, la coppia $(B_n, \mathfrak{M}_n)$ (vedi n. 4) è la H-chiusura di $(A_n, \mathfrak{m}_n)$, per ogni $n \in N$, il che significa che si ha: $A_n/\mathfrak{m}_n = B_n/\mathfrak{M}_n$ ([11], n. 3, Corollario 3.6). Ma si ha pure (sempre nelle notazioni del n. 4): $B_n = B/\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{M}_n = (\mathfrak{M} + \mathfrak{b}_n)/\mathfrak{b}_n$, grazie alla suriettività dei morfismi p_n: $B \to B_n$. Ne segue immediatamente:

$$(A/\mathfrak{a}_n)/((\mathfrak{m} + \mathfrak{a}_n)/\mathfrak{a}_n) = (B/\mathfrak{b}_n)/((\mathfrak{M} + \mathfrak{b}_n)/\mathfrak{b}_n),$$

cioè: $A/(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}_n) = B/(\mathfrak{M} + \mathfrak{b}_n)$, il che significa: $B = (A + \mathfrak{M}) + \mathfrak{b}_n$, per ogni n. Ma allora $A + \mathfrak{M}$ è denso in B e perciò anche ogni A' tale che $A + \mathfrak{M} \subseteq A' \subseteq B$.

COROLLARIO. – *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una H-terna. Allora ogni terna $(A', \mathfrak{m}', \tau')$ tale che $A \subseteq A' \subseteq B$, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{M}$ è una H-terna ed A' è denso in B.*

DIMOSTRAZIONE. – Basta osservare che $(B, \mathfrak{M}, \sigma) = (A, \mathfrak{m}, \tau)\hat{}$ (n. 4, Corollario 1 al Teorema 4) e che $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' = \mathfrak{M}$ (Proposizione 2). Si applica poi la Proposizione 3 per avere immediatamente il risultato.

TEOREMA 7. – *Una chiusura henseliana della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è costituita dalla coppia $((A + \mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}}), j_{\mathfrak{M}})$, dove con $\tau_{\mathfrak{M}}$ si intende la topologia indotta su $A + \mathfrak{M}$ da σ e con $j_{\mathfrak{M}}$ l'immersione algebrica e topologica di A in $A + \mathfrak{M}$.*

DIMOSTRAZIONE. – Per la Proposizione 3 la terna $(A + \mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}})$ è henseliana e l'anello $A + \mathfrak{M}$ è denso in B. Se g: $(A, \mathfrak{m}, \tau) \to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ è un morfismo in cui la seconda terna è henseliana, esiste ed è unico, per il Teorema 6, il morfismo $u\colon (B, \mathfrak{M}, \sigma) \to (C, \mathfrak{n}, \delta)\hat{}$, tale che $u \circ f = h \circ g$. La restrizione u' di u ad $A + \mathfrak{M}$ gode perciò della proprietà che $h \circ g = u' \circ j_{\mathfrak{M}}$. Ogni altro morfismo soddisfacente alla stessa proprietà di u' si estende per continuità a B e quindi, per la proprietà universale del completamento, coincide con u'.

Infine la Proposizione 2 ci permette di affermare che u' trasforma $A + \mathfrak{M}$ in un sottoanello di C, in quanto si ha: $u'(A + \mathfrak{M}) \subseteq C + \hat{\mathfrak{n}} = C + \mathfrak{n} = C$.

COROLLARIO. – *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau_d)$ *una terna in cui* τ_d *è la topologia discreta. Allora la sua H-chiusura coincide con la terna* $({}^hA, {}^h\mathfrak{m}, {}^h\tau_d)$, *cioè con la terna che si ottiene introducendo la topologia discreta* ${}^h\tau_d$ *nella henselizzazione* $({}^hA, {}^h\mathfrak{m})$ *della coppia* $(A, \mathfrak{m})$.

DIMOSTRAZIONE. – È chiaro che, nel nostro caso, si ha: $B = {}^hA, \mathfrak{M} = {}^h\mathfrak{m}, {}^h\tau_d =$ = topologia discreta su ${}^hA$. Inoltre il morfismo canonico di $(A, \mathfrak{m})$ in ${}^h(A, \mathfrak{m})$ è stretto (cfr. n. 1), il che significa che $A + {}^h\mathfrak{m} = {}^hA$.

OSSERVAZIONE. – Il precedente Corollario permette di precisare in che senso il nostro funtore della categoria delle terne con morfismi nella categoria delle terne henseliane estende l'analogo funtore relativo alla categoria delle coppie. In effetti una coppia $(A, \mathfrak{m})$ può essere pensata in modo naturale come terna quando la si munisca della topologia discreta. Il Corollario afferma che l'henselizzazione della coppia $(A, \mathfrak{m})$ e l'henselizzazione della terna discreta $(A, \mathfrak{m}, \tau_d)$ differiscono soltanto per il fatto che la seconda è dotata della topologia discreta, ma sono identiche per quel che riguarda l'anello ${}^hA$ e l'ideale ${}^h\mathfrak{m}$.

Va tuttavia notato che, se $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è una terna dotata di topologia non discreta, l'henselizzazione della coppia $(A, \mathfrak{m})$, cioè $({}^hA, {}^h\mathfrak{m})$, e l'henselizzazione della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$, cioè $(A + \mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}})$, non differiscono in generale soltanto per la topologia, ma anche per l'anello e l'ideale (cfr. n. 6, Esempio 2)).

PROPOSIZIONE 4. – *Sia* $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ *una terna tale che* $\mathfrak{m}$ *è formato di elementi topologicamente nilpotenti. Allora la sua henselizzazione è una H-terna forte.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_n\}_{n \in N}$ una base per gli intorni dello 0 di A. Poichè gli ideali $\mathfrak{m}_n = \mathfrak{m} \cdot A_n = \mathfrak{m}(A/\mathfrak{a}_n)$ sono formati di elementi nilpotenti, tutte le coppie $(A_n, \mathfrak{m}_n)$ sono henseliane ([5], Cap. III, § 4, n. 3, Teorema 1). Perciò si ha: $(B, \mathfrak{M}, \sigma) =$ $= (A, \mathfrak{m}, \tau)\hat{}$ e quindi l'henselizzazione di $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ coincide con $(A + \hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}, \tau_{\hat{\mathfrak{m}}})$.

Noi vogliamo dimostrare che, se $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ sono un polinomio unitario e una serie ristretta coprimi nell'anello $((A + \hat{\mathfrak{m}})/\mathfrak{m})\{T\}$, allora, detti P e Q due rimontamenti di questi in $(A + \hat{\mathfrak{m}})\{T\}$ (con P polinomio unitario), anche P e Q sono coprimi. A questo scopo osserviamo che l'ideale $\hat{\mathfrak{m}}$ è formato anch'esso di elementi topologicamente nilpotenti, in quanto è limite proiettivo di ideali nilpotenti e quindi le serie ristrette a coefficienti nell'insieme $1 + \hat{\mathfrak{m}} \subset A + \hat{\mathfrak{m}}$ sono invertibili in $(A + \mathfrak{m})\{T\}$ ([17], Proposizione 2, pag. 390). Ora, se $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ sono coprimi, esistono due serie ristrette $\bar{f}$ e $\bar{g}$ in $((A + \hat{\mathfrak{m}})/\hat{\mathfrak{m}})\{T\}$, tali che si ha: $\bar{f} \cdot \bar{P} + \bar{g} \cdot \bar{Q} = 1$. Detti f e g dei rimontamenti di $\bar{f}$ e $\bar{g}$ in $(A+\widehat{\mathfrak{m}})\{T\}$, la serie ristretta $f\cdot P+g\cdot Q$ appartiene all'insieme $(1+\widehat{\mathfrak{m}})\{T\}$ ed è quindi invertibile, il che equivale a dire che P e Q sono coprimi.

Vogliamo ora esaminare il problema della henselizzazione per le terne non separate e per le terne in cui l'ideale non è contenuto nel radicale:

1) Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna con topologia non necessariamente separata.

È chiaro che, in questo caso, si pongono due problemi ben distinti di henselizzazione, a seconda che si accettino soltanto morfismi in terne separate ovvero tutti i morfismi siano permessi.

La trattazione del secondo caso esce dall'ambito del presente lavoro (una terna henseliana non separata non è immersa in quella separata completa ad essa associata, il che significa che cade la dimostrazione della Proposizione 2, come pure quella del Teorema 7, ecc.).

Il primo problema si risolve invece facilmente come segue.

Si consideri l'anello topologico separato A' associato ad A e sia $i\colon A\to A'$ l'omomorfismo canonico (che è continuo, in quanto A' non è altro che il quoziente di A rispetto all'aderenza dello 0 e i la proiezione sul quoziente). È noto che la coppia (A', i) è soluzione di un problema universale ([7], Cap. II, § 3, n. 8, Proposizione 16), nel senso che, per ogni omomorfismo continuo $g\colon A\to C$ in un anello topologico separato, esiste uno e un solo omomorfismo continuo $g'\colon A'\to C$ tale che $g=g'\circ i$.

Sia poi $\mathfrak{m}'=i(\mathfrak{m})\subseteq A'$ l'ideale separato associato ad $\mathfrak{m}$ e τ' la topologia naturale di A'. È chiaro che i può essere pensato come un morfismo della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ nella terna separata $(A', \mathfrak{m}, \tau')$ e che, dato comunque un morfismo $g\colon (A, \mathfrak{m}, \tau)\to$ $\to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ in una terna separata, esiste uno e un solo morfismo $g'\colon (A', \mathfrak{m}', \tau')\to$ $\to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ tale che $g=g'\circ i$.

Perciò l'henselizzazione della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ coincide con l'henselizzazione della terna separata associata $(A', \mathfrak{m}', \tau')$. Naturalmente in questo caso l'anello A non è più immerso nell'henselizzato, ma si sa che il nucleo dell'omomorfismo canonico è l'aderenza dello 0 di A.

2) Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna con ideale non contenuto necessariamente nel radicale. Posto $S=1+\mathfrak{m}$, consideriamo la terna $(S^{-1}A, S^{-1}\mathfrak{m}, S^{-1}\tau)$, dove $S^{-1}\tau$ è la topologia di $S^{-1}A$ avente una base di intorni dello 0 formata di ideali del tipo $S^{-1}\mathfrak{a}$, con $\mathfrak{a}$ variabile in una analoga base per τ. È noto che questa costruzione trasforma l'ideale $\mathfrak{m}$ nell'ideale $S^{-1}\mathfrak{m}$ contenuto nel radicale di $S^{-1}A$.

L'omomorfismo canonico $\varrho\colon A\to S^{-1}A$ è continuo, in quanto si ha: $\varrho^{-1}(S^{-1}\mathfrak{a})\supseteq\mathfrak{a}$, per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A.

Possiamo perciò affermare che ϱ è un morfismo della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ nella terna $(S^{-1}A, S^{-1}\mathfrak{m}, S^{-1}\tau)$.

Sia $g\colon (A, \mathfrak{m}, \tau)\to (C, \mathfrak{n}, \delta)$ un morfismo in cui la seconda è una H-terna (separata).

È noto che il passaggio alle frazioni risolve un problema universale, nel senso che se g è un omomorfismo di A in C tale che $g(s)$ è invertibile in C per ogni $s\in S$, allora esiste uno e un solo omomorfismo $h\colon S^{-1}A\to C$, tale che $g=h\circ\varrho$.

È chiaro che il morfismo di terne g soddisfa alla condizione richiesta, in quanto $\mathfrak{n} \subseteq \mathrm{Rad}\,(C)$ e $g(1+\mathfrak{m}) \subseteq 1+\mathfrak{n}$. Perciò esiste uno e un solo morfismo h tale che $g = h \circ \varrho$. Naturalmente h è definito come segue: $h(a/(1+m)) = g(a)/g(1+m)$. Si vede subito che h trasforma $S^{-1}\mathfrak{m}$ in un sottoinsieme di $\mathfrak{n}$ e che è continuo. Per quest'ultimo fatto basta osservare che, se $\mathfrak{a} \subseteq A$ e $\mathfrak{c} \subseteq C$ sono due ideali tali che $g(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{c}$, allora si ha pure: $h(S^{-1}\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{c}$, (cioè h è continua).

Le precedenti considerazioni ci permettono di concludere che il problema della henselizzazione della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è riconducibile in maniera ovvia al problema della henselizzazione della terna $(S^{-1}A, S^{-1}\mathfrak{m}, S^{-1}\tau)$. Questo si riporta poi immediatamente, sulla base del caso 1) precedentemente trattato, all'henselizzazione della terna separata associata.

6. – Ci occupiamo in questo numero di alcuni esempi di henselizzazione, con particolare riferimento al caso delle topologie $\mathfrak{m}$-adiche.

Ci servirà, oltre ai risultati già dimostrati nei predecenti numeri, anche la seguente

PROPOSIZIONE 5. – *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna (separata, con ideale contenuto nel radicale), $(A+\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}})$ la sua henselizzazione, $(A', \mathfrak{m}', \tau')$ una terna soddisfacente alle seguenti condizioni*:

1) $A \subseteq A' \subseteq A + \mathfrak{M}$;

2) $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{M}$;

3) τ' è la topologia indotta su A' da $\tau_{\mathfrak{M}}$;

4) $(A', \mathfrak{m}', \tau')$ *è una terna henseliana.*

Allora si ha necessariamente: $(A', \mathfrak{m}', \tau') = (A+\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}})$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia j l'inclusione algebrica e topologica di A in A', j' l'analoga inclusione di A' in $A+\mathfrak{M}$ e $j_{\mathfrak{M}}$ il solito morfismo canonico di A in $A+\mathfrak{M}$ (si veda il n. 5, Teorema 7). Vogliamo dimostrare che la terna $(A', \mathfrak{m}', \tau')$, insieme con il morfismo j, soddisfa alla proprietà universale che definisce l'henselizzazione della terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$.

Cominciamo coll'osservare preliminarmente che esiste uno e un solo morfismo $h\colon (A+\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}}) \to (A', \mathfrak{m}', \tau')$ tale che $j = h \circ j_{\mathfrak{M}}$ (proprietà universale dell'henselizzazione). Inoltre si ha: $j' \circ h =$ identità in $A+\mathfrak{M}$. Da ciò segue che h è un morfismo iniettivo e j' un morfismo suriettivo. Quindi j' è biiettivo, cioè $A' = A+\mathfrak{M}$, e perciò $(A', \mathfrak{m}', \tau') = (A+\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, \tau_{\mathfrak{M}})$.

COROLLARIO. – *Sia $(A, \mathfrak{m})$ una coppia tale che $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}\,(A)$ e $({}^hA, {}^h\mathfrak{m})$ la sua H-chiusura. Se $(A', \mathfrak{m}')$ è una coppia soddisfacente alle seguenti condizioni*:

1) $(A', \mathfrak{m}')$ *è henseliana*;

2) $A \subseteq A' \subseteq {}^hA$;

3) $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq {}^h\mathfrak{m}$;

allora si ha necessariamente: $(A', \mathfrak{m}') = ({}^hA, {}^h\mathfrak{m})$.

DIMOSTRAZIONE. – Basta applicare la Proposizione 5 considerando le coppie come terne munite della topologia discreta.

Vedremo ora applicazioni della Proposizione 5 alle topologie $\mathfrak{m}$-adiche, cioè alle topologie in cui una base degli intorni dello 0 è formata dalle potenze di un ideale $\mathfrak{m}$ ([5], Cap. III, § 2, n. 5).

1) *Topologie $\mathfrak{m}$-adiche.* Le proprietà dell'henselizzazione si deducono, in questo caso dalla

PROPOSIZIONE 6. – *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna con $\tau =$ topologia $\mathfrak{m}$-adica separata e con ideale contenuto nel radicale. Allora valgono le seguenti proprietà:*

1) *L'henselizzazione di $(A, \mathfrak{m}. \tau)$ coincide con $(A, \mathfrak{m}, \tau)^{\wedge}$;*

2) *L'henselizzazione di $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ è una H-terna forte;*

3) *Non esiste alcuna H-terna $(A', \mathfrak{m}', \tau')$ tale che $A \subsetneq A' \subsetneq A + \mathfrak{M}$, $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}' \subsetneq \mathfrak{M}$, $\tau' =$ topologia indotta da $\tau_{\mathfrak{M}}$.*

DIMOSTRAZIONE. – Il punto 1) discende immediatamente dal fatto che gli elementi di $\mathfrak{m}$ sono topologicamente nilpotenti (n. 5, Proposizione 4) e dal fatto che $\mathfrak{m}$ è aperto in τ. In effetti l'henselizzazione coincide con $A + \hat{\mathfrak{m}}$, che non è altro che $\hat{A}$, in quanto $A/\mathfrak{m} = \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$. Il punto 2) è conseguenza dell'1), in quanto ogni H-terna completa è forte (n. 4, Teorema 5). Il punto 3) è conseguenza immediata della Proposizione 5.

COROLLARIO. – *Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ una terna munita di topologia $\mathfrak{m}$-adica separata e con ideale contenuto nel radicale. Se la terna è henseliana, allora è completa.*

DIMOSTRAZIONE. – È conseguenza immediata della Proposizione 6.

OSSERVAZIONE 1. – Fra le terne soddisfacenti alle ipotesi della Proposizione 6 ci sono certamente gli anelli di ZARISKI ([5], Cap. III, § 3, n. 3), cioè le terne $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ tali che A è un anello commutativo noetheriano, $\mathfrak{m}$ è un suo ideale contenuto nel radicale che definisce una topologia separata (quest'ultimo fatto è conseguenza dei precedenti: [5], § 3, n. 2, Corollario alla Proposizione 5). È comunque chiaro che le ipotesi della Proposizione 6 sono essenziali affinchè il teorema abbia senso, in quanto un anello topologico è immerso nel completamento se e solo se la sua topologia è separata.

OSSERVAZIONE 2. – Se l'ideale $\mathfrak{m}$ della Proposizione 6 è finitamente generato, l'henselizzazione è ancora una terna con topologia $\mathfrak{m}$-adica. In effetti, se $\{\mathfrak{a}_n\}$ è la filtrazione dell'anello A, la filtrazione del suo completamento è $\{\hat{\mathfrak{a}}_n\}$ ([5], Cap. III, § 2, n. 12); quindi nel caso che la topologia sia definita da un ideale $\mathfrak{m}$ finitamente generato, la filtrazione del completamento è $\{(\mathfrak{m}^n)^{\wedge}\} = \{(\hat{\mathfrak{m}})^n\}$ ([5], Cap. III, § 2, n. 12, Corollario 2 alla proposizione 16).

Se l'ideale $\mathfrak{m}$ non è finitamente generato la topologia di $\hat{A}$ è definita dalla filtrazione $\{(\mathfrak{m}^n)^\frown\}$ che non dà necessariamente la topologia $\hat{\mathfrak{m}}$-adica. Cioè, nel primo caso, con il passaggio all'henselizzazione non si esce dalla categoria delle topologie $\mathfrak{m}$-adiche, nel secondo talvolta se ne esce.

2) Come caso particolare di terna con topologia $\mathfrak{m}$-adica si consideri la terna $(K[X]_{(X)}, (X), \tau)$, dove K è un campo qualsiasi, $K[X]_{(X)}$ è l'anello delle frazioni razionali $f(X)/g(X)$ tali che $g(0) \neq 0$, (X) è l'ideale generato da X in tale anello e τ è la topologia (X)-adica.

La sua H-chiusura (cioè, per la Proposizione 6, il completamento) coincide con la terna $(K[[X]], (X), \hat{\tau})$, dove $K[[X]]$ è l'anello delle serie formali nell'indeterminata X, (X) è l'ideale in esso generato da X.

Se consideriamo invece la coppia $(K[X]_{(X)}, (X))$, la sua H-chiusura (nel senso di LAFON-GRECO) è formata dalle sole serie formali *algebriche sui polinomi* (risultato dovuto al fatto che $K[X]_{(X)}$ è un anello di tipo geometrico: si veda al proposito [15], Cap. VII). Abbiamo così dimostrato che esiste almeno una coppia henseliana che, rispetto ad una opportuna topologia, non è una H-terna. In altre parole si può affermare che, mentre ogni H-terna diventa una H-coppia quando si prescinda dalla topologia (ci si riferisca solo ai polinomi unitari trascurando le serie ristrette), non è vero il viceversa. Cioè esistono terne che sono H-coppie (quando si prescinda dalla struttura topologica) ma che non sono H-terne. Dunque il concetto di H-terna è effettivamente, non solo apparentemente, più restrittivo di quello di H-coppia.

Quindi l'henselizzazione delle terne è distinta dalla henselizzazione delle coppie, coincidendo con questa nel caso discreto. E questo fatto dà un senso ai risultati elaborati nel presente lavoro, che dicono qualcosa di nuovo rispetto a ciò che si sa sulle coppie.

3) Vogliamo ora presentare un esempio di terna $(A, \mathfrak{m}, \tau)$ in cui la H-chiusura è distinta dalla terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$.

Si consideri allora un anello topologico non completo rispetto ad una topologia lineare separata τ. La terna $(A, (0), \tau)$ è ovviamente henseliana e quindi coincide con la propria H-chiusura. Ma in questo caso si ha: $A + \mathfrak{M} = A + (0) = A \neq \hat{A} = B$. (Quest'ultima eguaglianza dipende dal fatto che, detta $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ una base degli intorni di 0 per τ, tutte le coppie $(A/\mathfrak{a}_i, (0))$ sono già ovviamente henseliane).

Si osservi che, sul precedente esempio, si vede anche come la H-chiusura di una terna possa essere distinta dal completamento e comunque non essere completa.

4) Presentiamo ora una terna in cui l'henselizzazione coincide con la terna $(B, \mathfrak{M}, \sigma)$, ma è distinta dal completamento.

Sia $(A, \mathfrak{m}, \tau_d)$ la terna che si ottiene introducendo la topologia discreta τ_d nella coppia *non henseliana* $(A, \mathfrak{m})$. È chiaro che la H-chiusura della nostra terna coincide con $({}^hA, {}^h\mathfrak{m}, {}^h\tau_d) = (B, \mathfrak{M}, \sigma)$, in quanto la topologia ${}^h\tau_d$ è già separata completa e $A + {}^h\mathfrak{m} = {}^hA$. D'altra parte ${}^hA$ è distinto da A e quindi da $\hat{A}$, in quanto A è già separato completo.

6/12/1971: L'equivalenza delle definizioni 2 e 3 (terna henseliana e terna fortemente henseliana) è stata da me dimostrata nel caso in cui l'anello topologico A abbia una base numerabile di intorni dello zero e apparirà nell'articolo: « Anelli henseliani topologici, II », in corso di stampa presso questo periodico.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. AZUMAYA, *On Maximally central Algebras*, Nagoya Math. J., T. 2 (1951), pp. 119-150.
[2] N. BOURBAKI, *Algébre*, Cap. II, Hermann, Paris, 1967.
[3] N. BOURBAKI, *Algébre*, Cap. VIII, Hermann, Paris, 1961.
[4] N. BOURBAKI, *Algébre Commutative*, Cap. I, II, Hermann, Paris, 1965.
[5] N. BOURBAKI, *Algébre Commutative*, Cap. III, IV, Hermann, Paris, 1961.
[6] N. BOURBAKI, *Théories des Ensembles*, Cap. III, Hermann, Paris, 1967.
[7] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Cap. I, II, Hermann, Paris, 1965.
[8] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Cap. III, IV, Hermann, Paris, 1960.
[9] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Cap. IX, Hermann, Paris, 1958.
[10] S. GRECO, *Algebras over non local Hensel rings*, Journal of Algebra, **8** (1968), pp. 45-59.
[11] S. GRECO, *Henselization of a ring with respect to an ideal*, Trans. Amer. Math. Soc., **144** (1969), pp. 43-65.
[12] S. GRECO, *Sugli omomorfismi piatti e non ramificati*, Le Matematiche, Vol. XXIV, Fasc. 2 (1969), pp. 392-415.
[13] J. P. LAFON, *Anneaux Henseliens*, Bull. Soc. Math. France, **91** (1963), pp. 77-108.
[14] M. NAGATA, *On the theory of henselian rings*: I) Nagoya Math. J., T. 5 (1953), pp. 45-57; II) idem, T. 7 (1954), pp. 1-19; III) Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, serie A, Math., T. 32 (1960), pp. 93-101.
[15] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience, New York, 1962.
[16] M. RAYNAUD, *Anneaux Locaux Henséliens*, Springer-Verlag, New York, 1970.
[17] P. SALMON, *Sur les séries formelles restreintes*, Bull. Soc. Math. France, **92** (1964), pp. 385-410.