Sulla regolarizzazione delle soluzioni del problema di Cauchy-Dirichlet per un'equazione parabolica di ordine superiore.

GIUSEPPE ARNESE (a Bari) (*) (**)

Sunto. — Si studia il problema non omogeneo di Cauchy-Dirichlet per un'equazione parabolica di ordine superiore, in forma variazionale, provando un teorema di esistenza ed unicità ed una maggiorazione analoga a quella contenuta nel teorema del massimo modulo stabilito da C. Miranda per le equazioni ellittiche di ordine superiore.

In alcuni miei lavori [2], [3] ho studiato il problema di DIRICHLET per una equazione parabolica di ordine $2m$ in n variabili in un cilindro, precisamente il problema:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} a_{\alpha\beta} D^{\beta} u D^{\alpha} \bar{v} - u \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right\} dx dt = \iint_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} f_{\alpha} \cdot D^{\alpha} \bar{v} dx dt \\ \qquad \qquad \qquad (\forall \tau \in \mathcal{D}(\Omega); \Omega = G \times]0, T[, G \subset \mathbb{R}^n) \\ \frac{d^{j-1}u}{dt^{j-1}}(x', t) = \varphi_j(x', t) \quad (j = 1, \dots, m; (x', t) \in \partial G \times [0, T]) \\ u(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \bar{G}) \end{array} \right.$$

ove $f = (f_{\alpha})_{|\alpha| \leq m}$ è un sistema di funzioni tali che:

$$(II) \quad M_{\lambda}(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{(x,t) \in \Omega} d(x)^{m-|\alpha|+1-\lambda} |f_{\alpha}(x, t)| < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \lambda < 1\right)$$

$d(x)$ essendo la distanza di (x, t) da $\partial G \times [0, T]$.

In [2] ho dimostrato un teorema di esistenza ed unicità per il problema omogeneo ($\varphi_j = 0$ per $j = 1, \dots, m$; $\psi = 0$) stabilendo, altresì, una formula di maggiorazione che può ritenersi l'estensione alle equazioni paraboliche di ordine $2m$ del teorema di massimo modulo stabilito da C. MIRANDA [9] per il problema di DIRICHLET, anche non omogeneo, relativo alle equazioni ellittiche di ordine $2m$.

In [3] ho stabilito risultati analoghi per il problema non omogeneo ma soltanto in casi particolari a causa della difficoltà di costruire, nel caso generale, una fun-

(*) Entrato in Redazione il 12 luglio 1971.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R.

zione verificante le condizioni al contorno del problema (I), con singolarità non troppo elevate sulla frontiera laterale di Ω , mediante la quale poter ricondurre il problema non omogeneo a quello omogeneo.

In questo mio lavoro, studio ancora il problema non omogeneo (I) avvalendomi, fra l'altro, di alcuni risultati, da me stabiliti in un recente lavoro [4] dedicato allo studio di certi potenziali relativi ad equazioni paraboliche di ordine $2m$, che permettono la costruzione della suddetta funzione ausiliaria.

Nel presente lavoro, inoltre, sostituisco la (II) con la seguente:

$$(III) \quad M_\lambda(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{(x,t) \in \Omega} [\inf(d(x), t^{1/2m})]^{m-|\alpha|+1-\lambda} |f_\alpha(x, t)| < +\infty \quad (\tfrac{1}{2} < \lambda < 1)$$

consentendo, quindi, alle funzioni f_α ($|\alpha| \leq m$) di avere delle singolarità anche sulla base inferiore di Ω . Questa generalizzazione sembra naturale, trattandosi di un problema parabolico, ma ha richiesto il superamento di non lievi difficoltà. In particolare è stato necessario perfezionare i risultati relativi al caso omogeneo, utilizzando spazi di funzioni con derivata frazionaria rispetto a t (Teor. 3.2).

Dimostro, infine, che supposta verificata la (III) e in convenienti ipotesi sui coefficienti e sui dati al contorno, il problema (I) ammette un'unica soluzione $u \in C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega}) \cap {}_R W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$ per la quale sussiste la maggiorazione:

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sup_{\bar{\Omega}} |D^\alpha u(x, t)| + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sup_{\bar{\Omega}} \frac{|D^\alpha u(x', t) - D^\alpha u(x'', t)|}{|x' - x''|^\lambda} + \\ & + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sup_{\bar{\Omega}} \frac{|D^\alpha u(x, t') - D^\alpha u(x, t'')|}{|t' - t''|^{(m-1-|\alpha|+\lambda)/2m}} + \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} + \inf \left(\int_G^+ dx \int_{-\infty}^+ |t| |\mathcal{F}(Pu)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \\ & \leq c \left(M_\lambda(f) + \sum_{j=1}^m |\varphi_j, \partial G \times [0, T]|_{m-j, 0}^{(\lambda, 2m)} + |\psi, \bar{G}|_{m-1}^{(\lambda)} \right) \end{aligned}$$

ove l'estremo inferiore è preso sui prolungamenti di u in $G \times]-\infty, +\infty[$ e, a secondo membro, oltre $M_\lambda(f)$, compaiono certe norme hölderiane dei dati sulla frontiera (Teor. 3.4).

Nel n. 1 di questo lavoro sono raccolte le notazioni usate; il n. 2 è dedicato a dei lemmi concernenti i potenziali e che permettono la costruzione della funzione ausiliaria; nel n. 3, dopo il fondamentale Lemma 3.1, vi sono i risultati principali di questo lavoro (Teor. 3.2 e Teor. 3.4).

1. - Notazioni concernenti spazi funzionali.

Denotiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio euclideo ad n dimensioni, con $x = (x_1, \dots, x_n)$ un suo punto, con $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) = (x', x_n, t)$ un punto di $\mathbf{R}^{n+1}$.

Come di consueto, poniamo anche:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & (\alpha_i \text{ intero } \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n) \\ |\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i, & D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

Richiamiamo, brevemente, definizioni e notazioni concernenti alcuni spazi funzionali.

Se A è un dominio di $\mathbf{R}^n$, con $C^k(A)$ ($k \in \mathbf{N}$) denotiamo lo spazio delle funzioni complesse φ definite in A , ivi continue e limitate con le loro derivate di ordine minore o eguale a k , normato ponendo:

$$|\varphi, A|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in A} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Con $C^{k+\lambda}(A)$ ($k \in \mathbf{N}$, $0 < \lambda < 1$) denotiamo lo spazio delle funzioni $\varphi \in C^k(A)$ tali che:

$$\sup_{x', x'' \in A} \frac{|D^\alpha \varphi(x') - D^\alpha \varphi(x'')|}{|x' - x''|^\lambda} < +\infty \quad (\text{per } |\alpha| = k)$$

normato ponendo:

$$|\varphi, A|_k^{(\lambda)} = |\varphi, A|_k + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x', x'' \in A} \frac{|D^\alpha \varphi(x') - D^\alpha \varphi(x'')|}{|x' - x''|^\lambda}.$$

Se G è un aperto di $\mathbf{R}^n$ e se T è un numero reale positivo, poniamo $\Omega = G \times]0, T[$.

Con $C_{x,t}^{k,0}(\bar{\Omega})$ ($k \in \mathbf{N}$) denotiamo lo spazio delle funzioni continue e limitate in $\bar{\Omega}$ con le derivate parziali rispetto ad x fino all'ordine k ; con $C_{x,t}^{k+\lambda,0}(\bar{\Omega})$ ($k \in \mathbf{N}$, $0 < \lambda < 1$) denotiamo lo spazio delle funzioni $\varphi \in C_{x,t}^{k,0}(\bar{\Omega})$ tali che:

$$\sup_{(x',t),(x'',t) \in \bar{\Omega}} \frac{|D^\alpha \varphi(x',t) - D^\alpha \varphi(x'',t)|}{|x' - x''|^\lambda} < +\infty \quad (\text{per } |\alpha| = k).$$

Con $C_{x,t}^{k+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega})$ ($k \in \mathbf{N}$, $0 < \lambda < 1$, m intero ≥ 1) designiamo lo spazio delle funzioni $\varphi \in C_{x,t}^{k,0}(\bar{\Omega})$ tali che risulti finita la norma:

$$\begin{aligned} |\varphi, \bar{\Omega}|_{k,0}^{(\lambda, 2m)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{(x,t) \in \bar{\Omega}} |D^\alpha \varphi(x,t)| + \\ &+ \sum_{|\alpha|=k} \sup_{(x',t),(x'',t) \in \bar{\Omega}} \frac{|D^\alpha \varphi(x',t) - D^\alpha \varphi(x'',t)|}{|x' - x''|^\lambda} + \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{(x,t'),(x,t'') \in \bar{\Omega}} \frac{|D^\alpha \varphi(x,t') - D^\alpha \varphi(x,t'')|}{|t' - t''|^{\gamma(\alpha)}} \end{aligned}$$

ove $\gamma(\alpha) = \inf(1, (k - |\alpha| + \lambda)/2m)$.

Con $C_{x,t}^{2m,1}(\Omega)$ denotiamo lo spazio delle funzioni continue in Ω con le derivate rispetto ad x sino a quelle di ordine $2m$ e con la derivata parziale prima rispetto a t .

Riportiamo, ora, alcune definizioni concernenti spazi di funzioni con derivata frazionaria rispetto a t ⁽¹⁾.

Se G è un insieme aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e $Q = G \times]-\infty, +\infty[$, denotiamo con

(1) Cfr. [8].

$W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$ lo spazio delle $\varphi \in L^2(Q)$ tali che:

$$D^\alpha \varphi \in L^2(Q) \quad (|\alpha| \leq m); \quad |t|^{\frac{1}{2}} \cdot |\mathcal{F}\varphi(x, t)| \in L^2(Q)$$

ove le derivate sono intese nel senso delle distribuzioni e si è posto:

$$\mathcal{F}\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-it\eta] \varphi(x, \eta) d\eta.$$

Fatte, inoltre, per $\varphi \in W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$ le posizioni:

$$\|\varphi\|_{0, \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\iint_Q |t| \cdot |\mathcal{F}\varphi(x, t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\varphi, Q\|_{m, \frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(Q)}^2 + \|\varphi\|_{0, \frac{1}{2}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

lo spazio $W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$ viene munito della norma $\|\cdot, Q\|_{m, \frac{1}{2}}$.

Denotiamo con ${}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$ la chiusura di $\mathcal{D}(Q)$ nello spazio $W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$.

Considerato l'insieme $\Omega = G \times]0, T[$ ($T > 0$), designiamo con ${}_R W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$ (rispett. ${}_R {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$) lo spazio delle funzioni $u \in L^2(\Omega)$ che ammettono un prolungamento $Pu \in W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$ (rispett. $Pu \in {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$) munito della norma:

$$\|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} = \inf_{Pu \in X} \|Pu, Q\|_{m, \frac{1}{2}}$$

ove X è l'insieme di tutti i prolungamenti $Pu \in W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$ (rispett. $Pu \in {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$).

Se $u \in {}_R {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, poniamo:

$$\langle u, \varphi \rangle_\Omega = - \iint_\Omega \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt$$

$$|u|_\Omega = \sup_{\varphi \in Y} |\langle u, \varphi \rangle_\Omega|$$

ove Y è l'insieme delle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che $\|\varphi, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} \leq 1$. Si denota con ${}_s {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $u \in {}_R {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$ tali che $|u|_\Omega < +\infty$ e che ammettono un prolungamento $Pu \in {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(Q)$ tale che $Pu(x, t) = 0$ per $t < 0$; in tale spazio si introduce la norma:

$$\| |u, \Omega| \|_{m, \frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_\Omega^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si prova che esiste una costante $c > 0$ tale che:

$$(1.1) \quad \|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} \leq c \|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}}^{(2)}.$$

Infine, detto $H^{m,0}(\Omega)$ il completamento di $C_{x,t}^{m,0}(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma:

$$\|u, \Omega\|_{m,0} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

se $0 \leq \mu \leq 2m+n$, denotiamo con $H^{m,0,\mu}(\Omega)$ il sottospazio di $H^{m,0}(\Omega)$ costituito dalle funzioni u per le quali risulta:

$$[u, \Omega]_{m,0}^{(\mu)} = \sup_{\substack{(x,t) \in \bar{\Omega} \\ 0 < \varrho < +\infty}} \left(\varrho^{-\mu} \iint_{I(x_0, t_0; \varrho, 2m)} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

ove:

$$I(x_0, t_0; \varrho, 2m) = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : |x - x_0| < \varrho, |t - t_0| < \varrho^{2m}\}.$$

2. - Lemmi relativi a potenziali.

In questo numero esponiamo alcuni lemmi concernenti potenziali relativi ad equazioni paraboliche che utilizzeremo, in seguito, per costruire una funzione verificante assegnate condizioni al contorno.

LEMMA 2.1. - Sia $\Omega = \mathbf{R}^n \times]0, T[$ ($T > 0$) e sia data l'equazione:

$$(2.1) \quad \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t) D^\alpha u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

verificante le ipotesi seguenti:

I) $a_\alpha \in C_{x,t}^{\lambda,0}(\bar{\Omega})$ ($0 < \lambda < 1$, $|\alpha| \leq 2m$).

II) Le funzioni a_α ($|\alpha| = 2m$) sono continue rispetto a t , uniformemente al variare di $(x, t) \in \bar{\Omega}$.

III) L'equazione (2.1) è uniformemente parabolica in $\bar{\Omega}$, cioè esiste un numero $\delta > 0$ tale che:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ (-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, t) \xi^\alpha \right\} > \delta |\xi|^{2m} \\ \forall (x, t) \in \bar{\Omega}, \forall \xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}. \end{cases}$$

(²) Cfr. [8], Prop. 3.9 e Def. 3.16.

Detta $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ la soluzione fondamentale dell'equazione (2.1), se $\psi \in C^{m-1+\lambda}(\mathbf{R}^n)$ e si pone:

$$w(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi$$

allora si ha:

$$w \in C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2m,1}(\Omega) \cap {}_R W_2^{m, \frac{1}{2}}(A) \cap H^{m,0,\mu}(A)$$

ove $A = G \times]0, T[$, G è un arbitrario insieme aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, $\mu = n + 2m + 2\lambda - 2$.

Inoltre, risulta:

$$|w, \bar{\Omega}|_{m-1,0}^{(\lambda, 2m)} + \|w, A\|_{m, \frac{1}{2}} + [w, A]_{m,0}^{(\mu)} \leq c |\psi, \mathbf{R}^n|_{m-1}^{(\lambda)}$$

con c costante positiva dipendente dai coefficienti di (2.1), da λ , T e da A .

DIMOSTRAZIONE. — Da un nostro precedente risultato ⁽³⁾ consegue, nelle ipotesi fatte, che $w \in C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega})$ e che:

$$(2.2) \quad |w, \bar{\Omega}|_{m-1,0}^{(\lambda, 2m)} \leq c |\psi, \mathbf{R}^n|_{m-1}^{(\lambda)}.$$

Utilizzando, ancora, nostri risultati si prova che:

$$(2.3) \quad [w, A]_{m,0}^{(\mu)} \leq c |\psi, \mathbf{R}^n|_{m-1}^{(\lambda)}.$$

In effetti, si ha:

$$(2.4) \quad |D^\alpha w(x, t)| \leq c |\psi, \mathbf{R}^n|_{m-1}^{(\lambda)} \cdot t^{(\lambda-1)/2m} \quad \forall (x, t) \in \Omega \quad (|\alpha| = m) \quad (4).$$

da cui consegue facilmente la (2.3).

Proviamo, infine, che:

$$(2.5) \quad \|w, A\|_{m, \frac{1}{2}} \leq c |\psi, \mathbf{R}^n|_{m-1}^{(\lambda)}.$$

Prolunghiamo, innanzitutto, w in $\mathbf{R}^{n+1}$, ponendo:

$$w_1(x, t) = \begin{cases} w(x, T) & \forall t \geq T \\ w(x, t) & \forall t \in]0, T[\\ \psi(x) & \text{se } t = 0 \\ w(x, -t) & \forall t < 0 \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbf{R}^n)$$

⁽³⁾ Cfr. [4], Prop. IX.

⁽⁴⁾ Cfr. [4], Prop. VI.

Sia $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ con $\chi(t) = 1 \quad \forall t \in [0, T]$ e sia $[a, b]$ un intervallo contenente il supporto di χ .

Ponendo $Pw = \chi w_1$ otteniamo, quindi, un particolare prolungamento continuo di w ⁽⁵⁾.

Orbene, risulta:

$$(2.6) \quad \|Pw, G \times]-\infty, +\infty[\|_{m, \frac{1}{2}} \leq c \|\psi, \mathbf{R}^n\|_{m-1}^{(\lambda)}.$$

In effetti, per proprietà della trasformazione di FOURIER ⁽⁶⁾, si ha:

$$(2.7) \quad \int_a^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \cdot |\mathcal{F}(Pw)|^2 dt = c \int_a^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathcal{F} \left(\frac{d}{dt} \int_a^t Pw(x, \sigma) (t-\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right) \right|^2 dt = \\ = c \int_a^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d}{dt} \int_a^t Pw(x, \sigma) (t-\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right|^2 dt.$$

D'altra parte, tenendo presente che:

$$\begin{cases} |w(x, t)| \leq c \|\psi, \mathbf{R}^n\|_{m-1}^{(\lambda)} \\ \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right| \leq c \|\psi, \mathbf{R}^n\|_{m-1}^{(\lambda)} \cdot t^{(\lambda-2m)/2m} \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \Omega \quad (7)$$

⁽⁵⁾ Si tenga presente che, nelle ipotesi fatte, è $\lim_{t \rightarrow 0^+} w(x, t) = \psi(x)$ (cfr. [6]).

⁽⁶⁾ Per $f \in L^2(\mathbf{R})$, $f = 0$ per $t < a$, introdotta la derivata frazionaria di f , ordine ϱ :

$$D^\varrho f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \frac{d}{dt} \int_a^t f(\eta) (t-\eta)^{-\varrho} d\eta \quad (0 < \varrho < 1)$$

si prova, utilizzando la teoria delle distribuzioni, che:

$$\mathcal{F}(D^\varrho f) = \exp \left[i\varrho \frac{\pi}{2} \right] \exp [i\varrho\theta] |\eta|^\varrho \mathcal{F}(f) \quad (\theta = 0 \text{ se } \eta > 0, \theta = \pi \text{ se } \eta < 0).$$

(La funzione $x^{-\varrho}$, che compare nell'integrale, si intende prolungata per $x \leq 0$, ponendola eguale a zero). Cfr. [7], [10].

⁽⁷⁾ Cfr. [4], Prop. VI, tenendo anche presente che:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha w \quad \text{in } \Omega.$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad & \left| \frac{d}{dt} \int_a^t Pw(x, \sigma) (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right| = 2 \left| \frac{d}{dt} \int_a^t (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial Pw}{\partial \sigma} d\sigma \right| = \\
 & = \left| \int_a^t (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} \left(\chi' \cdot w_1 + \chi \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} \right) d\sigma \right| \leq \\
 & \leq c |\psi, \mathbf{R}_{m-1}^{n(\lambda)}| + c |\psi, \mathbf{R}_{m-1}^{n(\lambda)}| \cdot \int_a^t (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} |\sigma|^{(\lambda-2m)/2m} d\sigma \leq \\
 & \leq c |\psi, \mathbf{R}_{m-1}^{n(\lambda)}| (1 + |t|^{(\lambda-m)/2m}) \quad (\forall t \neq 0) \quad (8)
 \end{aligned}$$

mentre:

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad & \left| \frac{d}{dt} \int_a^t Pw(x, \sigma) (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b Pw(x, \sigma) (t - \sigma)^{-\frac{3}{2}} d\sigma \right| \leq \\
 & \leq c |\psi, \mathbf{R}_{m-1}^{n(\lambda)}| (t - b)^{-\frac{3}{2}} \quad (\forall t > b).
 \end{aligned}$$

Da (2.7), (2.8), (2.9) si deduce immediatamente:

$$\|Pw\|_{0, \frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_a^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |t| |\mathcal{F}(Pw)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c |\psi, \mathbf{R}_{m-1}^{n(\lambda)}|.$$

Da questo risultato e dalla (2.4) consegue la (2.6) e da questa, tenendo presenti le definizioni del n. 1, infine, la (2.5).

Da (2.2), (2.3), (2.5), essendo noto che $w \in C_{x,t}^{2m,1}(\Omega)$, si deduce la tesi.

LEMMA 2.2. - *Posto $\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$, siano $\mathcal{G}_j(x, t)$ ($j = 1, \dots, m$; $x \in \mathbf{R}_+^n$, $t \in \mathbf{R}$) i nuclei di Poisson relativi al problema di Dirichlet nel semispazio $\mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}$ per un'arbitraria equazione parabolica di ordine $2m$, a coefficienti costanti, del tipo (2.1) ⁽⁹⁾.*

(8) Ponendo $\sigma = t\eta$, si trova, infatti, facilmente:

$$\begin{aligned}
 & \int_a^t (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} |\sigma|^{\lambda/2m-1} d\sigma \leq t^{(\lambda-m)/2m} \int_{-\infty}^1 (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} |\eta|^{\lambda/2m-1} d\eta \quad \text{se } t > 0, \\
 & \int_a^t (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} |\sigma|^{\lambda/2m-1} d\sigma \leq |t|^{(\lambda-m)/2m} \int_1^{+\infty} (\eta - 1)^{-\frac{1}{2}} |\eta|^{\lambda/2m-1} d\eta \quad \text{se } t < 0.
 \end{aligned}$$

(9) Ci riferiamo ai nuclei introdotti in [11], formula (2.69).

Siano, inoltre, assegnate m funzioni:

$$(2.10) \quad \varphi_j \in C_{x',t}^{m-j+\lambda, \lambda/2m}(\mathbf{R}^{n-1} \times [0, T]) \quad (j = 1, \dots, m; 0 < \lambda < 1, T > 0)$$

verificanti la condizione:

$$(2.11) \quad \varphi_j(x', 0) = 0 \quad (j = 1, \dots, m; x' \in \mathbf{R}^{n-1}).$$

Posto:

$$v = \sum_{j=1}^m v_j$$

$$v_j(x, t) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dy' \int_0^t \mathfrak{G}_j(x' - y', x_n, t - \theta) \varphi_j(y', \theta) d\theta \quad (1 \leq j \leq m)$$

risulta:

$$v \in C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{A}) \cap C_{x,t}^{2m,1}(A) \cap {}_R W_2^{m, \frac{1}{2}}(A) \cap H^{m,0,\mu}(A)$$

ove $A = G \times]0, T[$, G è un arbitrario insieme aperto limitato di $\mathbf{R}_+^n$, $\mu = n + 2m + 2\lambda - 2$.

Inoltre, risulta:

$$(2.12) \quad \frac{\partial^{j-1} v}{\partial x_n^{j-1}}(x', 0, t) = \varphi_j(x', t) \quad (j = 1, \dots, m; (x', t) \in \mathbf{R}^{n-1} \times [0, T])$$

$$(2.13) \quad v(x', x_n, 0) = 0 \quad ((x', x_n) \in \mathbf{R}_+^n)$$

$$(2.14) \quad |D^\alpha v(x, t)| \leq c t^{(m-1-|\alpha|+\lambda)/2m} \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \quad (|\alpha| \leq m-1; (x, t) \in \mathbf{R}_+^n \times [0, T])$$

$$(2.15) \quad |D^\alpha v(x, t)| \leq c x_n^{m-1-|\alpha|+\lambda} \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \quad (|\alpha| \geq m; (x, t) \in \mathbf{R}_+^n \times [0, T])$$

$$(2.16) \quad |v, \bar{A}|_{m-1,0}^{(\lambda, 2m)} + \|v, A\|_{m, \frac{1}{2}} + [v, A]_{m,0}^{(\mu)} \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)}$$

dove:

$$\Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^m |\varphi_j, \mathbf{R}^{n-1} \times [0, T]|_{m-j,0}^{(\lambda, 2m)}$$

con c costante positiva dipendente, oltre che dai coefficienti dell'equazione, da λ , T e da A .

DIMOSTRAZIONE. — La dimostrazione di questo lemma si consegue facilmente, integrando nostri precedenti risultati ⁽¹⁰⁾ con considerazioni analoghe a quelle adoperate per il Lemma 2.1.

⁽¹⁰⁾ Cfr. [3], Lemma 2.1.

Tuttavia, per comodità del lettore, ne daremo qualche cenno. Innanzitutto, osserviamo che le φ_j ($j = 1, \dots, m$) si possono prolungare per $t < 0$ (ponendole eguali a zero) e per $t > T$, in modo da conservare le loro proprietà di regolarità.

Per i risultati del citato lavoro di O. A. SOLONNIKOV [11] è, allora, verificata la (2.12); la (2.13) è ovvia. Allo scopo di provare (2.14), (2.15) ricordiamo alcune proprietà dei nuclei $\mathfrak{G}_j(x, t)$ dimostrate da SOLONNIKOV in [11].

Le $\mathfrak{G}_j(x, t)$ ($j = 1, \dots, m$) sono infinitamente differenziabili, per $x_n > 0$, sono nulle per $t < 0$ e verificano le disuguaglianze:

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| D^\alpha \frac{\partial^r}{\partial t^r} \mathfrak{G}_j(x, t) \right| \leq ct^{-\frac{\chi_j^{\alpha, r}}{2m}} \exp \left(-\omega \frac{|x|^{2m/(2m-1)}}{t^{1/(2m-1)}} \right) \\ \text{ove:} \\ \chi_j^{\alpha, r} = n + 2m - j + |\alpha| + 2mr, \quad \omega > 0. \end{array} \right.$$

Inoltre, può scriversi:

$$(2.18) \quad \mathfrak{G}_j(x, t) = A_{x', t}^{(k)} \mathfrak{G}_j^{(k)}(x', x_n, t)$$

ove $A_{x', t}^{(k)}$ è l'iterato k -esimo dell'operatore:

$$A_{x', t} = \frac{\partial}{\partial t} + (-1)^m (1 + \delta_1) A_{x'}^{(m)} \quad (\delta_1 > 0)$$

avendosi, inoltre:

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| D^\alpha \frac{\partial^r}{\partial t^r} \mathfrak{G}_j^{(k)}(x, t) \right| \leq ct^{-\frac{\chi_{j, k}^{\alpha, r}}{2m}} \exp \left(-\omega \frac{|x|^{2m/(2m-1)}}{t^{1/(2m-1)}} \right) \\ \text{con} \\ \chi_{j, k}^{\alpha, r} = n + 2m - j + |\alpha| + 2mr - 2mk, \quad \omega > 0. \end{array} \right.$$

Ciò premesso, tenendo presente la (2.16), per $x_n > 0$ e per ogni α si ha:

$$\begin{aligned} D^\alpha v_j(x, t) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dy' \int_0^t D^\alpha \mathfrak{G}_j(x' - y', x_n, t - \theta) [\varphi_j(y', \theta) - \varphi_j(y', t)] d\theta + \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}^{n-1}} D^\alpha \mathfrak{G}_j^{(1)}(x' - y', x_n, t) \varphi_j(y', t) dy' + \\ &\quad + (-1)^m (1 + \delta_1) \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dy' \int_0^t A_{x'}^{(m)} D^\alpha \mathfrak{G}_j^{(1)}(x' - y', x_n, t - \theta) \varphi_j(y', t) d\theta = \\ &= I_1^{(j)} + I_2^{(j)} + I_3^{(j)}. \end{aligned}$$

Maggioriamo l'integrale $I_1^{(j)}$. Da (2.10), (2.17) si deduce:

$$(2.20) \quad |I_1^{(j)}| \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dy' \int_0^t (t-\theta)^{-(n+m+|\alpha|-\lambda)/2m} \exp \left\{ -\omega \frac{(|x'-y'|^2 + x_n^2)^{m/(2m-1)}}{(t-\theta)^{1/(2m-1)}} \right\} d\theta.$$

Da questa disuguaglianza, tenendo presenti alcuni nostri risultati ⁽¹¹⁾, consegue:

$$(2.21) \quad |I_1^{(j)}| \leq c t^{(m-1-|\alpha|+\lambda)/2m} \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \quad \text{se } |\alpha| \leq m-1.$$

Se $|\alpha| \geq m$, effettuando in (2.20) il cambiamento di variabili:

$$t-\theta = \eta x_n^{2m}, \quad x_i - y_i = x_n \eta^{1/2m} \xi_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

si ha:

$$(2.22) \quad |I_1^{(j)}| \leq c x_n^{m-1-|\alpha|+\lambda} \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} d\xi' \int_0^{t/x_n^{2m}} \eta^{-(m+1+|\alpha|-\lambda)/2m} \exp \left\{ -\omega \left(|\xi'|^2 + \frac{1}{\eta^{1/m}} \right)^{m/(2m-1)} \right\} d\eta \leq \\ \leq c x_n^{m-1-|\alpha|+\lambda} \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)}.$$

Maggioriamo l'integrale $I_2^{(j)}$. Da (2.10), (2.11), (2.19) consegue:

$$|I_2^{(j)}| \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} t^{(m-n-|\alpha|+\lambda)/2m} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \exp \left\{ -\omega \frac{(|x'-y'|^2 + x_n^2)^{m/(2m-1)}}{t^{1/(2m-1)}} \right\} dy'$$

da cui, col cambiamento di variabili

$$x_i - y_i = \xi_i t^{1/2m} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

si ottiene:

$$|I_2^{(j)}| \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} t^{(m-1-|\alpha|+\lambda)/2m} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \exp \left\{ -\omega \left(|\xi'|^2 + \frac{x_n^2}{t^{1/m}} \right)^{m/(2m-1)} \right\} d\xi' \leq \\ \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} t^{(m-1-|\alpha|+\lambda)/2m} \cdot \exp \left(-\frac{\omega}{2} \frac{x_n^{2m/(2m-1)}}{t^{1/(2m-1)}} \right)$$

e, quindi, immediatamente:

$$(2.23) \quad |I_2^{(j)}| \leq c t^{(m-1-|\alpha|+\lambda)/2m} \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \quad \text{se } |\alpha| \leq m-1$$

$$(2.24) \quad |I_2^{(j)}| \leq c x_n^{m-1-|\alpha|+\lambda} \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \quad \text{se } |\alpha| \geq m.$$

⁽¹¹⁾ Cfr. [5], Prop. I.

Maggioriamo l'integrale $I_3^{(j)}$. Integrando per parti e tenendo presente che:

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} dy' \int_0^t D_y^\beta D^\alpha \mathfrak{G}_j^{(1)}(x' - y', x_n, t - \theta) d\theta = 0 \quad (x_n > 0)$$

ove D_y^β è una derivata di ordine $|\beta| > 0$ rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_{n-1}$, si ottiene:

$$I_3^{(j)} = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dy' \int_0^t R_i^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) D^\alpha \mathfrak{G}_j^{(1)}(x' - y', x_n, t - \theta) \left[R_i^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial y'} \right) \varphi_j(y', t) - R_i^{(2)} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) \varphi_j(x', t) \right] d\theta$$

ove N è il numero dei termini del polinomi $\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^m$, $R_i^{(1)}$ è un operatore differenziale di ordine $m + j$, $R_i^{(2)}$ è un operatore differenziale di ordine $m - j$.

Da (2.10), (2.19) si ha:

$$|I_3^{(j)}| \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} dy' \int_0^t |x' - y'|^\lambda (t - \theta)^{-(n+m+|\alpha|)/2m} \exp \left\{ -\omega \frac{(|x' - y'|^2 + x_n^2)^{m/(2m-1)}}{(t - \theta)^{1/(2m-1)}} \right\} d\theta.$$

Procedendo come per $I_1^{(j)}$, si ha:

$$(2.25) \quad |I_3^{(j)}| \leq c t^{(m-1-|\alpha|+\lambda)/2m} \cdot \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \quad \text{se } |\alpha| \leq m-1$$

$$(2.26) \quad |I_3^{(j)}| \leq c x_n^{m-1-|\alpha|+\lambda} \cdot \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \quad \text{se } |\alpha| \geq m.$$

Dalle disuguaglianze (2.21), ..., (2.26) conseguono le formule (2.14), (2.15) che intendevamo dimostrare.

Per provare, infine, la (2.16), osserviamo che essendo dimostrata, nel citato lavoro di SOLONNIKOV, la disuguaglianza:

$$|v, \bar{A}|_{m-1,0}^{(\lambda, 2m)} \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)}$$

è sufficiente provare che:

$$(2.27) \quad \|v, A\|_{m, \frac{1}{2}} \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)}$$

$$(2.28) \quad [v, A]_{m,0}^{(\mu)} \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)}.$$

Per dimostrare la (2.27), denotiamo con Pv il prolungamento di v ottenuto ponendo:

$$Pv(x, t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ v(x, t) & \forall t \in [0, T] \\ v(x, 2T - t) & \forall t > T \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbf{R}_+^n).$$

Per il teorema della media e per la (2.14), posto $\varrho = (m-1+\lambda)/2m$ si ha:

$$(2.29) \quad \left| \frac{d}{dt} \int_0^t P v(x, \sigma) (t-\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right| \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \left| \frac{d}{dt} \int_0^t \sigma^{\varrho} (t-\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right| < \\ < c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} \left| \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}+\varrho} \int_0^1 \eta^{\varrho} (1-\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta \right| < c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} t^{-\frac{1}{2}+\varrho} \quad (\forall t > 0)$$

$$(2.30) \quad \left| \frac{d}{dt} \int_0^t P v(x, \sigma) (t-\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma \right| \leq c \Phi_{m-1,0}^{(\lambda)} (t-2T)^{-\frac{1}{2}} \quad (\forall t > 2T).$$

In base a (2.29) e (2.30), ragionando come nella dimostrazione della (2.5) del lemma precedente, si prova la (2.27).

Dalla (2.15) consegue, facilmente, la (2.28).

Le proprietà qualitative di v sono, infine, conseguenza di quanto dimostrato innanzi oppure di proprietà dimostrate nel citato lavoro di SOLONNIKOV [11].

3. - Posizione del problema e relativi teoremi di esistenza ed unicità.

Sia G un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, T un numero reale positivo. Poniamo

$$\Omega = G \times]0, T[, \quad \Omega' = \partial G \times]0, T[$$

dove ∂G è la frontiera di G , che supporremo infinitamente differenziabile.

Consideriamo la forma bilineare:

$$(3.1) \quad B(u, \tau) = \int_0^T dt \int_G \left[\sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} a_{pq}(x, t) D^q u D^p \bar{\tau} - u \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} \right] dx$$

nell'ipotesi che sia:

$$(3.2) \quad a_{p,q} \in C_{x,t}^{|p|+\lambda,0}(\bar{\Omega}) \quad (|p|, |q| \leq m).$$

Supponiamo, anche, che la forma (3.1) sia parabolica, cioè che esista un numero reale $\delta > 0$ tale che:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ (-1)^m \sum_{|p|, |q|=m} a_{pq}(x, t) \xi^{p+q} \right\} > \delta |\xi|^{2m} \\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}, \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Consideriamo, inoltre, la forma bilineare:

$$F(f, \tau) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_0^T dt \int_G f_{\alpha} \cdot D^{\alpha} \bar{\tau} dx$$

ove $f = (f_{\alpha})_{|\alpha| \leq m}$ è un assegnato sistema di funzioni verificanti la condizione seguente:

$$(3.4) \quad \begin{cases} f_{\alpha} \in C^0(G \times]0, T]) & (|\alpha| \leq m) \\ M_{\lambda}(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{(x,t) \in \Omega} d_{2m}(x,t)^{m-|\alpha|+1-\lambda} |f_{\alpha}(x,t)| < +\infty & (\lambda \in]\frac{1}{2}, 1[) \end{cases}$$

dove:

$$d_{2m}(x, t) = \inf \{d(x), t^{1/2m}\} \quad \forall (x, t) \in \Omega$$

avendo denotato con $d(x)$ la distanza di $x \in G$ da ∂G .

Siano assegnate anche m funzioni:

$$(3.5) \quad \varphi_j \in C_{x',t}^{m-j+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega}') \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1^2)$$

ed una funzione:

$$(3.6) \quad \psi \in C^{m-1+\lambda}(\bar{G})$$

in modo che sia soddisfatta la condizione di compatibilità:

$$(3.7) \quad \frac{d^{j-1} \psi}{dv^{j-1}}(x') = \varphi_j(x', 0) \quad (j = 1, \dots, m; x' \in \partial G)$$

essendo v la normale interna nel punto $x' \in \partial G$. Lo scopo principale di questo lavoro è lo studio del problema:

$$(3.8) \quad \begin{cases} B(u, \tau) = F(f, \tau) & \forall \tau \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \frac{d^{j-1} u}{dv^{j-1}}(x', t) = \varphi_j(x', t) & (j = 1, \dots, m; (x', t) \in \Omega') \\ u(x, 0) = \psi(x) & (x \in G) \end{cases}$$

nelle ipotesi innanzi precisate.

È essenziale, a tale proposito, il lemma seguente.

(12) Le definizioni di $C_{x',t}^{m-j+\lambda, \lambda/2m}(\Omega')$ e della relativa norma $|\cdot|_{\bar{\Omega}'|_{m-j,0}}^{(\lambda, 2m)}$ si riconducono, nel modo consueto, alle analoghe definizioni relative al caso in cui l'insieme di definizione è del tipo $A \times [0, T]$ con A aperto di $\mathbf{R}^{n-1}$.

LEMMA 3.1. — Se $f = (f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ è un sistema di funzioni verificante l'ipotesi (3.4) allora $\tau \rightarrow F(f, \tau)$ è un funzionale lineare e continuo in ${}^0 W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$.

Inoltre se, per ε reale positivo ed abbastanza piccolo, si pone:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, t) \in \Omega: d_{2m}(x, t) \leq \varepsilon\}$$

risulta, $\forall \tau \in {}^0 W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$:

$$(3.9) \quad |F(f, \tau)| \leq c \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{(x, t) \in \Omega - \Omega_\varepsilon} |f_\alpha(x, t)| + \varepsilon^{\lambda - \frac{1}{2}} M_\lambda(f) \right\} \|\tau, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}}$$

con c costante positiva dipendente da m, λ, Ω .

DIMOSTRAZIONE. — Ovviamente, è sufficiente provare la (3.9). Posto:

$$\Omega_{\varepsilon, t} = \{(x, t) \in \Omega_\varepsilon: d_{2m}(x, t) = t^{1/2m}\}$$

$$\Omega_{\varepsilon, x} = \{(x, t) \in \Omega_\varepsilon: d_{2m}(x, t) = \hat{d}(x)\}$$

poichè:

$$\iint_{\Omega} f_\alpha D^\alpha \bar{\tau} dx dt = \iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} f_\alpha D^\alpha \bar{\tau} dx dt + \iint_{\Omega_\varepsilon} f_\alpha D^\alpha \bar{\tau} dx dt$$

e, d'altra parte, ovviamente, si ha:

$$\left| \iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} f_\alpha D^\alpha \bar{\tau} dx dt \right| \leq c \sup_{(x, t) \in \Omega - \Omega_\varepsilon} |f_\alpha(x, t)| \cdot \|D^\alpha \tau\|_{L^1(\Omega)} \quad (|\alpha| \leq m)$$

sarà sufficiente provare che, per $|\alpha| \leq m, \forall \tau \in \mathcal{D}(\Omega)$, risulta:

$$(3.10) \quad \begin{cases} \left| \iint_{\Omega_{\varepsilon, x}} f_\alpha \cdot D^\alpha \bar{\tau} dx dt \right| \leq c \varepsilon^{\lambda - \frac{1}{2}} M_\lambda(f) \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \tau\|_{L^1(\Omega)} \\ \left| \iint_{\Omega_{\varepsilon, t}} f_\alpha \cdot D^\alpha \bar{\tau} dx dt \right| \leq c \varepsilon^{\lambda - \frac{1}{2}} M_\lambda(f) \cdot \|\tau, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Per dimostrare la prima delle (3.10) si può seguire, con qualche variante, il procedimento adoperato da C. MIRANDA in un caso analogo ⁽¹³⁾.

Dimostriamo, dunque, la seconda delle (3.10).

⁽¹³⁾ Cfr. [9], dimostrazione della (10.2).

Se $|\alpha| > 0$, $\forall \tau \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha, facilmente:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega_{\varepsilon, t}} f_{\alpha} D^{\alpha} \bar{\tau} dx dt \right| &\leq c M_{\lambda}(f) \iint_{\Omega_{\varepsilon, t}} d_{2m}(x, t)^{|\alpha| - m + \lambda - 1} |D^{\alpha} \tau| dx dt \leq \\ &\leq c M_{\lambda}(f) \|D^{\alpha} \tau\|_{L^{\lambda}(\Omega)} \left(\int_0^{\varepsilon^{2m}} t^{(|\alpha| - m + \lambda - 1)/m} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c M_{\lambda}(f) \varepsilon^{\lambda - \frac{1}{2}} \|D^{\alpha} \tau\|_{L^{\lambda}(\Omega)} \end{aligned}$$

da cui consegue la seconda delle (3.10) (per $|\alpha| > 0$).

Se $|\alpha| = 0$, cominciamo col porre:

$$t_{2m}(x) = \inf(d(x)^{2m}, \varepsilon^{2m}) \quad \forall x \in G \quad (1^4)$$

$$f^*(x, t) = \begin{cases} f_{\alpha}(x, t) & \text{se } 0 < t < t_{2m}(x) \\ 0 & \text{se } t \leq 0, t \geq t_{2m}(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall x \in G \\ \forall x \in G \end{matrix} \quad (1^5)$$

$$\varrho = \frac{2m-1}{4m}$$

$$(3.11) \quad h(x, t) = I^{(\frac{1}{2} - \varrho)}(f^*) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} - \varrho)} \int_0^t f^*(x, \eta) (t - \eta)^{-\frac{1}{2} - \varrho} d\eta \quad ((x, t) \in G \times \mathbf{R}) \quad (1^6).$$

Proviamo, innanzitutto, che risulta:

$$(3.12) \quad |h(x, t)| \leq \begin{cases} c M_{\lambda}(f) t^{-\varrho + (\lambda - 1)/2m} & \text{se } 0 < t < t_{2m}(x) \\ c M_{\lambda}(f) t_{2m}(x)^{\beta} t^{-\varrho - \beta + (\lambda - 1)/2m} & \text{se } t \geq t_{2m}(x) \end{cases}$$

comunque si scelga il numero β tale che:

$$0 < \frac{m + \lambda - 1}{2m} - \varrho < \beta < \frac{m + \lambda - 1}{2m}.$$

(14) Osserviamo che:

$$((x, t) \in \Omega_{\varepsilon, t}) \Leftrightarrow (x \in G, 0 < t < t_{2m}(x)).$$

(15) Osserviamo che f^* è sommabile (come funzione di t) in ogni intorno di $t = 0$, dato che risulta:

$$|f^*(x, t)| \leq c M_{\lambda}(f) \cdot t^{(-m + \lambda - 1)/2m}.$$

(16) $I^{(\frac{1}{2} - \varrho)}(f^*)$ denota la primitiva di ordine frazionario $\frac{1}{2} - \varrho$ di f^* (la funzione $x^{-\frac{1}{2} - \varrho}$, che compare nell'integrale, si intende prolungata per $x \leq 0$ ponendola eguale a zero). Cfr. ad esempio, [7], vol. I, p. 113.

In effetti, se $0 < t < t_{2m}(x)$, da (3.4) si ha:

$$\begin{aligned} |h(x, t)| &\leq c M_\lambda(f) \int_0^t d_{2m}(x, \eta)^{\lambda-m-1} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}-q} d\eta \leq \\ &\leq c M_\lambda(f) \int_0^t \eta^{(\lambda-m-1)/2m} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}-q} d\eta \leq \\ &\leq c M_\lambda(f) t^{-q+(\lambda-1)/2m} \int_0^1 \sigma^{(\lambda-m-1)/2m} (1-\sigma)^{-\frac{1}{2}-q} d\sigma; \end{aligned}$$

se $t \geq t_{2m}(x)$, invece, si ha:

$$\begin{aligned} |h(x, t)| &= c \left| \int_0^{t_{2m}(x)} f_\alpha(x, \eta) (t-\eta)^{-\frac{1}{2}-q} d\eta \right| \leq \\ &\leq c M_\lambda(f) \int_0^{t_{2m}(x)} \eta^{(\lambda-m-1)/2m} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}-q} d\eta \leq \\ &\leq c M_\lambda(f) t_{2m}(x)^\beta \int_0^t \eta^{-\beta+(\lambda-m-1)/2m} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}-q} d\eta \leq \\ &\leq c M_\lambda(f) t_{2m}(x)^\beta \cdot t^{-q-\beta+(\lambda-1)/2m} \int_0^1 \sigma^{-\beta+(\lambda-m-1)/2m} (1-\sigma)^{-\frac{1}{2}-q} d\sigma. \end{aligned}$$

Dalla (3.12), così provata, consegue che:

$$(3.13) \quad \left(\int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x, t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}} M_\lambda(f).$$

Infatti, per la (3.12), si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x, t) dt &\leq c M_\lambda^2(f) \left\{ \int_0^{t_{2m}(x)} t^{-2q+(\lambda-1)/m} dt + t_{2m}(x)^{2\beta} \int_{t_{2m}(x)}^{+\infty} t^{-2q-2\beta+(\lambda-1)/m} dt \right\} \leq \\ &\leq c M_\lambda^2(f) \left\{ t_{2m}(x)^{-2q+(m+\lambda-1)/m} + t_{2m}(x)^{2\beta} t_{2m}(x)^{-2q-2\beta+(m+\lambda-1)/m} \right\} \leq \\ &\leq c M_\lambda^2(f) t_{2m}(x)^{-2q+(m+\lambda-1)/m} = c M_\lambda^2(f) t_{2m}(x)^{(2\lambda-1)/2m} \leq \\ &\leq c M_\lambda^2(f) \varepsilon^{2\lambda-1} \quad \forall x \in G \end{aligned}$$

da cui si deduce immediatamente la (3.13).

La funzione h verifica anche la proprietà che, qui di seguito, enunciamo. Posto:

$$(3.14) \quad D^{(\frac{1}{2}-\varrho)} h(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\varrho)} \frac{d}{dt} \int_0^t h(x, \eta) (t-\eta)^{-\frac{1}{2}+\varrho} d\eta \quad ((x, t) \in G \times \mathbf{R}) \quad (17)$$

risulta:

$$(3.15) \quad f^*(x, t) = D^{(\frac{1}{2}-\varrho)} h(x, t) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

In effetti, per $t > 0$, da (3.11) e (3.14) si ha:

$$\begin{aligned} D^{(\frac{1}{2}-\varrho)} h &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\varrho) \Gamma(\frac{1}{2}-\varrho)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}+\varrho} d\eta \int_0^\eta f^*(x, \sigma) (\eta-\sigma)^{-\frac{1}{2}-\varrho} d\sigma = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\varrho) \Gamma(\frac{1}{2}-\varrho)} \frac{d}{dt} \int_0^t f^*(x, \sigma) d\sigma \int_\sigma^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}+\varrho} (\eta-\sigma)^{-\frac{1}{2}-\varrho} d\eta; \end{aligned}$$

poichè:

$$\int_\sigma^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}+\varrho} (\eta-\sigma)^{-\frac{1}{2}-\varrho} d\eta = \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}+\varrho} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}-\varrho} d\theta = \Gamma(\frac{1}{2}+\varrho) \Gamma(\frac{1}{2}-\varrho)$$

si conclude che sussiste la (3.15).

Premesso tutto ciò, se $\tau \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $P\tau$ è un arbitrario prolungamento di τ tale che $P\tau \in \mathcal{D}(G \times \mathbf{R})$, tenendo presenti (3.13), (3.14), (3.15) e per proprietà della trasformata di FOURIER ⁽¹⁸⁾, si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_{\varepsilon, t}} f_\alpha \cdot \bar{\tau} dx dt \right| &= \left| \int_G dx \int_0^{t_2^m(x)} f^* \cdot \tau dx dt \right| = \left| \int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} f^* \cdot P\tau dt \right| = \left| \int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} D^{(\frac{1}{2}-\varrho)} h \cdot P\tau dt \right| \leq \\ &\leq c \int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{\frac{1}{2}-\varrho} |\mathcal{F}(h)| |\mathcal{F}(P\tau)| d\sigma \leq c \left(\int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(h)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{1-2\varrho} |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq c \left(\int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} |h|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{1-2\varrho} |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}} M_\lambda(f) \cdot \left(\int_G dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{1-2\varrho} |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

⁽¹⁷⁾ $D^{(\frac{1}{2}-\varrho)}(h)$ denota la derivata di ordine frazionario $\frac{1}{2} - \varrho$ di h (la funzione $x^{-\frac{1}{2}+\varrho}$ si intende prolungata per $x \leq 0$, ponendola eguale a zero). Cfr. loc. cit. nella nota precedente.

⁽¹⁸⁾ Cfr. nota ⁽⁶⁾.

Poichè, d'altra parte:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{1-2\varrho} |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma &= \int_{|\sigma| < 1} |\sigma|^{1-2\varrho} |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma + \int_{|\sigma| \geq 1} |\sigma|^{1-2\varrho} |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma| |\mathcal{F}(P\tau)|^2 d\sigma \end{aligned}$$

si conclude che:

$$\left| \iint_{\Omega_{\varepsilon, t}} f_{\alpha} \cdot \bar{\tau} dx dt \right| \leq c \varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}} M_{\lambda}(f) \cdot \|P\tau, G \times \mathbf{R}\|_{m, \frac{1}{2}}$$

per ogni $P\tau \in \mathcal{D}(G \times \mathbf{R})$ ed, in conseguenza, per ogni $P\tau \in {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(G \times \mathbf{R})$.

Consegue, immediatamente, la seconda delle (3.10) e, così, il lemma è dimostrato.

Dimostriamo, ora, il teorema seguente relativo al problema (3.8), nel caso omogeneo.

TEOREMA 3.2. — *Se $a_{p,q} \in C^0(\bar{\Omega})$ ($|p|, |q| \leq m$), se ∂G è infinitamente differenziabile e se sono verificate le ipotesi (3.3), (3.4), il problema (3.8) con $\varphi_j = 0$ ($j = 1, \dots, m$), $\psi = 0$ ammette un'unica soluzione*

$$u \in {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega) \cap H^{m, 0, \mu}(\Omega) \cap C_{x, t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega})$$

per la quale sussiste la formula di maggiorazione:

$$(3.16) \quad \|u, \bar{\Omega}\|_{m-1, 0}^{(\lambda, 2m)} + \|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} + [u, \Omega]_{m, 0}^{(\mu)} \leq c M_{\lambda}(f)$$

ove c è una costante dipendente dai massimi moduli dei coefficienti $a_{p,q}$ ($|p|, |q| \leq m$), dai moduli di continuità di $a_{p,q}$ ($|p|, |q| = m$), dalla costante di parabolicità δ e da Ω , mentre $\mu = n + 2m + 2\lambda - 2$.

DIMOSTRAZIONE. — In conseguenza del Lemma 3.1 e per un teorema di J. KADLEC⁽¹⁹⁾, il problema in considerazione ammette una unica soluzione $u \in {}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$ e per essa sussiste la maggiorazione:

$$\|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} \leq c \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{(x, t) \in \Omega - \Omega_{\varepsilon}} |f_{\alpha}(x, t)| + \varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}} M_{\lambda}(f) \right\}$$

da cui, ricordando la (1.1), si deduce:

$$(3.17) \quad \|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} \leq c \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{(x, t) \in \Omega - \Omega_{\varepsilon}} |f_{\alpha}(x, t)| + \varepsilon^{\lambda-\frac{1}{2}} M_{\lambda}(f) \right\}.$$

⁽¹⁹⁾ Cfr. [8], Teor. 4.10.

Poniamo:

$$\chi^{(e)}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, t) \in \bar{\Omega} - \Omega_e \\ 0 & \text{se } (x, t) \in \Omega_{e/2} \end{cases} \quad |\chi^{(e)}(x, t)| \leq 1 \text{ in } \bar{\Omega}$$

$$f_\alpha^{(e)} = \chi^{(e)} f_\alpha \quad (|\alpha| \leq m).$$

Consideriamo l'equazione:

$$(3.18) \quad B(u, \tau) = F(f^{(e)}, \tau)$$

nonchè l'equazione:

$$(3.19) \quad B_h(u, \tau) = F(f_h^{(e)}, \tau) \quad (h \in \mathbf{N})$$

ove B_h sono forme bilineari analoghe a B i cui coefficienti sono polinomi convergenti uniformemente verso gli omologhi coefficienti di B mentre $f_h^{(e)}$ è un sistema di funzioni di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$, nulle in un intorno della superficie laterale e della base inferiore del cilindro $\bar{\Omega}$, convergenti uniformemente in $\bar{\Omega}$ verso le omologhe componenti del sistema $f^{(e)}$. Si procede, quindi, come nella dimostrazione del nostro analogo teorema relativo al caso in cui le funzioni f_α ($|\alpha| \leq m$) possono diventare infinitamente grandi solo sulla superficie laterale di $\bar{\Omega}$ ⁽²⁰⁾.

In sostanza, se $u^{(e)}$, $u_h^{(e)}$ sono, rispettivamente, le soluzioni di classe ${}^0W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega)$ delle equazioni (3.18), (3.19), si prova, utilizzando (3.17), che:

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0} \|u - u^{(e)}, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \|u^{(e)} - u_h^{(e)}, G \times]0, T'[\|_{m, 0} &= 0 \quad \forall T' \in]0, T[\\ \|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} &\leq c M_\lambda(f). \end{aligned}$$

Da ciò e dal fatto che $u_h^{(e)}$ coincide quasi ovunque con una soluzione di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ del problema per la quale sussiste la maggiorazione:

$$\|u_h^{(e)}, \bar{\Omega}\|_{m-1, 0}^{(\lambda)} + \|u_h^{(e)}, \Omega\|_{m, 0}^{(\mu)} \leq c M_\lambda(f_h^{(e)})$$

consegue la tesi. Per i dettagli rinviamo alla dimostrazione citata.

Un risultato, analogo al precedente, relativo al problema non omogeneo si ottiene utilizzando il teorema precedente nonchè una funzione ausiliaria che verifica assegnate condizioni al contorno la cui esistenza è provata nel lemma seguente.

LEMMA 3.3 - *Nelle ipotesi (3.2), (3.3), (3.5), (3.6), (3.7), posto:*

$$\mathfrak{L} = \sum_{|p|, |q| \leq m} D^p (a_{p,q} D)^q + \frac{\partial}{\partial t}$$

⁽²⁰⁾ Cfr. [2], Lemmi 6.1, 6.2 e Teor. 6.3.

esiste una funzione

$$(3.20) \quad z \in C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2m,1}(\Omega) \cap {}_R W_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega) \cap H^{m,0,\mu}(\Omega)$$

verificante le condizioni al contorno:

$$(3.21) \quad \begin{cases} \frac{d^{j-1}z}{dv^{j-1}}(x', t) = \varphi_j(x', t) & (j = 1, \dots, m; (x', t) \in \Omega') \\ z(x, 0) = \psi(x) & (x \in \bar{G}) \end{cases}$$

nonchè le disuguaglianze:

$$(3.22) \quad \begin{cases} |z, \bar{\Omega}|_{m-1,0}^{(\lambda, 2m)} + \|z, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} + [z, \Omega]_{m,0}^{(\mu)} \leq c(|\Phi, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} + |\psi, \bar{G}|_{m-1}^{(\lambda)}) \\ |\mathfrak{L}(z)| \leq c d_{2,m}(x, t)^{-m-1+\lambda} (|\Phi, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} + |\psi, \bar{G}|_{m-1}^{(\lambda)}) \end{cases}$$

ove

$$|\Phi, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^m |\varphi_j, \partial G \times [0, T]|_{m-j,0}^{(\lambda, 2m)}$$

$\mu = n + 2m + 2\lambda - 2$, con c costante positiva dipendente da $\mathfrak{L}$, λ , Ω .

DIMOSTRAZIONE. — Prolunghiamo, innanzitutto, l'operatore $\mathfrak{L}$ in tutto lo strato $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ in modo che siano verificate per il prolungamento, che denoteremo ancora con $\mathfrak{L}$, le ipotesi del Lemma 2.1 ⁽²¹⁾. Prolunghiamo, inoltre, ψ in una funzione, che denoteremo con lo stesso simbolo, appartenente a $C^{m-1+\lambda}(\mathbf{R}^n)$, in modo che si abbia:

$$|\psi, \mathbf{R}^n|_{m-1}^{(\lambda)} \leq c |\psi, \bar{G}|_{m-1}^{(\lambda)} \quad (22).$$

Consideriamo la funzione w , fornita dal Lemma 2.1, relativa ai suddetti prolungamenti di $\mathfrak{L}$ e ψ .

Posto:

$$\varphi'_j(x', t) = \varphi_j(x', t) - \frac{d^{j-1}w}{dv^{j-1}}(x', t) \quad (j = 1, \dots, m; (x', t) \in \Omega')$$

da (3.7) consegue:

$$\varphi'_j(x', 0) = \varphi_j(x', 0) - \frac{d^{j-1}\psi}{dv^{j-1}}(x') = 0 \quad (j = 1, \dots, m; x' \in \partial G).$$

È possibile, allora, ricorrendo a rappresentazioni parametriche locali di ∂G ed

⁽²¹⁾ Cfr. [6], p. 81.

⁽²²⁾ Cfr. [11], Lemma 4.1.

applicando il Lemma 2.2, costruire una funzione:

$$v \in C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2m,1}(\Omega) \cap {}_R W_2^{m,\frac{1}{2}}(\Omega) \cap H^{m,0,\mu}(\Omega)$$

tale che:

$$\begin{cases} \frac{d^{j-1}v}{dt^{j-1}}(x', t) = \varphi_j(x', t) & (j = 1, \dots, m; (x', t) \in \Omega') \\ v(x, 0) = 0 & (x \in \bar{G}) \\ |\mathfrak{L}(v)| \leq c d_{2m}(x, t)^{-m-1+\lambda} |\Phi', \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} \\ \|v, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda, 2m)} + \|v, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} + [v, \Omega]_{m,0}^{(\mu)} \leq c |\Phi', \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} \end{cases}$$

ove $|\Phi', \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)}$ si ottiene formalmente da $|\Phi, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)}$ sostituendo φ_j con φ_j' ⁽²³⁾

La funzione $z = v + w$ verifica (3.20), (3.21), (3.22).

Possiamo, ora, stabilire il teorema seguente che è lo scopo principale di questo lavoro.

TEOREMA 3.4. — *Nelle ipotesi (3.2), ..., (3.7), il problema (3.8) ammette un'unica soluzione:*

$$u \in {}_R W_2^{m,\frac{1}{2}}(\Omega) \cap H^{m,0,\mu}(\Omega) \cap C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega})$$

per la quale sussiste la formula di maggiorazione:

$$(3.23) \quad \|u, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda, 2m)} + \|u, \Omega\|_{m, \frac{1}{2}} + [u, \Omega]_{m,0}^{(\mu)} \leq c (M_\lambda(f) + |\Phi, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} + |\psi, \bar{G}|_{m-1}^{(\lambda)})$$

ove:

$$|\Phi, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^m |\varphi_j, \partial G \times [0, T]|_{m-j,0}^{(\lambda, 2m)}$$

$\mu = n + 2m + 2\lambda - 2$ c è una costante positiva dipendente solo dai coefficienti dell'equazione e dall'insieme Ω .

DIMOSTRAZIONE. — La tesi si deduce dal Teorema 3.2 e dal Lemma 3.3 con un semplice ragionamento ⁽²⁴⁾ del quale, comunque, per comodità del lettore, daremo un breve cenno.

Se z ed $\mathfrak{L}$ sono, rispettivamente, la funzione e l'operatore cui si fa riferimento nel Lemma 3.3, posto:

$$g = \begin{cases} f_\alpha & \text{se } \alpha \neq 0 \\ f_0 - \mathfrak{L}(z) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \quad g = (g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$$

⁽²³⁾ Cfr. [9], dimostrazione del Teor. IV

⁽²⁴⁾ Cfr. [3], dimostrazione del Teor. 3.3.

da (3.22) consegue:

$$(3.24) \quad M_\lambda(g) \leq M_\lambda(f) + c(|\Phi, \bar{\Omega}'|_{m-1,0}^{(\lambda)} + |\psi, \bar{G}|_{m-1}^{(\lambda)}).$$

Pertanto, esiste $u_0 \in {}_sW_2^{m, \frac{1}{2}}(\Omega) \cap H^{m,0,\mu}(\Omega) \cap C_{x,t}^{m-1+\lambda, \lambda/2m}(\bar{\Omega})$ soluzione del problema:

$$\begin{cases} B(u, \tau) = F(g, \tau) & \forall \tau \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \frac{d^{j-1}u}{dv^{j-1}}(x', t) = 0 & (j = 1, \dots, m; (x', t) \in \Omega') \\ u(x, 0) = 0 & (x \in \bar{G}). \end{cases}$$

Allora la funzione $u = u_0 + z$ è soluzione del problema (3.8) e verifica (3.23) in conseguenza della (3.24), della disuguaglianza (3.16) (con f sostituito da g) verificata da u_0 e della disuguaglianza (3.22) verificata da z .

L'unicità consegue dal Teorema 3.2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON, *Maximum theorem for solutions of higher order elliptic equations*, Bull. Am. Math. Soc., **66** (1960), pp. 77-80.
- [2] G. ARNESE, *Teorema del massimo modulo per il problema omogeneo di Dirichlet per una equazione parabolica di ordine $2m$ in n variabili*, Ricerche di Matematica, **17** (1968), pp. 21-63.
- [3] G. ARNESE, *Teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet per un'equazione parabolica di ordine $2m$ in n variabili*, Ed. Liguori, Napoli, 1968.
- [4] G. ARNESE, *Su alcune proprietà dell'integrale di Poisson relativo ad un'equazione parabolica di ordine $2m$, a coefficienti non costanti*, Annali Mat. pura appl., questo stesso volume.
- [5] G. ARNESE, *Maggiorazioni in L^p dei potenziali relativi all'equazioni del calore*, Ricerche di Matematica, **13** (1964), pp. 147-191.
- [6] A. FRIEDMAN, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall, Englewood (N.J.), 1964.
- [7] I. M. GUELFAND, G. E. CHILOV, *Les distributions*, Dunod, Paris, 1962.
- [8] J. KADLEC, *Soluzione del primo problema ai limiti per una generalizzazione dell'equazione del calore in classi di funzioni con derivate frazionarie rispetto al tempo*, Cecoslovak Mat. J., **16** (1966), pp. 91-113.
- [9] C. MIRANDA, *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili*, Annali Mat. pura appl., s. IV, **46** (1958), pp. 265-312.
- [10] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [11] O. A. SOLONNIKOV, *Problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari parabolici di tipo generale*, Trudy Mat. Inst. V. A. Steklov, **83** (1965).