Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierter Ordnung, insbesondere über den Aronholdschen Satz.

von E. BODEWIG (Köln a. Rh., Germania).

EDUARDO STUDY IN MEMORIAM

In den Berliner Monatsberichten von 1864 gab Aronhold über die Doppeltangenten einer ebenen C_4 zwei berühmte Sätze bekannt, die seit dieser Zeit seinen Namen tragen. Insbesondere enthält der zweite Satz — dass (mit einer gewissen Einschränkung) sieben beliebige Geraden immer als ein System von 7 Doppeltangenten einer C_4 aufgefasst werden können, aus denen man die übrigen 21 Doppeltangenten rational finden kann — eine der schönsten Aufgaben der ganzen Geometrie. Die Aronholdschen Beweise dieser beiden Sätze gingen unverändert in alle späteren Lehrbücher über. Erst Study hatte starke Bedenken gegen den zweiten dieser Sätze. Worauf sich seine Vermutung stützte, ist mir nicht bekannt. Jedenfalls veranlasste er mich noch kurz vor seinem Tode, mich mit dem Problem zu beschäftigen. Zu meinem eigenen Erstaunen fand ich seine Vermutung bestätigt. Es ist mir daher eine Pflicht der Dankbarkeit, diese Arbeit dem Andenken meines hochverehrten Lehrers zu widmen.

Die Darstellung benutzt durchgängig die symbolische Methode, die ja auch den Arbeiten Studys und Aronholds am nächsten kommt. Gleichzeitig erhalten dadurch die Resultate eine gefälligere und symmetrische Form. Die Theorie der Doppeltangenten wurde nochmal von Anfang an behandelt, jedoch nur dort, wo sich Abkürzungen gegenüber der üblichen Darstellung ergaben. Zugrunde gelegt wurde der Gedankengang, wie ihn Weber in seinem Lehrbuch entwickelt, da dieser bei dem Problem selbst bleibt und nicht mit Dingen, wie Flächen dritter Ordnung, arbeitet, die dem Problem im Anfange fremd sind. Doch konnte die Webersche Darstellung in zwei Punkten wesentlich abgekürzt und durch das Ausscheiden von fremden Elementen natürlicher gestaltet werden, nämlich an den Stellen (11)-(13) des Textes, wo es sich um die Gradbestimmung der die Berührungspunkte ausschneidenden Kurve handelt, und bei den syzygetischen Tripeln. Bei dem Aronholdschen Satz selbst finden

sich in (23) zwei Ausdrücke für die λ sowie die Beziehung (24), die bei Weber fehlen und die doch das Ganze so sehr vereinfachen. Dadurch folgt (25a) und (26a) auf einfache Weise, während bei Aronhold wieder umständliche Rechnungen nötig sind. Aehnlich (33) und (33a). Gleichung (42) und (43) führen dann das Problem zu Ende. Es ergibt sich, dass *für den zweiten Satz die Aronholdsche Bedingung allein nicht ausreicht, sondern dass noch eine weitere Bedingung hinzutreten muss.*

Die Berechnung der Zahl der Doppeltangenten.

Die Kurve sei $(ax)^4 = 0$. Setze ich $\xi + \lambda\eta$ anstelle von x , so ist

$$(a, \xi + \lambda\eta)^4 = (a\xi)^4 + 4\lambda(a\xi)^3(a\eta) + 6\lambda^2(a\xi)^2(a\eta)^2 + 4\lambda^3(a\xi)(a\eta)^3 + \lambda^4(a\eta)^4.$$

Ich nehme nun an, die beiden ersten Glieder in obigem Ausdruck verschwänden, d. h. es sei

$$(1) \quad (a\xi)^4 = 0: \text{ d. h. } \xi \text{ sei ein Kurvenpunkt}$$

$$(2) \quad (a\xi)^3(a\eta) = 0: \text{ d. h. } \eta \text{ liege auf der Tangente in } \xi.$$

Es bleibt demnach für die weiteren Schnittpunkte der Tangente mit der Kurve die Gleichung übrig:

$$6(a\xi)^2(a\eta)^2 + 4\lambda(a\xi)(a\eta)^3 + \lambda^2(a\eta)^4 = 0.$$

Soll die Tangente Doppeltangente sein, so muss die Diskriminante

$$(3) \quad \Delta(\xi, \eta) = 3(a\xi)^2(a\eta)^2(b\eta)^4 - 2(a\xi)(a\eta)^3(b\xi)(b\eta)^3 = 0.$$

(Die Gradzahlen 2 und 6 in ξ und η sind darübersetzt worden). Diese Gleichung soll umgewandelt werden in eine Gleichung *in* ξ *allein*.

Für η gilt nun Gleichung (2); man kann also setzen

$$(\eta u) \equiv (a\xi)^3(aku) \text{ identisch in } u,$$

wobei k unbestimmt ist. Geometrisch heisst dies: Man wählt denjenigen Punkt η aus, in welchem die Tangente in ξ von der Geraden $(kx) = 0$ geschnitten wird; k ist wie gesagt willkürlich, unterliegt aber doch der Beschränkung, dass

$$(4) \quad (k\xi) \neq 0,$$

d. h. k darf nicht durch unseren Kurvenpunkt ξ gehen, da sonst ξ mit η zusammenfiel.

Trägt man obigen Ausdruck für η in die Diskriminante ein, so erhält man

$$(5) \quad \Delta(\xi, ak(a\xi)^3) \equiv D(\xi, \overset{20}{k}, \overset{6}{k}),$$

d. h. man erhält eine Funktion, die in ξ vom Grade 20 und in k vom Grade 6 ist. Das Verschwinden von D ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ξ der Berührungspunkt einer Doppeltangente ist. Ausserdem muss aber noch $(k\xi) \neq 0$. Verstehe ich nun unter ξ einen der vier Schnittpunkte von k mit der Kurve, so folgt $\xi = \eta$, da ja η der Schnittpunkt von k mit der Tangente in ξ ist. Wegen $\xi = \eta$ wird dann $\Delta(\xi, \xi) = 0$, da ξ auf der Kurve liegt. Demnach ist auch für die umgeformte Diskriminante $D(\xi, k) = 0$, d. h. die Kurve 20. Grades $D(x, k) = 0$ läuft für alle k durch die vier Schnittpunkte von k mit der Kurve. Diese vier Schnittpunkte sind unserem Problem fremd, sie müssen daher eliminiert werden.

Man nimmt dazu statt η einen anderen Punkt ζ der Tangente, den man etwa durch die Gerade m mit der Gleichung $(mx) = 0$ auf der Tangente $(a\xi)^3(ax) = 0$ ausschneidet. Dann ist also $(\zeta u) = (a\xi)^3(amu)$ identisch in u . Man sucht den Wert, den jetzt die Diskriminante $\Delta(\xi, \zeta)$ annimmt. Da ζ auf der Tangente liegt, so gibt es gewisse Zahlen λ, μ , so dass $\zeta = \lambda\xi + \mu\eta$. Wegen $(a\xi)^4 = (a\xi)^3(a\eta) = 0$ gehen jetzt die in der Diskriminante Δ auftretenden Ausdrücke in folgende Werte über:

$$\begin{aligned}(a\xi)^3(a\zeta)^2 &= \mu^2(a\xi)^2(a\eta)^2 \\ (b\zeta)^4 &= 6\lambda^2\mu^2(b\xi)^2(b\eta)^2 + 4\lambda\mu^3(b\xi)(b\eta)^3 + \mu^4(b\eta)^4 \\ (a\xi)(a\zeta)^3 &= 3\lambda\mu^2(a\xi)^2(a\eta)^2 + \mu^3(a\xi)(a\eta)^3.\end{aligned}$$

Danach wird

$$(6) \quad \Delta(\xi, \zeta) = \mu^6 \cdot \Delta(\xi, \eta),$$

natürlich nur, wenn ξ ein Kurvenpunkt und η und ζ Punkte der Tangente in ξ sind. Für diese Werte von ξ und η ist demnach $\Delta(\xi, \eta)$ eine Kovariante vom Gewichte 6 gegenüber Transformationen der Form $\xi' = \xi, \eta' = \lambda\xi + \mu\eta$. Führt man statt η und ζ die Grössen k und m ein, so geht jedesmal die Diskriminante Δ in die zugehörige D über, so dass auch

$$(7) \quad D(\xi, m) = \mu^6 \cdot D(\xi, k).$$

Man darf vermuten, dass, wenn man durch die sechste Potenz eines Linearausdruckes in m dividiert, man einen von m freien Ausdruck erhält. Es handelt sich zunächst darum, die Grösse μ aus k und m allein zu bestimmen. Nun ist

$$\begin{aligned}(m\zeta) &= \lambda(m\xi) + \mu(m\eta) = 0 \\ (k\zeta) &= (a\xi)^3(amk) = \lambda(k\xi), \quad \text{da} \quad (k\eta) = 0 \\ (m\eta) &= (a\xi)^3(akm) = -\lambda(k\xi).\end{aligned}$$

Jetzt ist also

$$\mu(m\eta) = -\lambda(m\xi) = -\lambda\mu(k\xi), \text{ d. h.} \\ \mu = (m\xi):(k\xi).$$

Demnach ist

$$(8) \quad D(\xi, m):(m\xi)^6 = D(\xi, k):(k\xi)^6,$$

d. h. der Ausdruck

$$(9) \quad D(\xi, m):(m\xi)^6 \text{ ist von } m \text{ unabhängig.}$$

Da die Beziehung (8) für alle Kurvenpunkte ξ gilt, so enthält die Kurve 26. Grades

$$(10) \quad (kx)^6 \cdot D(x, m) - (mx)^6 \cdot D(x, k) = 0$$

die C_4 als Teilkurve. Es ist demnach

$$(11) \quad (kx)^6 \cdot D(x, m) - (mx)^6 \cdot D(x, k) = (ax)^4 \cdot f(x, k, m).$$

Wir wollen den Bau der Funktion f näher bestimmen. In (11) steht links eine Zerlegung nach dem Modul $(kx)^6, (mx)^6$. Angenommen, f lasse bei der Zerlegung einen Rest R , so müsste $R \cdot (ax)^4 \equiv 0 \text{ modd } (kx)^6, (mx)^6$. Man zerlege nun $(ax)^4 \text{ modd } (kx), (mx)$. Sind $(kx) = 0, (mx) = 0$ so gewählt, dass sie sich nicht auf der C_4 schneiden, so bleibt auch bei dieser Zerlegung ein Rest r , der mit R multipliziert $\equiv 0 \text{ modd } (kx)^6, (mx)^6$ wäre. Demnach ist $R = 0$. Ich setze daher

$$f(x, k, m) = (kx)^6 \cdot f_1(x, k, m) - (mx)^6 \cdot f_2(x, k, m).$$

f_1 hat nun in k den Grad Null, da ja f in k den Grad 6 hat; ähnlich f_2 . Wir schreiben daher besser

$$(12) \quad f(x, k, m) = (kx)^6 \cdot f_1(x, m) - (mx)^6 \cdot f_2(x, k).$$

Setzen wir dies in (11) ein, so erhalten wir

$$(kx)^6 [D(x, m) - (ax)^4 \cdot f_1(x, m)] = (mx)^6 [D(x, k) - (ax)^4 \cdot f_2(x, k)].$$

Es ist demnach die Klammer links durch $(mx)^6$ teilbar, diejenige rechts durch $(kx)^6$. Die Quotienten können aber nicht mehr von k bzw. m abhängen, da ja die Klammern in m bzw. k jedesmal nur den Grad 6 haben: Also ist

$$(13) \quad \begin{aligned} D(x, m) - (ax)^4 \cdot f_1(x, m) &= (mx)^6 \cdot F(x) \\ D(x, k) - (ax)^4 \cdot f_2(x, k) &= (kx)^6 \cdot F(x). \end{aligned}$$

Diese ganze Funktion $F(x)$, die von keinem Parameter mehr abhängt, verschwindet nun ebenfalls für alle Berührungspunkte der Doppeltangenten,

wie sich ja aus jeder der beiden Gleichungen (13) ergibt. Bringe ich sie also mit der C_4 zum Schnitt, so erhalte ich die Höchstzahl der Berührungspunkte der Doppeltangenten, nämlich 56. Demnach ist die Höchstzahl der Doppeltangenten selbst gleich 28. Da es andererseits Kurven gibt, wie die Kleinsche Kurve, welche wirklich 28 Doppeltangenten haben, so hat *jede* C_4 28 *Doppeltangenten*.

Die Steinerschen Komplexe.

Sei t_1 eine Doppeltangente (kurz: DT). Dann lässt sich zerlegen:

$$(ax)^4 = (t_1x)(Ax)^3 - (Bx)^4.$$

Da aber die C_4 , mit t_1 zum Schnitt gebracht, zwei Doppelpunkte ergibt, so muss $(Bx)^4$ zerfallen in ein Quadrat:

$$(ax)^4 = (t_1x)(Ax)^3 - [(Bx)^2]^2.$$

Setzt man jedoch

$$\begin{aligned} (Ax)^3 + 2(\lambda x)(Bx)^2 + (\lambda x)^2(t_1x) &= (A_\lambda x)^3 \\ (Bx)^2 + (\lambda x)(t_1x) &= (B_\lambda x)^2, \end{aligned}$$

wo (λx) eine beliebige Linearform ist, so gilt auch jetzt noch die Gleichung:

$$(ax)^4 = (t_1x)(A_\lambda x)^3 - [(B_\lambda x)^2]^2.$$

u_1 sei eine zweite DT . Ihre Berührungspunkte seien p und q . (λx) soll jetzt so gewählt werden, dass $(B_\lambda x)^2 = 0$ durch p und q läuft, so dass demnach

$$(A_\lambda p)^3 = (A_\lambda q)^3 = (B_\lambda p)^2 = (B_\lambda q)^2 = 0.$$

Bilde ich jetzt die Tangente in p :

$$\begin{aligned} (ap)^3(ax) &= 3(t_1p)(A_\lambda p)^2(A_\lambda x) + (t_1x)(A_\lambda p)^3 - \\ &\quad - 4(B_\lambda p)^2 \cdot (B_\lambda p)(B_\lambda x) = 3(t_1p)(A_\lambda p)^2(A_\lambda x) = 0, \end{aligned}$$

so sieht man, dass diese Tangente u_1 auch Tangente von $(A_\lambda x)^3 = 0$ ist, und zwar in p und q , dass sie also DT ist. $(A_\lambda x)^3$ zerfällt daher in $(u_1x)(Cx)^2$. (Dabei muss $(t_1p) \neq 0$, da sonst C_4 einen Doppelpunkt hätte). Wir haben also jetzt:

$$(ax)^4 = (t_1x)(u_1x)(Cx)^2 - [(Bx)^2]^2.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} (Bx)^2 + \mu(t_1x)(u_1x) &= (B_\mu x)^2 \\ (Cx)^2 + 2\mu(Bx)^2 + \mu^2(t_1x)(u_1x) &= (C_\mu x)^2, \end{aligned}$$

so ist auch dann noch

$$(ax)^4 = (t_1x)(u_1x)(C_\mu x)^2 - [(B_\mu x)^2]^2.$$

Bestimmen wir μ so, dass $(C_\mu x)^2$ zerfällt, so erhalten wir eine Gleichung vom Grade 5 in μ . Danach haben wir die Zerlegungen für $(C_\mu x)^2$:

$$(t_2 x)(u_2 x); (t_3 x)(u_3 x); \dots; (t_6 x)(u_6 x).$$

Also ist auch

$$(14) \quad (ax)^4 = (t_1 x)(u_1 x)(t_k x)(u_k x) - [(B_k x)^2]^2, \quad k=2, \dots, 6.$$

Daraus ergibt sich auf die bei Weber-Fricke beschriebene Weise schliesslich die Darstellung

$$(15) \quad (ax)^4 = 2(t_2 x)(u_2 x)(t_3 x)(u_3 x) + 2(t_3 x)(u_3 x)(t_1 x)(u_1 x) + \\ + 2(t_1 x)(u_1 x)(t_2 x)(u_2 x) - (t_1 x)^2(u_1 x)^2 - (t_2 x)^2(u_2 x)^2 - \\ - (t_3 x)^2(u_3 x)^2.$$

Schneidet man die C_4 mit t_k oder u_k , so folgt aus (14), dass man jedesmal zwei Doppelpunkte erhält, d. h. auch die t_k und u_k sind DT . Auf jedem $(B_k x)^2 = 0$ liegen demnach die 8 Berührungspunkte von 4 DT : t_1, u_1, t_k, u_k . Ein solches System von 6 DT -Paaren heisst ein Steinerscher Komplex. In Verbindung mit (15) folgt in bekannter Weise, dass die Berührungspunkte je zweier Paare eines Steinerschen Komplexes auf einem Kegelschnitt liegen.

Syzygetische Tripel.

Daraus ergibt sich auf bekannte Weise der Begriff des syzygetischen und azygetischen Tripels. Ein syzygetisches Tripel liegt immer vor, wenn aus einem Steinerschen Komplex ein Paar und noch eine DT herausgegriffen wird. Es fragt sich, ob dies die einzige Art dieser Tripel ist, oder ob auch ein Tripel, das drei verschiedenen Paaren eines Steinerschen Komplexes angehört, syzygetisch sein kann. Wir wählen dazu das Tripel $(t_1 x), (t_2 x), (t_3 x)$. Aus der Darstellung

$$(ax)^4 = 4(t_1 x)(u_1 x)(t_2 x)(u_2 x) - [(t_1 x)(u_1 x) + (t_2 x)(u_2 x) - (t_3 x)(u_3 x)]^2$$

ergibt sich, dass die Berührungspunkte von t_1, t_2, u_1 auf dem Kegelschnitt

$$(t_1 x)(u_1 x) + (t_2 x)(u_2 x) - (t_3 x)(u_3 x) = 0,$$

die Berührungspunkte von t_1, t_2 allein also auf dem Büschel

$$(t_1 x)(u_1 x) + (t_2 x)(u_2 x) - (t_3 x)(u_3 x) + \lambda(t_1 x)(t_2 x) = 0,$$

wo λ ein Parameter ist, liegen. Aehnlich liegen die Berührungspunkte von t_2, t_3 auf

$$(t_2 x)(u_2 x) + (t_3 x)(u_3 x) - (t_1 x)(u_1 x) + \mu(t_2 x)(t_3 x) = 0.$$

Da aber beide Büschel kein Element gemeinsam haben, liegen die Berührungspunkte von t_1, t_2, t_3 nicht auf einem Kegelschnitt. Das Tripel ist also azygetisch.

Daraus folgt, wiederum auf bekannte Weise, die Existenz der Aronhold'schen Systeme.

Wir kommen dann zu unserem Hauptteil: dem Aronholdschen Satz.

Der Aronholdsche Satz.

Es sei

$$(16) \quad t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$$

ein beliebiges Aronholdsches System. Da jedes aus ihm bildbare Tripel azygetisch ist, so laufen keine drei dieser Tangenten durch einen Punkt, d. h. *jede aus diesen Grössen gebildete Determinante ist von Null verschieden.*

Wir nehmen aus (16) der Reihe nach die $DT\ t_1$ bzw. t_2 bzw. t_3 heraus und bilden für die übrigen DT jedesmal den zugehörigen Steinerschen Komplex, in dem sie enthalten sind. Nach bekannten Resultaten bekommen wir so, wenn wir statt t_i nur i , statt u_i nur i' setzen, die Komplexe:

$$(17) \quad \begin{array}{cccccccc} 2, 3' & 3, 2' & 4, u_{41} & 5, u_{51} & 6, u_{61} & 7, u_{71} \\ 3, 1' & 1, 3' & 4, u_{42} & 5, u_{52} & 6, u_{62} & 7, u_{72} \\ 1, 2' & 2, 1' & 4, u_{43} & 5, u_{53} & 6, u_{63} & 7, u_{73} \end{array}$$

Dabei bedeutet z. B. u_{52} die in dem durch die Heraushebung von 2 entstehenden Komplex mit 5 gepaarte DT . Aus (17) folgt noch als weiterer Komplex:

$$(18) \quad 1, 1' \quad 2, 2' \quad 3, 3' \quad \dots,$$

der mit jedem Komplex aus (17) ein syzygetisches Paar bildet und demnach keine der vier $DT\ 4, 5, 6, 7$ enthält.

Unser Ziel ist, die $DT\ 1', 2', 3'$ als Funktionen der 1, 2, 3 anzugeben.

Für unsere C_4 haben wir die Darstellungen:

$$(19) \quad \begin{aligned} (ax)^4 &= 4(2x)(2'x)(3x)(3'x) - [(f_1x)^2]^2 \\ &= 4(3x)(3'x)(1x)(1'x) - [(f_2x)^2]^2 \\ &= 4(1x)(1'x)(2x)(2'x) - [(f_3x)^2]^2 \\ &= 4(2x)(3'x)(4x)(u_{41}x) - [(kx)^2]^2, \end{aligned}$$

denn auch letzteres Quadrupel ist syzygetisch. Dabei bedeuten:

$$(20) \quad \begin{aligned} (f_1 x)^2 &= -(1x)(1'x) + (2x)(2'x) + (3x)(3'x) \\ (f_4 x)^2 &= + (1x)(1'x) - (2x)(2'x) + (3x)(3'x) \\ (f_3 x)^2 &= + (1x)(1'x) + (2x)(2'x) - (3x)(3'x). \end{aligned}$$

Aus der ersten und letzten Darstellung in (19) folgt:

$$4(2x)(3'x)[(3x)(2'x) - (4x)(u_{41}x)] = [(f_1 x)^2]^2 - [(kx)^2]^2,$$

d. h., da $(2x)(3'x)$ nur in einem der beiden Faktoren der rechten Seite enthalten ist,

$$\begin{aligned} (f_1 x)^2 - (kx)^2 &= 2\lambda(2x)(3'x) \\ \lambda[(f_1 x)^2 + (kx)^2] &= 2[(3x)(2'x) - (4x)(u_{41}x)]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lambda(f_1 x)^2 = \lambda^2(2x)(3'x) + (3x)(2'x) - (4x)(u_{41}x).$$

Setzen wir für $(f_1 x)^2$ seinen Wert aus (20) und fügen zu λ den Index 1 hinzu (da wir später zyklisch weiter gehen), so ist

$$(21) \quad \begin{aligned} (4x)(u_{41}x) &= (3x)(2'x) - \lambda_1[-(1x)(1'x) + (2x)(2'x) + (3x)(3'x)] + \lambda_1^2(2x)(3'x) \\ (4x)(u_{42}x) &= (1x)(3'x) - \lambda_2[-(2x)(2'x) + (3x)(3'x) + (1x)(1'x)] + \lambda_2^2(3x)(1'x) \\ (4x)(u_{43}x) &= (2x)(1'x) - \lambda_3[-(3x)(3'x) + (1x)(1'x) + (2x)(2'x)] + \lambda_3^2(1x)(2'x). \end{aligned}$$

Setzen wir in den beiden letzten Gleichungen $x=41$, multiplizieren sie mit λ_3 bzw. λ_2 und addieren, so erhalten wir, da 1, 1', 4 azygetisch sind, ihre Determinante also nicht verschwindet:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \lambda_3 &= -(124):(134) \\ \lambda_3 \lambda_1 &= -(234):(214) \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -(314):(324), \end{aligned}$$

Durch Produktbildung folgt $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 = 1$, also $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \pm 1$. Also ist

$$(22) \quad \lambda_1 = \mp (134):(124), \quad \lambda_2 = \mp (214):(234), \quad \lambda_3 = \mp (324):(314).$$

Dabei gelten gleichzeitig die oberen oder unteren Vorzeichen, worüber vorläufig noch Unklarheit herrscht.

Setzen wir in den beiden letzten Gleichungen (21) nunmehr $x=41'$, so folgt nach Multiplikation mit λ_2 und λ_3 und Division durch $(141')$:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \lambda_3 &= -(1'3'4):(1'2'4) \\ \lambda_3 \lambda_1 &= -(2'1'4):(2'3'4) \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -(3'2'4):(3'1'4) \end{aligned}$$

und wieder $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \pm 1$, also

$$(22a) \quad \lambda_1 = \mp (1'2'4):(1'3'4), \quad \lambda_2 = \mp (2'3'4):(2'1'4), \quad \lambda_3 = \mp (3'1'4):(3'2'4).$$

Dabei gelten in (22) und (22a) *gleichzeitig* die Minuszeichen oder Pluszeichen. Setze ich, um die Vorzeichen der λ zu bestimmen, in (21₂) wieder $x = 41'$ und ersetze λ_2 durch seinen Wert aus (22), so erhalte ich

$$\begin{aligned} - (214)(241')(2'41') + (341')(3'41')(214) &= \mp (141')(3'41')(234) \\ (3'41')[(341')(214) \pm (141')(234)] &= (214)(241')(2'41'). \end{aligned}$$

Nimmt man in der Klammer das *Minuszeichen*, so ergibt sich die Klammer als $(241')(314)$, d. h. es ist

$$(3'41')(241')(314) = (214)(241')(2'41').$$

Da aber nach (22) und (22a) $(1'2'4):(1'3'4) = (134):(124)$, so ist auch die vorhergehende Gleichung richtig, also auch das angenommene Minuszeichen. Es gelten demnach in (22) und (22a) die unteren Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (413):(412) = (41'2'):(41'3') \\ (23) \quad \lambda_2 &= (421):(423) = (42'3'):(42'1'), & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= -1 \\ \lambda_3 &= (432):(431) = (43'1'):(43'2'). \end{aligned}$$

Vermöge der hieraus bildbaren Gleichungen $(413)(41'3') - (412)(41'2') = 0$ usw. folgt

$$(24) \quad (412)(41'2') = (423)(42'3') = (431)(43'1') = k. -$$

Bei Verwendung der zwischen vier Geraden der Ebene bestehenden Identität (oder, was dasselbe ist, bei Verwendung von Dreieckskoordinaten) erhält man nun die beiden Gleichungen:

$$(25) \quad (4x) = \frac{(423)}{(123)}(1x) + \frac{(431)}{(231)}(2x) + \frac{(412)}{(312)}(3x)$$

$$(26) \quad (4x) = \frac{(42'3')}{(1'2'3')}(1'x) + \frac{(43'1')}{(2'3'1')}(2'x) + \frac{(41'2')}{(3'1'2')}(3'x).$$

Vermöge (24) gehen aber diese Darstellungen über in:

$$\begin{aligned} (25a) \quad v \cdot (4x) &= \frac{(1'2'3')}{(42'3')}(1x) + \frac{(2'3'1')}{(43'1')}(2x) + \frac{(3'1'2')}{(41'2')}(3x) \\ &= v_1'(1x) + v_2'(2x) + v_3'(3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (26a) \quad v \cdot (4x) &= \frac{(123)}{(423)}(1'x) + \frac{(231)}{(431)}(2'x) + \frac{(312)}{(412)}(3'x) \\ &= v_1(1'x) + v_2(2'x) + v_3(3'x), \end{aligned}$$

wo

$$(27) \quad k \cdot v = (123)(1'2'3').$$

Aus (23) schliessen wir ferner, weil $(421) - \lambda_2(423) = 0$ usw.:

$$(28) \quad \begin{array}{llll} (Ax) \equiv (1x) - \lambda_2(3x) = 0, & (2x) = 0, & (4x) = 0 & \text{laufen durch einen Punkt} \\ (Bx) \equiv (2x) - \lambda_3(1x) = 0, & (3x) = 0, & (4x) = 0 & \text{» » » »} \\ (Cx) \equiv (3x) - \lambda_1(2x) = 0, & (1x) = 0, & (4x) = 0 & \text{» » » »} \end{array}$$

sowie

$$(29) \quad \begin{array}{llll} (A'x) \equiv (1'x) - \lambda_3(2'x) = 0, & (3'x) = 0, & (4x) = 0 & \text{» » » »} \\ (B'x) \equiv (2'x) - \lambda_1(3'x) = 0, & (1'x) = 0, & (4x) = 0 & \text{» » » »} \\ (C'x) \equiv (3'x) - \lambda_2(1'x) = 0, & (2'x) = 0, & (4x) = 0 & \text{» » » »} \end{array}$$

Dabei ist ABC bzw. $A'B'C'$ das Diagonaldreieck des Vierseits 1234 bzw. 1'2'3'4. Aus (29) folgt, dass es Zahlen μ_1, ρ_1 gibt, für die

$$(29a) \quad (Ax) \equiv (1x) - \lambda_2(3x) = \mu_1(2x) + \rho_1(4x).$$

Setzt man $x = 34$ bzw. 32 , so erhält man hieraus und aus den entsprechenden Beziehungen:

$$(30) \quad \begin{array}{ll} \mu_1 = \lambda_3^{-1} \\ \mu_2 = \lambda_1^{-1} & \rho_i = v_i. \\ \mu_3 = \lambda_2^{-1} \end{array}$$

Ähnlich ist

$$(A'x) \equiv (1'x) - \lambda_3(2'x) = \mu_1'(3'x) + \rho_1'(4x)$$

usw. wo

$$(30a) \quad \begin{array}{ll} \mu_1' = \mu_3 = \lambda_2^{-1} \\ \mu_2' = \mu_1 = \lambda_3^{-1} & \rho_i' = v_i'. \\ \mu_3' = \mu_2 = \lambda_1^{-1} \end{array}$$

Ferner ist noch wegen (25a), (26a), (27) und (24)

$$(31) \quad v_1 v_1' = v_2 v_2' = v_3 v_3' = v. -$$

Dividiere ich jetzt die Gleichungen (21) der Reihe nach durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und addiere, so erhalte ich

$$\begin{aligned} (4x)[(u_{41}x):\lambda_1 + (u_{42}x):\lambda_2 + (u_{43}x):\lambda_3] &= (1'x)[(2x):\lambda_3 + \lambda_2(3x) - (1x)] + \\ &+ (2'x)[(3x):\lambda_1 + \lambda_3(1x) - (2x)] + (3'x)[(1x):\lambda_2 + \lambda_1(2x) - (3x)]. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach (29a) und (30):

$$(2x):\lambda_3 + \lambda_2(3x) = (1x) - v_1(4x).$$

Setzt man dies und die ähnlichen Resultate in obige Gleichung ein, so folgt:

$$(32) \quad (u_{41}x):\lambda_1 + (u_{42}x):\lambda_2 + (u_{43}x):\lambda_3 = -v_1(1'x) - v_2(2'x) - v_3(3'x).$$

Setzt man die linke Seite dieser Gleichung gleich Null, so erhält man nach (26a) die Gerade $(4x)=0$. —

Dividiert man die Gleichung (21₁) durch λ_1 , die zweite durch λ_2 und addiert, so folgt

$$-(4x)[v_1(1'x) + v_2(2'x) + v_3(3'x) + (u_{43}x):\lambda_3] = -v_3(3'x)(4x) - v_3'(3x)(4x),$$

also

$$(33) \quad \begin{aligned} (u_{41}x):\lambda_1 &= -v_2(2'x) - v_3(3'x) + v_1'(1x) \\ (u_{42}x):\lambda_2 &= -v_3(3'x) - v_1(1'x) + v_2'(2x) \\ (u_{43}x):\lambda_3 &= -v_1(1'x) - v_2(2'x) + v_3'(3x). \end{aligned}$$

Durch Addition erhält man hieraus und aus (32):

$$(34) \quad v_1(1'x) + v_2(2'x) + v_3(3'x) = v_1'(1x) + v_2'(2x) + v_3'(3x),$$

was übereinstimmt mit (25a), (26a). Daher lassen sich die Gleichungen (33) auch in die Form kleiden:

$$(33a) \quad \begin{aligned} (u_{41}x):\lambda_1 &= -v_2'(2x) - v_3'(3x) + v_1(1'x) \\ (u_{42}x):\lambda_2 &= -v_3'(3x) - v_1'(1x) + v_2(2'x) \\ (u_{43}x):\lambda_3 &= -v_1'(1x) - v_2'(2x) + v_3(3'x). \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Konstruktion der Doppeltangenten aus einem Aronholdschen System fertig, wenn wir die Tangenten $1'$, $2'$, $3'$ kennen: Denn z. B. ist nach (26a) $v_2(2'x) + v_3(3'x) = 0$ diejenige Gerade, welche den Punkt $41'$ mit dem Punkte $2'3'$ verbindet. Ihr Schnittpunkt mit 1 ist nach (33) ein Punkt von u_{41} . Einen anderen Punkt von u_{41} erhalte ich nach (33a), wenn ich die, die Punkte 41 und 23 verbindende Gerade zum Schnitt bringe mit $1'$. —

Es handelt sich also jetzt darum die Tangenten $1'$, $2'$, $3'$ aus dem Aronholdschen System zu finden.

In (26a) hatten wir eine Darstellung der Geraden 4 durch $1'$, $2'$, $3'$. Drei entsprechende Darstellungen erhalten wir für 5 , 6 , 7 . Infolgedessen bekommen wir auch noch drei weitere Wertsysteme der Art wie v_1 , v_2 , v_3 , die wir daher insgesamt mit v_{41} , v_{42} , v_{43} ; v_{51} , v_{52} , v_{53} , ..., v_{73} bezeichnen. Daher

haben wir jetzt:

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \nu_4(4x) = \nu_{41}(1'x) + \nu_{42}(2'x) + \nu_{43}(3'x) \\
 & \nu_5(5x) = \nu_{51}(1'x) + \nu_{52}(2'x) + \nu_{53}(3'x) \\
 & \nu_6(6x) = \nu_{61}(1'x) + \nu_{62}(2'x) + \nu_{63}(3'x) \\
 & \nu_7(7x) = \nu_{71}(1'x) + \nu_{72}(2'x) + \nu_{73}(3'x),
 \end{aligned}
 \quad (\text{vgl. (26a)})$$

Diese vier Gleichungen sind voneinander abhängig, also verschwindet ihre Determinante:

$$(36) \quad \nu_4(\nu_{51}\nu_{61}\nu_{71})(4x) - \nu_5(\nu_{61}\nu_{71}\nu_{41})(5x) + \nu_6(\nu_{71}\nu_{41}\nu_{51})(6x) - \nu_7(\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(7x) = 0.$$

Andererseits haben wir aber die zwischen vier Geraden der Ebene bestehende Identität ⁽¹⁾:

$$(37) \quad (567)(4x) - (674)(5x) + (745)(6x) - (456)(7x) = 0.$$

Daher sind die ν_i bis auf einen Faktor g durch die Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
 (38) \quad & g \cdot \nu_4 = (567) : (\nu_{51}\nu_{61}\nu_{71}) \\
 & g \cdot \nu_5 = (674) : (\nu_{61}\nu_{71}\nu_{41}) \\
 & g \cdot \nu_6 = (745) : (\nu_{71}\nu_{41}\nu_{51}) \\
 & g \cdot \nu_7 = (456) : (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61}).
 \end{aligned}$$

Danach drücken sich die $1', 2', 3'$ folgendermassen durch die $4, 5, 6$ aus:

$$\begin{aligned}
 (39) \quad & (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(1'x) = \nu_4(\nu_{52}\nu_{63} - \nu_{62}\nu_{53})(4x) + \nu_5(\nu_{43}\nu_{62} - \nu_{42}\nu_{63})(5x) + \\
 & \quad + \nu_6(\nu_{42}\nu_{53} - \nu_{43}\nu_{52})(6x) \\
 & (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(2'x) = \nu_4(\nu_{53}\nu_{61} - \nu_{63}\nu_{51})(4x) + \nu_5(\nu_{63}\nu_{41} - \nu_{43}\nu_{61})(5x) + \\
 & \quad + \nu_6(\nu_{43}\nu_{51} - \nu_{53}\nu_{41})(6x) \\
 & (\nu_{41}\nu_{51}\nu_{61})(3'x) = \nu_4(\nu_{51}\nu_{62} - \nu_{61}\nu_{52})(4x) + \nu_5(\nu_{61}\nu_{42} - \nu_{41}\nu_{62})(5x) + \\
 & \quad + \nu_6(\nu_{41}\nu_{52} - \nu_{51}\nu_{42})(6x).
 \end{aligned}$$

Ähnliche Darstellungen erhalten wir, wenn irgend eine andere aus $4, 5, 6, 7$ herausgegriffene Basis verwendet wird.

Die einzelnen Determinanten sollen nun genauer untersucht werden.

Nach (26a) ist:

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & \nu_{52}\nu_{63} - \nu_{62}\nu_{53} = (123)^2 \left[\frac{1}{(531)(612)} - \frac{1}{(631)(512)} \right] \\
 & = (123)^3 (651) : (531)(631)(512)(612)
 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Vgl. etwa WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, 1923, Groningen, § 19.

(nach der schon bei (37) verwendeten Identität). Entsprechend ist:

$$\begin{aligned} v_{43}v_{62} - v_{42}v_{63} &= (123)^3(461):(631)(431)(612)(412) \text{ usw.} \\ (41) \quad (v_{44}v_{51}v_{61}) &= v_{44}(v_{52}v_{63} - v_{53}v_{62}) + v_{42}(v_{53}v_{61} - v_{51}v_{63}) + v_{43}(v_{54}v_{62} - v_{52}v_{64}) \\ &= (123)^4[(651)(523)(623)(431)(412) + (652)(531)(631)(412)(423) + \\ &\quad + (653)(512)(612)(423)(431)]:(412)(423)(431)(512)(523) \\ &\quad (531)(612)(623)(631) \\ &= (123)^4 Z_{456} \cdot N_{456}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte aus (38), (40) und (41) in (39) ein, so erhält man als erste Gleichung:

$$\begin{aligned} (42) \quad g \cdot (123)^5 Z_{456} \cdot N_{456}^{-1} \cdot (1'x) &= (567)(651)[(531)(631)(512)(612)]^{-1} N_{567} Z_{567}^{-1} (4x) \\ &\quad + (674)(461)[(631)(431)(612)(412)]^{-1} N_{674} Z_{674}^{-1} (5x) \\ &\quad + (745)(541)[(431)(531)(412)(512)]^{-1} N_{745} Z_{745}^{-1} (6x). \end{aligned}$$

Es handelt sich jetzt darum, die Natur der Koeffizienten genauer zu bestimmen; mit Ausnahme der Z sind alles dreireihige Determinanten, so dass nur die Z in Frage kommen. Nun ist aber z. B., wenn man das erste der drei Glieder von Z_{456} mittels der schon mehrfach benutzten Identität umformt:

$$\begin{aligned} Z_{456} &= - (652)(153)(623)(412)(431) + (653)(152)(623)(412)(431) + \\ &\quad + (652)(531)(631)(412)(423) + (653)(512)(612)(423)(431) \\ (49) \quad &= (652)(531)(412)[(631)(423) - (623)(431)] + \\ &\quad + (653)(512)(431)[(612)(423) - (623)(412)] \\ &= (123)[- (652)(531)(412)(643) + (653)(512)(431)(642)]. \end{aligned}$$

Das Verschwinden der eckigen Klammer ist aber die Bedingung dafür, dass die 6 Geraden 1, 2, ..., 5, 6 auf einem Kegelschnitt liegen ⁽¹⁾. Ähnlich mit den anderen Z . — Dasselbe Resultat lässt sich aus der Determinante $(v_{44}v_{51}v_{61})$ auch ohne Symbolik ableiten: Es ist nämlich

$$(v_{44}v_{51}v_{61}) = (123)^3 \cdot \begin{vmatrix} (423)^{-1} & (523)^{-1} & (623)^{-1} \\ (431)^{-1} & (531)^{-1} & (631)^{-1} \\ (412)^{-1} & (512)^{-1} & (612)^{-1} \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden der letzteren Determinante bedeutet aber ebenfalls, dass die 6 Geraden, 1, ..., 6 auf einem Kegelschnitt liegen ⁽²⁾. —

⁽¹⁾ Vgl. STUDY, *Einf. in die Theorie der Invarianten*, p. 66, oder WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, § 13 (4).

⁽²⁾ Vgl. den Artikel, *Two Theorems upon conjugate Conics*, im « Tohoku Math. J. », Sept. 1929, wo an diese Determinante erinnert wurde.

Verschwundet nun Z_{456} , so zeigt (42), dass dann 4, 5, 6 durch einen Punkt laufen. Ist aber $Z_{456} \neq 0$, so kann 1' nach (42) nur dann etwa mit 4 zusammenfallen, wenn 4, 5, 6 durch einen Punkt laufen. — Liefе schliesslich 1' durch den Schnittpunkt von etwa 4 und 5, so würden, wie sich wiederum aus (42) ergibt, auch irgend drei andere Doppeltangenten des Aronholdschen Systems durch einen Punkt laufen, was aber der Bedingung des Aronholdschen Systems widerspricht.

Damit haben wir exakt den Aronholdschen Satz und seine Umkehrung gewonnen:

I. Wenn von einer allgemeinen ebenen Kurve vierter Ordnung ein Aronholdsches System von DT gegeben ist, dann liegen keine 6 Tangenten dieses Systems auf einem Kegelschnitt. Denn dies würde zur Folge haben, dass drei asyzygetische Tangenten der Kurve durch einen Punkt laufen, was der Allgemeinheit der Kurve widerspräche. Die übrigen 21 DT lassen sich aus dem Aronholdschen System rational finden.

II. Sind 7 Geraden der Ebene gegeben, von denen keine drei durch einen Punkt laufen und keine 6 auf einem Kegelschnitt liegen, so lassen sich diese immer als ein Aronholdsches System einer Kurve vierter Ordnung auffassen, und es lassen sich aus ihnen die übrigen 21 DT und die C_4 selbst finden. Ist hingegen nur die Bedingung erfüllt, dass keine drei der Geraden des Systems durch einen Punkt laufen, während wohl 6 Geraden des Systems auf einem Kegelschnitt liegen, so bilden die 7 Geraden kein Aronholdsches System einer Kurve vierter Ordnung, da alsdann Gleichung (42) auf der linken Seite verschwinden würde, während ihre rechte Seite nach Voraussetzung immer von Null verschieden ist.

Mit andern Worten: *Damit 7 Geraden der Ebene ein Aronholdsches System bilden, ist notwendig und hinreichend, dass 1) keine drei von ihnen durch einen Punkt laufen, aber auch 2) dass keine sechs von ihnen auf einem Kegelschnitt liegen.*