L'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane.

Memoria di F. SEVERI e B. SEGRE (a Roma).

Sunto. - *In questo lavoro vien esteso ai sistemi più volte infiniti il noto concetto di inviluppo d'una famiglia ∞^1 di curve piane; e, introdotta la nozione di rango dell'inviluppo, vengono approfondite diverse questioni che si presentano in quest'ordine d'idee.*

La considerazione e lo studio approfondito dell'inviluppo di un sistema continuo più volte infinito di curve piane, furon oggetto di un lavoro presentato dal SEVERI al R. Istituto Veneto nel 1921 (¹). Questo lavoro però non fu mai pubblicato, perchè occorreva completarlo in qualche dettaglio; nè l'Autore trovò da allora modo di occuparsene.

L'inviluppo di un sistema ∞^r di curve piane C , veniva dal SEVERI definito così: *punto caratteristico principale* è un punto (semplice) di una C , pel quale passano *tutte* le ∞^{r-1} curve del sistema infinitamente vicine a C ; *inviluppo* del sistema è il luogo dei punti caratteristici principali, al variare di C .

Durante il Congresso internazionale dei matematici tenutosi a Bologna nel 1928, a proposito di un'interessante comunicazione del prof. G. FANO sulle trasformazioni birazionali di contatto, nella quale si ammetteva implicitamente che il luogo dei punti caratteristici principali delle curve di un sistema ∞^2 è sempre una curva (non invade cioè un campo a due dimensioni), il SEVERI, senza ricordare il risultato già ottenuto in proposito nel 1921, osservò di essersi posto in passato la questione per un sistema ∞^r , affermando la necessità di stabilire il fatto con tutto il rigore. Nella seduta successiva del Congresso, B. SEGRE comunicò di aver dimostrato il teorema, col ragionamento qui esposto al n.° 3.

Avendo poi il SEVERI ritrovato le sue carte del 1921, in cui questo teorema era pure stabilito da un punto di vista (iperspaziale) più generale, che associa alla considerazione dell'inviluppo di un sistema ∞^r , quella del *rango* dell'inviluppo medesimo, egli passò quei fogli al SEGRE perchè volesse completarne i dettagli. Il che B. SEGRE fece, aggiungendovi risultati propri; e cioè

(¹) Cfr. « Atti del R. Ist. Ven. di Scienze, Lettere ed Arti », t. LXXXI (1921-22), p. 3.

quelli contenuti nei §§ II, III, V e nei nn. 16, 19; dando portata più generale al lemma del n.° 4, di cui già il SEVERI si giovava, e completando altresì qualche punto dei nn. 14, 17.

È notevole che possano esistere inviluppi di tutti i ranghi (nn. 18, 19), intendendosi per *rango* l'infinità delle curve del sistema dato, che posseggono punti caratteristici principali. Qui inoltre trovansi il modo di determinare l'inviluppo ed il suo rango, dato che sia il sistema colla sua equazione (§ III) o come insieme delle curve integrali di una data equazione differenziale (§ V), e varie proposizioni sugli inviluppi di inviluppi (nn. 14, 17). Nelle trattazioni usuali, s'introduce il concetto d'inviluppo solo per i sistemi *semplicemente infiniti* di curve piane: ciò perchè è questo il caso che interessa la teoria delle equazioni differenziali, e che si presenta come più semplice. La definizione solita dell'inviluppo di un sistema ∞^1 di curve piane, rientra come caso particolare in quella da noi adottata per un sistema ∞^r ; ed è bene rilevare che le considerazioni del § II, forniscono, anche per $r=1$, risultati nuovi (v. n.° 8).

L'estensione che qui vien data, per r qualunque, del concetto di inviluppo ⁽¹⁾, si mostrerà specialmente utile nella teoria dei sistemi continui di curve piane algebriche, secondo l'indirizzo inaugurato da F. SEVERI e recentemente ripreso da B. SEGRE ⁽²⁾. Va avvertito che un cenno di tale estensione trovansi già in CAYLEY, che, a quanto riferisce il SALMON ⁽³⁾, « ha trattato il « caso di una curva $U=0$, la cui equazione contenga due o più parametri « indipendenti. Se α , β sono i due parametri, dalle equazioni

$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta}=0,$$

« per eliminazione di α , β si trae l'equazione dell'inviluppo... ». Però l'inviluppo così definito non è relativo solo al dato sistema di curve, ma piuttosto a questo considerato in relazione colla particolare scelta dei parametri α , β (cfr. n. 6). CAYLEY poi non si preoccupa degli eventuali punti multipli variabili della curva $U=0$, nè esclude che l'inviluppo possa invadere una porzione

⁽¹⁾ Essa potrebbe agevolmente venir trasportata ai sistemi continui ∞^r di V_{n-1} appartenenti ad una stessa V_n .

⁽²⁾ Detta estensione è già stata sfruttata da G. FANO, nello sviluppo delle ricerche comunicate al Congresso del 1928: ved. la Nota *Trasformazioni di contatto birazionali del piano*, « Atti R. Acc. dei Lincei », t. VIII (1928)₂, p. 449.

⁽³⁾ G. SALMON-W. FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, (Leipzig, Teubner, 1873), p. 87.

del piano; e da ultimo egli afferma che il coesistere delle suddette tre equazioni, implica un legame fra i parametri, ossia che il dato sistema è sempre di rango 1, mentre così non è (v. nn. 18, 19).

I.

1. Consideriamo in un piano π un sistema continuo $\Sigma \infty^r$ ($r \geq 1$), di curve C . Un punto P di una C può esser comune a *tutte* le ∞^{r-1} curve di Σ infinitamente vicine a C , nel senso ch'esso risulti sempre la posizione limite di un punto comune a C e ad una curva di Σ prossima a C , *comunque* quest'ultima — muovendosi entro a Σ — tenda a C . Godono ad esempio di questa proprietà gli eventuali punti multipli di C , limiti di punti multipli variabili della generica curva di Σ ⁽¹⁾. Un punto *semplice* di C , che sia comune a tutte le ∞^{r-1} curve di Σ infinitamente vicine a C , verrà detto un *punto caratteristico principale* di Σ , mentre C si dirà una *curva principale* di Σ . È chiaro che ogni sistema continuo costituito da curve di Σ e contenente C , ammette ancora questa curva come principale, e collo stesso punto caratteristico principale.

Risulterà dal seguito (n. 19) che Σ può anche non contenere alcuna curva principale, e quindi neppure possedere punti caratteristici principali; in nessun caso, però, questi ultimi posson esser più che una semplice infinità (n. 2 e seg.), mentre l'infinità delle curve principali di Σ può assumere tutti i valori da 1 ad r (nn. 18 e 19).

Denomineremo *inviluppo* di Σ , il luogo dei suoi punti caratteristici principali; e *rango* dell'inviluppo l'infinità delle curve principali di Σ . L'inviluppo può mancare o ridursi ad un insieme discreto di punti, ma in generale è una curva Γ (n. 11); se esso è di rango k , ogni punto di Γ è caratteristico per ∞^{k-1} curve principali di Σ , le quali risultano tangenti in P a Γ .

2. Incominciamo col dimostrare che:

I punti caratteristici principali di un sistema continuo Σ di curve piane, non possono invadere un campo a due dimensioni.

Basterà all'uopo far vedere che se P è un punto caratteristico principale, semplice e variabile, per la curva C di Σ , variando C in Σ a partire da una

⁽¹⁾ Cfr. F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica* (Bologna, Zanichelli, 1926), vol. I. parte I, p. 40, oppure B. SEGRE, *Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo*, « Rendic. R. Acc. dei Lincei », vol. IX, serie 6^a (1929)₁, p. 973.

posizione iniziale generica C_0 , il punto P , partendo dalla corrispondente posizione iniziale P_0 su C_0 , non può muoversi che in una ben determinata direzione, indipendente da C_0 . Ora, effettivamente, un qualsiasi sistema continuo ∞^1 , Σ_0 , di curve di Σ aventi un punto caratteristico principale variabile, ammette il luogo di questi punti come parte dell'involuppo; e se Σ_0 contiene C_0 , detto luogo ha necessariamente in P_0 la stessa tangente di C_0 .

Da questo ragionamento resta poi escluso che Σ ammetta ∞^1 punti caratteristici principali, ciascuno dei quali sia relativo ad infinite curve principali aventi in esso tangente *variabile*. Si ha dunque in più che:

*Le curve principali di un sistema continuo avente una **curva** involuppo, risultano a questa tangenti nei relativi punti caratteristici principali.*

3. I precedenti risultati posson confermarsi analiticamente così. Le curve C di Σ sien date in coordinate cartesiane (x, y) dall'equazione

$$(1) \quad f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0,$$

al variare dei parametri λ ; supponiamo che la f , in un dato campo, abbia derivate parziali del 1° ordine finite e continue. Si tratta in sostanza di provare che, per $r \geq 2$, se **ogni** curva C di Σ ammette un punto (semplice) P caratteristico principale, questo o è **fisso** al variare di C , oppure è punto di contatto di C con una curva **fissa**.

Le coordinate (x, y) del punto P relativo alla curva (1), saranno funzioni dei parametri λ :

$$(2) \quad x = x(\lambda_1, \dots, \lambda_r), \quad y = y(\lambda_1, \dots, \lambda_r);$$

e poichè, per ipotesi, per P passan la (1) e tutte le curve di Σ ad essa infinitamente vicine, si vede facilmente che le (2) devon verificare la (1) e le

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0, \dots, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_r} f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0.$$

Avendo supposto che P sia un punto semplice della (1), in esso non potrà contemporaneamente aversi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

D'altro canto, se sostituiamo nella (1) alle x, y le funzioni date dalle (2), e deriviamo rispetto a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ambo i membri dell'identità risultante, tenendo presenti le (3), otteniamo:

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_r} = 0.$$

Ne consegue che la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial x}{\partial \lambda_r} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial y}{\partial \lambda_r} \end{vmatrix}$$

deve annullarsi identicamente; onde il punto P , se non risulta fisso al variare dei parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, descrive una curva, che — in base alle (4) — tocca le singole curve (1) nel relativo punto caratteristico principale.

Nel precedente ragionamento, si è ammesso senza dimostrazione che le funzioni x ed y date dalle (2) sieno derivabili; ed un'obiezione analoga si potrebbe opporre al n. 3. Per evitare questa difficoltà (a cui, volendo, si potrebbe ovviare direttamente), daremo una terza dimostrazione, basata su considerazioni iperspaziali, che ci porgeranno il destro di **caratterizzare**, mediante proprietà differenziali, certe varietà a più dimensioni.

4. Premettiamo il lemma seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché gli S_k tangenti di una V_k di S_n si appoggino ad un dato S_h secondo spazi di dimensione $k - \sigma - 1$ ($n > h + \sigma$; $k - 1 \geq \sigma \geq k - h - 1$), è che V_k consti di ∞^σ $V_{k-\sigma}$ contenute in spazi lineari di dimensione $h + 1$ passanti pel dato S_h .

Per provare la necessità della condizione enunciata, incominciamo col supporre $\sigma = 0$ ($n > h \geq k - 1$); per $h = n - 1$ la cosa essendo evidente, ammetteremo altresì che si abbia $h \leq n - 2$. Occorre far vedere che se gli S_k tangenti di V_k si appoggiano ad S_h secondo S_{k-1} (ossia se tutte le rette tangenti di V_k risultano incidenti ad S_h), V_k sta in uno S_{h+1} per S_h , o per lo meno consta di un numero discreto di varietà siffatte.

Poichè la proprietà da stabilirsi ha manifesto carattere proiettivo, possiam supporre S_h all'infinito e V_k (che non sta in S_h) al finito, ed inoltre introdurre in S_n coordinate cartesiane $x_1, x_2, \dots, x_n$, in guisa tale che S_h risulti lo spazio congiungente i punti impropri degli assi delle $x_1, \dots, x_{h+1}$. Per ipotesi, un qualunque spostamento infinitesimo — di componenti $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ — deve risultare parallelo a detto S_h , se effettuato su V_k ; lungo V_k deve adunque identicamente esser

$$dx_{h+2} = 0, \dots, dx_n = 0,$$

eppertanto:

$$x_{h+2} = \text{cost.}, \dots, x_n = \text{cost.},$$

il che prova la verità del fatto enunciato.

Nel caso di $\sigma > 0$, effettueremo per induzione la dimostrazione della parte diretta del lemma, ammettendola quando in luogo di n, h, k, σ si prenda rispettivamente $n_1 = n - 1, h_1 = h, k_1 = k - 1, \sigma_1 = \sigma - 1$ (onde le limitazioni $n > h + \sigma$ e $k - 1 \geq \sigma \geq k - h - 1$ si mutano nelle $n_1 > h_1 + \sigma_1$ e $k_1 - 1 \geq \sigma_1 \geq k_1 - h_1 - 1$).

Fissiamo in S_n uno spazio Ω generico passante per S_h , di dimensione $n - 2$, il che è certo possibile, essendo $n > h + \sigma, \sigma > 0$, epperanto $n - 2 \geq h$. Poichè gli S_k tangenti di V_k si appoggiano ad S_h secondo $S_{k-\sigma-1}$, un iperpiano S_{n_1} passante per Ω dovrà segare V_k lungo una V_{k_1} , i cui S_{k_1} tangenti si appoggiano ad $S_h \equiv S_{h_1}$ secondo spazi di dimensione

$$k - \sigma - 1 = k_1 - \sigma_1 - 1.$$

In base alle fatte ipotesi, V_{k_1} consta di ∞^{σ_1} varietà, di dimensione

$$k_1 - \sigma_1 = k - \sigma,$$

situate in spazi lineari di dimensione $h_1 + 1 = h + 1$, giacenti in S_{n_1} e passanti per S_h . In corrispondenza alle ∞^1 posizioni di S_{n_1} attorno ad Ω , si ottengono così effettivamente $\infty^{\sigma_1+1} = \infty^\sigma V_{k-\sigma}$ generanti la data V_k , ognuna delle quali sta in un S_{h+1} per S_h .

La sufficienza della condizione enunciata nel lemma, è di assai facile dimostrazione. Invero, se V_k può generarsi mediante $\infty^\sigma V_{k-\sigma}$ situate in S_{h+1} passanti per un S_h fisso, l' S_k tangente a V_k in un suo punto Q generico contiene l' $S_{k-\sigma}$ ivi tangente alla $V_{k-\sigma}$ generatrice che passa per Q . Questo $S_{k-\sigma}$ sta nell' S_{h+1} per S_h che contiene tale $V_{k-\sigma}$, onde si appoggia ad S_h secondo un $S_{k-\sigma-1}$. Ne consegue che l' S_k tangente a V_k in Q ha con S_h quest'ultimo $S_{k-\sigma-1}$ a comune; nè (in base alla parte diretta del lemma) esso può appoggiarsi ad S_h secondo uno spazio di dimensione maggiore, se si ammette che V_k consti di varietà situate in S_{h+1} per S_h aventi la dimensione $k - \sigma$, e non superiore.

OSSERVAZIONE. — La proposizione che abbiamo dianzi stabilita, e di cui faremo uso al numero seguente, può trovare applicazione in svariate questioni. Così, per es., è noto che i piani tangenti di una V_2^4 di VERONESE risultan tutti incidenti ad uno, S_2 , arbitrariamente fissato di essi; e d'altro canto — conformemente al lemma — V_2^4 contiene ∞^1 coniche che si appoggiano ad S_2 in due punti, e quindi tali che ciascuna di esse sta in un S_3 per S_2 ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Cfr. p. es. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Messina, Principato, 1923), p. 412.

5. Riprendiamo ora le questioni dei nn. 2 e 3, dal seguente punto di vista iperspaziale. Conservando le notazioni del n.° 3, interpretiamo le $x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ come coordinate cartesiane ortogonali in uno spazio ad $n = r + 2$ dimensioni. La (1) rappresenta in S_n un'ipersuperficie f , la quale vien segata dai piani

$$\lambda_1 = \text{cost.}, \dots, \lambda_r = \text{cost.}$$

paralleli al piano $\pi \equiv xy$, lungo curve che si proiettano ortogonalmente su π , precisamente secondo le curve C di Σ . Viceversa, ad un punto $P(x, y)$ di una C di Σ , proveniente da valori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ fissati dei parametri, risponde in S_n un punto $Q(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ di f ; e si noti che se P è semplice per C , anche Q è semplice per f , poichè in esso una almeno delle $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ non si annulla.

Ai punti P caratteristici principali di Σ , rispondon così su f punti *semplici* per cui passano le ipersuperficie (3); ora queste segano V_k — fuori dei punti multipli — secondo una V_k *luogo dei punti (semplici) di f in cui l'iperpiano tangente passa per l' S_{r-1} comune ai punti impropri degli assi delle $\lambda_1, \dots, \lambda_r$* . Ne consegue che ogni S_k tangente di V_k sta in un S_{r+1} passante pel suddetto S_{r-1} fisso, onde ha con quest'ultimo a comune un $S_{k-\sigma-1}$, ove σ può solo valere 0 od 1.

Nel primo caso — per il lemma del numero precedente — V_k consta di un numero discreto di varietà situate in S_r per l' S_{r-1} , onde da quest'ultimo V_k si proietta (ortogonalmente) su π secondo un *numero discreto di punti*. Nel secondo caso, V_k consta di $\infty^1 V_{k-1}$, ciascuna appartenente ad un S_r per l' S_{r-1} , e quindi si proietta (ortogonalmente) da S_{r-1} su π secondo una *curva* Γ . Poichè l' S_k tangente a V_k in un punto Q generico si appoggia ad S_{r-1} secondo un S_{r-2} , la proiezione ortogonale di S_k su π è una retta, che palesemente tocca Γ nel punto P proiezione di Q ; e siccome l' S_{r+1} proiettante non è altro che l'iperpiano tangente in Q ad f , così la curva C di Σ , proiezione ortogonale su π della sezione di f col piano per Q parallelo a π , risulta *tangente* in P a Γ .

Restan così stabilite per altra via le proposizioni del n.° 2.

II.

6. Si è già detto al n.° 3, che per i punti dell'involuppo di un sistema Σ rappresentato dalla (1), debbon coesistere le (1), (3), senza che contemporaneamente si annullino $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tali condizioni non bastan però per caratte-

rizzare l'involuppo, quale da noi è stato definito (n.° 1). Ed infatti la curva che — seguendo CAYLEY — si verrebbe a determinare limitandoci alle suddette condizioni, resta legata alla scelta dei parametri con cui si definiscono le curve di Σ .

Così, per es., se il sistema che si ha da Σ per $\lambda_i = c$ (cost.) ammette un involuppo Γ_i distinto dall'involuppo di Σ , posto $\lambda_i = c + \mu_i^2$ si viene a rappresentare Σ coll'equazione

$$f(x, y; c + \mu_i^2, \dots, \lambda_r) = 0;$$

ed è subito visto che la curva Γ_i viene a far parte dell'involuppo di Σ inteso nella suddetta accezione, quando a determinare le curve di Σ si scelgano i parametri $\mu_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Un altro esempio istruttivo è il seguente. Consideriamo il sistema continuo ∞^1 di curve piane rappresentato dall'equazione

$$(5) \quad f(x, y, t) \equiv \alpha(x, y) + t^2 \cdot \beta(x, y) + t^3 \cdot \gamma(x, y) + t^4 \cdot \delta(x, y) = 0,$$

al variare del parametro t . Per $t = 0$ ed $\alpha(x, y) = 0$ risulta

$$f(x, y; t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x, y; t) = 0;$$

e tuttavia in generale la curva $\alpha(x, y) = 0$ non fa parte dell'involuppo del dato sistema. Infatti la $\alpha(x, y) = 0$ si ha dalla (5) per $t = 0$; e, poichè i gruppi di punti determinati su di essa dalle altre curve (5), posson anche venir segati dalle

$$\beta(x, y) + t \cdot \gamma(x, y) + t^2 \cdot \delta(x, y) = 0,$$

la curva suddetta non contiene altri punti caratteristici (principali) ad essa relativi, all'infuori delle intersezioni colla curva $\beta(x, y) = 0$. Può però ben darsi che la $\alpha(x, y) = 0$ contenga *altri* punti caratteristici del sistema (5), relativi ad altre curve del sistema stesso: ed anzi, con una particolare scelta delle funzioni α, β, γ e δ , si può far sì che la curva $\alpha(x, y) = 0$ sia luogo di punti caratteristici siffatti, e quindi faccia parte dell'involuppo del sistema (5); in generale, però, così non sarà.

Le precedenti considerazioni, mostrano la necessità di aggiungere alle (1), (3) delle condizioni che bastino a caratterizzare l'involuppo di un sistema Σ ; e ciò appunto ci proponiamo di fare nei numeri seguenti.

7. Nel seguito ci limiteremo, per semplicità, a *funzioni analitiche* considerate nel campo complesso, per quanto alcune delle cose che diremo possano anche estendersi — sotto ipotesi convenienti — al caso non analitico.

Avendo una funzione analitica $\psi(x, t)$, nulla per $x = x_0$, $t = t_0$, quand'è che l'equazione

$$(6) \quad \psi(x, t) = 0$$

ammette per t prossimo a t_0 delle radici x prossime ad x_0 , cioè tendenti ad x_0 col tender di t a t_0 ? In base ad un classico teorema di WEIERSTRASS⁽¹⁾, affinché ciò sia, basta che nel punto (x_0, t_0) non si annulli qualcuna delle derivate parziali della ψ fatte rispetto alla sola x ; in caso opposto, e cioè se la funzione

$$(7) \quad \chi(x) = \psi(x, t_0)$$

si annulla identicamente, la (6) può avere o non avere i requisiti voluti, e per distinguere i due casi occorrerebbe un'analisi ulteriore.

Ciò premesso, supponiamo che le due curve (analitiche)

$$(8) \quad f(x, y; t) = 0$$

$$(9) \quad \varphi(x, y; t) = 0$$

abbian per $t = t_0$ in comune il punto $P_0(x_0, y_0)$, in cui risulti p. es.

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0;$$

e domandiamoci sotto quali ipotesi esse hanno a comune, per t prossimo a t_0 , qualche punto prossimo a P_0 , e cioè tendente a P_0 col tender di t a t_0 . La (8), in virtù della (10), definisce implicitamente una funzione analitica

$$(11) \quad y = y(x, t),$$

che si riduce ad y_0 per $x = x_0$, $t = t_0$; sostituendo la (11) nella (9), siamo ricondotti ad un'equazione come la (6), alla quale si posson applicare le precedenti considerazioni. Basterà dunque esprimere che per $x = x_0$ la (7) ammette qualche derivata diversa da zero. Ora, le successive derivate di questa funzione si calcolano direttamente, senza che occorra determinare la (11), applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, e ben noti teoremi sulle funzioni implicite. Si ottiene così:

$$(12) \quad \frac{d\chi}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \text{ ecc.,}$$

(1) Ved. p. es. É. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique* (Paris, Gauthier-Villars, 1911), t. II, p. 273 e seg.¹.

ove le $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ... si calcolano colle:

$$(13) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}; \text{ ecc.}$$

OSSERVAZIONE. — Nei secondi membri delle (12), (13) compaiono le derivate delle f , φ fatte rispetto *alle sole* x , y . Dovendo porsi in essi $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$, si può addirittura supporre che f e φ *indichino ciò che diventano* le (8), (9) *quando vi si faccia* $t = t_0$.

8. Dato nel piano un sistema ∞^1 , Σ_1 , di curve analitiche, di equazione

$$(14) \quad f(x, y; t) = 0,$$

possiam assegnare delle condizioni che ci assicurino che un punto semplice $P_0(x_0, y_0)$ di una sua curva C_0 , di equazione

$$(15) \quad f(x, y; t_0) = 0,$$

è un *punto caratteristico* ad essa relativo, e cioè è la posizione limite, per $t \rightarrow t_0$, di un punto P segato dalla (14) su C_0 .

Un punto P siffatto (se esiste), può anche manifestamente venir determinato su C_0 dalla curva

$$(16) \quad \varphi(x, y; t) \equiv \frac{f(x, y; t) - f(x, y; t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Notiamo che la $\varphi(x, y; t)$ nell'intorno di (x_0, y_0, t_0) è certamente una funzione analitica *regolare*, che per $t = t_0$ si riduce a

$$(17) \quad \varphi(x, y; t_0) \equiv \frac{\partial f(x, y; t_0)}{\partial t} \quad (1).$$

(1) È questo un fatto ben noto, che si può provare osservando che — in base alla formula di CAUCHY — risulta

$$f(x, y; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x, y; z)}{z - t} dz, \quad f(x, y; t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x, y; z)}{z - t_0} dz$$

(γ essendo una linea chiusa del piano della variabile complessa z , racchiudente i punti t_0 e t), onde, in virtù della (16), si ha:

$$\varphi(x, y; t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x, y; z)}{(z - t)(z - t_0)} dz.$$

Siamo dunque ricondotti alla questione già trattata al numero precedente per le curve (8), (9), che attualmente vanno sostituite dalle (15), (16). Se si suppone che in P_0 valga la (10), avuto anche riguardo all' Osservazione fatta alla fine di quel numero, possiamo esprimere le condizioni volute dicendo che

Affinchè P_0 sia su C_0 un punto caratteristico (principale) di Σ_1 , basta che in esso si annullino il primo membro della (15) e la (17), e risulti diversa da zero una (almeno) delle (12); queste espressioni si calcolano usufruendo delle (13), e ponendo in esse per f e φ rispettivamente il primo membro della (15) e la (17).

Se — come p. es. accade pel sistema (5) considerato al n. 6 — tutte le espressioni (12) si annullano, occorre approfondire l'analisi. Vi è un caso in cui ciò si effettua agevolmente, ed è quello in cui — come nell'esempio surricordato — la funzione (17) si annulla **identicamente**; basta allora, in luogo della funzione φ data dalla (16), assumere la

$$\varphi(x, y; t) \equiv \frac{f(x, y; t) - f(x, y; t_0)}{(t - t_0)^2}.$$

questa, nelle ipotesi attuali, è analitica in P_0 anche per $t = t_0$, risultando

$$\varphi(x, y; t_0) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, y; t_0)}{\partial t^2}.$$

Aggiungasi poi, che è assai facile di esplicitare le disuguaglianze di cui tratta il precedente enunciato. Così, p. es., la prima si può anche scrivere

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix} \neq 0;$$

ed è chiaro che s'essa è soddisfatta per $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$, risulta in questo punto diverso da zero il determinante funzionale dei primi membri delle (15), (16) rispetto alle x, y ; le curve (14), (15) hanno allora a comune un punto P , che tende a P_0 al tender di t a t_0 , le cui coordinate x, y son appunto definite implicitamente in funzione di t dalle (15), (16). Tale ragionamento vale anche nel campo non analitico, ed in questo caso già si trovava nel manoscritto di F. SEVERI del 1921 ⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Ved. anche G. PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, Bocca, 1887), p. 309. È chiaro che, se si sta nel campo reale, alla funzione φ data dalla (16) si può, applicando il teorema della media, sostituire la $\frac{\partial f(x, y; t_1)}{\partial t}$, con t_1 compreso fra t_0 e t .

La nostra analisi ci permette però di approfondire la discussione anche nel caso in cui in P_0 non valga la (18). Basta ricorrere alla seconda espressione (12), che ridotta a forma intera si può scrivere nel modo seguente

$$(19) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{vmatrix},$$

e verificare se essa è diversa da zero in P_0 . Se si annulla, ci si può similmente valere della (12) successiva; e così via.

9. Ora siamo in grado di soddisfare alla richiesta espressa alla fine del n. 6. Dato in π il sistema $\Sigma \infty^r$ ($r \geq 2$) rappresentato dalla (1), consideriamone la curva C_0 , proveniente dai valori $c_1, \dots, c_r$ dei parametri, e su di essa un punto semplice $P_0(x_0, y_0)$, in cui ad es. valga la (10). Affinchè P_0 sia su C_0 un punto caratteristico principale di Σ , è necessario e sufficiente che scelta comunque in Σ una famiglia di curve, Σ_1 , semplicemente infinita e regolare, contenente C_0 , sempre essa ammetta P_0 come punto caratteristico principale su C_0 (n. 1). La questione resta così ricondotta a quella trattata al numero precedente.

La più generale famiglia Σ_1 si potrà rappresentare colla (1), ove si pongano per $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ delle funzioni analitiche arbitrarie di un parametro t , riducendosi ordinatamente a $c_1, \dots, c_r$ per $t = t_0$: va rilevato che le derivate di tali funzioni assumono per $t = t_0$ valori $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ **arbitrari**, purchè non tutti nulli. Con ciò la (1) si riduce ad un'equazione del tipo (14), e — in base al teorema di derivazione delle funzioni composte — la relativa espressione (17) si scrive:

$$(20) \quad \gamma_1 \frac{\partial f(x, y; c_1, \dots, c_r)}{\partial \lambda_1} + \dots + \gamma_r \frac{\partial f(x, y; c_1, \dots, c_r)}{\partial \lambda_r};$$

questa deve annullarsi in P_0 , qualunque siano le $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, e ciò si traduce nel fatto che per $x = x_0$, $y = y_0$, $\lambda_1 = c_1, \dots, \lambda_r = c_r$ [oltre alla (1)] valgano le (3).

A queste occorre aggiungere altre condizioni, per esprimere che P_0 è un punto caratteristico principale di Σ . In base al n. 8, risulta che all'uopo basta che certe equazioni lineari omogenee nelle $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ non coesistano che per valori tutti nulli di queste quantità; e tali equazioni, in virtù

delle (18), (19), ..., sono

$$(21) \quad \sum_{i=1}^r \gamma_i \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_i \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_i \partial y} \end{array} \right| = 0,$$

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial \lambda_i \partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_i \partial y} \end{array} \right| - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial \lambda_i \partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_i \partial y} \end{array} \right| + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial \lambda_i \partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_i \partial y} \end{array} \right| \right\}, \text{ ecc.};$$

esse sono in numero infinito, ed i loro coefficienti vanno naturalmente calcolati per $x = x_0$, $y = y_0$, $\lambda_1 = c_1, \dots, \lambda_r = c_r$. Possiamo in conclusione dire che:

Affinchè P_0 risulti un punto caratteristico principale di Σ , basta che in esso — oltre ad esser verificate le (1), (3) — non si annullino tutti i minori d'ordine r estratti dalla matrice (di r verticali ed infinite orizzontali) dei coefficienti delle (21).

Se la matrice suddetta si annulla, occorre un'analisi ulteriore. Questo caso si presenta, ad es., se l'espressione (20) si annulla identicamente rispetto alle x, y , per valori non tutti nulli delle $\gamma_1, \dots, \gamma_r$; ma non è difficile in quest'ipotesi di approfondire l'indagine, tenendo presente quanto è stato detto al n. 8.

OSSERVAZIONE 1.^a — Va rilevato il *significato intrinseco delle (21)*, nel senso che se esse sussistono per valori non tutti nulli delle $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ in corrispondenza ad una determinata scelta dei parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con cui si definiscono le curve di Σ , lo stesso può dirsi quando si cambino i parametri, operando su di essi una trasformazione il cui jacobiano J non si annulli. Infatti, nei coefficienti delle $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ nelle (21), le derivate della f rispetto alle $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ compaiono linearmente ed omogeneamente, ed esse son solo del primo ordine rispetto a queste variabili. Ne consegue che colla suddetta trasformazione, quei coefficienti subiscono una sostituzione lineare di modulo J ; e basta operare sulle $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ colla sostituzione inversa, per soddisfare alle trasformate delle (21).

OSSERVAZIONE 2.^a — Se in P_0 la matrice di cui al precedente enunciato non si annulla, P_0 è certamente un punto *semplice* di C_0 , poichè se in esso fosse $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, tutti gli elementi di quella matrice sarebbero nulli. Sotto la stessa ipotesi, si può asserire che i parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono *essenziali* (e cioè Σ ha dimensione r e non inferiore): in caso opposto, infatti, esiste-

rebbero valori non tutti nulli delle $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ per cui l'espressione (20) si annullerebbe identicamente.

III.

10. Esaminiamo ora più da vicino come si possa determinare l'*inviluppo* di un sistema Σ , dato mediante l'equazione (1), ed il *rango* dell'inviluppo medesimo. Escludiamo che tutte le curve di Σ abbiano una parte fissa in comune (che, naturalmente, verrebbe a far parte dell'inviluppo): con ciò, su ogni curva principale di Σ vi potrà solo essere un numero **discreto** di punti caratteristici principali di Σ ad essa relativi.

Ci sarà utile ritornare alle considerazioni iperspaziali del n. 5. Le $r+1 = n-1$ ipersuperficie (1), (3) di S_n , se hanno punti a. comune fuori dei punti multipli della f , si segano lungo una o più varietà (analitiche): l'inviluppo di Σ può solo esser costituito dalle proiezioni ortogonali su π di tali varietà (n. 5). Se V_k è una di queste ultime, basta che in un suo punto $Q_0(x_0, y_0, c_1, \dots, c_r)$ non si annulli la matrice di cui all'enunciato del n. 9, perchè lo stesso valga pei punti di un intorno di Q_0 su V_k : in tal caso *la proiezione ortogonale di V_k su π è un insieme I d'un numero discreto di punti od una curva Γ , che certamente fa parte dell'inviluppo di Σ .*

Inoltre *il rango di I o di Γ coincide colla dimensione k di V_k , e non può assumere che uno dei valori 1, 2, ..., r .* Infatti — in base alla definizione del n. 1, ed al n. 5 — il rango cercato non è altro che la infinità dei piani di S_n paralleli a π che contengono punti di V_k ; e non è possibile che un piano parallelo a π abbia **una curva** a comune con V_k , poichè, in corrispondenza alla sezione di f con un piano siffatto, si avrebbe su π una curva di Σ , luogo di punti caratteristici principali ad essa relativi. La suddetta infinità coincide dunque effettivamente colla dimensione k di V_k . E questa può solo valere 1, 2, ..., r . Infatti, $n-1$ ipersuperficie (analitiche) di S_n non posson segarsi in un punto Q_0 , senza necessariamente avere in comune almeno una curva per esso ⁽⁴⁾; nè, d'altro canto, le (1), (3) posson avere una parte (ad $n-1 = r+1$ dimensioni) in comune, poichè questa dovrebbe ridursi ad un cilindro proiettante ortogonalmente una curva di π (n. 5), che risulterebbe parte comune alle varie curve di Σ .

⁽⁴⁾ Si può anzi dire che *in generale* l'intersezione consta precisamente di una curva, che si proietta ortogonalmente su π secondo una curva. Tutto ciò discende dal teorema sulle funzioni implicite, inteso nella sua accezione più generale: cfr. ad es. le *Vorlesungen ueber algebraische Geometrie* di F. SEVERI (Leipzig, Teubner, 1921), p. 312.

Aggiungasi che a seconda che l'involuppo, di rango k , è un insieme I discreto di punti od una curva Γ , un suo punto P_0 generico risulta caratteristico principale per ∞^k o per ∞^{k-1} curve principali di Σ ; nel secondo caso le ∞^{k-1} curve principali toccano in P la linea Γ (n. 2).

11. Dal numero precedente risulta che *un sistema continuo di curve piane ammette in generale come involuppo una curva di rango 1*. La cosa può ulteriormente venir precisata, osservando che *affinchè il sistema Σ rappresentato dalla (1) ammetta una curva involuppo di rango 1, basta che in un suo punto caratteristico principale P_0 — in cui non si annulli la matrice del n. 9 — risulti anche diverso da zero il determinante hessiano:*

$$(22) \quad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_r \partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_r^2} \end{vmatrix}.$$

In tale ipotesi, infatti, le (3) determinano le λ come funzioni implicite (analitiche) delle x, y :

$$(23) \quad \lambda_1 = \lambda_1(x, y), \dots, \lambda_r = \lambda_r(x, y),$$

riducentesi rispettivamente a $c_1, \dots, c_r$ per $x = x_0, y = y_0$. Sostituendo nella (1) alle λ queste espressioni, si ottiene un'equazione

$$(24) \quad F(x, y) = 0,$$

che non svanisce identicamente: in caso opposto, infatti, le (23) rappresenterebbero in S_n una superficie comune alle (1), (3), la cui proiezione ortogonale su π invaderebbe l'intorno (a due dimensioni) di P_0 ; e ciò non può essere (n. 5) ⁽¹⁾. La (24) rappresenta dunque in π una **curva** passante per P_0 , involuppo **di rango 1** di Σ , perchè proiezione ortogonale su π della **curva** di S_n intersezione delle (1), (3), che ha per equazioni le (23), (24).

Ogni punto $P(x, y)$ dell'involuppo suddetto, è caratteristico principale per **una** curva di Σ , e precisamente per la curva (1) che proviene dai valori dei parametri che si determinano in corrispondenza colle (23). E possiamo agevolmente verificare che questa curva tocca in P l'involuppo: infatti, pel

⁽¹⁾ Allo stesso risultato si perviene osservando che — in virtù delle equazioni che diamo più sotto — in P_0 una almeno delle $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ deve risultare diversa da zero.

modo come si è ottenuto la (24), risulta

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y},$$

ossia, poiché in P valgono le (3),

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

12. Se il determinante H di cui al numero precedente si annulla in P_0 , la sua matrice avendo la caratteristica $r - \rho$, il punto P_0 appartiene ad una parte dell'involuppo di Σ , il cui rango — che si determina in base alle considerazioni del n. 10 — vale al più $\rho + 1$. Infatti, la matrice funzionale delle (1), (3) rispetto alle $x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r$, si ottiene orlando il determinante (22) con due verticali ed una orizzontale, i cui elementi sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_r};$$

di questi, i primi due non son entrambi nulli in Q_0 , mentre gli altri r si annullano. Ne consegue che la caratteristica di tale matrice vale almeno $r - \rho + 1$, onde le ipersuperficie (1), (3) non possono nell'intorno di Q_0 segarsi secondo una varietà di dimensione maggiore di

$$n - (r - \rho + 1) = \rho + 1.$$

Se l'involuppo considerato è di rango $k > 1$, onde i suoi punti saranno caratteristici principali per ∞^k curve principali di Σ , consideriamo entro a Σ un generico sistema Σ' di dimensione h . Se si suppone $h + k > r$, Σ' contiene ∞^{h+k-r} di quelle curve principali di Σ , le quali (n. 1) son ancora principali per Σ' , e cogli stessi punti caratteristici principali: *il luogo di questi punti* (fra cui havvi P_0) *è in pari tempo involuppo di Σ e di Σ' ; il suo rango, come involuppo di Σ' , vale almeno $h + k - r$, e generalmente non di più.*

OSSERVAZIONE. — Sempre che si supponga $k > 1$, si può prendere $h = r - k + 1 (< r)$, ed in generale il sistema Σ' risulta di rango 1; ma se così non è, si può su di esso procedere come con Σ , e così via replicatamente, fino a giungere ad un sistema collo stesso involuppo di Σ e di rango 1, il che accadrà almeno quando si sarà ottenuto un sistema ∞^1 . In tal guisa la determinazione dell'involuppo d'un sistema Σ di rango $k > 1$, si può sempre ricondurre a quella d'un involuppo di rango 1.

13. Si presenta come particolarmente interessante il caso in cui, la matrice (22) avendo la caratteristica $r - \rho$ ($0 < \rho < r$), il rango k raggiunga il suo valor massimo $\rho + 1$ (n. 12).

Possiamo intanto supporre che non si annulli in P_0 il minore costituito dalle ultime $r - \rho$ righe e dalle ultime $r - \rho$ colonne di H , effettuando ove così non fosse un conveniente cambiamento dei parametri λ ⁽¹⁾. Sotto tale ipotesi, le equazioni

$$(25) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_{\rho+1}} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_r} = 0,$$

determinano le $\lambda_{\rho+1}, \dots, \lambda_r$ come funzioni (analitiche) delle $x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_\rho$:

$$(26) \quad \lambda_{\rho+1} = \lambda_{\rho+1}(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_\rho), \dots, \lambda_r = \lambda_r(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_\rho),$$

riducentesi a $c_{\rho+1}, \dots, c_r$, per $x = x_0, y = y_0, \lambda_1 = c_1, \dots, \lambda_\rho = c_\rho$. Sostituendo queste espressioni nella (1), si ottiene un'equazione

$$(27) \quad F(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_\rho) = 0$$

soddisfatta per $x = x_0, y = y_0, \lambda_1 = c_1, \dots, \lambda_\rho = c_\rho$; avuto riguardo al fatto che le (26) equivalgono alle (25), si ha, come alla fine del n. 11,

$$(28) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

e del pari

$$(29) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_\rho}.$$

Osserviamo ora che la (27) non può esser identicamente soddisfatta, poichè, in virtù delle (28), in P_0 una almeno delle $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ risulta diversa da zero. Le (26), (27) rappresentano dunque in S_n una varietà di dimensione $\rho + 1$, comune alle ipersuperficie (1), (25), e passante per Q_0 . Per l'ipotesi fatta, anche le (1), (3) devon segarsi nell'intorno di Q_0 secondo una varietà di dimensione $\rho + 1$, e ciò non è possibile se non supponendo che le (26), (27) portino di conseguenza le

$$(30) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_\rho} = 0.$$

⁽¹⁾ Così p. es. se si opera sulle λ con una *sostituzione lineare* a coefficienti costanti, in luogo di H occorre considerare un determinante, che può ottenersi moltiplicando il modulo della sostituzione inversa — preso per orizzontali — pel determinante — preso per verticali — prodotto di H per detto modulo; e si soddisfa alla condizione voluta, scegliendo in modo generico la sostituzione lineare.

In base alle (29), deve dunque — in forza della (27) — risultare:

$$(31) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho} = 0.$$

Applicando il lemma del n. 4, da qui segue che le curve rappresentate dalla (27), al variare dei parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$, hanno una parte fissa in comune, passante per P_0 , che può p. es. rappresentarsi coll'equazione:

$$F(x, y; c_1, \dots, c_\rho) = 0.$$

E questa curva è l'involuppo cercato, poichè lungo di essa coesistono le (1), (25), (30).

Ciò è d'accordo coll'Osservazione del n. 12, che nelle ipotesi attuali conduce, per avere l'involuppo di Σ , a considerare entro a Σ un sistema Σ' generico di dimensione $h = r - k + 1 = r - \rho$ — ad esempio quello che si ottiene da Σ dando a $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ determinati valori costanti — ed a trovare l'involuppo di Σ' .

Aggiungiamo che dalle precedenti considerazioni risulta che:

Se è possibile distribuire le curve di un sistema $\Sigma \infty^r$ in ∞^ρ sistemi di dimensione $r - \rho$ e rango 1, aventi un medesimo involuppo, questo fa anche generalmente parte dell'involuppo di Σ , e come tale ha il rango $\rho + 1$.

IV.

14. Ci proponiamo in questo § di dare alcune proposizioni sugli involuppi di involuppi, e di mostrare che

Posson esistere involuppi — costituiti da curve o da punti in numero discreto — di tutti i ranghi compatibili colla dimensione del sistema continuo (n. 10).

Incominciamo coll'estendere la portata delle considerazioni del n. 13. Dato colla (1) il sistema Σ, ∞^r e di rango k , affinchè un sistema Σ' contenuto in Σ sia di rango 1, occorre abbia la dimensione h non superiore ad $r - k + 1$ (n. 12), ed anzi inferiore a questo numero, se si vuole che l'involuppo di Σ non stia nell'involuppo di Σ' . Reciprocamente, un sistema Σ' contenuto in Σ , di dimensione $h = r - \rho$, con $\rho \geq k$, ammette in generale una curva Γ involuppo, di rango 1 (n. 11), distinta dall'involuppo di Σ . Ebbene:

Distribuite le curve di Σ in ∞^ρ sistemi continui Σ' di dimensione $r - \rho$, con $\rho \geq k$, le curve Γ involuppi di questi ultimi costituiscono un nuovo sistema continuo $\infty^{r-\rho}$, che ammette in generale lo stesso involuppo di Σ , e collo stesso rango k .

Possiam supporre, senza scapito di generalità, che i vari sistemi Σ' si abbiano dalla (1) dando ai parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ valori costanti; ed inoltre, poichè essi son di rango 1, che le (25) sien (in un certo campo) risolubili rispetto ai parametri variabili $\lambda_{\rho+1}, \dots, \lambda_r$. In tali ipotesi l'equazione (27), che si ottiene sostituendo nella (1) a $\lambda_{\rho+1}, \dots, \lambda_r$ le funzioni (26) definite implicitamente dalle (25), al variare dei parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$ rappresenta le curve Γ' inviluppi dei vari sistemi Σ' . In forza delle (26), sussistono le (25), (29), e la (1) s'identifica colla (27): dunque il sistema (1), (25), (30) **equivale** a quello costituito dalle (27), (31). In particolare, i due sistemi avranno la stessa infinità di soluzioni e cogli stessi valori delle (x, y) , da una soluzione $(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_\rho)$ del secondo sistema avendosene una $(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ del primo, determinando le $\lambda_{\rho+1}, \dots, \lambda_r$ mediante le (26). In corrispondenza ad una siffatta coppia di soluzioni, saranno generalmente soddisfatte le condizioni che assicurano che il relativo punto (x, y) è caratteristico principale per i sistemi continui (1) e (27) [tali condizioni consistendo solo più in disuguaglianze (n. 9)]; e ciò dimostra l'asserto.

In casi speciali può però ben darsi che le disuguaglianze a cui dianzi si è alluso valgano per uno solo dei due sistemi continui, e che quindi una parte dell'inviluppo di Σ non faccia parte dell'inviluppo degli inviluppi dei vari Σ' , oppure viceversa. Nei numeri successivi daremo di tali casi eccezionali degli esempi, che saranno istruttivi anche perchè ancora una volta mostreranno che, dato un sistema (1), per caratterizzarne l'inviluppo non sempre bastino le equazioni (1) e (3).

15. Consideriamo nel piano π un cerchio Γ , e gli ∞^1 cerchi Γ' di raggio metà che lo toccano internamente. Le tangenti ad un dato Γ' forniscono una famiglia Σ' semplicemente infinita di rette, di cui Γ' è l'inviluppo; e le ∞^1 famiglie Σ' costituiscono alla lor volta un sistema $\Sigma \infty^2$ di rette, che manifestamente non possiede alcun punto caratteristico principale. Dunque Σ *non ammette inviluppo, per quanto gli inviluppi Γ' dei vari Σ' abbiano Γ per inviluppo.*

La cosa si conferma analiticamente così. Sia:

$$(32) \quad x^2 + y^2 = 4$$

l'equazione di Γ , ed indichiamo con (λ_1, μ_1) le coordinate del centro di un cerchio Γ' , e con (λ_2, μ_2) quelle di un suo punto generico, talchè la retta in esso tangente a Γ' ha l'equazione:

$$(33) \quad (x - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1) + (y - \mu_2)(\mu_2 - \mu_1) = 0.$$

I parametri $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ che quivi figurano, sono legati dalle:

$$(34) \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1,$$

$$(35) \quad (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2 = 1,$$

esprimenti rispettivamente che Γ' tocca internamente Γ , e che (λ_2, μ_2) è un punto di Γ' . Avuto riguardo alla (34), la (35) si scrive:

$$(36) \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 = 2(\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2);$$

questa e la (34) definiscono implicitamente μ_1 e μ_2 come funzioni rispettivamente della sola λ_1 e di λ_1, λ_2 . In definitiva, le varie rette di Σ son date dalla (33), al variare dei parametri λ_1 e λ_2 , che vi figurano direttamente e per il tramite di μ_1, μ_2 ; in virtù della (36), quest'ultima equazione può venire sostituita dalla

$$f(x, y; \lambda_1, \lambda_2) \equiv x(\lambda_2 - \lambda_1) + y(\mu_2 - \mu_1) - (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2) = 0.$$

Ora, dalle (34), (36) discende:

$$\frac{d\mu_1}{d\lambda_1} = -\frac{\lambda_1}{\mu_1}, \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1}{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}, \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} = -\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1},$$

onde risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} &= -(x + \lambda_2) - (y + \mu_2) \frac{d\mu_1}{d\lambda_1} + (y - \mu_1) \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_1} = \\ &= -x + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1} y + \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} &= (x - \lambda_1) + (y - \mu_1) \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} = x - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\mu_2 - \mu_1} y - \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}. \end{aligned}$$

Se si pone:

$$2\lambda_1 = \lambda_2 = x, \quad 2\mu_1 = \mu_2 = y,$$

si soddisfa alle

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0,$$

ed alla (36), mentre la (34) diventa l'equazione (32) di Γ ; però questo cerchio non è l'involuppo del sistema Σ , poichè dalle

$$2\lambda_1 = \lambda_2, \quad 2\mu_1 = \mu_2,$$

consegue

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0$$

identicamente rispetto alle variabili x ed y (n. 9).

16. Consideriamo nel piano il sistema continuo Σ delle ∞^2 coniche rappresentate al variare dei parametri λ_1 e λ_2 dall'equazione

$$(37) \quad f(x, y; \lambda_1, \lambda_2) \equiv \lambda_1^2 \{ (y+3)(y+4) + 2(x^2 - y^2) \cdot \lambda_2 + \alpha \cdot \lambda_2^2 \} + \\ + 2\lambda_1 \{ (x-3)(x-4) + (x+3)(x+4) \cdot \lambda_2 + \beta \cdot \lambda_2^2 \} + \\ + \{ (x^2 + y^2 - 25) + 2(y-3)(y-4) \cdot \lambda_2 + \gamma \cdot \lambda_2^2 \} = 0,$$

in cui α , β e γ sono polinomi di secondo grado in x , y , scelti genericamente. Dalla (37) si trae:

$$(38) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 \{ (y+3)(y+4) + 2(x^2 - y^2) \cdot \lambda_2 + \alpha \cdot \lambda_2^2 \} + \\ + 2 \{ (x-3)(x-4) + (x+3)(x+4) \cdot \lambda_2 + \beta \cdot \lambda_2^2 \} \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 2\lambda_1^2 \{ (x^2 - y^2) + \alpha \cdot \lambda_2^2 \} + 2\lambda_1 \{ (x+3)(x+4) + 2\lambda_2 \cdot \beta \} + \\ + 2 \{ (y-3)(y-4) + \gamma \cdot \lambda_2 \}.$$

Per $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la (37) rappresenta il cerchio

$$(39) \quad x^2 + y^2 = 25,$$

che passa (semplicemente) pel punto P di coordinate $x=3$, $y=4$. In virtù delle (38), per

$$(40) \quad x=3, \quad y=4, \quad \lambda_1=0, \quad \lambda_2=0,$$

risulta altresì

$$(41) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0.$$

ed inoltre per $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, si ha:

$$(42) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 2(x-3)(x-4), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 2(y-3)(y-4).$$

Da qui discende facilmente che P è un punto caratteristico principale del dato sistema, relativo alla curva (39). Basta invero in base al n. 9 osservare, che la funzione y della x definita implicitamente dalla (39) nell'intorno di P , non può soddisfare **identicamente** all'equazione

$$\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0$$

in cui si ponga $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, tranne che per $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; ed infatti le (42) mostrano che quest'equazione rappresenta un fascio di coniche, avente un punto base nel punto $x=y=3$, non situato sul cerchio (39).

Un calcolo facile mostra che nel punto (40) l'hessiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_2^2} \end{vmatrix}$$

risulta diverso da zero, solo che per $x=3$, $y=4$ si supponga $\gamma \neq \frac{63}{2}$. In tale ipotesi le (41) definiscono nell'intorno di quel punto le λ_1 , λ_2 come funzioni delle x , y ; sostituendo nella (37) alle λ_1 , λ_2 queste funzioni, si ottiene l'equazione di una curva Γ passante per P , che fa certamente parte dell'involuppo di Σ .

Determineremo nel modo più semplice tale equazione, procedendo così. Ricaviamo λ_1 dalla prima delle (41), e sostituiamo nella (37) e nella restante equazione (41). Avuto riguardo alle (38), riducendo a forma intera abbiamo:

$$(43) \quad \{(x-3)(x-4) + (x+3)(x+4) \cdot \lambda_2 + \beta \cdot \lambda_2^2\}^2 - \\ - \{(y+3)(y+4) + 2(x^2 - y^2) \cdot \lambda_2 + \alpha \cdot \lambda_2^2\} \times \\ \times \{(x^2 + y^2 - 25) + 2(y-3)(y-4) \cdot \lambda_2 + \gamma \cdot \lambda_2^2\} = 0$$

$$(44) \quad \{(x^2 - y^2) + \alpha \cdot \lambda_2^2\} \{(x-3)(x-4) + (x+3)(x+4) \cdot \lambda_2 + \beta \cdot \lambda_2^2\}^2 - \\ - \{(x+3)(x+4) + 2\lambda_2 \cdot \beta\} \{(x-3)(x-4) + (x+3)(x+4) \cdot \lambda_2 + \beta \cdot \lambda_2^2\} \times \\ \times \{(y+3)(y+4) + 2(x^2 - y^2) \cdot \lambda_2 + \alpha \cdot \lambda_2^2\} + \\ + \{(y-3)(y-4) + \gamma \cdot \lambda_2^2\} \{(y+3)(y+4) + 2(x^2 - y^2) \cdot \lambda_2 + \alpha \cdot \lambda_2^2\}^2 = 0.$$

I termini di queste equazioni indipendenti da λ_2 , valgono rispettivamente:

$$(x-3)^2(x-4)^2 - (y+3)(y+4)(x^2 + y^2 - 25)$$

e

$$(x^2 - y^2)(x-3)^2(x-4)^2 - (x+3)(x+4)(x-3)(x-4)(y+3)(y+4) + \\ + (y-3)(y-4)(y+3)^2(y+4)^2,$$

ed è facile verificare che il secondo differisce dal primo solo pel fattore $x^2 - y^2$. Se dunque sommiamo a membro a membro le (43), (44), dopo avere moltiplicati ambo i membri della prima per $-(x^2 - y^2)$, otteniamo un'equazione del tipo:

$$(45) \quad \lambda_2[A_0 + A_1\lambda_2 + A_2\lambda_2^2 + A_3\lambda_2^3 + A_4\lambda_2^4 + A_5\lambda_2^5] = 0,$$

ove le A son polinomi di 6° grado nelle x , y , che non occorre precisare: basta solo osservare che per $x=3$, $y=4$ risulta $A_0 \neq 0$, essendo per ipotesi $\gamma \neq \frac{63}{2}$.

La funzione λ_2 delle x , y definita implicitamente dalla (45), che si annulla per $x=3$, $y=4$, è dunque

$$\lambda_2 \equiv 0;$$

in corrispondenza le (41) forniscono concordemente

$$\lambda_1 = -\frac{(x-3)(x-4)}{(y+3)(y+4)},$$

e sostituendo nella (37) si ha l'equazione dell'involuppo Γ cercato di Σ :

$$(46) \quad (y+3)(y+4)(x^2+y^2-25) - (x-3)^2(x-4)^2 = 0;$$

esso è una quartica piana passante semplicemente per P , ed ivi tangente al cerchio (39).

Possiamo ora mostrare che, distribuite le curve di Σ negli ∞^4 sistemi semplicemente infiniti Σ' che si hanno dando a λ_2 valori costanti, ciascuno di questi ammette un involuppo Γ' : e la quartica (46) non fa parte dell'involuppo delle Γ' . Invero le Γ' son quartiche piane che si rappresentano al variare del parametro λ_2 coll'equazione

$$\{(y+3)(y+4) + 2(x^2 - y^2) \cdot \lambda_2 + \alpha \cdot \lambda_2^2\} \{(x^2 + y^2 - 25) + 2(y-3)(y-4)\lambda_2 + \gamma \cdot \lambda_2^2\} - \\ - \{(x-3)(x-4) + (x+3)(x+4) \cdot \lambda_2 + \beta \cdot \lambda_2^2\}^2 = 0;$$

questa è del tipo:

$$[(y+3)(y+4)(x^2+y^2-25) - (x-3)^2(x-4)^2] + \\ + B(x,y) \cdot \lambda_2^2 + C(x,y) \cdot \lambda_2^3 + D(x,y) \cdot \lambda_2^4 = 0,$$

e quindi analoga alla (5) del n.° 6. Da ciò che si è detto quivi a proposito del sistema continuo (5), segue l'asserto.

17. Ai n.° 15 e 16 abbiám fatto vedere che il secondo teorema del n.° 14 — ivi dimostrato per sistemi Σ generali — può cadere in difetto in casi speciali. Ci proponiamo ora — sotto analoga riserva — di dare un'ulteriore estensione di detto teorema, provando che:

Dato un sistema $\Sigma \infty^r$, si distribuiscano le sue curve in ∞^p sistemi continui Σ' di dimensioni $r - p$, ciascuno dei quali abbia una curva involuppo Γ' , di rango σ ($1 \leq \sigma \leq r - p$); se queste ∞^p curve Γ' ammettono alla loro volta un involuppo Γ di rango τ ($1 \leq \tau \leq p$), in generale questo fa parte dell'involuppo di Σ , e come tale ha il rango $\sigma + \tau - 1$.

Per stabilire questa proposizione, consideriamo entro a Σ un generico sistema Ξ di dimensione $d = r - \sigma + 1$; esso vien intersecato dai vari Σ' secondo ∞^p sistemi continui ∞^{d-p} , che ammettono come involuppi di rango 1 le relative curve Γ' (n.° 12, Oss.). In base al surricordato teorema del n.° 14,

la curva Γ , involuppo di rango τ del sistema delle Γ' , è pure involuppo di rango τ di Ξ . Se distribuiamo genericamente le curve di Ξ in $\infty^{\tau-1}$ sistemi continui Ξ' , di dimensione $d - \tau + 1$, ciascuno di questi ammette Γ come involuppo di **rango 1** (n.° 12, Oss.); facendo descrivere a Ξ entro Σ un sistema $\infty^{\sigma-1}$, otteniamo così la ripartizione delle curve di Σ in $\infty^{\sigma+\tau-2}$ sistemi Ξ' , tutti aventi Γ come involuppo di rango 1. In base al teorema dato alla fine del n. 13, da qui segue appunto che Γ fa parte dell'involuppo di Σ , col rango $\sigma + \tau - 1$.

18. Possiamo ora facilmente provare il fatto enunciato al principio del n.° 14. Se un sistema continuo Σ ammette una curva Γ involuppo, di rango uguale alla dimensione r del sistema, ogni punto P di Γ è caratteristico principale per ∞^{r-1} curve di Σ , che risultan tangenti in P alla linea Γ (n.° 10): dunque **tutte** le curve di Σ toccano Γ . Reciprocamente, avendo *un sistema* $\Sigma \infty^r$ di curve tangenti in punti variabili ad una linea fissa Γ , questa fa parte dell'involuppo di Σ , e come tale ha il rango r ; ciò discende da una nota proprietà differenziale, e può anche stabilirsi in base al teorema dato alla fine del n.° 13, distribuendo le curve di Σ in ∞^{r-1} sistemi semplicemente infiniti aventi Γ come involuppo. Così intanto abbiamo modo di costruire il più generale sistema avente una curva involuppo di rango uguale alla dimensione del sistema.

Per ottenere *un sistema continuo* ∞^r , che ammetta una curva involuppo di rango k ($1 \leq k \leq r$), basta prender nel piano un sistema Σ' di dimensione k , avente una curva involuppo Γ' di rango k . Se Σ' varia nel piano con continuità in modo generico, assumendo ∞^{r-k} posizioni, e generando un sistema continuo $\Sigma \infty^r$, la curva Γ' descrive un sistema continuo che ammette una curva involuppo Γ di rango 1 (n.° 11); in base al teorema del numero precedente, Γ fa parte dell'involuppo di Σ , e come tale ha il rango k voluto.

19. Ci resta da ultimo da considerare il caso in cui l'involuppo si riduce ad un gruppo di punti.

Un *punto isolato* dell'involuppo, avente il rango uguale alla dimensione del sistema, è comune a **tutte** le curve del medesimo (n.° 10). Per ottenere *un sistema* ∞^r con un involuppo costituito da un numero discreto di punti, di rango k ($1 \leq k \leq r$), basta dunque, se $k = r$, prendere un sistema continuo con un gruppo di punti base (semplici). Per $r > k$, basta per es. considerare il sistema rappresentato dalla:

$$(47) \quad f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) \equiv \varphi_0 + 2\lambda_1\varphi_1 + \dots + 2\lambda_r\varphi_r + \lambda_1^2\psi_1 + \dots + \lambda_{r-k}^2\psi_{r-k} = 0,$$

ove le φ, ψ son funzioni delle x, y tali che le curve:

$$(48) \quad \varphi_{r-k+1} = 0, \dots, \varphi_r = 0, \quad \varphi_0 - \frac{\varphi_1^2}{\psi_1} - \dots - \frac{\varphi_{r-k}^2}{\psi_{r-k}} = 0,$$

abbiano un gruppo I di punti a comune.

La coesistenza delle

$$(49) \quad \begin{aligned} f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} &\equiv 2(\varphi_1 + \lambda_1 \psi_1) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_{r-k}} \equiv 2(\varphi_{r-k} + \lambda_{r-k} \psi_{r-k}) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda_{r-k+1}} &\equiv 2\varphi_{r-k+1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_r} \equiv 2\varphi_r = 0, \end{aligned}$$

conduce alle condizioni

$$(50) \quad \lambda_1 = -\frac{\varphi_1}{\psi_1}, \dots, \lambda_{r-k} = -\frac{\varphi_{r-k}}{\psi_{r-k}}$$

ed alle (48). Per ipotesi queste ultime son soddisfatte nei punti di I , i quali effettivamente sono *punti caratteristici principali per ∞^k curve del sistema* (47), in quanto in essi le (49) coesistono dando alle $\lambda_{r-k+1}, \dots, \lambda_r$ valori arbitrari, le altre λ essendo determinate dalle (50); e si può d'altro lato supporre che nei punti suddetti non si annulli la matrice considerata al n.° 9, stante l'arbitrarietà della scelta delle funzioni φ e ψ .

Rileviamo infine che *un sistema continuo può anche non ammetter nessun punto caratteristico principale*. Tale è ad es. il sistema (47), nell'ipotesi che le curve (48) non abbiano punti a comune. Un altro esempio notevole è dato da un sistema di curve piane, che sia mutato in sé da un gruppo continuo transitivo di collineazioni.

V.

20. Termineremo coll'estendere l'*Osservazione 1.^a* del n. 9, il che ci permetterà (n. 21) di trasportare alle equazioni differenziali alle derivate ordinarie d'ordine qualunque, un noto risultato relativo all'*integrale singolare* delle equazioni differenziali del primo ordine.

Accanto al solito sistema continuo ∞^r di curve (1), consideriamone un altro, pure ∞^r ,

$$(51) \quad F(x, y; \mu_1, \dots, \mu_r) = 0,$$

e supponiamo che si possa passare dal primo al secondo effettuando sui parametri una trasformazione contenente pure le x, y , cioè del tipo:

$$(52) \quad \lambda_1 = \lambda_1(x, y; \mu_1, \dots, \mu_r), \dots, \lambda_r = \lambda_r(x, y; \mu_1, \dots, \mu_r).$$

Ebbene, se il sistema continuo (1) ammette un involuppo di rango k , lungo cui lo Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_r}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_r}{\partial \mu_r} \end{vmatrix}$$

non si annulla, in generale esso fa parte altresì dell'involuppo del sistema (51), e collo stesso rango k .

Per stabilire questo fatto, basta osservare che, in forza delle (52), risulta

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_1} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \mu_r} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mu_r},$$

onde, essendo $J \neq 0$, le (1), (3) **equivalgono** alle

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu_1} = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu_r} = 0;$$

precisamente, in virtù delle (52), si ha una corrispondenza biunivoca e continua fra le soluzioni $(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ del primo sistema, e le soluzioni $(x, y, \mu_1, \dots, \mu_r)$ del secondo, due soluzioni omologhe avendo **gli stessi valori per le x, y** . Se per una $(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ delle prime risulta p. es. $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, per la soluzione $(x, y, \mu_1, \dots, \mu_r)$ corrispondente si ha pure $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, essendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y}.$$

Le condizioni ulteriori perchè si abbia effettivamente un involuppo, possono esprimersi mediante disuguaglianze (n. 9); e possiamo supporre ch'esse siano soddisfatte, stante l'ammessa genericità delle funzioni considerate.

21. Dimostreremo ora che:

Data un'equazione differenziale alle derivate ordinarie di ordine r qualsiasi:

$$(53) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(r)}) = 0,$$

si può, in generale, determinare l'involuppo del sistema continuo ∞^r costituito dalle sue curve integrali, senza che per ciò occorra integrare l'equazione stessa. Basta all'uopo interpretare nella (53) le $y', y'', \dots, y^{(r)}$

come parametri, e trovare l'involuppo del sistema continuo ∞^r di curve piane che così si ottiene; gli involuppi dei due sistemi ∞^r hanno anzi lo stesso rango.

Se infatti

$$(54) \quad f(x, y; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0$$

è l'integrale generale della (53), la (53) stessa può notoriamente ottenersi eliminando i parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ fra la (54) e le

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \\ (55) \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \frac{\partial^r f}{\partial x^r} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u} y^{(r)} = 0. \end{aligned}$$

Solo che si supponga $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, queste equazioni forniscono le $y', \dots, y^{(r)}$ in funzione delle $x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_r$. In generale le (55) potranno pure risolversi rispetto a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, ottenendosi questi parametri espressi mediante le $x, y, y', \dots, y^{(r)}$: e la (53) si ha appunto sostituendo nella (54) a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tali espressioni. In base al numero precedente (i parametri $\mu_1, \dots, \mu_r$ son ora sostituiti da $y', \dots, y^{(r)}$!), si conclude nel modo enunciato.