Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo.

Memoria di ENEA BORTOLOTTI (a Cagliari).

Sunto. - *La I Parte di questo lavoro contiene svariati complementi alla teoria delle varietà a connessione affine, relativi particolarmente a una nuova e più completa sistemazione della teoria degli invarianti differenziali di una tale connessione nel caso generale (asimmetrico). La II Parte svolge la teoria invariantiva delle trasformazioni di una connessione affine che conservano il parallelismo, riconducendola allo studio degli invarianti differenziali di una connessione di tipo particolare intrinsecamente legata a quella data.*

1. **Introduzione.** — Lo studio delle trasformazioni fra varietà curve che conservano il parallelismo — che indicheremo sempre nel seguito, per brevità, con T_p — è stato iniziato nel 1920 dal BOMPIANI (**9** ([1])), che ha considerato il caso delle *varietà riemanniane*: in questo caso le trasformazioni cercate sono quelle in cui sono invarianti tutti i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie, $\left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\}$ (relativi al tensore fondamentale della metrica), e la determinazione di tali trasformazioni T_p si compie agevolmente utilizzando i noti risultati del LEVI-CIVITA sulle trasformazioni geodetiche ([2]).

Pel caso delle varietà a connessione affine *simmetrica*, cioè definita da parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ tali che $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$, l'analogo risultato (invarianza dei parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ nelle T_p) è banale giacchè le $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ $\left(\text{a differenza di quanto accade per le } \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\}\right)$ *determinano* la geometria nella varietà supposta: onde le T_p si riducono alla sola identità.

Ciò non accade pel caso più generale delle connessioni *asimmetriche*. Questo caso (insieme a quello, ancor più generale, delle connessioni *non*

([1]) Questo numero — l'avvertenza valga anche pel seguito — si riferisce all'indice bibliografico.

([2]) BOMPIANI, l. c., p. 348 e seg.; LEVI-CIVITA, **3**, 1896; RICCI e LEVI-CIVITA, **5**, 1900, pp. 187-190.

lineari) è stato preso in considerazione nel 1925 da H. FRIESECKE [3], che ha determinato la forma generale delle trasformazioni T_p per tali connessioni. Il problema è stato ripreso e trattato più ampiamente nel 1926 da J. M. THOMAS [4], che ha indicato svariati tensori invarianti in quelle trasformazioni, e anche un processo con cui da essi si possono ricavare infiniti altri tensori dotati della stessa proprietà. I più notevoli risultati di queste ricerche, con alcuni completamenti, sono stati esposti da EISENHART nella sua *Non-Riemannian Geometry* [5]. Mancava però finora una *teoria invariantiva* generale delle trasformazioni T_p di una connessione affine: cioè, dei mutamenti della connessione — il che vale a dire, della legge di trasporto dei *vettori* — che mantengono inalterata la legge di trasporto delle direzioni.

Appunto di questa teoria [6] io voglio qui esporre gli elementi. Il risultato fondamentale è questo: che *una data connessione affine ne determina univocamente un' altra, invariante per le trasformazioni* $\mathrm{T_p}$; tale connessione invariante [7], che d' altra parte è essa stessa una delle trasformate (per le T_p) della connessione assegnata, ha una semplice caratterizzazione geometrica: *e gli invarianti differenziali della data connessione per le trasformazioni* $\mathrm{T_p}$ *in parola sono tutti e soli gli invarianti differenziali di quella connessione invariante.*

La ricerca del significato geometrico della connessione invariante, e di una sistemazione conveniente della teoria degli invarianti differenziali (per le T_p) mi ha condotto a sviluppare alcune considerazioni di carattere generale sulle connessioni affini, apportando così, spero, a questa teoria generale [8] qualche utile contributo. Appunto da queste considerazioni sulle connessioni affini in generale inizierò la mia esposizione: a cui premetterò una rapida indicazione degli argomenti trattati.

---

(3) Ved. **27**, 1925, pp. 105-109.

(4) Ved. **35** e **36**, 1926.

(5) **48**, 1927; ved. p. 29 e seg.

(6) che potremmo anche chiamare, secondo il FRIESECKE (**27**, p. 105) teoria dei *trasporti lineari delle direzioni.* (« Eine Gesamtheit von Vektorübertragungen, die bei der Uebertragung eines beliebigen Vektors längs einer beliebigen Kurve stets eine Vektorfolge *derselben* Richtungsfolge ergeben, soll zu dem einheitlichen Begriff einer « Richtungsübertragung » zusammengefasst werden »).

(7) in relazione semplice con la connessione affine *simmetrica* invariante notata da J. M. THOMAS: **36**, 1926, p. 668; come sarà precisato più innanzi (n.° 8).

(8) che con le applicazioni di CARTAN e SCHOUTEN alla teoria dei gruppi finiti continui di trasformazioni, e le recenti ricerche relativistiche di EINSTEIN, ha acquistato un interesse certo non minore di quella delle connessioni affini *simmetriche*, assai più studiate sino ad ora.

Dopo aver richiamato (n.° 2) svariate definizioni e teoremi, relativi specialmente alla *torsione* e alla *curvatura* di una varietà a connessione affine, che mi è necessario supporre noti nel seguito, introduco (n.° 3) due connessioni intrinsecamente legate a una data (quelle che io chiamo: *connessione coniugata*, e *connessione simmetrica associata*): e me ne valgo per ricavarne delle interpretazioni geometriche del *tensore di torsione* $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ e del *vettore di Einstein* $\Phi_\nu = S_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\nu}$. Gli elementi della connessione coniugata mi servono poi (n.° 4) anche nella trattazione del *problema dell'equivalenza* di due connessioni affini asimmetriche. Indi vengo (n.° 5) ad estendere a queste connessioni la nozione di *coordinate normali* (RIEMANN, VEBLEN); ciò serve di base per generalizzare anche le nozioni di *tensori normali*, di *estensioni* di un tensore; e per trarne dei teoremi generali *di riduzione*, e *di sostituzione*, che risolvono completamente il problema degli *invarianti differenziati* della connessione.

Qui ha termine la I Parte; la II Parte è dedicata all'argomento principale di questo lavoro, cioè alle *trasformazioni* (T_p) *che conservano il parallelismo*. Anzitutto io ritrovo (n.° 6) la forma generale di queste trasformazioni: ciò conduce a determinare un sistema invariante per le trasformazioni medesime, $L_{\mu\nu}^{\lambda}$, dal quale si passa agevolmente ai parametri $P_{\mu\nu}^{\lambda}$, di una *connessione affine* $(\nabla^{(p)})$ *invariante* per le T_p. Gli elementi di questa connessione sono sufficienti per esprimere tutti gli invarianti del primo ordine [e anche, come mostro più innanzi, degli altri ordini] per le T_p. In particolare si ritrovano le *componenti della connessione proiettiva* secondo T. Y. THOMAS, $\Pi_{\lambda\mu}^{\nu}$: ciò mi dà l'occasione di esporre (n.° 7) un processo, che mi pare abbastanza interessante, con cui la connessione affine viene ricostruita a partire dalle sue geodetiche, col fissare, successivamente, la scelta degli ulteriori elementi arbitrari da cui quella dipende. Vengo poi (n.° 8) a stabilire una notevole proposizione (*teorema fondamentale*), che riconduce la teoria invariantiva di una connessione affine per le T_p alla teoria degli invarianti differenziali della sua connessione $(\nabla^{(p)})$ invariante; e determino le espressioni di un primo gruppo di tensori (T_p)-invarianti differenziali del secondo ordine (tensori di curvatura), che indubbiamente sono tra i più notevoli, ma pel diverso punto di vista dei ricercatori precedenti, non si erano ancora presentati. Lo stesso può dirsi dei *tensori* (T_p)-*normali* (d'ordine ≥ 2) che introduco al seguente n.° 9: ove mi valgo delle nozioni e dei risultati esposti ai n.ⁱ 4, 5 per le connessioni affini in generale, per trarne la risoluzione del problema della trasformabilità di due connessioni affini l'una nell'altra con una trasformazione T_p ((T_p)-*equivalenza*): per estendere alla teoria attuale le *coordinate normali*, i *tensori normali*, le *estensioni*; e infine, per ricavare dai teoremi dati al n.° 5 dei *teoremi di riduzione e di sostituzione* per questa teoria (teoria invariantiva delle varietà a connessione affine per le T_p). Vengo poi ad indicare (n.° 10) altri tensori (T_p)-invarianti (del secondo ordine), tra i quali si ritrovano tutti quelli già noti: e a dare, di essi e degli altri prima indicati, delle interpretazioni geometriche (n.° 11). Particolarmente notevole è, mi sembra, il significato del tensore $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: il suo annullarsi esprime che nella supposta varietà vi è un *parallelismo assoluto delle direzioni*, pur senza che sia integrabile (in generale) il trasporto per equipollenza *dei vettori*: il che porta ad introdurre una « curvatura segmentaria » come nella metrica di WEYL.

Infine io mi occupo brevemente (n.° 12) di un importante sottogruppo del gruppo delle T_p: quello delle trasformazioni (T_{pc}) *che conservano il parallelismo e la curvatura*: indicando la forma particolare che per queste trasformazioni assume il teorema fondamentale della teoria invariantiva (cfr. n.° 8): e svolgo poi alcune considerazioni sui casi particolari in cui la varietà della quale trasformiamo la connessione affine mediante uno T_{pc} sia *a curvatura nulla*, o più particolarmente, sia *uno spazio di gruppo*: il che conduce a stabilire una proprietà dei gruppi a connessione emisimmetrica.

PARTE PRIMA

Complementi sulle varietà a connessione affine (asimmetrica).

2. **Premessa: richiamo delle nozioni fondamentali sulle connessioni affini asimmetriche. I tensori di torsione e di curvatura.** — Rammentiamo [9] che la connessione affine (asimmetrica) più generale [10] è individuata dai suoi n^3 parametri, (o componenti), $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$, rispetto a un sistema di coordinate curvilinee x^ν (λ, μ, ν, τ, ω, $\varkappa$, ρ, $\sigma = 1, 2, \dots, n$): mediante i quali la legge del trasporto per equipollenza di un vettore controvariante o covariante si esprime:

$$\overline{d}\xi^\lambda = \nabla_\nu \xi^\lambda \cdot dx^\nu = d\xi^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\xi^\mu dx^\nu = 0, \tag{1}$$

$$\overline{d}\xi_\mu = \nabla_\nu \eta_\mu \cdot dx^\nu = d\eta_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\eta_\lambda dx^\nu = 0. \tag{2}$$

I primi membri sono i *differenziali cogredienti* [11] di ξ^λ o di η_μ: i quali ri-

---

(9) Ved. SCHOUTEN, **14**, 1922; **22**, 1924, p. 62 e seg.; EISENHART, **48**, 1927, p. 3 e seg,

(10) « überschiebungsinvariante lineare Uebertragung »: **22**, p. 67.

(11) HESSENBERG, **4**, 1899, p. 129. Cfr. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 63 (« kovariante Differential »).

sultano effettivamente cogredienti a ξ^λ e ad η_μ, rispettivamente, per una qualunque trasformazione

$$x^\nu = x^\nu(x'^1,\ x'^2, \ldots,\ x'^n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

delle coordinate curvilinee, pel fatto che i parametri $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ si suppongono variare, per una tale trasformazione, secondo le formule

$$\Gamma'^{\delta}_{\gamma\alpha} = \Gamma^\nu_{\lambda\omega} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Se P, $P_1 = P + dP$ (di coordinate x^λ, $x^\lambda + dx^\lambda$) sono due punti infinitamente vicini della A_n (cioè, della varietà supposta ([12])), la connessione determina una rappresentazione affine (omografia vettoriale) della stella di vettori (ad es. controvarianti) di A_n che ha centro in P sulla stella di vettori di centro P_1; nella quale al vettore ξ^λ corrisponde il vettore $\xi^\lambda_1 = \xi^\lambda + d\xi^\lambda$, le $d\xi^\lambda$ ricavandosi dalle (1). E anzi, la connessione dà luogo anche a una rappresentazione (o, se si vuole, ad un trasporto) affine dell'intero *spazio affine tangente* ([13]) ad A_n in P, Σ, sullo spazio affine tangente in P_1, Σ_1: nella quale al punto Q di Σ di coordinate cartesiane u^λ (nel sistema che ha P come origine, e i *vettori fondamentali* $\underset{\nu}{e}^\lambda$ del sistema x^ν ([14]) come vettori fondamentali degli n assi) corrisponde il punto Q_1 di Σ_1 che (nel sistema cartesiano analogamente fissato in Σ_1) ha le coordinate $u^\lambda + du^\lambda$, le du^λ ricavandosi dalle equazioni ([15])

$$du^\lambda + dx^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu = 0. \tag{5}$$

Come è noto i trasporti dei punti o dei vettori, così definiti, in generale *non sono integrabili*: e questa non-integrabilità si manifesta nell'esistenza dei tensori *di torsione*, $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, e *di curvatura* $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$. Precisamente: il divario dei valori finali e iniziali delle u^λ per effetto del trasporto, secondo le (5), lungo un ciclo infinitesimo Γ tracciato per P in A_n, su di una superficie tangente in P alla 2-direzione $(d_1P,\ d_2P)$ è dato ([16]) dalle formule

$$\rho D u^\lambda = 2 S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} d_1 x^\mu d_2 x^\nu + R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} d_1 x^\omega d_2 x^\mu u^\nu, \tag{6}$$

([12]) Indichiamo, secondo SCHOUTEN (che veramente aveva introdotto questa notazione pel solo caso delle connessioni affini *simmetriche*) con A_n una varietà n-dimensionale a connessione affine.

([13]) Ved. CARTAN, **20**, t. 40, 1923, p. 362.

([14]) cioè, i vettori controvarianti che nel sistema x^ν hanno le componenti $10\ldots0$, $010\ldots0$, $00\ldots01$ (vettori-unità, *Massvektoren*).

([15]) Cfr. **20**, t. 40, p. 361, form. (3).

([16]) Cfr. **20**, t. 40, p. 372, form. (5)'.

ove

$$S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}), \tag{7}$$

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\nu}_{\lambda\omega} - \frac{\partial}{\partial x^{\omega}}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\omega}\Gamma^{\nu}_{\varkappa\mu} - \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu}\Gamma^{\nu}_{\varkappa\omega} \tag{8}$$

e ρ è il rapporto fra l'area del parallelogrammo infinitesimo costruito (nello spazio affine tangente in P) su d_1P, d_2P e l'area racchiusa dal supposto ciclo. Le (6) definiscono, secondo il CARTAN, lo *spostamento affine associato al ciclo* Γ supposto: cioè, la rappresentazione affine dello spazio Σ su sè stesso determinata dal trasporto ciclico lungo Γ. Se il punto P per questo spostamento affine viene portato nel punto P_0 (di Σ) di coordinate cartesiane Du^{λ}_0, lo spostamento stesso può considerarsi come prodotto di una *traslazione* di Σ in sé, che porta P in P_0, per una *rotazione affine* di centro P_0 (affinità che ha P_0 come punto unito). Le componenti della traslazione associata al ciclo Γ sono le Du^{λ}_0, che si ricavano dalle (6) ponendovi $u^{\nu} = 0$:

$$\rho Du^{\lambda}_0 = 2S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda} d_1x^{\mu} d_2x^{\nu} = (\overline{d}_2 d_1 - \overline{d}_1 d_2)x^{\lambda}. \tag{9}$$

Naturalmente le (6) ci dànno subito anche la rotazione affine associata al ciclo. Conviene rappresentare questa rotazione affine mediante le formule dell'omografia vettoriale che essa subordina sul corpo dei vettori di Σ: formule che possono anche ricavarsi direttamente dalle (1) per integrazione lungo il ciclo:

$$\rho D\xi^{\lambda} = R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda} d_1x^{\omega} d_2x^{\mu}\xi^{\nu} = (\overline{d}_2\overline{d}_1 - \overline{d}_1\overline{d}_2)\xi^{\lambda}; \tag{10}$$

ove le $D\xi^{\lambda}$ sono gli incrementi delle componenti di un vettore ξ^{λ} pel trasporto ciclico per equipollenza (relativo ad A_n) lungo il ciclo supposto. Le (9), (10) esprimono in modo preciso l'accennata relazione fra i tensori di torsione e di curvatura, e la non-integrabilità dei sistemi differenziali (1), (5): e dànno una interpretazione geometrica dei due tensori in relazione con un ciclo infinitesimo qualunque. Se abbiamo riguardo all'eguaglianza tra i secondi e i terzi membri, le (9), (10) dànno anche un'altra interpretazione dei due tensori in relazione con un parallelogrammo infinitesimo: che però è sostanzialmente un caso particolare della precedente ([17]).

Ricorderò ancora che se $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda} = 0$ la connessione affine si dice *simmetrica*

([17]) Pel tensore di torsione ved. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 68. Pel tensore di curvatura ved. LEVI-CIVITA, **30**, 1925, p. 201.

(o *senza torsione*); se

$$(11) \qquad S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \delta^\lambda_{[\mu}\varphi_{\nu]} = \frac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu\varphi_\nu - \delta^\lambda_\nu\varphi_\mu) \quad ({}^{18})$$

ove φ_ν è un arbitrario vettore covariante, *emisimmetrica*: se $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ è qualunque, *asimmetrica*. Le varietà a connessione simmetrica sono caratterizzate, come mostrano le (9), dalla « *condizione di commutabilità* » ([19]). Per tali varietà sussiste pure — ciò è ovvia conseguenza della commutabilità — il noto teorema di SEVERI ([20]), sotto la forma seguente: *pel trasporto parallelo infinitesimale la direzione trasportata resta tangente alla superficie geodetica iniziale*. Ma tale proprietà *non è caratteristica delle varietà a connessione simmetrica, bensì di quelle a connessione emisimmetrica*, come mostreremo più innanzi (n.° 6). Intenderemo d'ora in poi (salvo avviso contrario) di riferirci al caso più generale, delle connessioni affini asimmetriche.

3. Connessioni coniugate, connessione simmetrica associata. Interpretazioni geometriche di alcuni tensori. — In una varietà a connessione affine ∇

([18]) Qui e nel seguito è da intendersi che $\delta^\lambda_\mu = 0$ per $\lambda \neq \mu$, $\delta^\lambda_\lambda = 1$ (non somm.). Adotto per questo tensore la notazione δ^λ_μ che è quasi generalmente seguita (LEVI-CIVITA, EINSTEIN, WEYL, EISENHART, VEBLEN ..). Ricorderò che questo tensore (che gli Americani chiamano: *Kronecker's delta*) è indicato con A^λ_μ da SCHOUTEN (*Einheitsaffinor*). Nei miei precedenti lavori l'avevo indicato con a^λ_μ, in accordo con la notazione $a_{\lambda\mu}$ usata (da me e da quasi tutti in Italia, seguendo il BIANCHI) pel tensore fondamentale della metrica in V_n riemanniana: le δ^λ_μ sono le componenti miste di detto tensore.

Il simbolo [ ], che ho usato nelle (11), (7), e di cui farò uso anche nel seguito, rappresenta l'operazione dell'*alternare* rispetto al gruppo d'indici racchiuso da quelle parentesi: e ( ), usato più innanzi (ad es. nella form. (21)) rappresenta l'operazione del *mischiare* rispetto agli indici che le parentesi contengono. (Ved. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 25). Rammenterò che il *mischiare* [l'*alternare*] rispetto a un gruppo d'indici $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m$ (tutti di covarianza o di controvarianza) di un dato tensore è l'operazione che consiste nel ricavare dal tensore supposto un nuovo tensore la cui componente generica è la media aritmetica di tutte le componenti del dato tensore in cui gli indici supposti hanno i medesimi valori numerici a meno dell'ordine: ciascuna presa col suo segno [col suo segno o col segno cambiato secondo che la permutazione che vi presentano gli indici di quel gruppo ha classe eguale od opposta a quella della permutazione degli indici medesimi nella componente (del nuovo tensore) che vogliamo costruire]. Ad es. $a_{(\lambda\mu)} = \frac{1}{2}(a_{\lambda\mu} + a_{\mu\lambda})$; $a_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2}(a_{\lambda\mu} - a_{\mu\lambda})$; $A_{[\lambda\mu}B_{\nu]} = \frac{1}{3!}(A_{\lambda\mu}B_\nu + A_{\mu\nu}B_\lambda + A_{\nu\lambda}B_\mu - A_{\mu\lambda}B_\nu - A_{\nu\mu}B_\lambda - A_{\lambda\nu}B_\mu)$.

([19]) WEYL, **7**, 1918, p. 390; LEVI-CIVITA, **30**, 1925, pp. 133-135.

([20]) SEVERI, **6**, 1917 pp. 254-256; ved. anche BOMPIANI, **10**, 1921, pp. 363-365; LEVI-CIVITA, **30**, 1925, pp. 194-195.

assegnata ([21]) possiamo considerare altre due connessioni affini ∇^* e $\nabla^{(b)}$ intrinsecamente legate alla primitiva. Anzitutto: siano P_1, Q due qualunque punti infinitamente vicini al punto P in A_n. *Diremo che i vettori infinitesimi* $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{QQ_1}$ *sono equipollenti lungo* PQ *per la connessione* ∇^* ((∇^*)-equipollenti) *se* $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}$ *sono equipollenti lungo* PP_1 *per la connessione* ∇ ((∇)-equipollenti) ([22]). È evidente a priori, per la *linearità* del trasporto, che questa condizione basta a definire la connessione ∇^*; del resto le (9) mostrano, tenuto conto che è per definizione (posto $\overrightarrow{PP}_1 = d_1P$, $\overrightarrow{PQ} = d_2P$)

$$(\overline{d}_1 d_2 - \overline{d}_2^* d_1) x^\lambda = 0, \qquad (\overline{d}^* = dx^\lambda \nabla_\lambda^*) \tag{12}$$

che detti $\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu}$ i parametri di tale connessione, si ha

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}, \tag{13}$$

onde

$$\Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}, \quad S^{*\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu} = -S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}. \tag{14}$$

Di qui e anche dalla stessa definizione segue che la relazione fra le connessioni ∇, ∇^* è *reciproca*: diremo che esse sono *coniugate* l'una all'altra. Esse coincidono se ∇ è simmetrica, e allora soltanto; esse hanno in ogni caso le stesse linee geodetiche (autoparallele).

Mediante la considerazione della connessione coniugata, ∇^*, a una data ∇ si ha la seguente interpretazione geometrica dei *tensore di torsione*: siano P, P_1 due punti infinitamente vicini in A_n; Σ e Σ_1 siano gli spazi affini ivi tangenti ad A_n. Siano α, α^* le affinità (omografie vettoriali) che trasformano i vettori di Σ in quelli di Σ_1 secondo le leggi di trasporto per equipollenza corrispondenti alle connessioni ∇ e ∇^*, e quindi $\beta = \alpha^*\alpha^{-1}$ la trasformazione affine in Σ, nella quale si corrispondono due vettori equipollenti secondo ∇ e ∇^*, lungo PP_1, a uno stesso vettore di Σ_1. *Le* $\delta^\lambda_\mu + 2S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda}dx^\nu$ *sono i coefficienti dell'affinità* β. E in particolare, posto

$$\Phi_\nu = S_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\lambda}, \tag{15}$$

vediamo che è

$$1 + 2\Phi_\nu dx^\nu \tag{16}$$

il *modulo* della stessa affinità β. Il vettore Φ_ν è stato preso in considerazione

---

([21]) Contrassegniamo la connessione affine col simbolo della corrispondente derivazione covariante.

([22]) Cfr. CARTAN, **42**, 1927, p. 52 e il mio lavoro **55**, 1929, p. 50 (caso degli *spazi di gruppo*).

recentemente da EINSTEIN ([23]) (con riferimento a una particolare connessione affine, anzi euclidea, *integrabile*) per la rappresentazione del potenziale elettromagnetico. Perciò lo chiamerò *vettore di Einstein* per la connessione ∇. Si ha dunque una interpretazione geometrica di questo vettore ([24]), e particolarmente, del suo *annullarsi*: le *connessioni affini per le quali il vettore di Einstein si annulla sono quelle per le quali le trasformazioni affini del corpo di vettori dello spazio affine tangente in un punto* P *per effetto dei trasporti per equipollenza da* P *a un punto infinitamente vicino* P′ *relativi alla supposta connessione e alla sua coniugata hanno lo stesso modulo* ([25]).

([23]) **52**, 1928, p. 225, form. (2).

([24]) Un'altro significato geometrico, pel caso particolare della connessione integrabile di WEITZENBÖCK-VITALI, utilizzata da EINSTEIN, ho indicato altrove: ved. **56**, 1929, p. 536. Cfr. anche LEVI-CIVITA, **57**, 1929, p. 141. Il CARTAN ha pure indicato (**20**, t. 42, 1925, pp. 33-34) una interpretazione del vettore Φ_ν, che è in relazione con le form. (9). Si noti che il *vettore di Einstein* Φ_ν coincide col « secondo tensore irriduttibile di torsione » che il CARTAN indica con $\mathfrak{T}'$: mentre il « primo tensore irriduttibile di torsione », $\mathfrak{T}$, può identificarsi col tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ di cui sarà detto più innanzi (n.° 6).

([25]) Accennerò ancora ad altre interpretazioni pel tensore $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ e pel vettore Φ_ν. Una di queste, in relazione coi *vettori fondamentali* di un sistema coordinato (arbitrario) risulta ovviamente dalla formula

$$\text{(a)} \qquad S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} \underset{\omega}{e^\mu} \underset{\tau}{e^\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{d}\underset{\omega}{e^\lambda}}{ds_\tau} - \frac{\bar{d}\underset{\tau}{e^\lambda}}{ds_\omega}\right). \qquad \left(\frac{\bar{d}}{ds_\tau} = \underset{\tau}{e^\mu}\nabla_\mu\right)$$

Più in generale, siano $\underset{i}{X^\lambda}(i, j, l = 1, 2, ..., n)$ n campi di vettori controvarianti indipendenti qualunque, sotto la sola condizione che gli n campi di vettori covarianti $\overset{i}{X_\lambda}(i = 1, 2, ..., n)$ che essi determinano univocamente mediante le condizioni $\overset{i}{X_\lambda}\underset{i}{X^\mu} = \delta_\lambda^\mu$ siano n *campi di gradienti*: $\overset{i}{X_\lambda} = \frac{\partial \overset{i}{\varphi}}{\partial x^\lambda}$. Si ha

$$\text{(b)} \qquad S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} \underset{i}{X^\mu} \underset{j}{X^\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{d}\underset{i}{X^\lambda}}{ds_j} - \frac{\bar{d}\underset{j}{X^\lambda}}{ds_i}\right). \qquad \left(\frac{\bar{d}}{ds_i} = \underset{i}{X^\lambda}\nabla_\lambda\right)$$

Dalle (b) si ha anche

$$\text{(c)} \qquad \Phi_\lambda \underset{i}{X^\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{d}\underset{i}{X^\lambda}}{ds_j} - \frac{\bar{d}\underset{j}{X^\lambda}}{ds_i}\right)\overset{j}{X_\lambda}$$

onde risulta un nuovo significato del vettore Φ_ν. Si noti infine che la componente generica Φ_ν di tale vettore è anche la differenza fra gli *invarianti primi* Γ_ν e Γ_ν^* [ved. (17)] delle omografie vettoriali che mutano gli n *vettori fondamentali* $\underset{1}{e}, \underset{2}{e}, ..., \underset{n}{e}$ rispettivamente in $\frac{\bar{d}\underset{1}{e}}{ds_\nu}, \frac{\bar{d}\underset{2}{e}}{ds_\nu}, ..., \frac{\bar{d}\underset{n}{e}}{ds_\nu}$ e in $\frac{\bar{d}\underset{\nu}{e}}{ds_1}, \frac{\bar{d}\underset{\nu}{e}}{ds_2}, ..., \frac{\bar{d}\underset{\nu}{e}}{ds_n}$. $\left(\frac{\bar{d}}{ds_\tau} = \underset{\tau}{e^\mu}\nabla_\mu\right)$.

Naturalmente il modulo di β è anche il rapporto tra i moduli di α^* e di α, ma è opportuno notare che, mentre il primo è *invariante*, non lo sono gli altri due, dati da

$$(17) \qquad 1+\Gamma^*_\nu dx^\nu = 1+\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}dx^\nu, \quad 1+\Gamma_\nu dx^\nu = 1+\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}dx^\nu.$$

In effetto Γ_ν (e così Γ^*_ν) *non è un vettore covariante*: per una trasformazione (3) esso si trasforma secondo la legge

$$(18) \qquad \Gamma'_\alpha = \Gamma_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial x'^\alpha}$$

ove

$$(19) \qquad \theta = \log \Delta = \log \left| \frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)} \right|.$$

Si noti che le (18) esprimono che Γ_ν, per una trasformazione (3) sulle x^ν, varia come $\dfrac{\partial \log f}{\partial x^\nu}$, ove f è un arbitrario scalare *invariante relativo, di peso* 1 ([26]).

Definiamo poi una *connessione simmetrica*, che diremo *associata* a ∇, e che indicheremo con $\nabla^{(b)}$, nel seguente modo: siano ξ_1, $\overset{*}{\xi}_1$ i vettori (∇)- e (∇^*)-equipollenti, in P_1, al vettore (controvariante) ξ uscente da P, pel trasporto infinitesimale da P in P_1: assumeremo il vettore

$$(20) \qquad \xi^{(b)} = \frac{1}{2}(\xi_1 + \overset{*}{\xi}_1)$$

(di cui risulta ovvia la costruzione geometrica) come equipollente a ξ pel trasporto lungo PP_1 relativo alla nuova connessione ([27]). Si ha subito per questa

$$(21) \qquad B^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^{(b)\lambda}_{\ \ \nu\mu} = \Gamma^{(b)\lambda}_{\ \ \nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \Gamma^{*\lambda}_{\ \mu\nu} + S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}),$$

$$(22) \qquad S^{(b)\cdot\cdot\lambda}_{\ \ \mu\nu} = 0.$$

Dunque si tratta in effetto di una connessione *simmetrica*: che ha ancora le stesse geodetiche della connessione primitiva. La derivazione covariante $\nabla^{(b)}$, di parametri $B^\lambda_{\mu\nu}$, che le corrisponde è già stata usata da J. M. THOMAS (**36**, 1926, p. 661), da EISENHART (**48**, 1927, p. 11 e seg.) e da altri in ricerche sulle connessioni affini generali. L'interesse di questa connessione $\nabla^{(b)}$ sta

([26]) Sul significato geometrico di Γ_ν si veda: VEBLEN e J. M. THOMAS, **37**, 1926, pp. 294-295. Ved. anche il n.° 7 di questo lavoro.

([27]) Cfr. CARTAN, **42**, 1927, p. 59 (pel caso degli *spazi di gruppo*).

specialmente nel fatto che *gli invarianti differenziali della connessione affine* (asimmetrica) ∇ *sono tutti e soli gli invarianti differenziali simultanei della connessione simmetrica associata* $\nabla^{(b)}$ *e del tensore di torsione* $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ ([28]). Cosicchè la teoria degli invarianti delle connessioni asimmetriche si può ricondurre a quella delle connessioni simmetriche. Ma è altrettanto semplice, come mostrerò più innanzi (n.° 5), costruire direttamente la teoria relativa al caso generale.

In particolare il *tensore di curvatura* $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ della connessione ∇ si esprime per quello, $R^{(b)}{}_{\omega\mu\nu}{}^{\nu} = B_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ della connessione $\nabla^{(b)}$ e pel tensore di torsione $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ con la formula ([29])

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = B_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} + S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}, \tag{23}$$

ove

$$\begin{aligned} S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} &= \nabla^{(b)}_{\mu} S_{\lambda\omega}{}^{\nu} - \nabla^{(b)}_{\omega} S_{\lambda\mu}{}^{\nu} + S_{\lambda\omega}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\mu}{}^{\nu} - S_{\lambda\mu}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\omega}{}^{\nu} \\ &= \nabla_{\mu} S_{\lambda\omega}{}^{\nu} - \nabla_{\omega} S_{\lambda\mu}{}^{\nu} - S_{\lambda\omega}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\mu}{}^{\nu} + S_{\lambda\mu}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\omega}{}^{\nu} - 2 S_{\omega\mu}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\lambda}{}^{\nu}. \end{aligned} \tag{24}$$

Analogamente, detto $R^{*}{}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ il tensore di curvatura della connessione coniugata, ∇^{*},

$$R^{*}{}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\nu}_{\omega\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\omega}} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\varkappa}_{\omega\lambda} \Gamma^{\nu}_{\mu\varkappa} - \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} \Gamma^{\nu}_{\omega\varkappa}, \tag{25}$$

si ha:

$$\begin{aligned} R^{*}{}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} &= R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - 2\left(\nabla^{(b)}_{\mu} S_{\lambda\omega}{}^{\nu} - \nabla^{(b)}_{\omega} S_{\lambda\mu}{}^{\nu}\right) = \\ &= B_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - 2\left(S_{\lambda\mu}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\omega}{}^{\nu} - S_{\lambda\omega}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\mu}{}^{\nu}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

onde

$$\frac{1}{2}\left(R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - R^{*}{}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}\right) = \nabla^{(b)}_{\mu} S_{\lambda\omega}{}^{\nu} - \nabla^{(b)}_{\omega} S_{\lambda\mu}{}^{\nu}. \tag{27}$$

Da questa segue in particolare che: *condizione necessaria e sufficiente perchè le due connessioni coniugate* ∇, ∇^{*} *abbiano lo stesso tensore di curvatura è che il trasporto per* ($\nabla^{(b)}$)*-equipollenza conservi la torsione*, cioè, che detti ξ, η due qualunque vettori che variano lungo una curva per ($\nabla^{(b)}$)-equipollenza, lo stesso accada del vettore $S_{\lambda\mu}{}^{\nu}\xi^{\lambda}\eta^{\mu}$: o infine, che sia

$$\nabla^{(b)}_{\mu} S_{\lambda\omega}{}^{\nu} = 0. \tag{28}$$

Infatti: se è

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = R^{*}{}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}, \tag{29}$$

([28]) Ved. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, p. 36.

([29]) Ved. J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 661; EISENHART, **48**, 1927, p. 8.

ne segue, per le (27),

$$\overset{(b)}{\nabla}_{\mu} S_{\lambda\omega}{}^{\nu} = \overset{(b)}{\nabla}_{\omega} S_{\lambda\mu}{}^{\nu} = -\overset{(b)}{\nabla}_{\omega} S_{\mu\lambda}{}^{\nu} = -\overset{(b)}{\nabla}_{\lambda} S_{\mu\omega}{}^{\nu} = \overset{(b)}{\nabla}_{\lambda} S_{\omega\mu}{}^{\nu} = \overset{(b)}{\nabla}_{\mu} S_{\omega\lambda}{}^{\nu} = -\overset{(b)}{\nabla}_{\mu} S_{\lambda\omega}{}^{\nu},$$

onde si hanno le (28). L'inversa è evidente.

Dalle (23), (26) abbiamo le espressioni di $B_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$, $S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ per $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$, $\overset{*}{R}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ ed $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$:

$$B_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \frac{1}{2}(R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} + \overset{*}{R}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}) + S_{\omega\lambda}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\mu}{}^{\nu} - S_{\mu\lambda}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\omega}{}^{\nu} \tag{30}$$

$$S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = \frac{1}{2}(R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - \overset{*}{R}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}) + S_{\lambda\omega}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\mu}{}^{\nu} - S_{\lambda\mu}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\omega}{}^{\nu}. \tag{31}$$

Anche $\nabla_{\lambda} S_{\mu\omega}{}^{\nu}$ e $\overset{(b)}{\nabla}_{\lambda} S_{\mu\omega}{}^{\nu}$ si esprimono agevolmente per $S_{\lambda\mu}{}^{\nu}$ ed $S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$: e quindi anche, per $S_{\lambda\mu}{}^{\nu}$, $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$, $\overset{*}{R}_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$:

$$\nabla_{\lambda} S_{\mu\omega}{}^{\nu} = S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - \frac{3}{2} S_{[\omega\mu\lambda]}{}^{\nu} + S_{\lambda\mu}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\omega}{}^{\nu} - S_{\lambda\omega}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\mu}{}^{\nu} \tag{32}$$

$$\overset{(b)}{\nabla}_{\lambda} S_{\mu\omega}{}^{\nu} = S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - \frac{3}{2} S_{[\omega\mu\lambda]}{}^{\nu} + S_{\omega\mu}{}^{\varkappa} S_{\varkappa\lambda}{}^{\nu}. \tag{33}$$

L'annullarsi del tensore $S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ è, per le (23), *condizione necessaria e sufficiente perchè il trasporto ciclico di un vettore* (lungo un ciclo infinitesimo) *per* (∇)-*equipollenza e per* ($\overset{(b)}{\nabla}$)-*equipollenza, dia sempre luogo allo stesso vettore*. Pel tensore $S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ vale una formula analoga alla (9), che non mi pare sia stata finora notata:

$$\begin{aligned} &\{\bar{d}_1(\bar{d}_2 d_3 - \bar{d}_3 d_2) + \bar{d}_2(\bar{d}_3 d_1 - \bar{d}_1 d_3) + \bar{d}_3(\bar{d}_1 d_2 - \bar{d}_2 d_1)\} x^{\nu} = \\ &= -3 S_{[\omega\mu\lambda]}{}^{\nu} d_1 x^{\omega} d_3 x^{\mu} d_3 x^{\lambda} = -(S_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} + S_{\mu\lambda\omega}{}^{\nu} + S_{\lambda\omega\mu}{}^{\nu}) d_1 x^{\omega} d_2 x^{\mu} d_3 x^{\lambda}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ecco l'interpretazione geometrica: sia σ una superficie chiusa infinitamente piccola tracciata pel punto P in A_n su di una V_3 tangente in P alla 3-direzione (d_1P, d_2P, d_3P); sia τ il rapporto tra il volume da essa racchiuso e quello del parallelepipedo infinitesimo costruito (nello spazio affine tangente in P) su d_1P, d_2P, d_3P: *il primo* [*e quindi anche il secondo*] *membro della* (34), *moltiplicato per* τ, *dà la somma geometrica dei vettori delle traslazioni associate (n.° prec.) agli elementi di* σ: vettori che s'intendono riportati, secondo la legge della (∇)-equipollenza, nello spazio affine tangente in P [30].

---

[30] Si confronti con l'interpretazione che CARTAN dà delle formule

$$R_{[\omega\mu\lambda]}{}^{\nu} = 4 S_{[\omega\mu}{}^{\tau} S_{\lambda]\tau}{}^{\nu} + 2 \nabla_{[\omega} S_{\mu\lambda]}{}^{\nu} = S_{[\omega\mu\lambda]}{}^{\nu}, \tag{d}$$

$$\nabla_{[\tau} R_{\omega\mu]\lambda}{}^{\nu} = -2 S_{[\omega\mu}{}^{\varkappa} R_{\tau]\varkappa\lambda}{}^{\nu} \tag{e}$$

4. **Il problema dell'equivalenza per le connessioni affini asimmetriche.** — Il teorema che ho rammentato (n.° prec.), relativo agli invarianti differenzîali di una connessione asimmetrica, non risolve il *problema dell'equivalenza* per tali connessioni ([31]). Cioè, il problema di stabilire, date due serie di n^3 funzioni $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ e $\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)$, se esse possono considerarsi come le componenti di *una stessa* connessione affine, nei sistemi coordinati x^ν, x'^α: o ancora, se è possibile determinare delle formule di trasformazione (3) tali che, in corrispondenza, per le date funzioni $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, $\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}$ valgano le formule di trasformazione (4). Sotto altro punto di vista: stabilire sotto quali condizioni due date varietà a connessione affine siano rappresentabili *isomorficamente* ([32]) l'una sull'altra.

Si tratta, come nel caso classico dell'equivalenza tra forme quadratiche, di studiare le *condizioni d'integrabilità* delle (4). Poniamo

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} = \theta^\lambda_\alpha, \tag{35}$$

e scriviamo le (4) nella forma seguente, indicati con $\overline{\nabla}$, $\overline{\nabla}^*$ i simboli delle derivazioni covarianti (secondo R. LAGRANGE ([33])), relative alle connessioni ∇ e ∇^*, pei tensori contenenti indici delle due serie $\lambda\mu\nu\tau\omega\ldots$, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ (corrispondenti alle due serie di variabili x^ν, x'^α):

$$\overline{\nabla}_\alpha \theta^\lambda_\gamma = 0, \quad \overline{\nabla}^*_\alpha \theta^\lambda_\gamma = 0. \tag{36}$$

Siamo così ricondotti a studiare il sistema (35), (36) nelle $n + n^2$ funzioni incognite x^λ, θ^λ_α delle x'^α. Le condizioni d'integrabilità delle (35), in forza

---

(SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 88, form. (138) e p. 91, form. (163 d). Ved. CARTAN, **20**, t. 40, 1923, p. 373, form. (7), e p. 375 (« Théorème de la conservation de la courbure et de la torsion »). Ved. anche LAGRANGE, **31**, 1926, p. 22 form. (37) e pp. 26-27.

([31]) Cfr. CHRISTOFFEL, 2, 1869; VERMEIL, 8, 1919, pp. 309-312; VEBLEN, **47**, 1927, pp. 76-80 per gli spazi riemanniani; VEBLEN, l. c. ed EISENHART, **48**, 1927, pp. 74-77 per le connessioni affini simmetriche. Nel libro di EISENHART si trova anche (a pag. 78) un cenno di trattazione del caso delle connessioni asimmetriche, ma la mia trattazione mi sembra più soddisfacente.

([32]) Secondo CARTAN (**42**, 1927, p. 52) chiamo *isomorfica* una trasformazione che conservi inalterata la legge di *trasporto per equipollenza* dei vettori e tensori.

([33]) Rammenterò che si ha, ad es.:

$$\nabla_\alpha A_{\lambda\gamma}^{\cdot\cdot\beta} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} A_{\lambda\gamma}^{\cdot\cdot\beta} - \Gamma^\nu_{\lambda\tau} A_{\nu\gamma}^{\cdot\cdot\beta} \theta^\tau_\alpha - \Gamma'^\delta_{\gamma\alpha} A_{\lambda\delta}^{\cdot\cdot\beta} + \Gamma'^\beta_{\delta\alpha} A_{\lambda\gamma}^{\cdot\cdot\delta}.$$

Ved. **31**, 1926, p. 10 e la mia Nota **44**, 1927, pp. 134-135.

delle (36) e delle (7), si scrivono

F_0) (37) $$S'^{\cdot\cdot\delta}_{\gamma\alpha}\theta^\nu_\delta = S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega}\theta^\lambda_\gamma\theta^\omega_\alpha .$$

Le condizioni d'integrabilità delle (36) sono:

F_1) (38) $$R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma ,$$

(38*) $$R^{*'\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma .$$

Da queste per derivazione covariaute, in forza delle (36), si ha:

F_2) (39) $$\overline{\nabla}_\varepsilon R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = \overline{\nabla}_\tau R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma\theta^\tau_\varepsilon ,$$

(39*) $$\overline{\nabla}_\varepsilon R^{*'\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\theta^\nu_\delta = \overline{\nabla}_\tau R^{*'\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\theta^\omega_\alpha\theta^\mu_\beta\theta^\lambda_\gamma\theta^\tau_\varepsilon .$$

Siano dette F_0 le equazioni (37); F_1 le (38), (38*); F_2 le (39), (39*): proseguendo nella derivazione otterremo analogamente delle nuove serie d'equazioni F_3, F_4,..., F_m,... Non occorre ripetere gli stessi sviluppi per le (37): le conseguenze differenziali di queste rientrano, ovviamente, nelle serie di equazioni F_1, F_2,... già costruite. La condizione per l'equivalenza delle due connessioni $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, $\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma}$ è dunque [34] *che esista un intero* N *tale che le* F_0, F_1 F_2,..., F_N, *considerate come equazioni nelle* $\theta^\lambda_\alpha = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}$, *siano algebricamente compatibili, e le loro soluzioni soddisfino alle* $\mathrm{F}_{\mathrm{N}+1}$ [35].

Sono notevoli questi due casi particolari, in cui è certamente $N = 0$: cioè le equazioni per la determinazione delle θ^ν_α si riducono alle sole (37):

1) quando è

(40) $$R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0, \quad R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0,$$

e analoga condizione è soddisfatta da $R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, $R^{*'\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}$. Le (40) caratterizzano gli *spazi di gruppo* secondo CARTAN e SCHOUTEN [36]. Dunque:

Una rappresentazione puntuale tra due spazi di gruppo è una isomorfia allora e solo che essa conserva la torsione, cioè è tale che, corrispondendosi le coppie di vettori ξ^λ, ξ'^α; η^λ, η'^α applicati a due punti omologhi qualunque, anche i vettori $S^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}\xi^\lambda\eta^\mu$, $S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}\xi'^\alpha\eta'^\beta$ si corrispondono.

---

(34) Cfr. VEBLEN, EISENHART, l. c. (31).

(35) Ciò consegue da un noto teorema sui sistemi ai differenziali totali. Ved. VEBLEN e J. M. THOMAS, **37**, 1926, pp. 288-291; oppure VEBLEN, **47**, 1927, pp. 73-76; EISENHART, **48**, 1927, pp. 14-18.

(36) Ved. sugli spazi di gruppo, CARTAN e SCHOUTEN, **39** e **40**, 1926; CARTAN, **42**, 1927; SCHOUTEN, **41**, 1926; **49**, 1928; **60**, 1929. Circa la proprietà caratteristica espressa dalle (40), cfr. CARTAN, **42**, 1927, pp. 30, 38, 52-53.

Questa proposizione corrisponde al noto teorema della teoria dei gruppi di trasformazioni: *Due gruppi di Lie ad* n *parametri sono isomorfi allora e solo che, con opportuna scelta delle trasformazioni infinitesime generatrici, è possibile rendere uguali le loro costanti di struttura.*

2) quando è

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa} S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu} \tag{41}$$

e analoghe condizioni sono soddisfatte da $R'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}$, $R^{*'\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}$. Le (41) caratterizzano gli *spazi a connessione affine omogenea*, o a secondo tensore normale nullo, di cui avremo occasione di parlare al n.° seg. Anche per questi spazi vale dunque una proposizione analoga a quella poco sopra enunciata per gli spazi di gruppo: è inutile starla a ripetere. Va notato come gli *spazi di gruppo* e gli *spazi a connessione affine omogenea* sembrino in qualche modo, nell'attuale teoria, prendere il ruolo che gli spazi euclidei e gli spazi a curvatura costante occupano nella geometria riemanniana.

5. **Coordinate normali in una varietà a connessione affine asimmetrica. Tensori normali, spazi a connessione affine omogenea; estensioni di un tensore. Applicazione alla teoria degli invarianti differenziali.** — La nozione di *coordinate normali*, data dal RIEMANN per gli spazi riemanniani ([37]) è stata estesa dal VEBLEN alle varietà a connessione affine *simmetrica* ([38]). È facile estenderla anche alle varietà a connessione asimmetrica: in sostanza *assumendo come coordinate normali in un punto quelle che sono tali per la connessione simmetrica associata* (n.° 3). Però è possibile ed assai più conveniente, mi sembra, darne una costruzione diretta. Rammentiamo anzitutto che, secondo la definizione di VEBLEN ([39]) — applicabile anche al nostro caso —, un sistema coordinato y^λ è *normale* in un punto P_0 di A_n se le soluzioni del sistema differenziale

$$\frac{d^2x^\nu}{dt^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^\mu}{dt} = 0 \tag{42}$$

che rappresentano le geodetiche uscenti dal punto P_0 supposto $(y^\lambda = 0,\ x^\lambda = x^\lambda_0)$

([37]) RIEMANN, **1**, 1854; ediz. 1923, pp. 10-11. Sulle coordinate normali di RIEMANN in relazione con gli invarianti differenziali e il tensore di curvatura, ved. anche VERMEIL, **8**, 1919; HERGLOTZ, **21**, 1924.

([38]) VEBLEN, **13**, 1922. Ved. anche VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, pp. 562-566.

([39]) VEBLEN, **13**, 1922, p. 193; **47**, 1927, p. 85.

acquistano in tale sistema la forma lineare

$$y^\lambda = \xi^\lambda \cdot t. \tag{43}$$

Ciò premesso: le equazioni (42) delle geodetiche dànno luogo, per successive derivazioni e sostituzioni, alle seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^3x^\nu}{dt^3} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu\tau}\dfrac{dx^\lambda}{dt}\dfrac{dx^\mu}{dt}\dfrac{dx^\tau}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^4x^\nu}{dt^4} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu\tau\omega}\dfrac{dx^\lambda}{dt}\dfrac{dx^\mu}{dt}\dfrac{dx^\tau}{dt}\dfrac{dx^\omega}{dl} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^mx^\nu}{dt^m} + \Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m}\dfrac{dx^{\lambda_1}}{dt}\dfrac{dx^{\lambda_2}}{dt}\dots\dfrac{dx^{\lambda_m}}{dt} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{44}$$

ove le $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m}$ $(m = 3, 4, \dots)$ si possono calcolare con le formule ricorrenti:

$$\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{q+1}} = \frac{\partial\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}}{\partial x^{\lambda_{q+1}}} - \sum_1^q {}_h \Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{h-1}\mu\lambda_{h+1}\dots\lambda_q}\Gamma^\mu_{\lambda_h\lambda_{q+1}} \text{ [40]}. \quad (q = 2, 3, \dots) \tag{45}$$

Gli effettivi coefficienti delle forme quadratiche, cubiche,... nelle $\dfrac{dx^\lambda}{dt}$ che figurano nelle (42), (44), non sono però le $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}$ $(q \geq 2)$, ma le $\Gamma^\nu_{(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q)}$, che se ne ottengono *mischiando* (ved. [18]) rispetto a tutti gli indici inferiori. (È manifestamente lecito sostituire senz'altro nelle (42), (44) alle $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}$ $(q \geq 2)$ le $\Gamma^\nu_{(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q)}$, simmetriche rispetto agli indici inferiori).

Se le $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ si suppongono *analitiche* nei loro argomenti $x^1x^2\dots x^n$, ricaviamo subito [41] da quanto precede le effettive formule di passaggio dalle x^ν alle coordinate normali y^ν:

$$\begin{gathered} x^\nu - x^\nu_0 = y^\nu - \frac{1}{2}(\Gamma^\nu_{(\lambda\mu)})_0\, y^\lambda y^\mu - \\ - \frac{1}{3!}(\Gamma^\nu_{(\lambda\mu\tau)})_0\, y^\lambda y^\mu y^\tau - \dots - \frac{1}{m!}(\Gamma^\nu_{(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_m)})_0\, y^{\lambda_1}y^{\lambda_2}\dots y^{\lambda_m} - \dots \end{gathered} \tag{46}$$

---

[40] Cfr. VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, p. 561, form. (6.5). Si noti che le (45) esprimono in sostanza che $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{q+1}}$ è ottenuto da $\Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q}$ applicando a questo sistema, considerato formalmente come un tensore a q indici di covarianza (senza prendere in considerazione l'indice superiore) l'operazione di derivazione covariante $\nabla_{\lambda_{q+1}}$.

[41] Cfr. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, pp. 84-85.

ove l'indice $_0$ designa i valori calcolati nel punto P_0. Possiamo — senza più supporre l'*analiticità* delle $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ — sostituire ai termini di grado $> m$ $(m \geq 2)$ rispetto alle y^{λ} nei secondi membri delle funzioni delle y^{ν} che in P_0 si annullino con le loro derivate prime, seconde,..., m^{me} rispetto alle y^{ν}, e del resto arbitrarie: allora abbiamo le *coordinate normali d'ordine m*. Le coordinate normali di secondo ordine sono le coordinate *geodetiche* in P_0 ([42]). Queste sono *caratterizzate* dal fatto che, assunto un tale sistema di riferimento, i parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ nel punto P_0 supposto *vanno a coincidere con le componenti del tensore di torsione*: in altri termini, in P_0 si annullano le $B^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{(\lambda\mu)}$.

Tutte le interessanti applicazioni che delle coordinate normali hanno dato VEBLEN, EISENHART, T. Y. THOMAS,... pel caso simmetrico si estendono alle connessioni asimmetriche: anzitutto, la nozione dei *tensori normali*. In conseguenza del fatto che, *per una qualunque trasformazione sulle* x^{ν}, *le corrispondenti coordinate normali* (con l'origine in un punto P_0) *subiscono una trasformazione lineare a coefficienti costanti*, la stessa che si ha *in quel punto* per le componenti di un vettore controvariante, si ha subito che *i sistemi multipli aventi, in ciascun punto* P_0, *come componenti i valori (ivi calcolati) delle derivate*

$$\frac{\partial^q \overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial y^{\tau_1} \partial y^{\tau_2} \cdots \partial y^{\tau_q}}, \tag{47}$$

ove le y^{τ} sono coordinate normali con l'origine in P_0 e le $\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ sono i parametri della connessione affine in coordinate y^{τ}, *sono tensori*: precisamente, sono i *tensori normali* ([43]). Per avere la serie completa dei tensori normali, $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}^{\cdot\cdot\lambda}$, bisogna (a differenza di quanto accade per le connessioni simmetriche) includere anche il caso $q = 0$, che ci dà il tensore avente in P_0 per componenti le $\left(\overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right)_0$: esso è il *tensore di torsione* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, che diremo quindi anche *primo tensore normale* (o tensore normale di primo ordine): come tale lo indicheremo qualche volta con $C_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$:

$$C_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}. \tag{48}$$

Il *secondo tensore normale* (o tensore normale del secondo ordine), $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, ha

---

([42]) Se in particolare ai termini di grado > 2 rispetto alle y^{ν} nelle (46) si sostituisce *lo zero*, si hanno le « path coördinates » di EISENHART: ved. **17**, 1923, pp. 378-380.

([43]) Cfr. VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, p. 566 e seg.; VEBLEN, **47**, 1927, p. 89 e seg.

in P_0 come componenti le quantità

$$\left(\frac{\partial \overset{N}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial y^{\tau}}\right) = (C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda})_0 . \tag{49}$$

Valendoci delle (46) ([44]) e delle (4), e tenendo presenti le (7), (21), troviamo che tale tensore si esprime nel seguente modo in coordinate x^{ν} qualunque:

$$C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}} - \Gamma^{\lambda}_{\omega\nu} B^{\omega}_{\mu\tau} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\omega} B^{\omega}_{\nu\tau} - \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu\tau)} + S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega} B^{\lambda}_{\omega\tau} . \tag{50}$$

Le (50) comprendono come caso particolare le note espressioni del primo tensore normale di una connessione simmetrica ([45]).

In modo analogo potremmo ottenere espressioni per le componenti dei tensori normali successivi. Tra le componenti di un tensore normale qualunque $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}^{\cdot\cdot\lambda}$ sussistono delle relazioni, e precisamente:

1) Si ha

$$C_{(\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_q)}^{\cdot\cdot\lambda} = 0. \qquad (q \geq 0) \tag{51}$$

2) $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_q}^{\cdot\cdot\lambda}$ $(q \geq 2)$ è simmetrico rispetto ai q indici $\tau_1\tau_2\ldots\tau_q$.

In particolare il secondo tensore normale $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ avrà $n^4 - n\binom{n+2}{3}$ componenti indipendenti: appunto quante ne hanno insieme $B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ $\left(n^2\binom{n}{2} - n\binom{n}{3}\right.$, perchè $B_{(\omega\mu)\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, $\left.B_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0\right)$ e $\overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ $\left(n^2\binom{n}{2}\right.$, perchè $\left.\overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{(\mu\nu)}^{\cdot\cdot\lambda} = 0\right)$. È dunque prevedibile che $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ possa esprimersi per questi due tensori, e viceversa: infatti troviamo:

$$C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{3}(B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + B_{\mu\tau\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}) + \overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}, \tag{52}$$

onde

$$B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(C_{\lambda\omega\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu} + C_{\omega\lambda\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu} - C_{\lambda\mu\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu} - C_{\mu\lambda\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu}) \tag{53}$$

$$\overset{(b)}{\nabla}_{\tau} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{2}(C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} - C_{\nu\mu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}). \tag{54}$$

---

[44] ma è subito visto che l'esistenza di $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ non è affatto subordinata alla convergenza delle serie (46). Più in generale, per costruire l' m^{mo} tensore normale è lecito sostituire alle coordinate normali vere e proprie delle coordinate normali *d'ordine* $m+1$.

[45] Ved. **18**, 1923, p. 568, form. (9.13).

Anche i tensori $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $\overset{*}{R}{}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ si potranno esprimere per $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, e questo per due di essi: ma in tali espressioni figura anche il tensore di torsione (primo tensore normale); ad es. abbiamo

$$(55)\quad C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}=\frac{1}{6}\left[3R_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}+R_{\nu\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}+R_{\tau\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}+2(\overset{*}{R}{}_{\mu\tau\nu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}+\overset{*}{R}{}_{\mu\nu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda})+2(2S_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\nu}^{\cdot\cdot\lambda}-S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\tau}^{\cdot\cdot\lambda})\right],$$

$$(56)\quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=C_{\lambda\omega\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu}-C_{\lambda\mu\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu}+S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu}-S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}$$

$$(57)\quad \overset{*}{R}{}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=C_{\omega\lambda\cdot\mu}^{\cdot\cdot\nu}-C_{\mu\lambda\cdot\omega}^{\cdot\cdot\nu}+S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu}-S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Concludendo: come nel caso delle connessioni simmetriche — nel quale caso il tensore di curvatura, all'infuori del quale non vi sono altri invarianti differenziali del secondo ordine indipendenti, si esprime pel tensore normale $A_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, corrispondente a $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, e viceversa [46] — così anche nel caso generale delle varietà a connessione affine asimmetrica è questo tensore $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ che riassume *tutte le proprietà differenziali del secondo ordine.*

Come $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ per $B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ e $\overset{(b)}{\nabla}_\tau S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, così più in generale l'$(m+1)^{mo}$ tensore normale $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda}$ si esprime in forma razionale intera per $B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$, $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, le derivate covarianti di $B_{\nu\tau\mu}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ (con la derivazione $\overset{(b)}{\nabla}$, o anche ∇) fino all'ordine $m-1$, di $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ fino all'ordine m. Su questo non ci fermeremo.

Ci tratterremo invece per un momento *sul significato geometrico di* $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, o almeno, *del suo annullarsi.* Si vede bene, per le (52), (53), (54) che le varietà per le quali

$$(58)\qquad C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}=0$$

possono anche caratterizzarsi mediante le condizioni

$$(59)\qquad B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0,\quad \overset{(b)}{\nabla}_\tau S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}=0.$$

Queste esprimono anzitutto che la connessione simmetrica associata alla connessione ∇ supposta è *integrabile,* cioè, che lo spazio a connessione affine simmetrica associato alla supposta varietà *è un ordinario spazio affine.* In questo spazio sarà possibile assumere un sistema di riferimento *geodetico in tutti i punti,* cioè *cartesiano* (per la connessione $\overset{(b)}{\nabla}$), rispetto al quale le derivate $\overset{(b)}{\nabla}_\tau$ divengano le derivate parziali $\dfrac{\partial}{\partial u^\tau}$. In questo sistema coordinato le componenti del tensore di torsione diverranno *delle costanti numeriche*; lo stesso accadrà, essendo nelle attuali ipotesi

$$(60)\qquad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=\overset{*}{R}{}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\nu}-S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\nu}$$

---

(46) Ved. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, pp. 91-92.

e quindi

$$\nabla^{(b)}_{\tau} R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0 \tag{61}$$

pel tensore di curvatura. Se ξ, η, ζ sono vettori che si spostino lungo una curva per ($\nabla^{(b)}$)-equipollenza, lo stesso avviene dei vettori $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\xi^{\lambda}\eta^{\mu}$, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\xi^{\omega}\eta^{\mu}\zeta^{\lambda}$. In termini più espressivi: *il trasporto per* ($\nabla^{(b)}$)-*equipollenza conserva la torsione e la curvatura* ([47]).

Ciascuno spazio pel quale valgono le (58) o (59), ammette poi, come risulta facilmente da quanto precede, *un gruppo* (in generale semplicemente transitivo) *ad* n *parametri di trasformazioni isomorfiche* (ved. ([32])) *in sè*, che sono le ($\nabla^{(b)}$)-traslazioni (traslazioni in sè dello spazio affine associato). Tutti i punti dello spazio in parola sono dunque *equivalenti* rispetto alle isomorfie: mi sembra che ciò possa esprimersi dicendo che esso è *uno spazio a connessione affine omogenea.* Di questi spazi (che comprendono come caso particolare, per $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$, lo *spazio affine*) sono proprietà caratteristiche le (58), le (59), e così pure le (60), o anche soltanto le (41) del n.° prec. Per le (59) abbiamo la seguente costruzione:

Si prenda uno spazio affine ad n dimensioni: in esso si prenda ad arbitro un tensore costante $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, emisimmetrico rispetto a μ, ν. *Se assegniamo al supposto spazio una connessione affine asimmetrica, avente per tensore di torsione il tensore* $\mathrm{S}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *ora detto, e per connessione simmetrica associata quella (integrabile) dello spazio affine, si fa di questo appunto uno spazio a connessione affine omogenea* (cioè, a secondo tensore normale nullo).

È particolarmente notevole il caso in cui le componenti del tensore assegnato, $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, soddisfano alle relazioni (identità di JACOBI)

$$S_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\mu\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} + S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\omega\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \qquad (\text{cioè } S_{[\lambda\omega}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\mu]\varkappa}^{\cdot\cdot\nu} = 0); \tag{62}$$

o in altri termini, tali componenti possono interpretarsi come le *costanti di struttura di un gruppo di Lie ad* n *parametri.* Questi particolari spazi a connessione affine omogenea, pei quali si ha anche

$$\nabla_{\tau} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \quad \nabla_{\tau} R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \tag{63}$$

forniscono una rappresentazione geometrica dei gruppi di LIE, diversa da quella che CARTAN e SCHOUTEN hanno indicato. Se il tensore $S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\tau}$ è *di rango n,* cioè il corrispondente gruppo è *semplice* o *semi-semplice* ([48]), lo

---

([47]) relative, s'intende alla connessione ∇: non c'è ambiguità giacchè la connessione $\nabla^{(b)}$ è a torsione a curvatura nulle.

([48]) Ved. CARTAN e SCHOUTEN, **39**, p. 810.

spazio è *a connessione euclidea*, ed ha per tensore fondamentale della metrica il tensore

$$a_{\lambda\mu} = c \cdot S_{\tau\lambda}^{\cdot\cdot\,\varkappa} S_{\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\,\tau}. \qquad (c = \text{cost. arbitr.}). \tag{64}$$

Un caso assai particolare è, per $n = 3$, *lo spazio della polarizzazione rotatoria* del CARTAN ([49]): spazio euclideo occupato da un mezzo omogeneo e isotropo, dotato di un potere rotatorio per la luce polarizzata: nel quale si assuma a legge di trasporto per parallelismo delle direzioni normali a una linea retta (il che basta per definire la connessione *euclidea*) la legge secondo cui varia la direzione della vibrazione luminosa quando quella linea retta sia seguita da un raggio di luce polarizzata rettilineamente.

Torniamo allo studio generale delle varietà a connessione affine.

Pel caso delle connessioni simmetriche VEBLEN e T. Y. THOMAS hanno introdotto anche un'altra nozione importante, che si collega assai da vicino a quella dei tensori normali: la nozione delle *estensioni*, dei vari ordini, di un tensore ([50]). La definizione medesima di VEBLEN e T. Y. THOMAS può applicarsi senz'altro anche al caso delle connessioni asimmetriche, e dà luogo allora ad *estensioni* che coincidono con quelle relative alla connessione simmetrica associata. Indichiamo con D il simbolo di estensione: l'estensione m^{ma} $D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m} E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ di un qualunque tensore $E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ è un tensore (simmetrico rispetto a $\tau_1\tau_2\ldots\tau_m$) che in ciascun punto P_0 della A_n supposto ha per componenti i valori

$$\left(\frac{\partial^m \overset{N}{E}{}_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}}{\partial y^{\tau_1}\partial y^{\tau_2}\cdots\partial y^{\tau_m}}\right)_0, \tag{65}$$

ove le y^ν sono *coordinate normali* in A_n con l'origine in P_0: le $\overset{N}{E}{}_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ sono le componenti del tensore assegnato nel sistema y^ν, e l'indice $_0$ significa che le derivate vanno calcolate nel punto P_0. Ad es. abbiamo

$$D_\tau\varphi_\nu = \nabla_\tau\varphi_\nu + S_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda}\varphi_\lambda = \overset{(b)}{\nabla_\tau}\varphi_\nu, \tag{66}$$

$$\begin{aligned} D_{\tau_1\tau_2}\varphi_\nu = {} & \nabla_{\tau_2}\nabla_{\tau_1}\varphi_\nu + S_{\tau_1\tau_2}^{\cdot\cdot\,\mu}\nabla_\mu\varphi_\nu + S_{\nu\tau_2}^{\cdot\cdot\,\mu}\nabla_{\tau_1}\varphi_\mu + S_{\nu\tau_1}^{\cdot\cdot\,\mu}\nabla_{\tau_1}\varphi_\mu + \\ & + (S_{\nu\tau_1}^{\cdot\cdot\,\mu}S_{\mu\tau_2}^{\cdot\cdot\,\lambda} + C_{\nu\tau_1\cdot\tau_2}^{\cdot\cdot\,\lambda})\varphi_\lambda. \end{aligned} \tag{67}$$

E in generale, l'estensione m^{ma} $D_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m} E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ di un tensore $E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ differisce dalla sua derivata covariante $\nabla_{\tau_m}\nabla_{\tau_{m-1}}\cdots\nabla_{\tau_2}\nabla_{\tau_1}E_{\omega_1\ldots\omega_r}^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ per un complesso

([49]) Ved. CARTAN, **24**, 1924, pp. 303-305.

([50]) VEBLEN e T. Y. THOMAS, **18**, 1923, pp. 571-574.

di termini additivi, combinazioni lineari del tensore stesso e delle sue derivate covarianti prima, seconda,..., $(m-1)^{ma}$, i cui coefficienti dipendono, in modo razionale intero, dai tensori normali dei primi m ordini ([51]). I tensori normali stessi possono considerarsi ottenuti applicando il processo dell'estensione (prima, seconda,..., m^{ma},...) al sistema $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

L'uso dei tensori normali permette, come nel caso delle connessioni simmetriche ([52]) di dare una forma particolarmente semplice ed elegante alla teoria degli *invarianti differenziali* di una connessione affine asimmetrica. (E analogamente, le *estensioni* trovano applicazione nella teoria dei *parametri differenziali*: ma su questo non potrei ora soffermarmi).

Ricorderò che un sistema di funzioni (componenti)

$$E^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r} = F^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}}, \dots, \frac{\partial^{m-1}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\tau_1}\partial x^{\tau_2}\dots\partial x^{\tau_{m-1}}}\right) \tag{68}$$

che per effetto di una trasformazione (3) sulle x^{ν}, che induce la trasformazione (4) delle $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, si muti, secondo una determinata legge (ad es.: invarianza, covarianza o controvarianza semplice o multipla, varianza mista, ecc....) in un sistema di funzioni $E'^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ delle x'^{ν} si dice *invariante differenziale* (d'ordine m) *della connessione* ∇ se la componente $E'^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ si può esprimere per $\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}$ e le sue derivate rispetto alle x'^{ν} come la corrispondente componente $E^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ si esprime per $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e le sue derivate rispetto alle x^{ν} ([53]). Ciò posto, se ci limitiamo agli invarianti differenziali che, per le (3), sono tensori o scalari, abbiamo subito, tenendo presenti anche osservazioni e risultati precedentemente esposti:

TEOREMA DI RIDUZIONE. — *Gli invarianti differenziali (tensoriali o scalari) di ordine* m *di una varietà a connessione affine* ∇ *sono gli invarianti simultanei*:

a) *dei tensori normali degli ordini* 1, 2,..., m: $\mathrm{C}^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu} = \mathrm{S}^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu}$, $\mathrm{C}^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu\cdot\tau}$, ..., $\mathrm{C}^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\dots\tau_{m-1}}$. Oppure:

([51]) Cfr. ad es. EISENHART, **48**, 1927, p. 74.

([52]) Ved. T. Y. THOMAS e MICHAL, **43**, 1927, p. 197 e seg.

([53]) Cfr. T. Y. THOMAS e MICHAL, l. c., pp. 197-198. Veramente, secondo T. Y. THOMAS e MICHAL, $E^{\cdot\cdot\varkappa_1\dots\varkappa_s}_{\omega_1\dots\omega_r}$ verrebbe detto un *invariante differenziale d'ordine* $m-1$. Ma i parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ dànno già il passaggio da un punto della varietà ad un altro qualunque nel suo intorno *del 1° ordine*.

b) *di* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *di* $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate* [54] (*o estensioni*) *prime, seconde,...,* $(m-2)^{me}$. Oppure:

c) *di* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *di due ad arbitrio dei tensori* $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ *e delle loro derivate* (*c. s.*) (*o estensioni*) *prime, seconde,...,* $(m-2)^{me}$. Oppure:

d) *di* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate* (*o estensioni*) *prime, seconde,...,* $(m-1)^{me}$; *di uno dei tensori* $B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ *e delle sue derivate* (*o estensioni*) *prime, seconde,...,* $(m-2)^{me}$ [55].

TEOREMA DI SOSTITUZIONE. — *Ogni invariante differenziale* (*tensoriale o scalare*) *della connessione* ∇ *dato nella forma* (68) *può esprimersi pei tensori normali, sostituendo nella sua espressione* (68) *le* $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ *con le* $C_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}=S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *le* $\dfrac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\tau}}$ *con le* $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, ..., *in generale, ciascuna derivata* $\dfrac{\partial^{r}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\tau_1}\partial x_{\tau_2}\ldots\partial x^{\tau_r}}$ *con la corrispondente componente del tensore normale* $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}^{\cdot\cdot\lambda}$ $(r=0, 1, \ldots, m-1)$ [56].

PARTE SECONDA

Le trasformazioni che conservano il parallelismo (T_p).

6. Forma delle trasformazioni (T_p) che conservano il parallelismo in una varietà (A_n) a connessione affine asimmetrica. La connessione invariante. — Le equazioni

$$\overline{d}\xi^{\lambda}=d\xi^{\lambda}+\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\xi^{\mu}dx^{\nu}=0 \tag{1}$$

che rappresentano il trasporto *per equipollenza* dei vettori (controvarianti) in A_n non sono atte a rappresentare il *trasporto parallelo delle direzioni*, perchè non sono invarianti per una trasformazione

$$\xi^{(o)}=h\cdot\xi, \tag{69}$$

ove h è uno scalare funzione arbitraria del punto in A_n (o sulla curva lungo la quale consideriamo il trasporto (1)) [escluso naturalmente il caso banale in

---

[54] con la derivazione ∇, oppure ∇^{*}, oppure $\nabla^{(b)}$.

[55] Cfr. per quest' ultimo enunciato: WEITZENBÖCK, **15**, 1923, p. 356. In questi enunciati parlando di *invarianti simultanei* di più tensori intendo limitarmi agli invarianti esprimibili in *termini finiti* pei tensori medesimi.

[56] Cfr. T. Y. THOMAS e MICHAL, **43**, 1927, p. 199, e VEBLEN, **47**, 1927, pp. 90-91. Le denominazioni: *teorema di riduzione e di sostituzione* corrispondono a: *Reduktionssatz* secondo WEITZENBÖCK (**15**, 1023, p. 350 e seg.) e: *replacement theorem* secondo T. Y. THOMAS: ved. ad es. **33**, 1926, p. 729, e **46**, 1927, p. 558.

cui h è una costante]. Ma è facile dare alla (1) una forma invariante per le 69), analoga a quella di SYNGE per le equazioni delle geodetiche ([57]):

$$\overline{d}\xi^{[\lambda}\cdot\xi^{\tau]} = d\xi^{[\lambda}\cdot\xi^{\tau]} + \Gamma^{[\lambda}_{\mu\nu}\xi^{\tau]}\xi^{\mu}dx^{\nu} = 0 \tag{70} \quad \text{(ved. (}^{18}\text{))}$$

cioè

$$\delta^{\omega\varkappa}_{\lambda\tau}\overline{d}\xi^{\lambda}\cdot\xi^{\tau} = \delta^{\omega\varkappa}_{\lambda\tau}(d\xi^{\lambda}\cdot\xi^{\tau} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\xi^{\tau}\xi^{\mu}dx^{\nu}) = 0 \quad (^{58}). \tag{70*}$$

Dalle (70*) ricaviamo agevolmente ([59]) che *la condizione necessaria e sufficiente perchè le* $\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ *siano i valori acquistati dalle* $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ *per una trasformazione della connessione che conservi il parallelismo delle direzioni* è che si abbia

$$\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}\overline{\Gamma}^{\tau}_{\tau\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}\Gamma^{\tau}_{\tau\nu}, \tag{71}$$

o, infine, *che sia*

$$\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + 2\delta^{\lambda}_{\mu}\psi_{\nu} \tag{72}$$

ove ψ_{ν} *è un vettore covariante arbitrario.* Le (72) rappresentano dunque la più generale trasformazione T_p della connessione ∇ ([60]).

Le (71) possono scriversi

$$\overline{L}^{\lambda}_{\mu\nu} = L^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{73}$$

ove abbiamo posto (cfr. J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 663, form. (5.14))

$$L^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu}\Gamma^{\tau}_{\tau\nu}. \tag{74}$$

Dunque il sistema $L^{\lambda}_{\mu\nu}$ è *invariante* per le T_p, cioè per le (72) (diremo: (T_p)-invariante). Le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$, per una trasformazione (3) delle coordinate, si trasformano secondo le formule

$$L'^{\delta}_{\gamma\alpha} = L^{\nu}_{\lambda\omega}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{n}\delta^{\delta}_{\gamma}\frac{\partial\theta}{\partial x'^{\alpha}}, \tag{75}$$

ove θ è dato dalla (19): e godono della proprietà

$$L^{\tau}_{\tau\nu} = 0. \tag{76}$$

([57]) Ved, EISENHART, **17**, 1923, p. 369.

([58]) $\delta^{\omega k}_{\lambda\tau} = \delta^{\omega}_{\lambda}\delta^{k}_{\tau} - \delta^{\omega}_{\tau}\delta^{k}_{\lambda}$, in generale $\delta^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m} = m!\,\delta^{\tau_1}_{[\lambda_1}\delta^{\tau_2}_{\lambda_2}\ldots\delta^{\tau_m}_{\lambda_m]}$ (ved. ([18])) è il *simbolo di Kronecker generalizzato* (MURNAGHAN). Ved. ad es. VEBLEN, **47**, 1927, pp. 3-6.

([59]) con un procedimento analogo a quello seguito da VEBLEN e J. M. THOMAS pel caso delle trasformazioni che conservano le *geodetiche*: ved. **37**, 1926, pp. 281-282.

([60]) Ved. FRIESECKE, **27**, 1925, p. 106; J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 662; EISENHART, **48**, 1927, p. 30.

Introdotte le $L^\lambda_{\mu\nu}$, le (70*) possono scriversi sotto questa forma *invariante per le* T_p:

(77) $$\delta^{\omega\varkappa}_{\lambda\tau}(d\xi^\lambda\cdot\xi^\tau + L^\lambda_{\mu\nu}\xi^\tau\xi^\mu dx^\nu) = 0,$$

e anzi, se $\xi(t)$ è una serie di vettori le cui *direzioni* siano parallele in A_n lungo una curva Γ, onde

(78) $$d\xi^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu dx^\nu = kdt\cdot\xi^\lambda,$$

(k essendo una qualunque funzione scalare del parametro t cui sono riferiti i punti di Γ), basta porre, lungo Γ

(79) $$h = C\cdot e^{\frac{1}{n}\int\Gamma^\tau_{\tau\nu}dx^\nu - \int kdt} \qquad (C = \text{cost.})$$

perchè pei vettori

(69) $$\xi^{(0)} = h\xi$$

si abbia, lungo Γ

(80) $$d\xi^{(0)\lambda} + L^\lambda_{\mu\nu}\cdot\xi^{(0)\mu}dx^\nu = 0.$$

Lo studio degli invarianti per le T_p potrebbe dunque basarsi sulle $L^\lambda_{\mu\nu}$, cioè, costituirsi come teoria invariantiva delle equazioni (75). Ma c'è un inconveniente abbastanza sensibile: la legge di trasformazione (75) non coincide con la legge di trasformazione (4) delle $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$; e neppure con la legge secondo cui si trasformano le « *componenti della connessione proiettiva* » $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ di T. Y. THOMAS (espressa dalle (99) indicate più innanzi). Si dovrebbe dunque costruire una teoria in gran parte nuova.

Questo in effetto non è necessario. Infatti è agevole ricavare dal sistema $L^\lambda_{\mu\nu}$ un altro sistema, $P^\lambda_{\mu\nu}$, pure (T_p)-invariante, ma che si trasforma come $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Osserviamo che per le (75) il sistema

(81) $$L^\tau_{\nu\tau} = \Gamma^\tau_{\nu\tau} - \frac{1}{n}\Gamma^\tau_{\tau\nu}$$

si trasforma (per effetto delle (3)) nel modo seguente:

(82) $$L'^\beta_{\alpha\beta} = L^\tau_{\omega\tau}\frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\alpha} + \frac{n-1}{n}\frac{\partial\theta}{\partial x'^\alpha}.$$

Ne segue subito che, posto

(83) $$P^\lambda_{\mu\nu} = L^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{n-1}\delta^\lambda_\mu L^\tau_{\nu\tau}$$

si ha appunto

(84) $$P'^\delta_{\gamma\alpha} = P^\nu_{\lambda\omega}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\gamma\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\nu}.$$

Cioè, che le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$ ((T_p)-invarianti) si trasformano come le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, e perciò, *sono i parametri di una connessione affine*, $\nabla^{(p)}$, *intrinsecamente legata alla data*, ∇, *e invariante per le trasformazioni* (T_p) *che conservano il parallelismo.*

A questo risultato possiamo arrivare anche per un'altra via più semplice. Notiamo che pel cambiamento (72) della connessione si ha, per le (7),

$$\overline{S}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} + \delta^{\lambda}_{\mu}\psi_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\psi_{\mu} \tag{85}$$

e quindi, per le (15),

$$\overline{\Phi}_{\nu} = \Phi_{\nu} - (n-1)\psi_{\nu}. \tag{86}$$

Vi è dunque una scelta intrinseca di ψ_{ν}:

$$\psi_{\nu} = \frac{1}{n-1}\Phi_{\nu}, \tag{87}$$

tale che per la nuova connessione il vettore di Einstein si annulli; a cui corrispondono i seguenti valori delle $\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$, determinati in modo invariante per le T_p:

$$P^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{2}{n-1}\delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_{\nu}. \tag{88}$$

Tenendo presenti le (74), si vede subito che queste quantità coincidono con quelle date dalle (83). Ciò prova nuovamente quanto avevamo enunciato e per di più ci mostra che *la connessione* $\nabla^{(p)}$, *intrinsecamente determinata dalla data* ∇ *in modo invariante per le* T_p, *dà luogo allo stesso trasporto parallelo delle direzioni che quella* (∇) *assegnata: e tra tutte le trasformate di questa per le* T_p, *è caratterizzata dal fatto che per essa si annulla il vettore di Einstein* Φ_{ν}: il che ha un semplice significato geometrico, che abbiamo già notato (n.° 3).

Si osservi questa conseguenza notevole: *a un trasporto lineare delle direzioni è intrinsecamente legato un trasporto delle lunghezze* (dei vettori le cui direzioni varino per parallelismo). In altri termini: *una legge* (lineare) *di trasporto per parallelismo in una varietà curva determina univocamente una legge di trasporto per equipollenza,* a cui è subordinata. Di questo risultato ci si può render conto geometricamente tenendo presente il significato dell'annullarsi del vettore di Einstein (n.° 3), e il fatto che una omografia vettoriale tra due stelle di vettori di E_n affine è individuata assegnando l'omografia che essa subordina tra le stelle di direzioni omologhe, e inoltre, secondo due direzioni omologhe, *una coppia* di vettori omologhi. Il risultato può paragonarsi a quest'altro stabilito dal CARTAN: che tra le *connessioni proiettive* aventi le stesse geodetiche ve ne è una intrinsecamente determinata, invariante per le trasformazioni (T_g) che conservano le geodetiche: *la connessione proiettiva normale* ([61]).

Mediante le (83) le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$ si esprimono per le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$: ma anche inversamente, le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$ possono esprimersi per le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$: dalle (74), tenendo presente che le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$ sono (T_p)-invarianti, oppure dalle (83) risolvendo, otteniamo

$$L^{\lambda}_{\mu\nu} = P^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\delta^{\lambda}_{\mu} P^{\tau}_{\tau\nu}. \tag{89}$$

Dunque *anche le* $P^{\lambda}_{\mu\nu}$, come le $L^{\lambda}_{\mu\nu}$, *sono sufficienti a individuare il trasporto delle direzioni subordinato alla supposta connessione affine,* o, se si vuole, *a individuare questa a meno della più generale trasformazione* T_p. Corrispondentemente, abbiamo che basta sostituire alla normalizzazione espressa dalla (79) la seguente:

$$h = C\cdot e^{-\frac{2}{n-1}\int \Phi_\nu dx^\nu - \int k dt} \qquad (C = \text{cost.}) \tag{90}$$

perchè una serie di vettori $\xi(t)$ le cui direzioni sono parallele in A_n lungo una linea Γ dia luogo a una serie $\xi^{(0)}(t) = h\xi(t)$ di vettori egualmente diretti, ed equipollenti lungo Γ per la connessione $\nabla^{(p)}$: tali cioè che sia, lungo Γ,

$$\frac{d\xi^{(0)\lambda}}{dt} + P^{\lambda}_{\mu\nu}\xi^{(0)\mu}\frac{dx^\nu}{dt} = 0. \tag{91}$$

Indicando con $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$ i parametri della connessione simmetrica $\nabla^{(q)}$ associata (n.° 3) alla connessione invariante $\nabla^{(p)}$, con $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ il tensore di torsione di questa, avremo:

$$Q^{\lambda}_{\mu\nu} = P^{\lambda}_{(\mu\nu)} = B^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_\nu + \delta^{\lambda}_{\nu}\Phi_\mu), \tag{92}$$

$$H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = P^{\lambda}_{[\mu\nu]} = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} + \frac{1}{n-1}(\delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_\nu - \delta^{\lambda}_{\nu}\Phi_\mu) \text{ ([62]).} \tag{93}$$

Naturalmente sarà

$$H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\nu} = P^{\nu}_{[\mu\nu]} = 0. \tag{94}$$

([61]) CARTAN, **25**, 1924, pp. 221-226. Ved. anche SCHOUTEN, **26**, 1924, pp. 423-424 e **38**, 1926, pp. 156-158.

([62]) $Q^{\lambda}_{\mu\nu}$ è il sistema Σ^{i}_{jk} di J. M. THOMAS (**36**, 1926, p. 663, form. (5.12)); $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ è il tensore Ω^{i}_{jk} di J. M. THOMAS (ibid., form. (5.11)), indicato con T^{i}_{jk} da EISENHART (**48**, 1927, p. 35, form. (13.4)). L'invariante $P^{\lambda}_{\mu\nu}$, che ha fra i (T_p)-invarianti un ruolo essenziale, in quanto da esso *tutti gli altri* possono dedursi (n.° 8), non era invece stato notato finora.

Mediante il tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ si può formare una successione di tensori, sempre (T_p)-invarianti, tutti *simmetrici* rispetto ai loro indici:

$$
(95) \qquad \begin{cases} q_{\lambda\tau} = H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} H_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\mu} = S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} S_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\mu} - \dfrac{1}{n-1} \Phi_\lambda \Phi_\tau, \\ q_{\lambda\tau\omega} = H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} H_{\nu\tau}^{\cdot\cdot\varkappa} H_{\varkappa\omega}^{\cdot\cdot\mu} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

il primo dei quali, *se di rango n*, potrebbe servire come tensore fondamentale di una *metrica* intrinsecamente determinata dalla data connessione affine, e (T_p)-invariante.

Risulta evidente dal confronto delle (93), (11), che *l'annullarsi del tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè la data connessione ∇ sia emisimmetrica* (n.° 2), come ha notato J. M. Thomas ([63]). E quindi anche: *una connessione asimmetrica può rendersi simmetrica con conservazione del parallelismo allora e solo che essa è emisimmetrica* (ibid.).

Questo risultato può ottenersi anche per altra via: è evidente che sarà possibile trasformare la data connessione ∇ in una simmetrica mediante una T_p allora e solo che per la connessione supposta sussiste il *teorema di Severi*, nella forma enunciata al n.° 2; o ancora, *allora e solo che il vettore* (di torsione) $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}\xi^\mu\eta^\nu$ *associato a due qualunque vettori* ξ, η *in un punto (qualunque) della supposta* A_n *è complanare a* ξ, η. Ora: la condizione perchè quest'ultima circostanza si presenti si esprime agevolmente: troviamo appunto che deve essere

$$
(96) \qquad S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = \frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\lambda \Phi_\mu - \delta_\mu^\lambda \Phi_\nu)
$$

cioè, che la data connessione deve essere emisimmetrica ([64]). Sostanzialmente

---

([63]) **36**, 1926, p. 669.

([64]) Infatti la condizione perchè $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\xi^\lambda\eta^\mu$ sia complonare a ξ, η si scrive

$$
(f) \qquad \delta_{\mu\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma}\xi^\mu\eta^\nu S_{\rho\tau}^{\cdot\cdot\omega}\xi^\rho\eta^\tau = 0
$$

ove $\delta_{\mu\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma} = 3!\,\delta_{[\mu}^{\lambda}\delta_{\nu}^{\varkappa}\delta_{\omega]}^{\sigma}$ (ved. ([18]), ([58])). La precedente relazione varrà per ogni ξ, η allora e solo che

$$
(g) \qquad \delta_{\mu\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma} S_{\rho\tau}^{\cdot\cdot\omega} + \delta_{\rho\nu\omega}^{\lambda\varkappa\sigma} S_{\mu\tau}^{\cdot\cdot\omega} + \delta_{\mu\tau\omega}^{\lambda\varkappa\sigma} S_{\rho\nu}^{\cdot\cdot\omega} + \delta_{\rho\tau\omega}^{\lambda\varkappa\sigma} S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\omega} = 0.
$$

Ponendo $\varkappa = \mu$, $\sigma = \lambda$ e sommando si hanno appunto le (96), e inversamente, dalle (96) conseguono agevolmente le (g). Si noti che analogamente è

$$
(h) \qquad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{n-1}(\delta_\omega^\nu R_{\mu\lambda} - \delta_\mu^\nu R_{\omega\lambda}) \qquad \left(R_{\mu\lambda} = R_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\tau}\right)
$$

questa proprietà era già stata data, in forma equivalente, per quanto in apparenza assai diversa, dal CARTAN: infatti il suo « primo tensore irreduttibile di torsione », $\mathcal{T}$, può identificarsi con $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ (cfr. n.° 3 ([24]), ([65])).

Alle due caratterizzazioni date poco sopra per le varietà a connessione affine emisimmetrica possono dunque aggiungersi queste altre due: che *in una tale varietà, pel trasporto parallelo infinitesimale, la direzione trasportata resta tangente alla superficie geodetica iniziale*, e che *la traslazione associata a un qualunque ciclo infinitesimo è rappresentata da un vettore la cui direzione appartiene alla 2-direzione del ciclo* ([66]).

Per $P_{\mu\nu}^{\lambda}$ si può agevolmente esprimere anche il sistema $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ delle *componenti della connessione proiettiva* (secondo T. Y. THOMAS ([67])) legata alla connessione affine ∇: le quali, invarianti per le T_g (che conservano le geodetiche), lo saranno a maggior ragione per le T_p. Si ha

$$\Pi_{\mu\nu}^{\lambda} = B_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{n+1}(\delta_{\mu}^{\lambda} B_{\tau\nu}^{\tau} + \delta_{\nu}^{\lambda} B_{\tau\mu}^{\tau}) = Q_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{1}{n+1}(\delta_{\mu}^{\lambda} Q_{\tau\nu}^{\tau} + \delta_{\nu}^{\lambda} Q_{\tau\mu}^{\tau}). \tag{97}$$

Ricorderò che le $\Pi_{\mu\nu}^{\lambda}$ godono delle proprietà

$$\Pi_{\mu\nu}^{\lambda} = \Pi_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad \Pi_{\tau\nu}^{\tau} = 0, \tag{98}$$

e si trasformano, per le (3), secondo le formule

$$\Pi'^{\delta}_{\gamma\alpha} = \Pi_{\lambda\omega}^{\nu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma} \partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{n+1} \delta_{\gamma}^{\delta} \frac{\partial \theta}{\partial x'^{\alpha}} - \frac{1}{n+1} \delta_{\alpha}^{\delta} \frac{\partial \theta}{\partial x'^{\gamma}}. \tag{99}$$

---

la condizione necessaria e sufficiente perchè il vettore $D\xi^{\lambda}$, incremento di un qualunque vettore ξ^{λ} per trasporto ciclico, appartenga al piano del ciclo. Quando la A_n è una V_n riemanniana, le (h) si riducono alla condizione ($J = K^2$) perchè coincidano i parallelismi di LEVI-CIVITA e di SEVERI: ved. BOMPIANI, **9**, 1921, p. 384, 385.

([65]) Ved. CARTAN, **20**, t. 42, 1925, pp. 31-35. Se si osserva che

$$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \varkappa_{\lambda\mu\varkappa}^{\omega\tau\nu} S_{\omega\tau}^{\cdot\cdot\varkappa}, \text{ ove } \varkappa_{\lambda\mu\varkappa}^{\omega\tau\nu} = \delta_{\lambda}^{\omega}\delta_{\mu}^{\tau}\delta_{\varkappa}^{\nu} + \frac{1}{n-1}\delta_{\varkappa}^{\tau}\left\{\delta_{\lambda}^{\nu}\delta_{\mu}^{\omega} - \delta_{\mu}^{\nu}\delta_{\lambda}^{\omega}\right\}, \text{ onde } \varkappa_{\lambda\nu\varkappa}^{\omega\tau\nu} = 0, \tag{i}$$

e si confronta con le considerazioni esposte dal CARTAN a pp. 31-32, si vede che $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ può identificarsi col tensore $\mathcal{T}$ di CARTAN, o meglio, con una sua particolare (ma intrinseca) determinazione. Ora il CARTAN dimostra (ibid., pp. 34-35) che le varietà per le quali $\mathcal{T}$ è nullo sono quelle per le quali « la traslazione associata a un parallelogrammo infinitesimo è rappresentata da un vettore situato nel piano del parallelogrammo ». Il CARTAN non parla affatto di connessioni emisimmetriche.

([66]) Ved., sulla geometria delle connessioni affini emisimmetriche, anche FRIEDMANN e SCHOUTEN, **23**, 1924.

([67]) T. Y. THOMAS, **28**, 1925, p. 200, form. (2.4).

Le $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ sono sufficienti a individuare, nella varietà, una *connessione proiettiva normale* secondo CARTAN ([68]), di parametri

$$(100) \quad \Lambda^{0}_{0\nu} = 0, \quad \Lambda^{\lambda}_{0\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}, \quad \Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} = \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}, \quad \Lambda^{0}_{\mu\nu} = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{\partial \Pi^{\tau}_{\nu\mu}}{\partial x^{\tau}} + \Pi^{\tau}_{\nu\omega}\Pi^{\omega}_{\tau\mu}\right) \text{ ([69])},$$

avente le stesse geodetiche della connessione affine ∇ (comuni anche a $\nabla^{(b)}$, $\nabla^{(p)}$, $\nabla^{(q)}$).

È lo stesso assegnare le $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ o le linee geodetiche di tale connessione: le cui equazioni del resto, con riferimento a un *parametro proiettivo* t ([70]) si possono scrivere

$$(101) \qquad \frac{d^2 x^{\lambda}}{dt^2} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt} = 0.$$

La teoria delle varietà a connessione proiettiva normale può considerarsi come una teoria geometrica dei sistemi differenziali del tipo (101); allo stesso modo la teoria invariantiva delle varietà a connessione affine per le trasformazioni T_p che conservano il parallelismo, della quale ora ci occupiamo, può dirsi una teoria geometrica dei sistemi del tipo (91).

7. Ricostruzione della varietà a connessione affine più generale a partire dalle sue geodetiche. — È interessante il vedere come dalle $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ si possa risalire alle $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ più generali a cui esse corrispondono disponendo successivamente della scelta degli altri elementi arbitrari da cui le $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ dipendono.

Anzitutto: sia dato un sistema di linee (101), cioè sia data in una varietà in cui le x^{ν} sono coordinate curvilinee, una connessione proiettiva normale. Nelle (101) si intenderà che le $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ soddisfino alle (98), e per una trasformazione (3) delle coordinate si trasformino con la legge (99). Le $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ dipendono da $n\left[\binom{n+1}{2} - 1\right]$ parametri indipendenti.

Poi: assegniamo ad arbitrio un vettore Q_{λ} che si trasformi, per le (3), secondo la legge (18). Ciò equivale, come VEBLEN e J. M. THOMAS hanno notato ([71]), ad assegnare per ciascun punto della varietà, nel rispettivo spazio

([68]) CARTAN, **25**, 1924, pp. 223-224.

([69]) Cfr. CARTAN, **25**, 1924, pp. 226-227; SCHOUTEN, **26**, 1924, p. 423 e **38**, 1926, p. 157. Cfr. anche T. Y. THOMAS, **33**, 1926, p. 726, form. (9). (Le $\Lambda^{a}_{b\nu}$ $(a, b = 0, 1, \ldots n)$ non coincidono con le $\Gamma^{*i}_{\alpha\beta}$ di T. Y. THOMAS, ma ne differiscono per fattori numerici).

([70]) T. Y. THOMAS, **28**, 1925, pp. 200-201.

([71]) VEBLEN e J. M. THOMAS, **37**, 1926, pp. 294-295.

proiettivo tangente, un iperpiano. D'altra parte anche a ciascuna connessione affine, di parametri $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$, è intrinsecamente legato un vettore, $Q^{\tau}_{\tau\lambda}$, che varia con la stessa legge (18), e quindi un iperpiano; e due connessioni affini simmetriche che abbiano le stesse geodetiche non differiscono che per l'iperpiano associato. Ciò premesso: se poniamo

$$Q^{\nu}_{\lambda\mu} = \Pi^{\nu}_{\lambda\mu} + \frac{1}{n+1}(\delta^{\nu}_{\lambda} Q_{\mu} + \delta^{\nu}_{\mu} Q_{\lambda}), \tag{102}$$

le $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$ si trasformano secondo la legge (4), e si ha

$$Q^{\tau}_{\tau\lambda} = Q_{\lambda}\,. \tag{103}$$

Tenute presenti le (97), avremo che le $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$ sono i parametri della più generale connessione affine *simmetrica* avente le stesse geodetiche della supposta connessione proiettiva normale. Le $Q^{\nu}_{\lambda\mu}$ dipendono da $n\binom{n+1}{2}$ parametri indipendenti.

Indi assegniamo un tensore $H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$, soddisfacente alle condizioni

$$H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} = 0, \quad H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\nu} = 0 \tag{104}$$

e del resto arbitrario, e poniamo

$$P^{\nu}_{\lambda\mu} = Q^{\nu}_{\lambda\mu} + H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}. \tag{105}$$

Le $P^{\nu}_{\lambda\mu}$ sono allora i parametri della connessione $\nabla^{(p)}$, (T_p)-invariante, corrispondente alla più generale connessione affine asimmetrica che ha le linee (101) come geodetiche: o, se si vuole, sono i parametri del più generale trasporto (lineare) parallelo delle direzioni pel quale le (101) sono le linee autoparallele; $H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ è il tensore di torsione di quella connessione $\nabla^{(p)}$. Le $P^{\nu}_{\lambda\mu}$ dipendono da $n(n^2-1)$ parametri indipendenti.

Infine: assegniamo ad arbitrio un vettore covariante Φ_{λ}: posto

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = P^{\nu}_{\lambda\mu} - \frac{2}{n-1}\delta^{\nu}_{\lambda}\Phi_{\mu} \tag{106}$$

la connessione di parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ (tutti indipendenti, e in numero di n^3), per la quale è precisamente Φ_{λ} il *vettore di Einstein*, sarà la più generale connessione affine a cui è subordinato il trasporto delle direzioni definito dalle $P^{\nu}_{\lambda\mu}$, e il dato sistema (101) come sistema delle linee goodetiche.

8. **Il teorema fondamentale. Tensori di curvatura (T_p)-invarianti.** — La derivata covariante di un qualunque tensore per la derivazione $\nabla^{(p)}$ cor-

rispondente alla connessione (T_p)-invariante di parametri $P^{\lambda}_{\mu\nu}$ si esprime agevolmente per la derivata covariante del tensore medesimo con la derivazione ∇, di parametri $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$: abbiamo ad es.:

$$\nabla^{(p)}_{\nu}\xi^{\lambda} = \nabla_{\nu}\xi^{\lambda} + \frac{2}{n-1}\Phi_{\nu}\xi^{\lambda}, \quad \nabla^{(p)}_{\nu}\xi_{\mu} = \nabla_{\nu}\xi_{\mu} - \frac{2}{n-1}\Phi_{\nu}\xi_{\mu}. \tag{107}$$

Più in generale, se $E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r}$ è un qualunque tensore ad r indici di covarianza, s di controvarianza, si ha

$$\nabla^{(p)}_{\nu}E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r} = \nabla_{\nu}E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r} - \frac{2(r-s)}{n-1}\Phi_{\nu}E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r}, \tag{108}$$

onde, corrispondentemente, se $\overline{d}$, $\overline{d}^{(p)}$ sono i simboli dei *differenziali cogredienti* che corrispondono alle derivazioni covarianti ∇, $\nabla^{(p)}$, avremo

$$\overline{d}^{(p)}E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r} = \overline{d}E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r} - \frac{2(r-s)}{n-1}\Phi_{\nu}dx^{\nu}\cdot E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r}. \tag{109}$$

Se il tensore $E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r}$ è (T_p)-invariante, lo sarà anche il tensore $\nabla^{(p)}_{\nu}E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r}$ $\left(\text{e così } \overline{d}^{(p)}E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r}\right)$, e tutti i tensori derivati successivi (con la derivazione $\nabla^{(p)}$) lo saranno pure. Dunque: *mediante la derivazione* $\nabla^{(p)}$, *applicata a tensori* (T_p)-*invarianti, si possono ottenere infiniti altri tensori dotati della medesima proprietà.* Lo stesso potrà dirsi anche per la derivazione $\nabla^{(q)}$, che ha per parametri le quantità $Q^{\nu}_{\lambda\mu} = P^{\nu}_{(\lambda\mu)}$: e questo era già stato notato anche da J. M. THOMAS (**36**, 1926, p. 668). Ma c'è di più: *tutti i tensori invarianti per le* T_p *si possono ottenere come invarianti differenziali della connessione* $\nabla^{(p)}$: e quindi anche, come invarianti differenziali simultanei della connessione *simmetrica* $\nabla^{(q)}$ e del tensore di torsione $H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$.

In certo senso ciò è senz'altro prevedibile, in conseguenza di quanto s'è detto al n.° 6: giacchè risulta da quanto ivi è stato esposto che le condizioni

$$\overline{P}^{\lambda}_{\mu\nu} = P^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{110}$$

equivalgono alle (73) e quindi alle (72): e perciò, *sono necessarie e sufficienti perchè le corrispondenti connessioni, di parametri* $\overline{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ *e* $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, *siano* (T_p)-*trasformate l'una dell'altra.* Dunque non possono esistere espressioni (T_p)-invarianti, *funzionalmente* indipendenti da $P^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Ma valendoci del fatto che *la connessione* $\nabla^{(p)}$ *è essa stessa una* (T_p)-*trasformata della connessione* ∇ *primitiva,* è facile dimostrare in modo completo e rigoroso la proprietà enunciata. Chiamiamo d'ora innanzi, quando occorra distinguerli dai (T_p)-*invarianti*, invarianti (differenziali) *affini* di una varietà a connessione affine quelli di cui si parlò al n.° 5: invarianti propri della varietà, comuni soltanto ad essa e alle sue trasformate *isomorfiche*. Un invariante differenziale affine (d'ordine m qualunque) della connessione ∇ può sempre esprimersi nella forma (68), (n.° 5): se esso è anche (T_p)-invariante, ciò vorrà dire che i valori delle sue componenti $E^{\cdot\cdot\varkappa_1\ldots\varkappa_s}_{\omega_1\ldots\omega_r}$ non mutano se nelle (68) al posto delle $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ sostituiamo i parametri (dati dalle (72)) di una qualunque connessione (T_p)-trasformata della data. In particolare, essi non muteranno se al posto delle $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ sostituiamo le $P^\nu_{\lambda\mu}$: ora ciò equivale a dire che il *supposto invariante è anche un invariante differenziale affine (d'ordine* m*) della connessione* $\nabla^{(p)}$. Che poi, inversamente, tutti gli invarianti differenziali affini di questa connessione siano (T_p)-invarianti della primitiva, è ovvio. Abbiamo dunque il seguente

TEOREMA FONDAMENTALE. — *Gli invarianti differenziali di una connessione affine* ∇ *per le trasformazioni* $(\mathrm{T_p})$ *che conservano il parallelismo sono tutti e soli gli invarianti differenziali affini della corrispondente connessione* $(\mathrm{T_p})$-*invariante*, $\nabla^{(\mathrm{p})}$.

Se è nota una espressione di un tale invariante per elementi della connessione ∇, *ne ricaviamo una espressione* $(\mathrm{T_p})$-*invariante sostituendovi, a ciascun elemento di* ∇, *il corrispondente elemento della connessione* $\nabla^{(\mathrm{p})}$.

In particolare: gli invarianti *del primo ordine* per le T_p si esprimeranno in termini finiti per $P^\lambda_{\mu\nu}$: come abbiamo già veduto (n.° 6) pei principali di essi: $L^\lambda_{\mu\nu}$, $Q^\lambda_{\mu\nu}$, $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$, e il tensore $H^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu}$, all'infuori del quale non vi sono altri *tensori* (T_p)-invarianti del primo ordine (indipendenti da esso).

Fra i tensori (T_p)-invarianti *del secondo ordine* si presentano anzitutto il tensore di curvatura $K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ della connessione $\nabla^{(p)}$:

$$K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = \frac{\partial P^\nu_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial P^\nu_{\lambda\mu}}{\partial x^\omega} + P^\varkappa_{\lambda\omega} P^\nu_{\varkappa\mu} - P^\varkappa_{\lambda\mu} P^\nu_{\varkappa\omega}, \tag{111}$$

i tensori di curvatura $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $Q^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ della connessione coniugata a $\nabla^{(p)}$ $(\nabla^{(p)*})$ e della connessione simmetrica associata $(\nabla^{(q)})$, e il tensore

$$\begin{aligned} H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} &= K^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - Q^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = \overset{(q)}{\nabla}_\mu H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega} - \overset{(q)}{\nabla}_\omega H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} + H^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\omega} H^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\mu} - H^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} H^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\omega} = \\ &= \overset{(p)}{\nabla}_\mu H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega} - \overset{(p)}{\nabla}_\omega H^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} - H^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\omega} H^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\mu} + H^{\cdot\cdot\varkappa}_{\lambda\mu} H^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\omega} - 2H^{\cdot\cdot\varkappa}_{\omega\mu} H^{\cdot\cdot\nu}_{\varkappa\lambda}, \end{aligned} \tag{112}$$

corrispondente al tensore $S^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ relativo alla connessione ∇. Posto

$$\Phi_{\lambda\mu} = \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\lambda} = \overset{(b)}{\nabla}_\mu \Phi_\lambda - \overset{(b)}{\nabla}_\lambda \Phi_\mu = S^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\mu\lambda\tau} \tag{113}$$

(*rotore* del vettore di EINSTEIN Φ_ν) troviamo agevolmente che detti tensori si esprimono nel modo seguente per gli elementi della connessione ∇:

$$(114)\quad K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} + \frac{2}{n-1}\,\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu},$$

$$(115)\quad K^{*\cdot\cdot\cdot\,\nu}_{\omega\mu\lambda} = R^{*\cdot\cdot\cdot\,\nu}_{\omega\mu\lambda} + \frac{2}{n-1}\left[\delta_\omega^\nu \overset{*}{\nabla}_\mu \Phi_\lambda - \delta_\mu^\nu \overset{*}{\nabla}_\omega \Phi_\lambda + 2\left\{ S_{\mu\omega}^{\cdot\cdot\,\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu \Phi_\omega - \delta_\omega^\nu \Phi_\mu)\right\}\Phi_\lambda\right],$$

$$(116)\quad Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} + \frac{1}{n-1}\,\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu} + \frac{1}{n-1}\,\delta_\omega^\nu(\nabla_\mu^{(b)}\Phi_\lambda - \Phi_\mu\Phi_\lambda) - \frac{1}{n-1}\,\delta_\mu^\nu(\nabla_\omega^{(b)}\Phi_\lambda - \Phi_\omega\Phi_\lambda),$$

$$(117)\quad H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu} + \delta_\mu^\nu \nabla_\omega^{(b)}\Phi_\lambda - \delta_\nu^\omega \nabla_\mu^{(b)}\Phi_\lambda) + \frac{1}{(n-1)}(\delta_\omega^\nu \Phi_\mu - \delta_\mu^\nu \Phi_\omega)\Phi_\lambda.$$

Notiamo incidentalmente alcune conseguenze delle (114), (115), (116), (117), che potranno servirci in seguito. Posto

$$(118)\qquad R_{\mu\lambda} = R_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau},\quad \overset{*}{R}_{\mu\lambda} = R^{*\cdot\cdot\cdot\,\tau}_{\tau\mu\lambda},\quad B_{\mu\lambda} = B_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau},\quad S_{\mu\lambda} = S_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau},$$

e analogamente

$$(119)\qquad K_{\mu\lambda} = K_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau},\quad \overset{*}{K}_{\mu\lambda} = K^{*\cdot\cdot\cdot\,\tau}_{\tau\mu\lambda},\quad Q_{\mu\lambda} = Q_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau},\quad H_{\mu\lambda} = H_{\tau\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau},$$

si ha:

$$(120)\quad K_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - \frac{2}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu},\quad \overset{*}{K}_{\lambda\mu} = \overset{*}{R}_{\lambda\mu} + 2\overset{*}{\nabla}_\lambda \Phi_\mu,$$

$$(121)\quad \begin{cases} K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau} = R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau} + \dfrac{2n}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau} + \dfrac{n+1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} = \dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} L_{\lambda\tau}^{\tau} - \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} L_{\mu\tau}^{\tau}\right), \\ K^{*\cdot\cdot\cdot\,\tau}_{\lambda\mu\tau} = R^{*\cdot\cdot\cdot\,\tau}_{\lambda\mu\tau} + \dfrac{2}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu}, \end{cases}$$

$$(122)\quad Q_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu} - \frac{1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda^{(b)}\Phi_\mu - \Phi_\lambda\Phi_\mu,\quad Q_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau} = B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau} + \frac{n+1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu}$$

$$(123)\quad H_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu} - \frac{1}{n-1}\,\Phi_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda^{(b)}\Phi_\mu + \Phi_\lambda\Phi_\mu,\quad H_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau} = 0.$$

Fra i tensori $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$, $K^{*\cdot\cdot\cdot\,\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$, $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$ ed $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}$, $\nabla_\tau^{(p)} H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}$, $\nabla_\tau^{(q)} H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}$ sussistono naturalmente relazioni analoghe a quelle indicate al n.° 3 pei corrispondenti tensori relativi alla connessione ∇, e che non importa stare a scrivere.

9. **Connessioni (T_p)-equivalenti. Coordinate (T_p)-normali, tensori (T_p)-normali, estensioni (T_p)-invarianti. Teoremi di riduzione e di sostituzione per la teoria invariantiva delle trasformazioni T_p.** — Valendoci del teorema fondamentale dato al n.° prec. e delle altre nozioni e formule esposte possiamo assai agevolmente dedurre dai risultati ottenuti ai n.i 4 e 5 per le connessioni

affini in generale altrettanti risultati relativi alla teoria delle trasformazioni (T_p) che conservano il parallelismo.

Anzitutto: potremo valerci delle considerazioni esposte al n.° 4 per ottenere la risoluzione del problema dell'*equivalenza per le* $\mathrm{T_p}$, o $(\mathrm{T_p})$-*equivalenza* di due connessioni affini asimmetriche. Rammentiamo che le $P^{\lambda}_{\mu\nu}$, per una trasformazione (3) delle coordinate x^{ν} in A_n, si trasformano secondo le (84), che non differiscono dalle formule (4) di trasformazione delle $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Indichiamo con $F^{(p)}_0$ le formule di trasformazione per $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, con $F^{(p)}_1$ le formule di trasformazione per $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ e $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, analoghe alle F_0, F_1 del n.° 4, cioè alle (37), (38) e (38*); da cui si ottengono, come le (84) dalle (4), sostituendo agli elementi della connessione ∇ i corrispondenti della connessione $\nabla^{(p)}$. Indichiamo infine con $F^{(p)}_2$, $F^{(p)}_3, \ldots$, $F^{(p)}_m, \ldots$ le formule analoghe alle F_2, $F_3, \ldots$, F_m del n.° 4, ottenute dalle $F^{(p)}_1$ oon successive derivazioni covarianti $(\nabla^{(p)})$. Avremo senz'altro che:

La condizione perchè due connessioni affini di parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, $\Gamma'^{\delta}_{\gamma\alpha}$ *siano* $(\mathrm{T_p})$-*equivalenti, cioè diano luogo allo stesso trasporto per parallelismo delle direzioni, è che esista un intero* $\mathrm{N}(\geq 0)$ *tale che le* $\mathrm{F}^{(p)}_0$, $\mathrm{F}^{(p)}_1, \ldots$, $\mathrm{F}^{(p)}_{\mathrm{N}}$ *siano algebricamente compatibili, e le loro soluzioni soddisfino alle* $\mathrm{F}^{(p)}_{\mathrm{N}+1}$. Se $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, $\Gamma'^{\delta}_{\gamma\alpha}$ si interpretano come i parametri delle connessioni affini in due distinte varietà, *la condizione ora detta sarà necessaria e sufficiente perchè queste due varietà si possano rappresentare l'una sull'altra con conservazione del parallelismo.* In particolare: le varietà a connessione affine per le quali è

$$H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}=0, \quad K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0 \qquad (\text{e quindi anche } K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}=0) \tag{124}$$

ossia

$$S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}=\frac{1}{n-1}(\delta^{\lambda}_{\nu}\Phi_{\mu}-\delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_{\nu}), \quad R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=\frac{2}{n-1}\,a^{\nu}_{\lambda}\Phi_{\mu\omega}, \tag{125}$$

ed esse soltanto, sono (T_p)-equivalenti a uno spazio affine, cioè rappresentabili con conservazione del parallelismo, e anzi in $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ modi, su di uno spazio affine: e anche su altre (qualunque) varietà della stessa classe, e in particolare su sè stesse. Vedremo poi (n.° 11), più in generale, quali siano le varietà (T_p)-equivalenti a uno spazio a connessione affine *integrabile*, cioè *a curvatura nulla.*

Veniamo ora ad applicare alla teoria delle trasformazioni T_p le considerazioni svolte al n.° 5. In una A_n si potranno definire dei *sistemi di coordinate normali* $(\mathrm{T_p})$-*invarianti* (diremo: $(\mathrm{T_p})$-*normali*) aventi per origine un punto arbitrario: tali saranno le coordinate normali per la connessione $\nabla^{(p)}$. Sia z^ν un tale sistema di coordinate (T_p)-normali, con l'origine in P_0: e precisamente, sia quel sistema (univocamente determinato) che corrisponde a un dato sistema coordinato x^ν. Se indichiamo (come al n.° 5) con y^ν le coordinate normali per la connessione ∇ — diremo: le *coordinate normali affini* in A_n — corrispondenti allo stesso sistema x^ν, abbiamo subito

$$\begin{aligned}(126)\qquad &\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial z^\lambda}\right)_0 = \delta^\nu_\lambda, \quad \left(\frac{\partial^2 y^\nu}{\partial z^\lambda \partial z^\mu}\right)_0 = -\left(\overset{N}{P}{}^\nu_{(\lambda\mu)}\right)_0 = -\frac{2}{n-1}(\delta^\nu_{(\lambda}\Phi_{\mu)})_0, \\ &\left(\frac{\partial^3 y^\nu}{\partial z^\lambda \partial z^\mu \partial z^\tau}\right)_0 = -\left(\overset{N}{P}{}^\nu_{(\lambda\mu\tau)}\right)_0 = -\frac{2}{n-1}\left[\delta^\nu_{(\lambda} D_\mu \Phi_{\tau)} - \frac{4}{n-1}\delta^\nu_{(\lambda}\Phi_\mu\Phi_{\tau)}\right]_0, \ \text{ecc...},\end{aligned}$$

ove le $P^\nu_{\lambda\mu\tau}, \ldots, P^\nu_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}, \ldots,$ sono le quantità costruite per le $P^\nu_{\lambda\mu}$ come $\Gamma^\nu_{\lambda\mu\tau}, \ldots, \Gamma^\nu_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m}, \ldots$ (n.° 5, form. (44), (45)) per le $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$: l'indice $_N$ significa che esse sono calcolate nel sistema coordinato normale affine y^ν, l'indice $_0$ contrassegna, al solito, i valori calcolati in P_0; infine D è il simbolo dell'*estensione* (n.° 5) corrispondente alla connessione ∇.

Mediante queste formule, e tenendo presenti le (88), esprimiamo agevolmente i *tensori* normali per la connessione $\nabla^{(p)}$ (diremo: *tensori* (T_p)-*normali*) $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda}$, definiti dalle condizioni — da supporsi soddisfatte in ciascun punto P_0 della A_n in relazione con un sistema coordinato z^ν ivi (T_p)-normale —:

$$(127)\qquad (G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda})_0 = \left(\frac{\partial^m \overset{N}{P}{}^\lambda_{\mu\nu}}{\partial z^{\tau_1}\partial z^{\tau_2}\ldots\partial z^{\tau_m}}\right)_0$$

pei tensori normali $C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_m}^{\cdot\cdot\lambda}$ relativi alla connessione ∇ — diremo: pei *tensori normali affini* di questa connessione —, e inoltre, pel vettore Φ_ν e le sue *derivate* covarianti; o, che è lo stesso, per le sue *estensioni*: ad es.

$$(128)\qquad G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} = C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda} + \frac{2}{n-1}\delta^\lambda_\mu D_\tau \Phi_\nu,$$

$$(129)\qquad G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2}^{\cdot\cdot\lambda} = C_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{n-1}C_{\mu\nu\cdot\varkappa}^{\cdot\cdot\lambda}(\delta^\varkappa_{\tau_1}\Phi_{\tau_2} + \delta^\varkappa_{\tau_2}\Phi_{\tau_1}) + \frac{2}{n-1}\delta^\lambda_\mu D_{\tau_2\tau_1}\Phi_\nu,$$

. . . .

In generale, abbiamo che il tensore (T_p)-normale d'ordine m, $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_{m-1}}^{\cdot\cdot\lambda}$, differisce dal tensore normale affine dello stesso ordine soltanto per un gruppo di termini additivi, che dipendono (omogeneamente) dai vettore Φ_ν e dalle sue estensioni degli ordini $1, 2, \ldots m-3,\ m-1$.

Come i tensori normali per la connessione $\nabla^{(p)}$ si possono interpretare quali tensori (T_p)-normali per la connessione ∇ primitiva, così si potranno definire per questa anche delle *estensioni* $(\mathrm{T_p})$-*invarianti*, che saranno le estensioni costruite in relazione alla connessione $\nabla^{(p)}$, cioè, a un sistema di coordinate, z^ν, (T_p)-normali. Su questo non occorre fermarci.

Terminiamo indicando i seguenti teoremi di riduzione e di sostituzione per la teoria degli invarianti differenziali di una connessione affine per le trasformazioni T_p: conseguenze immediate di quanto precede e degli analoghi teoremi dati al n.° 5 per gli invarianti differenziali affini:

TEOREMA DI RIDUZIONE. — *Gli invarianti differenziali (tensori o scalari) di ordine* m *di una varietà a connessione affine* ∇ *per le trasformazioni* $\mathrm{T_p}$ *che conservano il parallelismo sono gli invarianti simultanei*:

a) *dei tensori* $(\mathrm{T_p})$-*normali degli ordini* 1, 2,... m: $G_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, ..., $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_{m-1}}^{\cdot\cdot\lambda}$. Oppure:

b) *di* $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$; *di* $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate* ([72]) (*o estensioni* [$(\mathrm{T_p})$-*invarianti*]) *prima, seconda*,..., (m — 2)^ma^. Oppure:

c) *di* $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$: *di due ad arbitrio dei tensori* $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$, $Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ *e delle loro derivate (o estensioni) prime, seconde*,..., (m — 2)^me^. Oppure:

d) *di* $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate (o estensioni) prima, seconda*,..., (m — 1)^ma^; *di uno dei tensori* $Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $K^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ *e delle sue derivate (o estensioni) prima, seconda*,..., (m — 2)^ma^.

TEOREMA DI SOSTITUZIONE. — *Data l'espressione di un invariante differenziale (tensore o scalare) d'ordine* m *della connessione* ∇ *per le trasformazioni* $\mathrm{T_p}$, *in funzione di* $P_{\mu\nu}^\lambda$, $\dfrac{\partial P_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\tau}$, ..., $\dfrac{\partial^{m-1} P_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^{\tau_1}\partial x^{\tau_2}\ldots\partial x^{\tau_{m-1}}}$, *o anche di* $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, $\dfrac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^{\tau_1}}$, ..., $\dfrac{\partial^{m-1}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^{\tau_1}\partial x^{\tau_2}\ldots\partial x^{\tau_{m-1}}}$, *è lecito sostituire dovunque, in tale espressione, a* $P_{\mu\nu}^\lambda$ (*o* $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$) *e alle sue derivate prime, seconde*,..., (m — 1)^me^ *le corrispondenti componenti dei tensori* $(\mathrm{T_p})$-*normali* $G_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\lambda}$, ..., $G_{\mu\nu\cdot\tau_1\tau_2\ldots\tau_{m-1}}^{\cdot\cdot\lambda}$.

10. **Altri tensori (T_p)-invarianti (del secondo ordine).** — Vi sono altri notevoli tensori (T_p)-invarianti, oltre a quelli che finora ci si sono presentati. Un importante tensore (T_p)-invariante (del secondo ordine) si esprime (come $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, o $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $P_{\mu\nu}^\lambda$) per gli elementi del sistema (T_p)-invariante $L_{\mu\nu}^\lambda$ trovato al n.° 6:

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} L_{\lambda\omega}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\omega} L_{\lambda\mu}^\nu + L_{\lambda\omega}^\varkappa L_{\varkappa\mu}^\nu - L_{\lambda\mu}^\varkappa L_{\varkappa\omega}^\nu . \tag{130}$$

([72]) mediante la derivazione $\nabla^{(p)}$, o $\nabla^{(p)*}$, o $\nabla^{(q)}$. Cfr. ([54]).

Che in effetto $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ sia un tensore, segue ad es. dal fatto che, tra le condizioni d'integrabilità delle (75) troviamo:

$$L'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\delta} = L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \frac{\partial x^\omega}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\gamma}. \tag{131}$$

Del resto: per le (130), (74) abbiamo agevolmente

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{n} \delta_\lambda^\nu R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}, \text{ (}^{73}\text{)} \tag{132}$$

onde anche, essendo $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ (T_p)-invariante (oppure: mediante le (114), (121)):

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{n} \delta_\lambda^\nu K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}. \tag{133}$$

Dalle (132), (133) abbiamo:

$$L_{\lambda\mu} = L_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = R_{\lambda\mu} + \frac{1}{n} R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = K_{\lambda\mu} + \frac{1}{n} K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}, \tag{134}$$

$$L_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0. \tag{135}$$

Un altro tensore (T_p)-invariante è

$$\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \delta_\lambda^\nu R_{\omega\mu} \text{ (}^{74}\text{)}. \tag{136}$$

Infatti è anche:

$$\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \delta_\lambda^\nu K_{\omega\mu} = L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \delta_\lambda^\nu L_{\omega\mu}. \tag{137}$$

Come $\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ per $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, così si può esprimere il secondo tensore pel primo:

$$L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \frac{1}{n} \delta_\lambda^\nu \Lambda_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}. \tag{138}$$

Notiamo ancora che si ha:

$$\Lambda_{\lambda\mu} = \Lambda_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = R_{\lambda\mu} + R_{\mu\lambda} = K_{\lambda\mu} + K_{\mu\lambda} = L_{\lambda\mu} + L_{\mu\lambda} \tag{139}$$

e che è pure (T_p)-invariante

$$Z_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} - \frac{4}{n-1} \Phi_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu} - K_{\mu\lambda}. \tag{140}$$

(73) Il tensore $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ anche da J. M. THOMAS, da cui è ottenuto per altra via, è espresso mediante le (132). Ved. **36**, 1926, p. 668. Ved. anche EISENHART, **48**, 1927, p. 35, form. (13.2).

(74) Questo tensore è dato anche da EISENHART, **48**, 1927, p. 35, form. (13.1) $[\Lambda^i_{jkl}]$.

Un tensore (T_p)-invariante, che per tutt'altra via si era presentato a J. M. THOMAS ([75]), si ricava da $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$:

$$T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu H_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu H_{\mu\lambda}). \tag{141}$$

La formula data per questo tensore da J. M. THOMAS (l. c.) e da EISENHART ([76]), che nelle nostre notazioni si scrive

$$T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = S_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\lambda^\nu \Phi_{\omega\mu} + \delta_\mu^\nu S_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu S_{\mu\lambda}) + \frac{1}{(n-1)^2}(\delta_\mu^\nu \Phi_{\lambda\omega} - \delta_\omega^\nu \Phi_{\lambda\mu}) \tag{142}$$

si ricava agevolmente dalle (141), tenendo presenti le (117), (123). Si ha

$$T_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0, \quad T_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \frac{1}{n-1}(H_{\lambda\mu} - H_{\mu\lambda}) = \frac{1}{n-1}(S_{\lambda\mu} - S_{\mu\lambda}) + \frac{n-3}{(n-1)^2}\Phi_{\lambda\mu} \text{ ([77])}. \tag{143}$$

Infine: è naturalmente invariante per le T_p, essendolo per le trasformazioni geodetiche T_g, il *tensore di curvatura proiettiva*, o *tensore di Weyl*, $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ ([78]). Ricorderò che, posto (ved. n.° 6, form. (97)):

$$\Pi_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \frac{\partial \Pi_{\lambda\omega}^{\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Pi_{\lambda\mu}^{\nu}}{\partial x^\omega} + \Pi_{\lambda\omega}^{\varkappa}\Pi_{\varkappa\mu}^{\nu} - \Pi_{\lambda\mu}^{\varkappa}\Pi_{\varkappa\omega}^{\nu}, \text{ ([79])} \tag{144}$$

$$\Pi_{\lambda\mu} = \Pi_{\tau\lambda\mu}^{\tau}, \tag{145}$$

si ha ([80])

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \Pi_{\omega\mu\lambda}^{\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu \Pi_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu \Pi_{\mu\lambda}), \tag{146}$$

([75]) **36**, 1926, p. 667, form. (7.5).

([76]) **48**, 1927, p. 35, form. (13.5) $[T^i_{jkl}]$.

([77]) Cfr. EISENHART, **48**, 1927, form. (13.6); J. M. THOMAS, **36**, 1926, p. 668, form. (7.6). Un altro tensore (T_p)-invariante introdotto da J. M. THOMAS (ibid., form. (7.7)) è, nelle nostre notazioni, $-\frac{1}{n+1}K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \frac{S_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}}{n-1} - \frac{B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}}{n+1}$. (Ved. form. (121), (113)).

([78]) WEYL, **11**, 1921, p. 101 [proj. F^{α}_{ikl}]. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 131 $[P_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}]$. EISENHART, **48**, 1927, p. 88 $[W^i_{jkl}]$.

([79]) Ved. J. M. THOMAS, **29**, 1925, p. 208, form. (4); T. Y. THOMAS, **28**, 1925, p. 203 o **33**, 1926, p. 726 (*equi-projective curvature tensor*). Si tratta in effetto, secondo la denominazione proposta da T. Y. THOMAS (**28**, ibid.) di un *equi-tensore*, non di un *tensore*. EISENHART, **48**, 1927, p. 99 $[\Pi^h_{ijk}]$.

([80]) Ved. J. M. THOMAS, **29**, 1925, p. 208, form. (6).

onde segue

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = B_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\nu(B_{\omega\mu} - B_{\mu\omega}) + \tag{147}$$

$$+ \frac{1}{n^2-1}[\delta_\mu^\nu(nB_{\omega\lambda} + B_{\lambda\omega}) - \delta_\omega^\nu(nB_{\mu\lambda} + B_{\lambda\mu})],$$ [81]

$$W_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0, \quad W_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = 0. \tag{148}$$

Dalla (147) ricaviamo subito, pel fatto che $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ è (T_p)-invariante, questa sua espressione in funzione degli elementi della connessione (simmetrica) invariante $\nabla^{(q)}$:

$$W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = Q_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\nu(Q_{\omega\mu} - Q_{\mu\omega}) + \tag{149}$$

$$+ \frac{1}{n^2-1}[\delta_\mu^\nu(nQ_{\omega\lambda} + Q_{\lambda\omega}) - \delta_\omega^\nu(nQ_{\mu\lambda} + Q_{\lambda\mu})].$$

Indicherò ancora una formula, interessante specialmente nel caso in cui è $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, che pone in relazione i due tensori $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ e $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ [82]:

$$\begin{aligned} W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{1}{n-1}(\delta_\mu^\nu R_{\omega\lambda} - \delta_\omega^\nu R_{\mu\lambda}) + \\ &+ \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\nu R_{\mu\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} - \frac{1}{n^2-1}(\delta_\mu^\nu R_{\lambda\omega\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} - \delta_\omega^\nu R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}) - \\ &- T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + \frac{2}{n^2-1}\delta_\lambda^\nu\Phi_{\omega\mu} + \frac{2}{(n+1)(n-1)^2}(\delta_\mu^\nu\Phi_{\lambda\omega} - \delta_\omega^\nu\Phi_{\lambda\mu}). \end{aligned} \tag{150}$$

11. **Interpretazioni geometriche.** — Veniamo ad alcune interpretazioni geometriche dei tensori (T_p)-invarianti che abbiamo indicato: o almeno del loro annullarsi.

Quale sia il significato dell'annullarsi di $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ (tensore di torsione della connessione (T_p)-invariante $\nabla^{(p)}$, e primo tensore (T_p)-normale, abbiamo già visto al n.° 6. Aggiungiamo che, nel caso generale, $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ esprime il divario fra la connessione (∇) supposta e la *connessione emisimmetrica*, ad essa intrinsecamente legata, che ha la stessa connessione simmetrica associata (e in particolare, le stesse geodetiche) e ha per tensore di torsione il tensore

$$\frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\lambda\Phi_\mu - \delta_\mu^\lambda\Phi_\nu). \tag{151}$$

[81] Ved. ad es. EISENHART, 48, 1927, p. 89, form. (32.12).
[82] Si osservi anche la notevole analogia delle (146), (141).

In forma più geometrica: la presenza di un tensore $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}$ non nullo denota lo scostarsi, anche nel trasporto parallelo *infinitesimale,* della direzione trasportata dalla superficie geodetica iniziale. *Per* n $=2$ *il tensore* $\mathrm{H}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}$ *è sempre nullo,* come è ben naturale.

L'annullarsi, *insieme ad* $\mathrm{H}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}=\mathrm{G}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\,\lambda}$, del secondo tensore (T_p)-normale $G_{\lambda\mu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\,\nu}$, equivale all'annullarsi di $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}$ e $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$ (e quindi anche $K^{*\cdot\cdot\cdot\,\nu}_{\omega\mu\lambda}$). Come abbiamo già osservato (n.° 9) questa è la condizione perchè la supposta varietà *sia rappresentabile, con conservazione del parallelismo, su di uno spazio affine.* L'annullarsi di $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda}$ soltanto ha, per la connessione (T_p)-invariante $\nabla^{(p)}$, il significato (indicato al n.° 5) che ha l'annullarsi di $C_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda}$ per la connessione ∇: non ho presente una interpretazione semplice e diretta della condizione $G_{\mu\nu\cdot\tau}^{\cdot\cdot\,\lambda}=0$ per la connessione ∇.

L'annullarsi di $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$ è, naturalmente, *la condizione necessaria e sufficiente perchè la connessione* $(\mathrm{T_p})$*-invariante,* $\nabla^{(\mathrm{p})}$, *sia integrabile*: e quindi anche, *è condizione sufficiente perchè il trasporto lineare delle direzioni subordinato alla connessione* ∇ *sia integrabile* (dia luogo cioè a una *direzione* parallela che non dipende dalla curva di trasporto). Ma *non è, in generale, condizione necessaria,* perchè ciò avvenga. Infatti se esprimiamo che, nel trasporto ciclico secondo la legge d'equipollenza della connessione ∇, un qualunque vettore ξ si porta in un vettore $\xi+D\xi$ (le $D\xi^\lambda$ essendo date dalle (10)) che ha la stessa direzione di ξ, troviamo subito che deve essere

$$\delta_{\lambda\tau}^{\varkappa\sigma}R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}+\delta_{\lambda\nu}^{\varkappa\sigma}R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\lambda}=0 \tag{152}$$

(ved. ([58]), ([18]))

onde, ponendo $\sigma=\nu$ e sommando, ricaviamo

$$R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\varkappa}=\frac{1}{n}\delta_\tau^\varkappa R_{\omega\mu\nu}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu},\quad \text{cioè}\quad L_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\varkappa}=0. \tag{153}$$

Viceversa, dalle (153) seguono subito le (152). Dunque: *perchè alla connessione* ∇ *sia subordinato un parallelismo assoluto delle direzioni è necessario e sufficiente che sia nullo il tensore* $\mathrm{L}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$. (O, che è lo stesso, $\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$). Ciò avverrà certamente, come mostrano anche le (133), se è nullo $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$: ma non viceversa, giacchè l'annullarsi di $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$ porta soltanto

$$K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}=\frac{1}{n}\,\delta_\lambda^\nu K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\,\tau}. \tag{154}$$

Notiamo questa interpretazione geometrica: è ovvio che, in generale, in una varietà a connessione affine, *la connessione determina una legge di con-*

fronto delle lunghezze, cioè una metrica, pei vettori le cui direzioni appartengono a una serie di direzioni parallele ([83]), nello stesso modo che in uno spazio affine è sempre possibile il confronto delle lunghezze di due vettori paralleli. Se il parallelismo (delle direzioni) è integrabile $\left(L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0\right)$ e allora soltanto ha senso il considerare il divario tra le lunghezze iniziale e finale di un vettore per trasporto ciclico: troviamo che tale divario, per la connessione $\nabla^{(p)}$ (e anche per la connessione ∇ e tutte le sue (T_p)-trasformate), è allora *indipendente dalla direzione del vettore trasportato,* ma non nullo in generale: precisamente è per le (10), (154), supposto per semplicità che il ciclo sia un *parallelogrammo* infinitesimo,

$$\frac{Dl}{l}=-\frac{1}{n}K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}d_1x^\omega d_2x^\mu. \tag{155}$$

Dunque: nelle A_n in cui $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$, entro ciascuna totalità di vettori paralleli, viene determinata (dalla connessione $\nabla^{(p)}$) una metrica di WEYL, invariante per le trasformazioni T_p, che ha una curvatura segmentaria (« Streckenkrümmung », o « Streckenwirbel » ([84])), (la stessa per tutte le totalità di vettori paralleli), espressa dal tensore

$$\frac{1}{n}K_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}L_{\omega\tau}^{\tau}-\frac{\partial}{\partial x^\omega}L_{\mu\tau}^{\tau}\right). \tag{156}$$

Questo è, come lo « Streckenwirbel » di WEYL, il rotore di un vettore ([85]), Ψ_ν, determinato a meno di un gradiente additivo. Se il vettore Ψ_ν è esso stesso il gradiente di uno scalare, cioè, se la connessione $\nabla^{(p)}$ è *equiaffine,* e allora soltanto, nella supposta A_n la metrica di WEYL detta poco sopra è anch'essa integrabile.

Le varietà in cui $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$ sono anche caratterizzate dal fatto che per esse è possibile una rappresentazione puntuale, con conservazione del parallelismo, su di una varietà a connessione affine *integrabile*: cioè, che per esse possibile mediante una trasformazione (72), con opportuna scelta del vettore ψ_ν, rendere

([83]) Ved. FRIESECKE, **27**, 1925, p. 110 (« Da Vektoren derselben Richtung miteinander verglichen werden können, so hat jede parallele Richtungsfolge durch die Vektorübertragung eine Metrik erhalten »).

([84]) Ved. per es. WEYL, **16**, 1923, p. 21.

([85]) Più in generale, per ogni connessione affine $R_{\omega\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}$ è il rotore di un vettore: ved. EISENHART, **48**, 1927, p. 9.

nullo il tensore di curvatura, $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ ([86]). In altri termini, esse sono le varietà (T_p)-*equivalenti* ad A_n a curvatura nulla, a cui avevamo accennato al n.° 9; ed è assai facile provare questa proprietà appunto in base a quanto allora fu stabilito ([87]).

Veniamo infine ai tensori $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$. Essi sono sempre nulli per $n=2$: pel primo di essi ciò è evidente, essendo per $n=2$ (come abbiamo già notato) sempre $H_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}=0$ e quindi anche $H_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$. Ma è opportuno osservare che dalla stessa forma delle (141), (146) risulta *a priori* che i tensori $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ si annullano per $n=2$. In effetto è agevole verificare che più in generale *se* $P_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ *è un sistema emisimmetrico rispetto ad* ω, μ *e del resto arbitrario, il sistema*

$$P_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}+\frac{1}{n-1}\left(\delta_\mu^\nu P_{\omega\lambda}-\delta_\omega^\nu P_{\mu\lambda}\right) \qquad (P_{\lambda\mu}=P_{\tau\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau}) \tag{157}$$

per $n=2$ *è sempre nullo.* Se $n\neq 2$, $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$ esprime che la differenza fra gli incrementi che subisce, nel trasporto ciclico relativo alle connessioni (T_p)-invarianti $\nabla^{(p)}$ e $\nabla^{(q)}$, un qualunque vettore, giace nella 2-direzione del ciclo. E infine $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$, come è ben noto, è *la condizione, perchè la varietà sia rappresentabile, con conservazione delle geodetiche, su di uno spazio affine:* o anche, perchè la connessione simmetrica associata ad essa sia, come si dice, proiettivo-euclidea ([88]).

([86]) EISENHART ha dimostrato (**48**, 1927, pp. 35-36) che per questo è necessario e sufficiente che sia nullo il tensore $\Lambda_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: ma per le (137), (138), ciò equivale all'annullarsi di $L_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$.

([87]) Basta osservare che, data una A_n a curvatura nulla e una varietà A_n' (T_p)-equivalente ad essa, per la (114) e la prima delle $F_1^{(p)}$ (n.° 9) si dovrà avere

$$K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}\,\theta^\nu_\delta=\frac{2}{n-1}\,\Phi_{\omega\mu}\,\theta^\omega_\alpha\,\theta^\mu_\beta\,\theta^\nu_\gamma$$

onde $K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{n-1}\,\Phi_{\omega\mu}\theta^\omega_\alpha\,\theta^\mu_\beta\,\delta^\delta_\gamma$, e infine $K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{1}{n}\,\delta^\delta_\gamma\,K'^{\cdot\cdot\cdot\varepsilon}_{\alpha\beta\varepsilon}$, cioè $L'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma}=0$.

E viceversa, se questa condizione è soddisfatta, prese le θ^ω_α ad arbitrio, la A_n' risulterà in effetto rappresentata con conservazione del parallelismo su di una A_n a curvatura nulla, il cui tensore di torsione $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ha in coordinate x'^α le componenti $S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}=H'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}-\dfrac{1}{n-1}\,(\delta^\gamma_\alpha\Phi'_\beta-\delta^\gamma_\beta\Phi'_\alpha)$. $H'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$ essendo il tensore di torsione della connessione (T_p)-invariante, $\nabla'^{(p)}$, corrispondente alla connessione affine di A_n', e Φ'_α essendo il vettore, determinato a meno di un arbitrario gradiente additivo, che ha per rotore $\dfrac{n-1}{2n}\,K'^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\delta}$.

([88]) Cfr. per es. SCHOUTEN, **22**, 1924, p. 130.

12. **Trasformazioni (T_{pc}) che conservano il parallelismo e la curvatura. Caso delle connessioni integrabili. Caso degli spazi di gruppo.** — Una importante sottoclasse di trasformazioni T_p è formata dalle trasformazioni, T_{pc}, che *conservano il parallelismo e la curvatura:* cioè, dalle T_p per le quali anche il tensore di curvatura $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ è invariante. Come EISENHART osserva (**48**, 1927, p. 32), queste trasformazioni si ottengono dalle (72) facendovi l'ipotesi particolare che *il vettore* ψ_ν *sia il gradiente di uno scalare* (arbitrario).

Vediamo subito che per le T_{pc} è invariante anche il tensore emisimmetrico $\Phi_{\lambda\mu}$ (dato dalle (113)), rotore del vettore d'EINSTEIN Φ_ν. In effetto per una (72) qualunque si ha [89]

$$\bar{\Phi}_{\lambda\mu} = \Phi_{\lambda\mu} + (n-1)\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\psi_\lambda}{\partial x^\mu}\right). \tag{158}$$

Dunque sarà $\bar{\Phi}_{\lambda\mu} = \Phi_{\lambda\mu}$ se ψ_ν è il gradiente di uno scalare. Ma anche inversamente: se in una T_p il tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ è invariante, il corrispondente vettore ψ_ν è di necessità un gradiente, cioè la T_p è una T_{pc}. Dunque: le T_{pc} *sono le* T_p *per le quali il tensore* $\Phi_{\lambda\mu}$ *è invariante.* E anzi:

Gli invarianti differenziali di una varietà a connessione affine ∇ *per le trasformazioni* $\mathrm{T_{pc}}$ *che conservano il parallelismo e la curvatura sono gli invarianti differenziali simultanei della connessione* $(\mathrm{T_p})$*-invariante* $\nabla^{(p)}$ *e del tensore* $\Phi_{\lambda\mu}$. Naturalmente però la connessione $\nabla^{(p)}$ non è una (T_{pc})-trasformata della connessione primitiva ∇: a meno che per questa il tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ non si annulli.

Supponiamo in particolare che la connessione primitiva ∇ sia *integrabile*, cioè *a curvatura nulla* ($\mathrm{R}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$): o ancora, che ammetta un trasporto *assoluto* per equipollenza dei vettori. Questo è il caso che mi si è presentato in un recente lavoro [90]. In questo caso, il tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ rientra esso stesso fra gli invarianti della connessione $\nabla^{(p)}$: infatti per la (121) si ha

$$K_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \frac{2n}{n-1}\Phi_{\lambda\mu} \tag{159}$$

cosicchè $\dfrac{2n}{n-1}\Phi_{\lambda\mu}$ *è il tensore di curvatura segmentaria della connessione* $\nabla^{(p)}$, che naturalmente nell'attuale ipotesi ammette un *parallelismo assoluto* delle direzioni. Di più, essendo in generale

$$\begin{aligned} S_{\lambda\mu} - S_{\mu\lambda} &= R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} - (B_{\lambda\mu} - B_{\mu\lambda}) = R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} + B_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = \\ &= R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} + R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} - S_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} = R_{\lambda\mu} - R_{\mu\lambda} + R_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau} + \Phi_{\lambda\mu}, \end{aligned} \tag{160}$$

[89] Ved. EISENHART, **48**, **1927**, p. 33.
[90] Ved. **55**, **1929**, p. 54 e seg.

nel caso attuale ($R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$) è

$$S_{\lambda\mu}-S_{\mu\lambda}=\Phi_{\lambda\mu}, \tag{161}$$

e quindi, per le (143), si ha

$$2(n-2)\Phi_{\lambda\mu}=(n-1)(H_{\lambda\mu}-H_{\mu\lambda})=(n-1)^2 T_{\lambda\mu\tau}^{\cdot\cdot\cdot\tau}. \tag{162}$$

Ne segue facilmente, tenendo presente la (114), che: *per* n >2 *gli invarianti differenziali, di ordine* m *qualunque, di una connessione integrabile* ∇ *per le* $\mathrm{T_{pc}}$ *sono gli invarianti simultanei del tensore* $\mathrm{H}_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ *e delle sue derivate covarianti* (con la derivazione $\nabla^{(p)}$) *fino all' ordine* m -1 (91). Notiamo ancora che le (150), (161) mostrano che, nelle attuali ipotesi ($R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$, $n>2$) $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ può esprimersi (omogeneamente) pel solo tensore $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$: cosicchè l'annullarsi di $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ porta anche l'annullarsi di $W_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ (92).

Per $n=2$, essendo allora necessariamente $H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}=0$, gli invarianti cercati sono gli invarianti simultanei del tensore $\Phi_{\lambda\mu}$ e delle sue derivate covarianti (con la derivazione $\nabla^{(p)}$) fino all'ordine $m-2$ (93).

Ho mostrato (nel lav. **55** già cit.) come questa teoria possa servire di base per una possibile modificazione della più recente teoria unitaria del campo elettromagnetico e gravitazionale di EINSTEIN (**52**, 1928; **54**, **58**, 1929): tale da permettere di rappresentare il potenziale elettromagnetico mediante un vettore *determinato soltanto a meno di un gradiente additivo arbitrario* (94).

Sia ora la supposta varietà (a connessione affine, senza curvatura) uno *spazio di gruppo* (ved. l. c. (36)), tale cioè che $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}=0$, $R^{*\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}=0$. Essa *non resta tale*, in generale, per una trasformazione T_p, e neppure per una T_{pc}: condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione (72) muti uno spazio di gruppo in un nuovo spazio di gruppo è, come si vede agevolmente, che sia

$$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}=0, \tag{163}$$

e inoltre, che il vettore ψ_λ nelle (72) sia soluzione del sistema ai differenziali totali, *completamente integrabile,*

$$\nabla_\mu\psi_\lambda=2\psi_\mu\left(\psi_\lambda-\frac{1}{n-1}\Phi_\lambda\right); \tag{164}$$

---

(91) Ved. **55**, 1929, p. 55. Ivi non avevo notato esplicitamente che il caso $n=2$ va escluso.

(92) Ved. **55**, 1929, p. 55, form. (41). I tensori (T_{pc})-invarianti del 2° ordine possono tutti esprimersi pei due (indipendenti) $H_{\lambda\mu}+H_{\mu\lambda}$ e $T_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$.

(93) Il solo tensore (T_{pc})-invariante del 2° ordine è $\Phi_{\lambda\mu}$. (Cfr. nota prec.).

(94) Cfr. SCHOUTEN, **19**, 1923, p. 855.

onde segue anche, per le (163), tenuto presente che negli spazi di gruppo è $\nabla_\mu \Phi_\lambda = 0$, che *il vettore ψ_ν è il gradiente di uno scalare:*

$$\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x^\lambda} = 0, \tag{165}$$

(cosa del resto *a priori* prevedibile, perchè una trasformazione T_p di uno spazio di gruppo in un altro spazio di gruppo non potrà essere che una T_{pc}).

Dunque: *soltanto gli spazi di gruppo a connessione affine emisimmetrica ammettono delle trasformazioni* (non identiche, nè isomorfiche) *in altri spazi di gruppo, che conservino il parallelismo.* Queste rappresentazioni sono date dalle (72), ove però ψ_λ è un vettore covariante soddisfacente alle (164), (165).

Il *vettore di Einstein* Φ_λ nelle attuali ipotesi soddisfa esso stesso a queste condizioni (164), (165): cosicchè nel caso attuale la connessione $\nabla^{(p)}$ (manifestamente a curvatura e torsione nulle) è una (T_{pc})-trasformata della connessione primitiva. *Gli spazi di gruppo a connessione emisimmetrica, ed essi soltanto, tra gli spazi di gruppo, sono dunque rappresentabili, con conservazione del parallelismo, su di uno spazio affine.* Se si tiene presente che lo spazio affine è lo spazio *dei gruppi abeliani*, si ha dunque una relazione molto semplice, almeno nell'interpretazione geometrica, tra questi gruppi e quelli a connessione emisimmetrica (95). Tale relazione appare, in certo modo, come una generalizzazione dell'*isomorfismo* classico, che corrisponde invece (96) alla rappresentabilità *con conservazione dell'equipollenza.*

INDICE BIBLIOGRAFICO

1854 - **1.** B. Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* « Göttinger Akad. Abh. », 13, 1868; « Ges. Mathem. Werke », (2ª ediz, 1892, pp. 272-287). Neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl, Berlin, Springer, 1923.

1869 - **2.** E. B. Christoffel, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades,* « Journal für r. a. Mathem. (Crelle) », B. 70, 1869, pp. 46-70.

1896 - **3.** T. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.* « Annali di Matem. », (2), t. 24, 1896, pp. 255-300.

1899 - **4.** G. Hessenberg, *Ueber die Invarianten linearer und quadratischer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen.* « Acta Mathem. » t. 23, 1899, pp. 121-170.

1900 - **5.** G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* « Mathem. Annalen », B. 54, 1900, pp. 125-201.

---

(95) dei quali Schouten ha dato (**41**, 1926), appunto per via geometrica, una semplice caratterizzazione.

(96) Ved. Cartan, **42**, 1927, p. 10 e seg.

1917 - **6.** F. SEVERI, *Sulla curvatura delle superficie e varietà.* « Rendiconti Circolo Matem. Palermo », t. 42, 1917, pp. 227-259.
1918 - **7.** H. WEYL, *Reine Infinitesimalgeometrie.* « Mathem. Zeitschrift », B. 2, 1918, pp. 384-411.
1919 - **8.** H. VERMEIL, *Bestimmung einer quadratischer Differentialform aus den Riemannschen und den Christoffelschen Differentialinvarianten mit Hilfe von Normalkoordinaten.* « Mathem. Annalen », B. 79, 1919, pp. 289-312.
1920 - **9.** E. BOMPIANI, *Le trasformazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita.* « Rendiconti Accad. Lincei », (5), vol. 29, 1920, 1° sem., pp. 347-351.
1921 - **10.** E. BOMPIANI, *Studi sugli spazi curvi. Del parallelismo in una varietà qualunque.* « Atti Istit. Veneto », t. 80, 1920-21, pp. 355-386, 839-859.
» - **11.** H. WEYL, *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.* « Göttinger Nachrichten », 1921, pp. 99-112.
1922 - **12.** L. P. EISENHART e O. VEBLEN, *The Riemann geometry and its generalisation.* « Proceedings Nat. Acad. of Sciences », vol. 8, 1922, pp. 19-24.
» - **13.** O. VEBLEN, *Normal coordinates for the geometry of paths.* Ibid., pp. 192-197.
» - **14.** J. A. SCHOUTEN, *Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zu Grunde gelegt werden können.* « Mathem. Zeitschrift », B. 13, 1922, pp. 56-81.
1923 - **15.** R. WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie.* P. Noordhoff, Groningen, 1923.
» - **16.** H. WEYL, *Mathematische Analyse des Raumproblems.* Berlin, Springer 1923.
» - **17.** L. P. EISENHART, *The geometry of paths and general relativity.* « Annals of Mathem. », (2), vol. 24, 1923, pp. 367-392.
» - **18.** O. VEBLEN e T. Y. THOMAS, *The geometry of paths.* « Transactions of the Amer. Mathem. Society », vol, 25, 1923, pp. 551-608.
» - **19.** J. A. SCHOUTEN, *On a non-symmetrical affine field theory.* « Proceedings Koninklijke Akad. v. Wetenschappen », Amsterdam, vol. 26, 1923, pp. 850-857.
» - **20.** É. CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée.* « Annales de l'École Norm. Supérieure », Paris, (3), 1ère Partie: t. 40, 1923, pp. 325-412; t. 41, 1924, pp. 1-25, 2ème Partie: ibid. t. 42, 1925, pp. 17-88.
1924 - **21.** G. HERGLOTZ, *Ueber die Bestimmung eines Linielements in Normalkoordinaten aus dem Riemannschen Krümmungstensor.* « Mathem. Annalen », B. 93, 1924, pp. 46-53.
» - **22.** J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül.* Berlin, Springer 1924.
» - **23.** A. FRIEDMANN e J. A. SCHOUTEN, *Ueber die Geometrie der halbsymmetrischen Uebertragungen.* « Mathem. Zeitschrift », B. 21, 1924, pp. 211-223.
» - **24.** É. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace.* « Bulletin des Sciences Mathém. », t. 48, 1924, pp. 294-320.
» - **25.** É. CARTAN, *Sur les variétés à connexion projective,* « Bulletin de la Soc. Mathém. de France », vol. 52, 1924, pp. 205-241.
» - **26.** J. A. SCHOUTEN, *On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements.* « Proceedings Koninklijke Akad. v. Wetenschappen », Amsterdam, vol. 27, 1924, pp. 407-424.
1925 - **27.** H. FRIESECKE, *Vektorübertragung, Richtungsübertragung, Metrik.* « Mathem. Annalen », B. 94, 1925, pp. 101-118.
» - **28.** T. Y. THOMAS, *On the projective and equi-projective geometry of paths.* « Proceedings Nat. Acad. of Sciences », vol. 11, 1925, pp. 199-203.

1925 - **29.** J. M. THOMAS, *Note on the projective geometry of paths.* Ibid., pp. 207-209.
» - **30.** T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto.* Roma, Stock, 1925.
1926 - **31.** R. LAGRANGE, *Calcul différentiel absolu.* « Mémorial des Sciences Mathématiques », XIX, Paris, Gauthier-Villars, 1926.
» - **32.** T. Y. THOMAS, *The identities of affinely connected manifolds.* « Mathem Zeitschrift », B, 25, 1926, pp. 714-722.
» - **33.** T. Y. THOMAS, *A projective theory of affinely connected manifolds.* Ibid., pp. 723-733.
» - **34.** J. M. THOMAS, *On normal coördinates in the geometry of paths.* « Proceedings Nat. Acad. of Sciences », vol. 12, 1926, pp. 58-63.
» - **35.** J. M. THOMAS, *On various geometries giving a unified electric and gravitational theory.* Ibid., pp. 187-191.
» - **36.** J. M. THOMAS, *Asymmetric displacement of a vector.* « Transactions of the Amer. Mathem. Society », vol. 28, 1926, pp. 658-670.
» - **37.** O. VEBLEN e J. M. THOMAS, *Projective invariants of affine geometry of paths.* « Annals of Mathematics », (2), vol. 27, 1926, pp. 279-296.
» - **38.** J. A. SCHOUTEN, *Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtpunkt zur Grundlegung der Geometrie.* « Rendiconti Circolo Matem. di Palermo », t. 50, 1926, pp. 142-169.
» - **39.** É. CARTAN e J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of Group-manifold of simple and semi-simple Groups.* « Proceedings Koninklijke Akad. v. Wetenschappen ». Amsterdam, vol. 29, 1926, pp. 803-815.
» - **40.** É. CARTAN e J. A. SCHOUTEN, *On Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism.* Ibid., pp. 933-946.
» - **41.** J. A. SCHOUTEN, *Sur les groupes à connexion sémisymétrique.* « Compte rendu au Congrès de Lyon 1926 de l'Association Francaise pour l'Avancement des Sciences ».
1927 - **42.** É. CARTAN, *La géométrie des groupes de trasformations,* « Journal de Mathématiques », t. 6, 1927, pp. 1-119.
» - **43.** T. Y. THOMAS e A. D. MICHAL, *Differential invariants of affinely connected manifolds.* « Annals of Matematics », (2), vol. 28, 1927, pp. 196-236.
» - **44.** E. BORTOLOTTI, *Spazi subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi.* « Bollettino Un. Matem. Italiana », VI, 1927, pp. 134-137.
» - **45.** E. BORTOLOTTI, *Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle* V_n *riemanniane.* « Rendiconti Accad. Lincei », (6), vol. 5, 1927, pp. 741-747.
» - **46.** T. Y. THOMAS, *The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths.* « Annals of Mathematics », (2), vol. 28, 1927, pp. 549-561.
» - **47.** O. VEBLEN, *Invariants of quadratic differential forms.* « Cambridge Tracts », 24. Cambridge, University Press, 1927.
» - **48.** L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry.* « American Mathem. Society Colloquium Publications », vol. VIII, New York, 1927.
1928 - **49.** J. A. SCHOUTEN, *Die Geometrien der kontinuirlichen Transformationsgruppen.* « Jahresb. d. Deut. Mathem. Vereinigung », 2 Abt. (Angelegenheiten), B. 37, 1928, pp. 20-23.
» - **50.** V. HLAVATY, *Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas: « A projective theory of affinely connected manifolds ».* « Mathem. Zeitschrift », B. 28, 1928, pp. 142-146.
» - **51.** A. EINSTEIN, *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus.* « Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wissenschaften », Berlin, 1928, pp. 217-221.

1928 - **52.** A. EINSTEIN, *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität.* Ibid., pp. 224-227.

» - **53.** R. WEITZENBÖCK, *Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus.* Ibid., pp. 466-474.

1929 - **54.** A. EINSTEIN, *Zur einheitlichen Feldtheorie.* Ibid., 1929, pp. 2-7.

» - **55.** E. BORTOLOTTI, *Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine e nuove vedute sulla Relatività.* « Memorie Accad. Bologna », (8), t. 6, 1928-29, pp. 45-58.

» - **56.** E. BORTOLOTTI, *Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche di una recente teoria di Einstein.* « Rendiconti Accad. Lincei », (6), vol. 9, 1929, pp. 530-538.

» - **57.** T. LEVI-CIVITA, *Vereinfachste Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen.* « Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wissenschaften », Berlin, 1929, pp. 137-153.

» - **58.** A. EINSTEIN, *Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip.* Ibid., pp. 156-159.

» - **59.** T. Y. THOMAS, *Determination of affine and metric spaces by their differential invariants.* « Mathem. Annalen », B. 101, 1929, pp. 713-728.

» - **60.** J. A. SCHOUTEN, *Zur Geometrie der kontinuierlichen Transformationsgruppen.* « Mathem. Annalen », B. 102, 1929, pp, 244-272.