Sul problema di Cauchy per l'equazione $y^{2\alpha}k^2(x, y)z_{xx} - z_{yy} = f(x, y, z, z_x, z_y)$, con i dati sulla linea parabolica

Memoria di ROBERTO CONTI (a Firenze).

Sunto. - *Per l'equazione del titolo si prova che, sotto opportune ipotesi, esiste ed è unica in una certa regione del semipiano* $y \geq 0$ *la soluzione del problema di* CAUCHY *con dati assegnati sull'asse delle* x *(linea parabolica d ll'equazione).*

Si prova inoltre che tale soluzione e le sue derivate prime dipendono con continuità dai dati iniziali.

Consideriamo l'equazione alle derivate parziali

$$(A) \qquad a(x, y)z_{xx} + 2b(x, y)z_{xy} + c(x, y)z_{yy} = g(x, y, z, z_x, z_y)$$

dove a, b, c sono funzioni (reali, come tutte quelle considerate nel presente lavoro), continue, del punto (x, y) variabile in una certa regione D ([1]); la $g(x, y, z, p, q)$ sia definita per (x, y) in D e per z, p, q qualunque.

Sia C una curva rappresentata parametricamente dalle

$$C: \quad x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t_0 \leq t \leq t_1$$

con $x' = dx/dt$, $y' = dy/dt$ funzioni continue di t e $x'^2 + y'^2 \neq 0$.

Se è

$$ay'^2 - 2bx'y' + cx'^2 \neq 0$$

nei punti di C e si assoggettano i dati ad ipotesi opportune, si può, come è ben noto, risolvere per la (A) il problema di CAUCHY relativo alla C, purchè il discriminante della (A)

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$

sia *positivo su* C e quindi anche in un certo dominio contenente C ([2]).

([1]) Ogni insieme piano D, anche illimitato, aperto e internamente connesso, si dirà un dominio e si rappresenterà con γ l'insieme dei punti frontiera di D a distanza finita. Se D è limitato e γ è una curva semplice di JORDAN, D si dirà una *regione*, avente γ per *contorno*. Ciò premesso, *soluzione della* (A) *in un dominio* D sarà qualunque funzione z continua in $D + \gamma$, la quale soddisfi la (A) in D, con le derivate dei primi due ordini continue. In un punto di γ la z si dirà poi *regolare* se in quel punto esistono continue le derivate dette e vi soddisfano la (A). (In quei punti di γ nei quali non sia possibile calcolare qualcuno dei rapporti incrementali la derivata corrispondente si intende definita per continuità).

([2]) Si veda, ad es., [2] della Bibl.; ivi il problema viene risolto «in grande». Tale risultato ci servirà nel seguito.

Nel caso in cui tale discriminante, ***restando positivo in un intorno della*** C, ***si annulli sulla*** C ***medesima*** la conclusione precedente sussiste per equazioni (A) di forma particolare; si vedano, ad es., i lavori [9], [7] e [1].

La ricerca più generale sull'argomento è quella svolta in [1] dove si considera un'equazione della forma

$$(B)\qquad y^{2\alpha}k^2(x,\, y)z_{xx} - z_{yy} = f(x,\, y,\, z,\, z_x,\, z_y); \qquad 0 < \alpha < 1. \qquad k^2 > 0$$

con f lineare nelle z, z_x, z_y, omogenea o no (³).

L'importanza di questo lavoro [1] risiede nel fatto che, come ha provato M. Cibrario in [3], nelle ipotesi fin qui ammesse ed in altre relative alle funzioni a, b, c, *ogni* equazione (A) può ridursi alla (B) con $2\alpha = 1$: con la terminologia di [3] si può anche dire che la (B) con $2\alpha = 1$ rappresenta la forma canonica delle equazioni (A). del primo tipo misto, parzialmente iperboliche, con linea parabolica *semplice*.

Tuttavia la trasformazione che muta la (A) nella (B) trasforma il secondo membro della (A) considerata in una funzione lineare di z, z_x, z_y soltanto se anch'esso è lineare. Perciò noi tratteremo il problema di Cauchy per la (B), con $0 < \alpha < 1$, prescindendo dall'ipotesi che f sia lineare; cercheremo dunque una soluzione z della (B) in un opportuno dominio, la quale soddisfi le condizioni iniziali

$$(C)\qquad z(x,\, 0) = \varphi(x), \qquad z_y(x,\, 0) = \psi(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

essendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni assegnate per $a \leq x \leq b$.

Sui dati del problema faremo le ipotesi seguenti:

i) - $k(x,\, y)$ sia una funzione definita nel rettangolo

$$R:\quad a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq y_0$$

ivi sempre positiva e dotata delle derivate k_x, k_y, k_{xx}, k_{xy} continue;

ii) - $\varphi(x)$ [$\psi(x)$] ammetta per $a \leq x \leq b$ derivata seconda $\varphi''(x)$ [derivata prima $\psi'(x)$] soddisfacente una condizione di Lipschitz;

iii) - detto c_1 un numero minore del più piccolo tra gli estremi inferiori delle φ, φ', ψ per $a \leq x \leq b$, e detto c_2 un numero maggiore del più grande tra gli estremi superiori delle stesse funzioni, sia I l'insieme dello spazio x, y, z, p, q definito al variare di $(x,\, y)$ in R e per z, p, q comprese tra c_1 e c_2

$$(1)\qquad c_1 \leq z,\, p,\, q \leq c_2$$

La $f(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$ sia allora definita nell'insieme I, ivi continua rispetto a $(x,\, y,\, z,\, p,\, q)$ insieme con le sue derivate parziali f_x, f_z, f_p, f_q; esisterà perciò una costante $F > 0$ tale da aversi in tutto I

$$(2)\qquad |f|,\ |f_x|,\ |f_z|,\ |f_p|,\ |f_q| \leq F.$$

(³) In [9] è considerato il caso $\alpha = 1/2$, $k = 1$, $f = 0$; in [7] si considera il caso $\alpha = 1/2$, $k = k(y)$, f lineare omogenea.

Infine supporremo che f_x, f_z, f_p, f_q soddisfino una condizione di LIPSCHITZ rispetto a ciascuna delle variabili z, p, q: senza alterare la generalità potremo supporre che la F sia maggiore delle corrispondenti costanti.

Nelle ipotesi *i*), *ii*), *iii*) proveremo che

A) – *si può trovare un numero* y_1

$$0 < y_1 \leq y_0$$

tale che nella regione T_{y_1} (cfr il successivo n. 1) *esista almeno una soluzione* $z(x, y)$ *della* (B) *soddisfacente la* (C), *regolare nei punti* $(x, 0)$ *con* $a \leq x \leq b$;

B) – *tale soluzione è unica in* T_{y_1};

C) – *la soluzione e le sue derivate prime variano con continuità al variare delle* φ, ψ *e delle loro derivate prime. Precisamente, fissato* $\varepsilon > 0$ *ad arbitrio, si può determinare un* $\delta > 0$ *in modo che se* $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ *sono due funzioni soddisfacenti per* $a \leq x \leq b$ *le ipotesi già ammesse per le* φ, ψ *e se* $\bar{z}$ *è la soluzione corrispondente ai dati* $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ *si abbia*

$$|\bar{z} - z|, \quad |\bar{z}_x - z_x|, \quad |\bar{z}_y - z_y| < \varepsilon$$

in tutto il campo di esistenza comune a $\bar{z}$ *e* z, *non appena sia, per* $a \leq x \leq b$

$$|\bar{\varphi} - \varphi|, \quad |\bar{\varphi}' - \varphi'|, \quad |\bar{\psi} - \psi|, \quad |\bar{\psi}' - \psi'| < \delta.$$

Se poi in luogo della ipotesi *i*) facciamo quella più restrittiva:

i') – $k(x, y)$ sia definita in R, sempre positiva e dotata delle derivate terze continue,

allora si ha che

D) – *nelle ipotesi i'*), *ii*) *e iii*) *gli enunciati* A), B) *e* C) *valgono per* $y_1 = y_0$.

Per giungere a questi risultati si stabiliscono anzitutto alcune relazioni preliminari (n. 1), quindi mediante l'introduzione di certe funzioni ausiliarie, si trasforma l'insieme delle (*B*) e (*C*) in un sistema di tre equazioni integrali (non lineari) del tipo di VOLTERRA (n. 2). Col metodo di approssimazioni successive di PICARD-PEANO si prova (n. 3) che tale sistema ammette una soluzione $z_1^{(\infty)}$, la quale è dotata di derivate prime continue (nn. 4 e 5). Si prova poi che la $z_1^{(\infty)}$ è la soluzione « in piccolo » della (*B*) con i dati (*C*) (n. 6), che essa è l'unica soluzione (n. 7) e che $z_1^{(\infty)}$, $z_2^{(\infty)} = \partial z_1^{(\infty)}/\partial x$, $z_3^{(\infty)} = \partial z_1^{(\infty)}/\partial y$ dipendono con continuità dai dati φ, ψ e dalle derivate prime di questi, φ', ψ' (n. 8). Si conclude con alcune osservazioni (n. 9).

1. Preliminari.

Dalla ipotesi *i*) sulla funzione $k(x, y)$ segue che per ogni punto (ξ, η) di R passa nna ed una sola curva integrale $C_1[C_2]$ della prima [seconda] delle equazioni differenziali ordinarie

$$(D) \qquad \frac{dx}{dy} = y^{\alpha} k(x, y), \qquad \frac{dx}{dy} = -y^{\alpha} k(x, y).$$

L'insieme di tali curve (le caratteristiche della (B)) forma un reticolato che ricopre R ed ognuna di esse, essendo incontrata in un punto al più dalle parallele all'asse delle x, ammette una rappresentazione ordinaria $x(y)$. Precisamente, con

$$x_1 = x_1(y\,;\ \xi,\ \eta), \qquad x_2 = x_2(y\,;\ \xi,\ \eta)$$

indicheremo, nell'ordine, la C_1 e la C_2 uscenti dal punto (ξ, η) di R.

Supposto, senza restrizioni sostanziali, che l'ordinata della intersezione della $x_1 = x_1(y\,;\ a,\ 0)$ con la $x_2 = x_2(y\,;\ b,\ 0)$ sia proprio y_0 indicheremo con T_δ il trapezoide definito dalle

$$T_\delta:\quad x_1(y\,;\ a,\ 0) \leq x \leq x_2(y\,;\ b,\ 0), \qquad 0 \leq y \leq \delta \leq y_0 .$$

Dalle (D) seguono per integrazione le

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1(y\,;\ \xi,\ \eta) = \xi - \displaystyle\int_y^\eta t^\alpha k(x_1(t\,;\ \xi,\ \eta),\ t)dt \\[2ex] x_2(y\,;\ \xi,\ \eta) = \xi + \displaystyle\int_y^\eta t^\alpha k(x_2(t\,;\ \xi,\ \eta),\ t)dt \end{cases}$$

e da queste, posto per brevità

$$x_{10} = x_1(0\,;\ \xi,\ \eta), \qquad x_{20} = x_2(0\,;\ \xi,\ \eta)$$

discendono le disuguaglianze

$$(4)\qquad x_{10} \leq x_1 \leq \xi \leq x_2 \leq x_{20}$$

$$(5)\qquad 0 \leq x_{20} - x_{10} \leq 2\bar{\bar{k}}\eta^{1+\alpha}$$

dove $\bar{\bar{k}}$ rappresenta l'estremo superiore della $k(x,\ y)$ in R.

Dalle (D) per derivazione si hanno invece le

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dy^2} = \alpha y^{\alpha-1}k(x_1,\ y) + k(x_1,\ y)k_x(x_1,\ y)y^{2\alpha} + k_y(x_1,\ y)y^\alpha \\[2ex] -\dfrac{d^2x_2}{dy^2} = \alpha y^{\alpha-1}k(x_2,\ y) - k(x_2,\ y)k_x(x_2,\ y)y^{2\alpha} + k_y(x_2,\ y)y^\alpha \end{cases}$$

dalle quali segue che per $y \to 0$, $d^2x_1/dy^2 - d^2x_2/dy^2$ tende a $+\infty$ in modo uniforme; si può allora determinare un numero y_1

$$0 < y_1 \leq y_0$$

in modo che sia in T_{y_1}

$$\frac{d^2x_1}{dy^2} - \frac{d^2x_2}{dy^2} > 0.$$

Allora, posto

$$\beta = 1 - (1 - \alpha)\frac{\bar{k}}{\bar{\bar{k}}}$$

dove $\bar{k}$ è l'estremo inferiore della $k(x, y)$ in R, si ha subito, mediante una integrazione per parti, la disuguaglianza

$$\int_0^{\eta} y^{1-\alpha}\left[\frac{d^2x_1}{dy^2} - \frac{d^2x_2}{dy^2}\right]dy \leq 2\eta k(\xi, \eta)\cdot\beta \tag{8}$$

che utilizzeremo tra breve. Si noti che è

$$\alpha \leq \beta < 1. \tag{9}$$

Similmente, posto

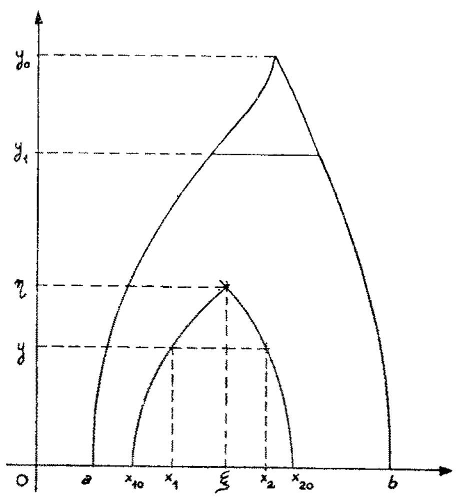
$$\beta_s = 1 - \frac{s}{s+\alpha}\frac{\bar{k}}{\bar{\bar{k}}}, \qquad s > 0 \tag{10}$$

si ha la

$$\int_0^{\eta} y^s\left[\frac{d^2x_1}{dy^2} - \frac{d^2x_2}{dy^2}\right]dy \leq 2\eta^{s+\alpha}k(\xi, \eta)\beta_s. \tag{11}$$

Si noti che la β_s decresce quando s aumenta; se ν è un numero positivo fissato avremo dunque

$$\beta_\nu \geq \beta_{2\nu} \geq \beta_{3\nu} \geq \dots \tag{12}$$



2. Riduzione a un sistema di equazioni integrali.

Se introduciamo, come in [1], due funzioni u e v definite mediante le

$$u = y^\alpha k z_x + z_y \qquad v = -y^\alpha k z_x + z_y \tag{13}$$

dalla (B) e dalla condizione $z_{xy} = z_{yx}$ otteniamo il sistema differenziale del primo ordine nelle incognite u, v, z:

$$(S) \begin{cases} -y^\alpha k u_x + u_y = -[y^{2\alpha}kk_x - \alpha y^{\alpha-1}k - y^\alpha k_y]\dfrac{u-v}{2y^\alpha k} - f\left(x,\ y,\ z,\ \dfrac{u-v}{2y^\alpha k},\ \dfrac{u+v}{2}\right) \\ y^\alpha k v_x + v_y = -[y^{2\alpha}kk_x + \alpha y^{\alpha-1}k + y^\alpha k_y]\dfrac{u-v}{2y^\alpha k} - f\left(x,\ y,\ z,\ \dfrac{u-v}{2y^\alpha k},\ \dfrac{u+v}{2}\right) \\ z_y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

con i dati iniziali

$$(C') \qquad u(x,\ 0) = v(x,\ 0) = \psi(x), \qquad z(x,\ 0) = \varphi(x), \qquad a \leq x \leq b.$$

L'insieme delle (S) e (C') si riduce facilmente ad un sistema di equazioni integrali (non lineari) del tipo di VOLTERRA ([4]). Infatti sia $(\xi\ \eta)$ un qualunque punto di T_{y_1} e siano C_1 e C_2 le caratteristiche uscenti da $(\xi,\ \eta)$; l'espressione $-y^\alpha k u_x + u_y$ nella quale si ponga $x = x_2(y\,;\ \xi,\ \eta)$ non è altro che la derivata della $u(x_2(y\,;\ \xi,\ \eta),\ y)$ rispetto ad y, cosicchè integrando da 0 ad η rispetto alla y e tenendo presenti le (C'), il risultato sarà $u(\xi,\ \eta) - \psi(x_{20})$. Similmente integrando $y^\alpha k v_x + v_y$ lungo la C_1 avremo $v(\xi,\ \eta) - \psi(x_{10})$ ed infine integrando z_y per $x = \xi$, avremo $z(\xi,\ \eta) - \varphi(\xi)$. Avendo presenti anche le (6) si ottiene il sistema

$$(V) \begin{cases} u(\xi,\ \eta) = \psi(x_{20}) - \displaystyle\int_0^\eta \frac{d^2x_2}{dy^2}\,\frac{u(x_2,\ y) - v(x_2,\ y)}{2y^\alpha k(x_2,\ y)}\,dy - \\ \qquad - \displaystyle\int_0^\eta f\left(x_2,\ y,\ z(x_2,\ y),\ \frac{u(x_2,\ y) - v(x_2,\ y)}{2y^\alpha k(x_2,\ y)},\ \frac{u(x_2,\ y) + v(x_2,\ y)}{2}\right)dy \\ v(\xi,\ \eta) = \psi(x_{10}) - \displaystyle\int_0^\eta \frac{d^2x_1}{dy^2}\,\frac{u(x_1,\ y) - v(x_1,\ y)}{2y^\alpha k(x_1,\ y)}\,dy - \\ \qquad - \displaystyle\int_0^\eta f\left(x_1,\ y,\ z(x_1,\ y),\ \frac{u(x_1,\ y) - v(x_1,\ y)}{2y^\alpha k(x_1,\ y)},\ \frac{u(x_1,\ y) + v(x_1,\ y)}{2}\right)dy \\ z(\xi,\ \eta) = \varphi(\xi) + \displaystyle\int_0^\eta \frac{u(\xi,\ y) + v(\xi,\ y)}{2}\,dy. \end{cases}$$

([4]) Lo stesso procedimento è usato in [6] dove sono considerati sistemi anche più generali di (S), in ipotesi, peraltro, diverse dalle nostre. Per i sistemi come (S) si veda anche [8].

Il procedimento seguito è, con notevoli modifiche nella forma, quello usato in [1] nel caso lineare; successivamente là si risolve il sistema di equazioni integrali (lineari) col metodo delle approssimazioni successive di PICARD-PEANO. Noi opereremo con lo stesso metodo risolutivo su di un altro sistema, (V'), di forma più simmetrica del precedente.

Se poniamo

$$z_1(x,\ y)=z(x,\ y),\qquad z_2(x,\ y)=z_x(x,\ y),\qquad z_3(x,\ y)=z_y(x,\ y) \tag{14}$$

avendosi dalle (13)

$$z_2(x,\ y)=\frac{u(x,\ y)-v(x,\ y)}{2y^\alpha k(x,\ y)},\qquad z_3(x,\ y)=\frac{u(x,\ y)+v(x,\ y)}{2} \tag{15}$$

al sistema (V) potremo sostituire l'altro

$$(V')\left\{\begin{aligned}
z_1(\xi,\ \eta)&=\varphi(\xi)+\int_0^\eta z_3(\xi,\ y)dy\\
z_2(\xi,\ \eta)&=\frac{\psi(x_{20})-\psi(x_{10})}{2\eta^\alpha k(\xi,\ \eta)}+\frac{1}{2\eta^\alpha k(\xi,\ \eta)}\int_0^\eta\left\{\frac{d^2x_1}{dy^2}z_2(x_1,\ y)-\frac{d^2x_2}{dy^2}z_2(x_2,\ y)\right\}dy-\\
&\quad-\frac{1}{2\eta^\alpha k(\xi,\ \eta)}\int_0^\eta\{f(x_1,\ y,\ z_1(x_1,\ y),\ z_2(x_1,\ y),\ z_3(x_1,\ y))-\\
&\quad-f(x_2,\ y,\ z_1(x_2,\ y),\ z_2(x_2,\ y),\ z_3(x_2,\ y))\}\,dy\\
z_3(\xi,\ \eta)&=\frac{\psi(x_{10})+\psi(x_{20})}{2}-\frac{1}{2}\int_0^\eta\left\{\frac{d^2x_1}{dy^2}z_2(x_1,\ y)+\frac{d^2x_2}{dy^2}z_2(x_2,\ y)\right\}dy-\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_0^\eta\{f(x_1,\ y,\ z_1(x_1,\ y),\ z_2(x_1,\ y),\ z_3(x_1,\ y))+\\
&\quad+f(x_2,\ y,\ z_1(x_2,\ y),\ z_2(x_2,\ y),\ z_3(x_2,\ y))\}\,dy
\end{aligned}\right.$$

perfettamente equivalente a (V).

3. Esistenza di una soluzione z_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ del sistema (V').

Costruiamo le funzioni approssimanti

$$z_1^{(0)}(\xi,\ \eta)=\varphi(\xi),\qquad z_2^{(0)}(\xi,\ \eta)=\varphi'(\xi),\qquad z_3^{(0)}(\xi,\ \eta)=\psi(\xi) \tag{16_0}$$

e, per $n = 1, 2, \ldots$

$$(16_n)\left\{\begin{aligned}
& z_1^{(n)}(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \int_0^\eta z_3^{(n-1)}(\xi, y)dy \\
& z_2^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{\psi(x_{20}) - \psi(x_{10})}{2\eta^\alpha k} + \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2} z_2^{(n-1)}(x_1, y) - \frac{d^2x_2}{dy^2} z_2^{(n-1)}(x_2, y)\right\} dy + \\
& \quad + \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta \{ f(x_1, y, z_1^{(n-1)}(x_1, y), z_2^{(n-1)}(x_1, y), z_3^{(n-1)}(x_1, y)) - \\
& \quad - f(x_2, y, z_1^{(n-1)}(x_2, y), z_2^{(n-1)}(x_2, y), z_3^{(n-1)}(x_2, y)) \} dy \\
& z_3^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{\psi(x_{10}) + \psi(x_{20})}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2} z_2^{(n-1)}(x_1, y) + \frac{d^2x_2}{dy^2} z_2^{(n-1)}(x_2, y)\right\} dy - \\
& \quad - \frac{1}{2}\int_0^\eta \{ f(x_1, y, z_1^{(n-1)}(x_1, y), z_2^{(n-1)}(x_1, y), z_3^{(n-1)}(x_1, y)) + \\
& \quad + f(x_2, y, z_1^{(n-1)}(x_2, y), z_2^{(n-1)}(x_2, y), z_3^{(n-1)}(x_2, y)) \} dy.
\end{aligned}\right.$$

Cominciamo col far vedere che queste formule non sono illusorie, e cioè che tutte le $z_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$, se y è determinato in modo conveniente, soddisfano in T_{y_1} le (1). Più precisamente facciamo vedere che se ρ è un qualunque numero assoggettato alla condizione

$$(17) \qquad \beta < \rho < 1$$

si può determinare un $M > 0$ in modo che sia

$$(18_r) \qquad | z_i^{(r)}(\xi, \eta) - z_i^{(0)}(\xi, \eta) | \leq M\eta^{1-\alpha} \sum_0^r {}_j \rho^j, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Procediamo per induzione e mostriamo che la (18_r) sussiste per $r = 1$.

Indicheremo con μ il più grande tra i massimi delle funzioni $|\varphi'|$, $|\varphi''|$, $|\psi|$, $|\psi'|$ per $a \leq x \leq b$. Si ha intanto

$$(18_1') \qquad | z_1^{(1)}(\xi, \eta) - z_1^{(0)}(\xi, \eta) | = | \psi(\xi) | \eta \leq \mu y_1^\alpha \eta^{1-\alpha}.$$

Essendo poi

$$z_2^{(1)}(\xi, \eta) - z_2^{(0)}(\xi, \eta) = \frac{\psi(x_{20}) - \psi(x_{10})}{2\eta^\alpha k} +$$

$$+ \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2}[\varphi'(x_1) - \varphi'(\xi)] - \frac{d^2x_2}{dy^2}[\varphi'(x_2) - \varphi'(\xi)]\right\} dy +$$

$$+ \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta \{ f(x_1, y, \varphi(x_1)\ \varphi'(x_1), \psi(x_1)) - f(x_2, y, \varphi(x_2), \varphi'(x_2), \psi(x_2)) \} dy$$

avremo per le (4) e la prima delle (2)

$$| z_2^{(1)}(\xi, \eta) - z_2^{(0)}(\xi, \eta) | \leq \mu \frac{x_{20} - x_{10}}{2\eta^\alpha k} + \mu \frac{x_{20} - x_{10}}{2} + \frac{F}{\bar{k}} \eta^{1-\alpha}$$

e per la (5)

$$(18_1'') \qquad | z_2^{(1)}(\xi, \eta) - z_2^{(0)}(\xi, \eta) | \leq \left[\mu \frac{\bar{\bar{k}}}{\bar{k}} y_1^\alpha + \mu \bar{\bar{k}} y_1^{2\alpha} + \frac{F}{\bar{k}} \right] \eta^{1-\alpha}.$$

Similmente, essendo

$$z_3^{(1)}(\xi, \eta) - z_3^{(0)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [\psi(x_{10}) + \psi(x_{20}) - 2\psi(\xi)] -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\eta \left\{ \frac{d^2 x_1}{dy^2} [\varphi'(x_1) - \varphi'(\xi)] + \frac{d^2 x_2}{dy^2} [\varphi'(x_2) - \varphi'(\xi)] \right\} dy -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\eta \{ f(x_1, y, \varphi(x_1), \varphi'(x_1), \psi(x_1)) + f(x_2, y, \varphi(x_2), \varphi'(x_2), \psi(x_2)) \} dy$$

avremo

$$(18_1''') \qquad | z_3^{(1)}(\xi, \eta) - z_3^{(0)}(\xi, \eta) | \leq [\mu \bar{\bar{k}} y_1^{2\alpha} + \mu \bar{\bar{k}}^2 y_1^{3\alpha} + F y_1^\alpha] \eta^{1-\alpha}.$$

Dunque, posto per brevità

$$A = \mu y_1^\alpha, \qquad B = \mu \frac{\bar{\bar{k}}}{\bar{k}} y_1^\alpha + \mu \bar{\bar{k}} y_1^{2\alpha} + \frac{F}{\bar{k}}, \qquad C = \mu \bar{\bar{k}} y_1^{2\alpha} + \mu \bar{\bar{k}}^2 y_1^{3\alpha} + F y_1^\alpha$$

e preso ρ nel modo detto (cioè compreso tra β ed uno) basterà definire M mediante la

$$(19) \qquad M = \max(A, B, C)$$

per avere dalle $(18_1')$, $(18_1'')$, $(18_1''')$ la

$$(18_1) \qquad | z_i^{(1)}(\xi, \eta) - z_i^{(0)}(\xi, \eta) | \leq M \eta^{1-\alpha} \sum_0^1{}_j \rho^j.$$

Supposte ora le (18_r) verificate da tutte le $z_i^{(n)}$ fino alla r-ma inclusa è facile provarle per la $(r+1)$-ma. Infatti

$$| z_1^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_1^{(0)}(\xi, \eta) | = \left| \int_0^\eta z_3^{(r)}(\xi, y) dy \right| \leq$$

$$\leq | \psi(\xi) | \eta + \int_0^\eta | z_3^{(r)}(\xi, y) - z_3^{(0)}(\xi, y) | dy \leq A \eta^{1-\alpha} + M \sum_0^r{}_j \rho^j \int_0^\eta y^{1-\alpha} dy \leq$$

$$\leq M \left[1 + \frac{y_1}{2-\alpha} \sum_0^r{}_j \rho^j \right] \eta^{1-\alpha} \leq M \eta^{1-\alpha} \sum_0^{r+1}{}_j \rho^j$$

purchè si prenda y_1 in modo che sia

$$\frac{y_1}{2-\alpha} \leq \rho. \tag{20}$$

Si ha poi

$$z_2^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_2^{(0)}(\xi, \eta) = \frac{\psi(x_{20}) - \psi(x_{10})}{2\eta^\alpha k} +$$

$$+ \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2}[\varphi'(x_1) - \varphi'(\xi)] - \frac{d^2x_2}{dy^2}[\varphi'(x_2) - \varphi'(\xi)] \right\} dy +$$

$$+ \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta | f(x_1, y, z_1^{(r)}(x_1, y), z_2^{(r)}(x_1, y), z_3^{(r)}(x_1, y)) -$$

$$- f(x_2, y, z_1^{(r)}(x_2, y), z_2^{(r)}(x_2, y), z_3^{(r)}(x_2, y)) | dy +$$

$$+ \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2}[z_2^{(r)}(x_1, y) - z_2^{(0)}(x_1, y)] - \frac{d^2x_2}{dy^2}[z_2^{(r)}(x_2, y) - z_2^{(0)}(x_2, y)] \right\} dy$$

e da questa segue, per la (8), la (17) e la (19)

$$| z_2^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_2^{(0)}(\xi, \eta) | \leq B\eta^{1-\alpha} + M \sum_0^r{}_j \rho^j \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_0^\eta y^{1-\alpha}\left[\frac{d^2x_1}{dy^2} - \frac{d^2x_2}{dy^2}\right] dy \leq$$

$$\leq M\eta^{1-\alpha}[1 + \beta \sum_0^r{}_j \rho^j] \leq M\eta^{1-\alpha} \sum_0^{r+1}{}_j \rho^j.$$

Similmente, essendo

$$z_3^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_3^{(0)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[\psi(x_{10}) + \psi(x_{20}) - \psi(\xi)] -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2}[\varphi'(x_1) - \varphi'(\xi)] + \frac{d^2x_2}{dy^2}[\varphi'(x_2) - \varphi'(\xi)] \right\} dy -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^\eta | f(x_1, y, z_1^{(r)}(x_1, y), z_2^{(r)}(x_1, y), z_3^{(r)}(x_1, y)) +$$

$$+ f(x_2, y, z_1^{(r)}(x_2, y), z_2^{(r)}(x_2, y), z_3^{(r)}(x_2, y)) | dy -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^\eta \left\{ \frac{d x_1}{dy^2}[z_2^{(r)}(x_1, y) - z_2^{(0)}(x_1, y)] + \frac{d^2x_2}{dy}[z_2^{(r)}(x_1, y) - z_2^{(0)}(x_1, y)] \right\} dy$$

si ha

$$| z_3^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_3^{(0)}(\xi, \eta) | \leq C\eta^{1-\alpha} + M \sum_0^r{}_j \rho^j \cdot \frac{1}{2}\int_0^\eta y^{1-\alpha}\left[\frac{d^2x_1}{dy^2} - \frac{d^2x_2}{dy^2}\right] dy \leq$$

$$\leq M\eta^{1-\alpha}[1 + \beta \sum_0^r{}_j \rho^j \cdot y_1{}^\alpha \bar{\bar{k}}] \leq M\eta^{1-\alpha} \sum_0^{r+1}{}_j \rho^j$$

purchè si prenda y_1 tale che sia

$$y_1^{\alpha}\bar{\bar{k}} < \rho. \tag{21}$$

Dunque se sono soddisfatte le (17), (19), (20) e (21), valgono le (18_r).

Ancora per induzione proveremo le disuguaglianze seguenti

$$| z_i^{(j)}(\xi, \eta) - z_i^{(j-1)}(\xi, \eta) | \leq M\eta^{1-\alpha}\rho^{j-1} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{22_j}$$

Anzitutto si noti che dalle $(18_1')$, $(18_1'')$, $(18_1''')$ e (19) seguono le

$$| z_i^{(1)}(\xi, \eta) - z_i^{(0)}(\xi, \eta) | \leq M\eta^{1-\alpha} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{22_1}$$

che sono maggiorazioni più precise delle (18_1).

Se ammettiamo le (22_j) provate per ogni $j \leq r$ è facile dimostrarle per $j = r + 1$, Infatti

$$| z_1^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_1^{(r)}(\xi, \eta) | \leq M\rho^{r-1}\int_0^{\eta} y^{1-\alpha}dy \leq M\eta^{1-\alpha}\rho^r$$

per la (20). Avendo presenti le tre ultime (2) e la (8) si ha poi

$$| z_2^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_2^{(r)}(\xi, \eta) | \leq \frac{M\rho^{r-1}}{2\eta^{\alpha}k}\int_0^{\eta} y^{1-\alpha}\left[\frac{d^2x_1}{dy^2} - \frac{d^2x_2}{dy^2}\right]dy + \frac{3FM\rho^{r-1}}{\eta^{\alpha}k}\int_0^{\eta} y^{1-\alpha}dy \leq$$

$$\leq M\eta^{1-\alpha}\rho^{r-1}\left[\beta + \frac{3F}{\bar{k}}\frac{y_1^{1-\alpha}}{2-\alpha}\right] \leq M\eta^{1-\alpha}\rho^r$$

purchè y_1 sia tale che

$$\beta + \frac{3F}{\bar{k}}\frac{y_1^{1-\alpha}}{2-\alpha} < \rho. \tag{23}$$

Infine

$$| z_3^{(r+1)}(\xi, \eta) - z_3^{(r)}(\xi, \eta) | \leq M\eta^{1-\alpha}\rho^{r-1}\left[y_1^{\alpha}\bar{\bar{k}}\beta + 3F\frac{y_1}{2-\alpha}\right] \leq M\eta^{1-\alpha}\rho^r$$

se y_1 è tale che

$$y_1^{\alpha}\bar{\bar{k}}\beta + 3F\frac{y_1}{2-\alpha} \leq \rho. \tag{24}$$

Le (22_j) ora dimostrate, essendo $0 < \rho < 1$, provano che le $z_i^{(n)}$ convergono uniformemente per $n \to \infty$ verso tre funzioni continue $z_i^{(\infty)}$ $(i = 1, 2, 3)$; è subito visto che queste soddisfano il sistema (V'). Infatti è immediata la convergenza uniforme delle

$$f(x_i, y, z_1^{(n)}(x_i, y), z_2^{(n)}(x_i, y), z_3^{(n)}(x_i, y)) \qquad (i = 1, 2)$$

verso

$$f(x_i, y, z_1^{(\infty)}(x_i, y), z_2^{(\infty)}(x_i, y), z_3^{(\infty)}(x_i, y)) \qquad (i = 1, 2)$$

e poichè le funzioni integrande che appaiono nelle (16_n) sono maggiorate, per le (18_r) da funzioni assolutamente integrabili, è lecito [5] effettuare il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Si noti che dalle (18_r) ora ricordate seguono le

$$|\, z_i^{(\infty)}(\xi, \eta) - z_i^{(0)}(\xi, \eta) \,| \leq M\eta^{1-\alpha}/(1-\rho) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

le quali provano che le $f(x_i,\ y,\ z_1^{(\infty)}(x_i,\ y),\ z_2^{(\infty)}(x_i,\ y),\ z_3^{(\infty)}(x_i,\ y))$ non sono prive di significato.

Si noti anche che le funzioni

$$(25) \qquad z^{(\infty)} = z_1^{(\infty)}, \qquad u^{(\infty)} = \eta^\alpha k z_2^{(\infty)} + z_3^{(\infty)}, \qquad v^{(\infty)} = -\eta^\alpha k z_2^{(\infty)} + z_3^{(\infty)}$$

soddisfano il sistema (V).

4. **Esistenza delle** $\partial z_i^{(\infty)}/\partial\xi$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Dimostriamo che se $y_1 \leq y_0$ è abbastanza piccolo la soluzione $z_i^{(\infty)}(\xi, \eta)$ di (V) ammette in T_{y_1} derivate continue rispetto alla ξ.

Per questo poniamo in T_{y_0}, per $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

$$(26) \qquad z^{(n)} = z_1^{(n)}, \qquad u^{(n)} = \eta^\alpha k z_2^{(n)} + z_3^{(n)}, \qquad v^{(n)} = -\eta^\alpha k z_2^{(n)} + z_3^{(n)}$$

e cominciamo con l'osservare che si può scrivere

$$(27) \qquad u^{(0)}(\xi, \eta) = \psi(\xi) + \int_0^\eta \left[-\frac{d^2x_2}{dy}\right]\varphi'(\xi)dy.$$

Inoltre, posto per brevità

$$(28) \qquad I_y{}^\eta(t) = \int_y^\eta t^\alpha k_x(x_2(t;\ \xi,\ \eta),\ t)\frac{\partial x_2}{\partial\xi}\,dt, \qquad y \geq 0$$

segue dalla seconda delle (3)

$$(29) \qquad \frac{\partial x_2}{\partial\xi} = 1 + I_y{}^\eta(t), \qquad y \geq 0$$

e perciò

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial\xi} = \psi'(x_{20}) - \psi'(\xi) + \psi'(x_{20})I_0{}^\eta(t) + \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\frac{d^2x_2}{dy^2}\right][\varphi'(x_2) - \varphi'(\xi)]dy +$$

$$+ \int_0^\eta \left[-\frac{d^2x_2}{dy^2}\right][\varphi''(x_2) - \varphi''(\xi)]dy + \int_0^\eta \left[-\frac{d^2x_2}{dy^2}\right]\varphi''(x_2)I_y{}^\eta(t)dy -$$

$$- \int_0^\eta \{ f_x(x_2,\ y,\ \varphi(x_2),\ \varphi'(x_2),\ \psi(x_2)) + f_z(\ldots)\varphi'(x_2) + f_p(\ldots)\varphi''(x_2) + f_q(\ldots)\psi'(x_2) \} \frac{\partial x_2}{\partial\xi}\,dy.$$

[5] Cfr. H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 2e ed., Paris (1928), p. 131.

Facciamo uso a questo punto dell'ipotesi della lipschitzianità di ψ' e φ'' e sia μ (già supposto maggiore dei massimi delle $|\varphi'|$, $|\ {}''|$, $|\psi'|$) più grande delle costanti di LIPSCHITZ di ψ' e di φ''. Inoltre, scelto un numero l tale che

$$1 < l < \frac{1}{\rho} \tag{30}$$

si può sempre prendere y_1 tanto piccolo da aversi in T_{y_1}

$$\left|\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right| < l. \tag{31}$$

Passando a considerare i valori assoluti nell'ultima identità scritta ed avendo presenti le (4) e le (2) sarà

$$\left|\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\right| \leq \mu(x_{20} - x_{10}) + \mu \mid I_0{}^{\eta}(t) \mid + \mu(x_{20} - x_{10}) \int_0^{\eta} \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\left[-\frac{d^2 x_2}{dy^2}\right]\right| dy +$$
$$+ \mu(x_{20} - x_{10})\eta^{\alpha} k(\xi, \eta) + \mu \int_0^{\eta} \left[-\frac{d^2 x_2}{dy^2}\right] \mid I_y{}^{\eta}(t) \mid dy + Fl(1 + 3\mu)\eta.$$

Se K indica il massimo della $|k_x|$ in T_{y_0} dalle (28) e (31) segue in T_{y_1}

$$\mid I_y{}^{\eta}(t) \mid \leq Kl \frac{\eta^{1+\alpha} - y^{1+\alpha}}{1 + \alpha} < Kl\eta^{1+\alpha}.$$

Essendo poi per la seconda delle (6)

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[-\frac{d^2 x_2}{dy^2}\right] = \{\alpha y^{\alpha-1} k_x(x_2, y) - y^{2\alpha}[k_x{}^2(x_2, y) + k(x_2, y) k_{xx}(x_2, y)] + y^{\alpha} k_{xy}(x_2, y)\} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \tag{32}$$

se K è maggiore anche del massimo di $|k_{xx}|$, di quello di $|k_{xy}|$ e, per comodità, maggiore anche di $\bar{\bar{k}}$, avremo, ricordando anche la (5):

$$\left|\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\right| \leq 2\mu K\eta^{1+\alpha} + \mu Kl\eta^{1+\alpha} + 2\mu Kl\eta^{1+\alpha}[K\eta^{\alpha} + 2K^2\eta^{1+2\alpha} + K\eta^{1+\alpha}] +$$
$$+ 2\mu K^2\eta^{1+2\alpha} + \mu K^2 l\eta^{1+2\alpha} + Fl(1 + 3\mu)\eta \leq$$
$$\leq \{4\mu K^3 l y_1{}^{1+3\alpha} + 2\mu K^2 l y_1{}^{1+2\alpha} + \mu K^2(2 + 3l) y_1{}^{2\alpha} + \mu K(2 + l) y_1{}^{\alpha} + Fl(1 + 3\mu)\}\eta.$$

Analogamente si prova che l'espressione ora scritta è $\geq$ anche di

$$\left|\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi}\right|$$

purchè y_1 sia abbastanza piccolo da aversi

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right| < l$$

e poichè

$$\left|\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \xi}-\frac{\partial z^{(0)}}{\partial \xi}\right| \leq |\varphi'(\xi)|\,\eta \leq \mu\eta$$

segue che se M_1 è maggiore di μ e dell'ultima somma in $|\ |$ si hanno le

$$(33)\qquad \left|\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi}\right|,\quad \left|\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi}-\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi}\right|,\quad \left|\frac{\partial z^{(1)}}{\partial \xi}-\frac{\partial z^{(0)}}{\partial \xi}\right| \leq M_1\eta.$$

Proveremo ora che se y_1 è sufficientemente piccolo, si hanno per $j=1, 2,\ldots$ le

$$(34_j)\qquad \left|\frac{\partial u^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial u^{(j-1)}}{\partial \xi}\right|,\quad \left|\frac{\partial v^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial v^{(j-1)}}{\partial \xi}\right|,\quad \left|\frac{\partial z^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial z^{(j-1)}}{\partial \xi}\right| \leq M_1(l\rho)^{j-1}\eta.$$

In tal modo, per la (30), risulterà provato che le successioni $\partial u^{(n)}/\partial\xi$, $\partial v^{(n)}/\partial\xi$, $\partial z^{(n)}/\partial\xi$ convergono uniformemente in T_{y_1}; i rispettivi limiti saranno, necessariamente, $\partial u^{(\infty)}/\partial\xi$, $\partial v^{(\infty)}/\partial\xi$, $\partial z^{(\infty)}/\partial\xi$. Avendosi identicamente

$$(35)\qquad \frac{\partial z_2^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial z_2^{(j-1)}}{\partial \xi}=\frac{1}{2\eta^\alpha k}\left[\frac{\partial u^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial u^{(j-1)}}{\partial \xi}\right]-\frac{1}{2\eta^\alpha k}\left[\frac{\partial v^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial v^{(j-1)}}{\partial \xi}\right]-\frac{k_\xi}{k}\left[z_2^{(j)}-z_2^{(j-1)}\right].$$

dalle (34_j) e (22_j) seguirà

$$(36)\qquad \left|\frac{\partial z_2^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial z_2^{(j-1)}}{\partial \xi}\right| \leq \left[\frac{M_1}{k}(l\rho)^{j-1}+\frac{K}{k}M\rho^{j-1}\right]\eta^{1-\alpha}$$

da cui la convergenza uniforme di $\partial z_2^{(j)}/\partial\xi$, necessariamente verso $\partial z_2^{(\infty)}/\partial\xi$.

Similmente si ha la convergenza uniforme delle $\partial z_3^{(j)}/\partial\xi$ verso $\partial z_3^{(\infty)}/\partial\xi$.

Le funzioni $\partial z_1^{(\infty)}/\partial\xi=\partial z^{(\infty)}/\partial\xi$, $\partial z_2^{(\infty)}/\partial\xi$, $\partial z_3^{(\infty)}/\partial\xi$, limiti uniformi di successioni di funzioni continue, saranno continue anch'esse in T_{y_1}; per togliere ogni dubbio nel caso $\eta=0$, si noti che, ad es., dalla (36) segue

$$(37)\qquad \begin{aligned}\left|\frac{\partial z_2^{(j)}}{\partial \xi}-\varphi''(\xi)\right| &= \left|\frac{\partial z_2^{(j)}}{\partial \xi}-\frac{\partial z_2^{(j-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial z_2^{(j-1)}}{\partial \xi}-\ldots+\frac{\partial z_2^{(1)}}{\partial \xi}-\varphi''(\xi)\right| \leq \\ &\leq \left[\frac{M_1}{k}\sum_0^{j-1}{}_s(l\rho)^s+\frac{K}{k}M\sum_0^{j-1}{}_s\rho^s\right]\eta^{1-\alpha}\end{aligned}$$

da cui si ha che $\partial z_2^{(\infty)}/\partial\xi$ tende verso $\varphi''(\xi)$ quando $\eta\to 0$.

Dimostriamo dunque le (34_j); procediamo ancora per induzione. Le (34_j) sono valide per $j=0$ (cfr. le (33)); supposto di averle provate per ogni $j\leq r$, dimostriamole per $j=r+1$, cioè

$$(34_{r+1})\qquad \left|\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial \xi}-\frac{\partial u^{(r)}}{\partial \xi}\right|,\quad \left|\frac{\partial v^{(r+1)}}{\partial \xi}-\frac{\partial v^{(r)}}{\partial \xi}\right|,\quad \left|\frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \xi}-\frac{\partial z^{(r)}}{\partial \xi}\right| \leq M_1(l\rho)^r\eta.$$

Posto per brevità

$$f_h^{(r)}=f_h(x_2,\, y,\, z_1^{(r)}(x_2,\, y),\, z_2^{(r)}(x_2,\, y),\, z_3^{(r)}(x_2,\, y)). \qquad h=x,\, z,\, p,\, q$$

tenendo presenti la (35), la (32) e la seconda delle (6), si ha:

$$\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u^{(r)}}{\partial\xi}=\int_0^\eta\left[-\frac{d^2x_2}{dy^2}\right]\frac{1}{2y^\alpha k(x_2,\,y)}\left[\frac{\partial u^{(r)}}{\partial x}-\frac{\partial u^{(r-1)}}{\partial x}-\left(\frac{\partial v^{(r)}}{\partial x}-\frac{\partial v^{(r-1)}}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial x_2}{\partial\xi}\,dy+$$

$$+\int_0^\eta\left[-y^{2\alpha}k(x_2,\,y)k_{xx}(x_2,\,y)+y^\alpha k_{xy}(x_2,\,y)-y^\alpha\frac{k_x(x_2,\,y)k_y(x_2,\,y)}{k(x_2,\,y)}\right][z_2^{(r)}(x_2,\,y)-$$

$$-z_2^{(r-1)}(x_2,\,y)]\frac{\partial x_2}{\partial\xi}\,dy-\int_0^\eta\Big\{f_x^{(r)}-f_x^{(r-1)}+f_z^{(r)}\frac{\partial z_1^{(r)}}{\partial x}-f_z^{(r-1)}\frac{\partial z_1^{(r-1)}}{\partial x}+$$

$$+f_p^{(r)}\frac{\partial z_2^{(r)}}{\partial x}-f_p^{(r-1)}\frac{\partial z_2^{(r-1)}}{\partial x}+f_q^{(r)}\frac{\partial z_3^{(r)}}{\partial x}-f_q^{(r-1)}\frac{\partial z_3^{(r-1)}}{\partial x}\Big\}\frac{dx_2}{d\xi}\,dy.$$

Prendendo i valori assoluti di ambo i membri e tenendo conto, oltre che della (34_r), della (22_r) e della (31), abbiamo

$$\left|\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial u^{(r)}}{\partial\xi}\right|\le M_1(l\rho)^{r-1}l\int_0^\eta\left[-\frac{d^2x_2}{dy^2}\right]\frac{y^{1-\alpha}}{k(x_2,\,y)}\,dy+$$

$$+M\rho^{r-1}l\int_0^\eta\left[y^{1+\alpha}k(x_2,\,y)\,|\,k_{xx}(x_2,\,y)\,|+y\,|\,k_{xy}(x_2,\,y)\,|+y\frac{|\,k_x(x_2,\,y)\cdot k_y(x_2,\,y)\,|}{k(x_2,\,y)}\right]dy+$$

$$+l\int_0^\eta\Big\{|f_x^{(r)}-f_x^{(r-1)}|+|f_z^{(r)}|\left|\frac{\partial z_1^{(r)}}{\partial x}-\frac{\partial z_1^{(r-1)}}{\partial x}\right|+|f_z^{(r)}-f_z^{(r-1)}|\left|\frac{\partial z_1^{(r-1)}}{\partial x}-\varphi'(x_2)\right|+$$

$$+|f_z^{(r)}-f_z^{(r-1)}|\,|\varphi'(x_2)|+|f_p^{(r)}|\left|\frac{\partial z_2^{(r)}}{\partial x}-\frac{\partial z_2^{(r-1)}}{\partial x}\right|+$$

$$+|f_p^{(r)}-f_p^{(r-1)}|\left|\frac{\partial z_2^{(r-1)}}{\partial x}-\varphi''(x_2)\right|+|f_p^{(r)}-f_p^{(r-1)}|\,|\varphi''(x_2)|+$$

$$+|f_q^{(r)}|\left|\frac{\partial z_3^{(r)}}{\partial x}-\frac{\partial z_3^{(r-1)}}{\partial x}\right|+|f_q^{(r)}-f_q^{(r-1)}|\left|\frac{\partial z_3^{(r-1)}}{\partial x}-\psi'(x_2)\right|+|f_q^{(r)}-f_q^{(r-1)}|\,|\psi'(x_2)|\Big\}dy.$$

D'altronde, con una integrazione per parti si ha facilmente

$$\int_0^\eta\left[-\frac{d^2x_2}{dy^2}\right]\frac{y^{1-\alpha}}{k(x_2,\,y)}\,dy=\alpha\eta+\int_0^\eta\left[-y^{1+\alpha}k_{x}(x_2,\,y)+y\frac{k_y(x_2,\,y)}{k(x_2,\,y)}\right]dy$$

da cui

$$\int_0^\eta\left[-\frac{d^2x_2}{dy^2}\right]\frac{y^{1-\alpha}}{k(x_2,\,y)}\,dy\le\left[\alpha+\frac{K}{2}y_1^{1+\alpha}+\frac{K}{2\bar{k}}y_1\right]\eta.$$

Allora (poichè $1 < l < l^r$) avremo

$$\left|\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \xi}\right| \leq M_1(l\rho)^r \eta \left[\frac{\alpha}{\rho} + \frac{K}{2\rho} y_1^{1+\alpha} + \frac{K}{2\bar{k}\rho} y_1 + \frac{K^2 M}{\rho M_1} y_1^{1+\alpha} + \frac{KM}{\rho M_1} y_1 + \frac{K^2 M}{\rho \bar{k} M_1} y_1\right] +$$

$$+ l \int_0^{\eta} |\quad| \, dy.$$

Per evitare di dilungarci troppo non eseguiremo la maggiorazione di quest' ultimo integrale e ci limiteremo a rilevare che sfruttando l' ipotesi della lipschitzianità delle f_x, f_z, f_p, f_q e tenuto conto della (34_r) e delle (36) e (37) (nonchè delle analoghe maggiorazioni relative a z_1 e z_2) tale integrale viene maggiorato da un' espressione del tipo

$$M_1(l\rho)^r \eta S(y_1)$$

dove $S(y_1)$ è una somma di termini ciascuno dei quali contiene y_1 elevato ad un certo esponente positivo. Perciò, posto

$$T(y_1) = S(y_1) + \frac{K}{2\rho} y_1^{1+\alpha} + \frac{K}{2\bar{k}\rho} y_1 + \frac{K^2 M}{\rho M_1} y_1^{1+\alpha} + \frac{KM}{\rho M_1} y_1 + \frac{K^2 M}{\rho \bar{k} M_1} y_1$$

avremo infine

$$\left|\frac{\partial u^{(r+1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u^{(r)}}{\partial \xi}\right| \leq M_1(l\rho)^r \eta \left[\frac{\alpha}{\rho} + T(y_1)\right].$$

Ma $T(y_1)$, data la sua forma, decresce con y_1 e poichè per le (9) e (17) è $\alpha/\rho < 1$ segue che pur di prendere y_1 abbastanza piccolo si ha

$$\frac{\alpha}{\rho} + T(y_1) < 1.$$

Così resta provata la prima delle (34_{r+1}) ed in modo del tutto analogo si può provare la seconda; la terza, essendo

$$\left|\frac{\partial z^{(r+1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial z^{(r)}}{\partial \xi}\right| \leq M_1(l\rho)^{r-1} \int_0^{\eta} y^{1-\alpha} dy \leq M_1(l\rho)^r \eta \frac{1}{l\rho} \frac{y_1^{1-\alpha}}{2-\alpha}$$

sarà verificata non appena

$$\frac{y_1^{1-\alpha}}{2-\alpha} \leq l\rho.$$

5. Esistenza delle $\partial z_i^{(\infty)}/\partial\eta$ $(i = 1, 2, 3)$.

Anzitutto essendo

$$z_1^{(\infty)}(\xi, \eta) = \int_0^\eta z_3^{(\infty)}(\xi, y)dy$$

segue

$$\frac{\partial z_1^{(\infty)}}{\partial\eta} = z_3^{(\infty)}(\xi, \eta) \tag{38}$$

e in particolare

$$\left(\frac{\partial z_1^{(\infty)}}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} = \psi(\xi).$$

Sia poi s_i $(i = 1, 2)$ la lunghezza dell'arco della C_i dal punto $(x_{i0}, 0)$ al punto (ξ, η); avremo allora

$$u^{(\infty)}(\xi, \eta) = \psi(x_{20}) +$$
$$+\int_0^{s_2} \frac{\left[-\dfrac{d^2x_2}{dy^2}\right] z_2^{(\infty)}(x_2, y) - f(x_2, y, z_1^{(\infty)}(x_2, y), z_2^{(\infty)}(x_2, y), z_3^{(\infty)}(x_2, y))}{\sqrt{1 + y^{2\alpha}k^2(x_2, y)}} ds_2$$

$$v^{(\infty)}(\xi, \eta) = \psi(x_{10}) +$$
$$+\int_0^{s_1} \frac{\left[-\dfrac{d^2x_1}{dy^2}\right] z_2^{(\infty)}(x_1, y) - f(x_1, y, z_1^{(\infty)}(x_1, y), z_2^{(\infty)}(x_1, y), z_3^{(\infty)}(x_1, y))}{\sqrt{1 + y^{2\alpha}k^2(x_1, y)}} ds_1 .$$

Se ora si esegue la derivata $\partial u^{(\infty)}/\partial r_2$ della $u^{(\infty)}$ nel punto (ξ, η), con $\eta > 0$, secondo la direzione r_2 della tangente in (ξ, η) alla C_2 uscente da esso, si otterrà come risultato la prima delle due funzioni integrande ora scritte, calcolata nel punto (ξ, η) stesso, ed analogo risultato si otterrà calcolando la $\partial v^{(\infty)}/\partial r_1$ secondo la direzione r_1 della tangente in (ξ, η) alla C_1. Ma poichè, come si è visto al n. 4, esistono continue $\partial u^{(\infty)}/\partial\xi$ e $\partial v^{(\infty)}/\partial\xi$ esisteranno continue per $\eta > 0$ anche le

$$\frac{\partial u^{(\infty)}}{\partial\eta} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_2}\frac{\partial u^{(\infty)}}{\partial\xi} + \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma_2}\frac{\partial u^{(\infty)}}{\partial r_2}$$

$$\frac{\partial v^{(\infty)}}{\partial\eta} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_1}\frac{\partial v^{(\infty)}}{\partial\xi} + \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma_1}\frac{\partial v^{(\infty)}}{\partial r_1}$$

essendo γ_i $(i=1, 2)$ l'angolo che la tangente in (ξ, η) alla C_i, orientata da $(x_{i0}, 0)$ a (ξ, η), forma con l'asse delle ascisse. Poichè

$$\operatorname{sen}\gamma_1 = \operatorname{sen}\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^{2\alpha}k}}, \qquad \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_1} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma_2}\eta^\alpha k$$

avremo le

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u^{(\infty)}}{\partial\eta} = \eta^\alpha k\dfrac{\partial u^{(\infty)}}{\partial\xi} - [-\alpha\eta^{\alpha-1}k + \eta^{2\alpha}kk_\xi - \eta^\alpha k_\eta]z_2^{(\infty)}(\xi, \eta) - \\ \qquad\qquad - f(\xi, \eta, z_1^{(\infty)}(\xi, \eta), z_2^{(\infty)}(\xi, \eta), z_3^{(\infty)}(\xi, \eta)) \\ \dfrac{\partial v^{(\infty)}}{\partial\eta} = -\eta^\alpha k\dfrac{\partial v^{(\infty)}}{\partial\xi} - [\alpha\eta^{\alpha-1}k + \eta^{2\alpha}kk_\xi + \eta^\alpha k_\eta]z_2^{(\infty)}(\xi, \eta) - \\ \qquad\qquad - f(\xi, \eta, z_1^{(\infty)}(\xi, \eta), z_2^{(\infty)}(\xi, \eta), z_3^{(\infty)}(\xi, \eta)). \end{cases}$$

Da queste risulta che $\partial u^{(\infty)}/\partial\eta$ e $\partial v^{(\infty)}/\partial\eta$ sono continue per $\eta > 0$, ma, in generale, infinite con $1/\eta$ (di ordine $1-\alpha$ al più). Invece

$$\frac{\partial z_3^{(\infty)}}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^{(\infty)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{(\infty)}}{\partial\eta}\right)$$

per $\eta \to 0$ tende a $-f(\xi, 0, \varphi(\xi), \varphi'(\xi), \psi(\xi))$, quindi è continua in T_{y_1} e lo stesso è di

$$(40)\qquad \frac{\partial z_2^{(\infty)}}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{u^{(\infty)} - v^{(\infty)}}{2\eta^\alpha k}\right] = \frac{\partial z_3^{(\infty)}}{\partial\xi}$$

la quale tende, come sappiamo, a $\psi'(\xi)$ per $\eta \to 0$.

6. Esistenza della soluzione del problema (*B*), (*C*).

Resta infine da mostrare che la $z^{(\infty)} = z_1^{(\infty)}$ ammette derivate seconde continue in T_{y_1} e che ivi soddisfa la (*B*).

Anzitutto dalla (38) e dalla continuità in T_{y_1} di $\partial z_3^{(\infty)}/\partial\xi$ e di $\partial z_3/\partial\eta$ segue quella di $\partial^2 z_1^{(\infty)}/\partial\eta^2$ e di $\partial^2 z_1^{(\infty)}/\partial\eta\partial\xi = \partial^2 z_1^{(\infty)}/\partial\xi\partial\eta$. Quanto alla $\partial^2 z_1^{(\infty)}/\partial\xi^2$ sottraendo membro a membro le (39) si ha

$$\frac{\partial^2 z_1^{(\infty)}}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial z_2^{(\infty)}}{\partial\eta}$$

e da questa, integrando da 0 a η

$$(41)\qquad \frac{\partial z_1^{(\infty)}}{\partial\xi} = z_2^{(\infty)}(\xi, \eta)$$

identità valida anche per $\eta = 0$, poichè ambo i membri tendono per $\eta \to 0$ allo stesso limite $\varphi'(\xi)$. Dalla (41) segue la continuità in T_{y_1} di

$$(42)\qquad \frac{\partial^2 z_1^{(\infty)}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial z_2^{(\infty)}}{\partial\xi}.$$

Infine sommando membro a membro le (39) ed avendo presenti le (38) (41) è (42) si ha

$$\frac{\partial^2 z_1^{(\infty)}}{\partial \eta^2} = \eta^{2\alpha} k^2 \frac{\partial^2 z_1^{(\infty)}}{\partial \xi^2} - f\left(\xi,\ \eta,\ z_1^{(\infty)},\ \frac{\partial z_1^{(\infty)}}{\partial \xi},\ \frac{\partial z_1^{(\infty)}}{\partial \eta}\right)$$

cioè la (B).

L'esistenza della soluzione $z_1^{(\infty)}$ risulta così provata « in piccolo », cioè in T_{y_1} con $0 < y_1 \leq y_0$.

7. Unicità della soluzione del problema (B), (C).

Sia $z(\xi, \eta)$ una soluzione in T_{y_1} della (B) con i dati (C), regolare per $\eta = 0$ dovendo essere le z_η, $z_{\xi\eta}$, $z_{\eta\eta}$ limitate in T_{y_1} dovrà esistere un H tale da aversi in T_{y_1}

$$| z(\xi, \eta) - \varphi(\xi) | , \quad | z_\xi(\xi, \eta) - \varphi'(\xi) | , \quad | z_\eta(\xi, \eta) - \psi(\xi) | < H\eta$$

e quindi anche, se $N > H y_1^\alpha$:

$$| z(\xi, \eta) - \varphi(\xi) | , \quad | z_\xi(\xi, \eta) - \varphi'(\xi) | , \quad | z_\eta(\xi, \eta) - \psi(\xi) | < N\eta^{1-\alpha}.$$

Per provare che non vi possono essere in T_{y_1} due soluzioni distinte della (B), regolari per $\eta = 0$ con gli stessi dati (C), basterà dunque mostrare; che se $\mathfrak{z}_i(\xi, \eta)$ è una qualunque soluzione di (V') tale che

$$| \mathfrak{z}_i(\xi, \eta) - z_i^{(0)}(\xi, \eta) | \leq N\eta^{1-\alpha}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{43}$$

si ha necessariamente

$$\mathfrak{z}_i(\xi, \eta) - z_i^{(\infty)}(\xi, \eta) \equiv 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

dove le $z_i^{(\infty)}$ rappresentano la soluzione trovata al n. prec. Per provare le ultime identità è sufficiente far vedere che per $r = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ si ha

$$| \mathfrak{z}_i(\xi, \eta) - z_i^{(r)}(\xi, \eta) | \leq N y_1^{1-\alpha} \rho^r \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

dato che $\rho^r \to 0$ quando $r \to \infty$. Per $r = 0$ le disuguaglianze scritte sono vere per ipotesi e coincidono con le (43); la dimostrazione può farsi allora per induzione e non offre alcuna difficoltà se si tiene conto delle (20), (23), (24).

8. Dipendenza della soluzione dai dati φ, ψ.

Siano $\bar\varphi(x)$, $\bar\psi(x)$ due funzioni definite per $a \leq x \leq b$ e soddisfacenti le stesse condizioni imposte alle φ, ψ e sia $\bar z$ la soluzione corrispondente a a questi nuovi dati, necessariamente unica. Sia poi δ un numero positivo per il quale si abbiano per $a \leq x \leq b$, le

$$| \bar\varphi(x) - \varphi(x) | , \quad | \bar\varphi'(x) - \varphi'(x) | , \quad | \bar\psi(x) - \psi(x), \quad | \bar\psi'(x) - \psi'(x) | < \delta. \tag{44}$$

Ci proponiamo di valutare in funzione di questo δ le tre differenze

$$|\bar{z}(\xi, \eta) - z(\xi, \eta)|, \quad \left|\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right|$$

in un qualunque punto (ξ, η) del campo T_{y_1} in cui esistono z e $\bar{z}$.

Osservato preliminarmente che dall'ultima (44) e dalla (15) segue la

$$\left|\frac{\bar{\psi}(x_{20}) - \bar{\psi}(x_{10})}{2\eta^\alpha \bar{k}} - \frac{\psi(x_{20}) - \psi(x_{10})}{2\eta^\alpha k}\right| \leq \frac{1}{2\eta^\alpha k}\int_{x_{10}}^{x_{20}} |\bar{\psi}'(t) - \psi'(t)|\, dt \leq \delta \frac{\bar{\bar{k}}}{\bar{k}}\eta$$

si considerino, accanto alle $z_i^{(n)}$, le funzioni $\bar{z}_i^{(n)}$, approssimanti la $\bar{z}$ e le sue derivate, e costruite a partire da $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$.

Posto per abbreviare

$$\Delta_i^{(j)}(\xi, \eta) \equiv |\bar{z}_i^{(j)}(\xi, \eta) - z_i^{(j)}(\xi, \eta)|, \qquad i = 1, 2, 3;\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

dalle (16_n) e dalle (44), tenendo conto dell'ultima disuguaglianza scritta e delle tre ultime (2), avremo per $j = 1, 2, \ldots$

$$(45_j) \quad \begin{cases} \Delta_1^{(j)}(\xi, \eta) \leq \delta + \displaystyle\int_0^\eta \Delta_3^{(j-1)}(\xi, \eta)dy \\[2ex] \Delta_2^{(j)}(\xi, \eta) \leq \delta \dfrac{\bar{\bar{k}}}{\bar{k}}\eta + \dfrac{1}{2\eta^\alpha k}\displaystyle\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2}\Delta_2^{(j-1)}(x_1, y) - \frac{d^2x_2}{dy^2}\Delta_2^{(j-1)}(x_1, y) \right\} dy + \\[2ex] \qquad + \dfrac{F}{2\bar{k}\eta^\alpha}\displaystyle\int_0^\eta \left\{ \sum_1^3{}_i \Delta_i^{(j-1)}(x_1, y) + \sum_1^3{}_i \Delta_i^{(j-1)}(x_2, y) \right\} dy \\[2ex] \Delta_3^{(j)}(\xi, \eta) \leq \delta + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\eta \left\{ \frac{d^2x_1}{dy^2}\Delta_2^{(j-1)}(x_1, y) - \frac{d^2x_2}{dy^2}\Delta_3^{(j-1)}(x_2, y) \right\} dy + \\[2ex] \qquad + \dfrac{F}{2}\displaystyle\int_0^\eta \left\{ \sum_1^3{}_i \Delta_i^{(j-1)}(x_1, y) + \sum_1^3{}_i \Delta_i^{(j-1)}(x_2, y) \right\} dy. \end{cases}$$

Sia $y_1 < 1$, come si può sempre pensare, e si ponga

$$\bar{\alpha} = \min(\alpha, 1 - \alpha);$$

se (ξ, η) è un qualunque punto di T_{y_1} avremo

$$(46) \qquad 0 \leq \eta \leq \eta^\alpha, \qquad \eta^{1-\alpha} \leq \eta^{\bar{\alpha}} \leq y_1^{\bar{\alpha}} < 1.$$

Sia poi $\beta_{\bar\alpha}$ il numero definito dalla (10) per $s = \bar\alpha$, cioè

$$\beta_{\bar\alpha} = 1 - \frac{\bar\alpha}{\bar\alpha + \alpha}\,\frac{\bar k}{\bar{\bar k}}$$

e sia μ definito da

$$\mu = \max\left(\frac{1}{1-\beta_{\bar\alpha}}\,\frac{\bar{\bar k}+3F}{\bar k},\ \bar{\bar k}+3F\right); \tag{47}$$

necessariamente sarà anche

$$1 < \mu. \tag{47'}$$

Proveremo allora, per induzione, che valgono le

$$\Delta_i^{(j)}(\xi,\ \eta) \leq \delta\cdot\sum_{0}^{j}{}_{\nu}\,(\mu\eta^{\bar\alpha})^{\nu}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{48_j}$$

per ogni (ξ, η) di T_{y_1} e per $j = 0, 1, 2, \dots$. Per $j = 0$ abbiamo le prime tre (44), vere per ipotesi. per $j = 1$ la validità delle (48_j) segue immediatamente dalle (45_j), con $j = 1$, avendo presenti (46) e (47). Supposto di aver verificato le (48_j) per $j \leq r$, proviamone la validità per $j = r + 1$.

Dalla prima (45_j), per $j = r + 1$, si ha

$$\Delta_1^{(r+1)}(\xi,\ \eta) \leq \delta\left[1 + \eta + \frac{\mu}{1+\bar\alpha}\,\eta^{\bar\alpha+1} + \frac{\mu^2}{1+2\bar\alpha}\,\eta^{2\bar\alpha+1} + \dots + \frac{\mu^r}{1+r\bar\alpha}\,\eta^{r\bar\alpha+1}\right]$$

e di qui, per le (46), (47'), segue subito la prima (48_j), con $j = r + 1$.

Dalla seconda (45_j), per $j = r + 1$, ricordando che per la (12) è

$$\beta_{r\bar\alpha} \leq \beta_{\bar\alpha} \qquad r = 1,\ 2,\ \dots$$

si ha

$$\Delta_2^{(r+1)}(\xi,\ \eta) \leq \delta\frac{\bar{\bar k}}{\bar k}\,\eta + \delta[1 + \mu\beta_{\bar\alpha}\eta^{\bar\alpha} + \mu^2\beta_{\bar\alpha}\eta^{2\bar\alpha} + \dots + \mu^r\beta_{\bar\alpha}\eta^{r\bar\alpha}] +$$

$$+ \delta\frac{3F}{\bar k}\left[\eta^{1-\alpha} + \frac{\mu}{1+\bar\alpha}\,\eta^{\bar\alpha+1-\alpha} + \dots + \frac{\mu^{r-1}}{1+(r-1)\bar\alpha}\,\eta^{(r-1)\bar\alpha+1-\alpha} + \frac{\mu^r}{1+r\bar\alpha}\,\eta^{r\bar\alpha+1-\alpha}\right] \leq$$

$$\leq \delta\left\{1 + \left[\frac{\bar{\bar k}+3F}{\bar k} + \mu\beta_{\bar\alpha}\right]\eta^{\bar\alpha} + \left[\frac{3F}{\bar k} + \mu\beta_{\bar\alpha}\right][\mu\eta^{2\bar\alpha} + \dots + \mu^{r-1}\eta^{r\bar\alpha}] + \frac{3F}{\bar k}\,\mu^r\eta^{(r+1)\bar\alpha}\right\}$$

e di qui, per la (47), segue subito la seconda delle (48_j), $j = r + 1$.

Infine dalla terza (45_j), per $j = r + 1$, si ha

$$\Delta_3^{(r+1)}(\xi,\ \eta) \leq \delta + \delta\bar{\bar k}[\eta^{\alpha} + \mu\eta^{\bar\alpha+\alpha} + \mu^2\eta^{2\bar\alpha+\alpha} + \dots + \mu^r\eta^{r\bar\alpha+\alpha}] +$$

$$+ 3F\delta\left[\eta + \frac{\mu}{1+\bar\alpha}\,\eta^{\bar\alpha+1} + \frac{\mu^2}{1+2\bar\alpha}\,\eta^{2\bar\alpha+1} + \dots + \frac{\mu^r}{1+r\bar\alpha}\,\eta^{r\bar\alpha+1}\right] \leq$$

$$\leq \delta\,\{1 + [\bar{\bar k} + 3F][\eta^{\bar\alpha} + \mu\eta^{2\bar\alpha} + \dots + \mu^r\eta^{(r+1)\bar\alpha}]\}$$

da cui, ancora per la 47), segue la terza ed ultima delle (48_j), $i = r + 1$.

Stabilite così le (48_j) per ogni j, facciamo tendere j a $+\infty$; avremo

$$\Delta_i^{(\infty)}(\xi, \eta) = | \bar{z}_i^{(\infty)}(\xi, \eta) - z_i^{(\infty)}(\xi, \eta) | \leq \delta \sum_0^\infty{}_\nu (\mu y_1^{\bar{\alpha}})^\nu, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ora μ è per definizione una costante assoluta, legata cioè unicamente ai dati α, k, f che restano immutati nel nostro ragionamento; perciò è lecito supporre in partenza che y_1 sia tale da aversi

$$\mu y_1^{\bar{\alpha}} = \lambda < 1 \tag{49}$$

e quindi

$$| \bar{z}_i^{(\infty)}(\xi, \eta) - z_i^{(\infty)}(\xi, \eta) | \leq \frac{\delta}{1 - \lambda}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Scelto $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, basterà dunque che le φ, ψ, $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ e le loro derivate prime soddisfino le (44) con

$$0 < \delta < \varepsilon(1 - \lambda)$$

perchè in T_{y_1} si abbiano le

$$| \bar{z}_i^{(\infty)}(\xi, \eta) - z_i^{(\infty)}(\xi, \eta) | < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le quali provano la dipendenza continua della soluzione (e sue derivate prime) dai dati iniziali (e loro derivate prime); con ciò l'enunciato C) della Introduzione resta provato, con la restrizione, non sostanziale, della (49).

9. Alcune osservazioni.

OSSERVAZIONE I. - Il procedimento seguito per provare l'esistenza della soluzione z mostra che il valore di questa in un punto (ξ, η) dipende soltanto dai valori che i dati assumono nell'intervallo di estremi $x_1(0\,;\ \xi, \eta)$, $x_2(0\,;\ \xi, \eta)$ e non dai valori assunti fuori da tale intervallo, non diversamente da quanto accade per la soluzione del problema di CAUCHY nel caso iperbolico [6].

OSSERVAZIONE II. - Se $k(x, y)$ ammette derivate terze continue (ipotesi i') la soluzione z della (B) corrispondente ai dati

$$z(x, y_1) = z_1^{(\infty)}(x, y_1), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=y_1} = z_3^{(\infty)}(x, y_1)$$

---

[6] Interessa, in vista di un'applicazione che verrà fatta altrove, trarre di qui una conseguenza. Se $k(x, y)$ dipende effettivamente dalla sola y, le curve caratteristiche di un sistema si ottengono da una qualunque di esse con una traslazione nella direzione dell'asse x. Se esiste in tutto il semipiano $y \geq 0$ la soluzione corrispondente a due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ periodiche di periodo λ, tale soluzione risulterà anch'essa periodica, rispetto alla variabile x, di periodo λ.

esiste ed è unica nella regione $T_{y_0} - T_{y_1}$ (7) ed è subito visto che la funzione uguale a $z_1^{(\infty)}$ in T_{y_1} ed uguale a z in $T_{y_0} - T_{y_1}$ è in T_{y_0} la soluzione della (B) con i dati (C), regolare per $y = 0$. Basta notare che da $z = z_1^{(\infty)}$ per $y = y_1$ segue $\partial z/\partial x = \partial z_1^{(\infty)}/\partial x$ e $\partial^2 z/\partial x^2 = \partial^2 z_1^{(\infty)}/\partial x^2$ e da $\partial z/\partial y = z_3^{(\infty)} = \partial z_1/\partial y$ segue $\partial^2 z/\partial y \partial x = \partial^2 z_1/\partial y \partial x$ e infine, per la (B), $\partial^2 z/\partial y^2 = \partial^2 z_1/\partial y^2$.

Tale soluzione dipenderà con continuità dai dati iniziali *in tutto* T_{y_0} poichè variando « di poco » φ, ψ anche le $z_i^{(\infty)}(x, y_1)$, $(i = 1, 2, 3)$ variano di poco a nostro arbitrio (come si è provato al n. prec.) e quindi ancora di poco quanto si vuole varierà la z in $T_{y_0} - T_{y_1}$.

OSSERVAZIONE III. - In merito alla unicità della soluzione può avere qualche interesse rilevare che la sola continuità della f non è, in generale, sufficiente ad assicurarla. Ad esempio l'equazione

$$y^{2\alpha} k^2(x, y) z_{xx} - z_{yy} + |z_y|^{1/2} = 0, \qquad 0 \leq \alpha$$

con i dati iniziali

$$z(x, 0) \equiv z_y(x, 0) \equiv 0,$$

ammette le infinite soluzioni rappresentate da

$$z(x, y) = \frac{1}{12}(y - \lambda)^3 \qquad \text{per } y \geq \lambda, \ x \text{ reale}$$

$$z(x, y) = 0 \qquad \text{per } 0 \leq y \leq \lambda, \ x \text{ reale}$$

dove λ è un qualunque numero reale (8).

OSSERVAZIONE IV. - In [1] si dà un esempio, molto interessante, dal quale risulta che la dipendenza continua della soluzione dei dati iniziali può mancare se $\alpha > 1$. A questo proposito riteniamo opportuno di contrapporre a questo altri casi in cui la dipendenza suddetta si mantiene continua, pur risultando « multipla » la curva portante i dati: si vedano [9], [4], [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] I. S. BERESIN, *Sul problema di Cauchy per l'equazione lineare del 2° ordine con i dati iniziali sulla linea parabolica* (russo), « Mat, Sbornik », 24, (66): , (1949), pp. 301-320.

[2] M. CIBRARIO, *Sui teoremi di esistenza e di unicità relativi ad alcune equazioni differenziali a derivate parziali*, Nota II, « Rend. Lincei », (6), 13, (1931_1), pp. 115-118.

[3] M. CIBRARIO, *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto,* « Rend. Ist. Lombardo », (2), 65, (1932), pp. 889-906.

[4] M. CIBRARIO, *Sull'analiticità degli integrali di alcune equazioni del primo tipo misto,* « Ann. di Mat. pura appl. », (4), 19, (1940), pp. 51-79; § 5.

(7) Cfr. [2].

(8) Si cfr. questo es. con quello analogo di M. MÜLLER in « Jahr. der. D. M. V. », 37 (1928), p. 46, relativo all'equazione ordinaria $y' = f(x, y)$.

[5] R. CONTI, ***Sul problema di Cauchy per le equazioni di tipo misto*** $y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0$, « Ann. S. N. S. Pisa », (3), 2, (1948), pp. 105-130 (pubbl. 1950).

[6] R. COURANT - P. LAX, ***On nonlinear partial differential equations with two independent variables***, « Comm. pure and appl. Math. », 2, (1949), pp. 255-273.

[7] F. I. FRANKL, ***Sul problema di Cauchy per le equazioni a derivate parziali di tipo ellittico-iperbolico con dati iniziali sulla linea parabolica*** (russo), « Izvestija Ak. Nauk SSSR », Serija Mat., 8, (1944), pp. 195-224.

[8] O. PERRON, ***Ueber Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungensysteme im reellen Gebiet***, « Math. Zeitschrift », 27, (1927), p. 549.

[9] F. TRICOMI, ***Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto***, « Mem. Lincei », (5), 14, (1923), pp. 133-247, Cap. II, §§ 1, 2, 3.