Su una classe di superficie-modello di una trasformazione birazionale fra due piani.

Memoria di MARIO BALDASSARRI (a Padova).

Sunto. - *Si dimostra che ogni* F_0^{2n+2}, *non rigata, a residuo di genere nullo dello* S_{n+4}, *con* $n \geq 1$, *contiene un numero finito* N *di coppie di reti omaloidiche di curve razionali normali d'ordine* $n+1$, *mutuamente residue rispetto il sistema delle sezioni iperpiane* $|C|$ *di* F_0. *Gli spazii* S_{n+1} *delle curve di una coppia di reti associate empiono una stessa forma cubica generabile con tre stelle omografiche di iperpiani.*

Ogni F_0^{2n+2} *di quel tipo può generarsi proiettivamente mediante* $(n+1)$*stelle, tre di spazii* S_{n+1} *e le altre di iperpiani, riferite proiettivamente con opportune condizioni. In generale quelle stelle generano una superficie* Φ *d'ordine* $2n+2+\binom{n-1}{2}$, *normale nello* S_{n+4}. *La* Φ *si riduce ad una superficie del tipo* F_0, *quando nella varietà generata compaiono sistemi di spazi opportuni, associati ai punti base delle reti omaloidiche di curve piane.*

Tale generazione proiettiva consente di giungere ad una rappresentazione analitica delle superficie del tipo Φ *ed* F_0. *Tenendo infine conto che le* F_0^{2n+2} *risultano dei modelli di trasformazioni birazionali piane* T^n *d'ordine* n, *conseguono intimi legami e deduzioni, che permettono di giungere fra l'altro ad una rappresentazione analitica delle* T^n. *Si segnalano infine alcune osservazioni che l'autore pensa possano contribuire a facilitare lo studio delle* T^n.

Questo lavoro, cui dettero origine alcune osservazioni del prof. BENIAMINO SEGRE, vuol essere una indagine intesa all'approfondimento dello studio degli enti iperspaziali che s'incontrano nella rappresentazione di una trasformazione birazionale piana d'ordine n, T^n, che L. GODEAUX (1), seguendo una tipica idea della geometria algebrica, ha considerato tempo fà nell'intento di applicarla ad una rapida riscoperta delle relazioni fondamentali di CLEBSCH.

Egli rappresenta le coppie di punti omologhi in una T^n fra due piani coi punti di una superficie razionale F^{2n+2} dello S_{n+4}, che risulta quivi normale, a curve sezioni di genere $p = n - 1$. La F si ottiene, nel modo più naturale, facendo l immagine proiettiva del sistema somma delle rette di un piano con le curve di una rete omaloidica di quel piano.

Tali F si presentano dunque come superficie razionali il cui sistema di sezioni iperpiane è somma di due sistemi lineari di genere zero. In un mio lavoro di contemporanea pubblicazione (2) dimostro che tutte le F^m dello

(1) Il primo lavoro in merito di L. GODEAUX è: *Sur la représentation des transf.*, etc., « Bull. de la Société des Sciences de Liège », 1912, pp. 268-271. Ulteriori riferimenti ad altri lavori saranno fatti di volta in volta.

(2) *Ricerche sulle* F^n *di* S_{n-p+1} *con* $n > 2p$, « Rendic. Sem. Mat. della Università di Padova », T. XX, 1951. In questo lavoro si troveranno anche condizioni necessarie e sufficienti perchè una F^n di S_{n-p+1} con $n > 2p$ sia a residuo di genere zero.

S_{m-p+1} non rigate con $m > 2p$ hanno il sistema delle sezioni iperpiane somma di un sistema lineare di genere zero, e di un sistema residuo, cosicchè le superficie in esame si presentano appunto come superficie di residuo a genere zero. Indicheremo sempre tali superficie col simbolo F_0.

Da qui parte la presente ricerca che prima di tutto si svolge a garantire l'invertibilità della rappresentazione. Dimostro perciò che viceversa *ogni* F_0^{2n+2} *dello* S_{n+4}, *con* $n > 1$, *contiene sempre almeno una coppia di reti di curve razionali e normali di ordine* $n+1$, *mutuamente residue rispetto il sistema* $|C|$ *delle sezioni iperpiane.*

Proiettando dallo S_{n+1} di una di quelle curve la F_0 su un piano, una rete si proietta nella rete delle rette di quel piano, e l'altra in una certa rete omaloidica

Pertanto ogni F_0 di quel tipo può viceversa pensarsi come immagine di certe trasformazioni birazionali che restano naturalmente individuate a meno di omografie. Però si rileva la osservazione che non la F_0 è un effettivo modello, ma, in generale, la F_0 rispetto una sua certa fissata coppia di reti, dubbio che però più avanti viene rimosso.

Gli spazi S_{n+1} di appartenenza delle curve di due reti residue empiono *una unica forma* che studio e che risulta essere *una forma cubica* Σ^3_{n+3} *con una varietà sestica doppia ad* n *dimensioni ed a curve sezioni ellittiche* (3). Naturalmente esistono tante Σ^3_{n+3} in tale situazione, che per brevità chiamo *congiunte ad* F_0, quante coppie di reti esistono su F_0. La Σ^3_{n+3} risulta il tipo ben noto di forma cubica generabile proiettivamente *con tre stelle omografiche di iperpiani.*

A tal punto si presentava essenziale ricercare se viceversa una Σ^3_{n+3} di quel tipo proiettivo contenesse sempre delle F_0 ad essa congiunte.

La risposta affermativa che ottengo è ricca di conseguenze. Dimostro infatti anzitutto che *una* F_0^{2n+2} *del tipo in esame può sempre essere generata da* $n+1$ *stelle proiettive*, di cui tre di S_{n+2} e le altre d'iperpiani. La generazione indicata non si presenta tuttavia senz'altro invertibile.

Infatti $n+1$ stelle di quel tipo scelte e legate genericamente generano *in generale* una superficie Φ d'ordine $2n+2+\binom{n-1}{2}$, a curve sezioni di genere $p = n-1+\binom{n-1}{2}$. Tuttavia è possibile assegnare le condizioni cui devono sottostare le stelle e le omografie perchè la Φ si riduca ad una F_0, ed esse, nel modo più semplice ed elegante, si trovano consistere *nello staccarsi dalla varietà generata di una serie di spazii* Ω_i le cui dimensioni costituiscano

(3) Il prof. BENIAMINO SEGRE propose, in seguito ad una conferenza tenuta da L. GODEAUX nel Seminario della Università di Bologna, lo studio di tali varietà di spazi. È a tale osservazione del prof. SEGRE, che qui ringrazio, che risale lo spunto iniziale di questo lavoro.

un sistema possibile di caratteristiche per una T^n. Ed il legame è assai intimo, perchè gli Ω_i risultano appunto essere gli spazi ambiente delle curve razionali normali ω_i *(fondamentali)* immagini sulla F_0 degli intorni dei punti fondamentali della T^n.

A sua volta si studiano poi *delle condizioni sufficienti* perchè ciò avvenga e queste vengono sfruttate a fornire *una rappresentazione analitica delle superficie considerate*, e quindi, in definitiva, *delle* T^n *piane*, la quale, nella sua speciale forma, costituisce di per se un interessante risultato.

Consegue da ciò che ogni forma Σ^3_{n+3} del tipo generabile con stelle omografiche d'iperpiani contiene una infinità di superficie F_0 d'ordine $2n+2$ ed anzi ogni modello proiettivo della Σ ne contiene certo sistemi *proiettivamente distinti.*

Accenno quindi, senza alcuna pretesa di approfondimento, ad una questione molto interessante. Si vede che una F contiene per $n>2$ un numero di coppie di reti associate *maggiore di uno*, il chè fornisce già una conoscenza utile nel problema della classificazione delle T^n; esso si può infatti interpretare nel senso che le reti omaloidiche delle T^n possono sempre ottenersi sommando due opportune reti omaloidiche di gradi r ed s con r, ad esempio, maggiore di uno e $r+s=n+1$, disposte relativamente in modo di avere grado relativo n, e quindi sottraendo dal sistema trovato la rete delle rette del piano. Tutto ciò, come si fà notare, riflette questioni aritmetiche sulle caratteristiche che non sembrano dimostrabili in modo semplice e diretto.

Il numero N di coppie di reti costituisce molto probabilmente una funzione alquanto complessa delle caratteristiche, ed offre le solite difficoltà di determinazione di tutti i parametri numerici delle T^n: facili a determinarsi con semplici considerazioni nel caso singolo, quasi impossibili in generale. Tuttavia diamo in proposito alcune osservazioni, notando che il problema resta come uno dei più interessanti perchè risulta anche collegato alla considerazione delle trasformazioni proiettive della F_0 in sè.

Più che altro, concludendo, qui si sono volute tentare alcune vie e compiere alcune esplorazioni. L'arduo campo della casistica delle T^n ne resta certo avvantaggiato: ad esempio si pensi che il problema della classificazione delle T^n resta così ricondotto a quello della classificazione delle $(n+1)$-ple di stelle generanti, nelle condizioni che abbiamo già detto. Si tratta certo ancora solo di indirizzi che richiederebbero un più concreto quadro, nonchè una schematizzazione formale che ne rendesse agile l'applicazione, per potersi dire veramente utili. Tuttavia in un campo così povero di strumenti generali e in cui il caso particolare rifiuta legami e mutamenti legalizzabili rispetto i casi anche prossimi, alcune prospettive uniformi valide a trasformare un ostico problema di carattere aritmetico in una più agevole gamma di problemi a carattere continuo, possono ritenersi, se pure complesse talvolta, pur sempre utili. Ed è in tale spirito che questo lavoro è stato pensato.

1. — Sia T^n una trasformazione birazionale fra due piani π e π', e siano $|\rho^n|$ e $|\rho'^n|$ le due reti omaloidiche associate alla T^n.

Esponiamo dapprima brevemente la rappresentazione iperspaziale della T^n, considerata da L. GODEAUX [4].

Si consideri, ad esempio sul piano π, il sistema lineare completo somma della rete $|\rho^n|$ e della rete delle rette del piano. Il sistema che si ottiene risulta formato di curve d'ordine $n+1$, genere $p=n-1$ ed ha dimensione $n+4$ e grado $2n+2$. La sua immagine proiettiva in uno spazio S_{n+4} risulta quindi una superficie F d'ordine $2n+2$ a curve sezioni di genere $n-1$.

Analogamente si può operare sul piano π', ottenendo, se si vuole nello stesso S_{n+4}, una superficie F' che risulta omografica alla F: è ora possibile scegliendo opportunamente i parametri arbitrari delle omografie che intervengono nel processo considerato far si che F coincida con F'.

Da ciò consegue che una trasformazione T^n pensata come insieme delle sue ∞^2 coppie di elementi associati può sempre porsi *in corrispondenza birazionale coi punti di una superficie* F^{2n+2} *normale in uno spazio* S_{n+2}, *ivi razionale ed a curve sezioni di genere* $p=n-1$.

2. — Sin qui giunge la rappresentazione di L. GODEAUX, che egli poi adopera per ricavare le relazioni che legano le caratteristiche di una T^n.

Non resta però garantito, e del resto neppure analizzato, sino a qual punto la rappresentazione considerata costituisca un modello, cioè quali siano, viceversa, i caratteri che deve avere una superficie F dello S_{n+4} per poter essere considerata come rappresentativa di una T^n.

Noi vogliamo approfondire come prima cosa tale ricerca e, in questo scopo, iniziamo col dimostrare il teorema:

TEOREMA 1. - *Ogni superficie* F_0, *a residuo di genere zero, d'ordine* $2n+2$, *normale in uno* S_{n+4}, *contiene sempre almeno una coppia di reti di curve* C' *e* C'' *razionali normali d'ordine* $n+1$, *residue l'una dell'altra rispetto il sistema delle sezioni iperpiane* $|C|$ *della* F_0.

Notiamo subito che se si considera il sistema lineare delle sezioni iperpiane C della superficie F_0, questo risulta di grado $2n+2$, e le curve C risultano di genere p, con $p=n-1$ poichè la deficienza della serie caratteristica g_{2n+2}^{n+3} del sistema $|C|$, serie che non è certo speciale, è nulla.

Pertanto per un ben noto criterio la razionalità della F_0 (ovvero la sua riferibilità ad una rigata), discende già immediatamente.

Si proceda ad imporre successivamente n punti doppi alle curve C e si, considerino i successivi sistemi algebrici $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ che così si ottengono. Se Γ_i ad esempio risultasse riducibile come sistema, intenderemo che Γ_i indichi una sua componente irriducibile di dimensione massima.

---

(4) L. GODEAUX, *Une représentation des transf. birationelles*, etc., « Mém. Acad. royale de Belgique », T. XXIV, Fasc. 2, pp. 5-7.

Il sistema Γ_n cui si arriva, poichè la imposizione di n punti doppi comporta *al più* n condizioni, è un sistema di dimensione eguale almeno a quattro. Inoltre le curve C^* cui si arriva sono certamente curve spezzate in $\nu \geq 2$ componenti che diciamo $C_1^* C_2^* \dots C_\nu^*$, e ciò perchè il genere p è eguale ad $n-1$ [5].

Ciascuna C_i^* varierà in un certo sistema algebrico Σ_i, e poichè si può sempre pensare che due dei punti doppi imposti siano in due generici punti di F_0, due almeno di quei sistemi risulteranno ∞^2, dovendo esistere due certe componenti collegate in quei due punti.

Se fra le C_r^* se ne considerano due $\bar{C}_i^*$ e $\bar{C}_j^*$ con $i \neq j$ appartenenti ad una stessa C^* e si considerano le C_j^* prossime a quella $\bar{C}_j^*$, può essere che esse incontrino o no la $\bar{C}_i^*$. Nel secondo caso la $\bar{C}_i^*$ non sarebbe incontrata da nessuna C_j^*, e queste descriverebbero quindi una superficie non contenente la C_i^*, e perciò F_0 sarebbe spezzata. Dunque le C_j^* incontrano le C_i^*, e secondo un grado costante, pari al numero dei punti di collegamento che connettono la C_j^* con la C_i^*.

Si prendano allora due C^*, e si consideri il gruppo totale delle loro intersezioni pari a $2n+2$. Se con d_{ij} indichiamo i gradi relativi di una C_i^* con una C_j^* (in particolare di una C_i^* con una C_i^*), si ha, tenendo conto che $\Sigma\, d_{ij} \geq n$ [6]:

$$(C^*,\ C^*) = \Sigma\, d_{ii} + 2\, \Sigma\, d_{ij} = 2n + 2,$$

e quindi

$$\Sigma\, d_{ii} \leq 2.$$

Ora, dovendo, come si è detto, almeno due C_i^* e C_j^*, descrivere sistemi almeno ∞^2, distinti o no, bisogna che questi due sistemi abbiano almeno grado uno, a meno che uno di essi sia composto con le curve di un sistema ∞^1 il che per una F_0 è da escludersi. Pertanto, ciò escluso, quei gradi devono essere proprio uno, e quindi i due sistemi ∞^2 risultano due reti (omaloidiche) di curve razionali, e come conseguenza si ha che $\nu = 2$ perchè la somma delle dimensioni deve essere eguale a quattro.

Quindi, concludendo, la superficie F_0 contiene almeno *un* sistema ∞^4 di sezioni iperpiane spezzate in due componenti razionali C' e C''. Queste sezioni risultano, in definitiva, quelle eseguite con gli iperpiani n-tangenti la superficie F_0, che, come corollario, risultano effettivamente ∞^4 e non più.

Si noti che avendo sempre supposto di operare su componenti Γ_i irriducibili è ovvio che in generale potranno presentarsi più coppie del tipo delle

(5) Le proprietà (in piccolo) dei sistemi algebrici contenenti curve spezzate, sono state da me approfondite nella nota: *Sui sistemi algebrici di curve*, etc., « Rendic. Sem. Mat. della Univ. di Padova », Vol. XIX, 1950, p. 396.

(6) Questa relazione è vera pel fatto che la F_0 è a residuo di genere zero. Altrimenti essa può non essere verificata. Si confronti il lavoro citato in (2).

reti C' e C'', residue l'una dell'altra rispetto il sistema delle sezioni iperpiane. Inoltre è immediato che dovendo ad esempio per una C' passare gli ∞^2 (e non più) iperpiani seganti le C'', essa deve giacere in un S'_{n+1}, cioè le curve C' e C'' sono **razionali** e **normali** e d'ordine $n+1$ (7).

Pertanto la F_0 possiede due reti omaloidiche di curve razionali e normali di ordine $n+1$, di grado relativo n. Naturalmente esse potranno in generale presentarsi con altre coppie, dello stesso tipo, entro differenti componenti irriducibili del sistema Σ.

Le due reti $|C'|$ e $|C''|$ hanno grado relativo n. Si consideri allora una certa C' e sia α' il suo spazio e π' un piano opposto ad α'. Per proiezione dallo spazio α' la superficie F_0 si rappresenta biunivocamente sul piano π'. Alle due reti $|C'|$ e $|C''|$ vengono a corrispondere su π' rispettivamente una rete omaloidica $|\rho'^n|$ di curve d'ordine n e la rete delle rette. Se si fissa invece una curva C'' ed è α'' il suo spazio ambiente e da α'' si proietta la F_0 su un piano opposto π'', la F_0 si rappresenta ancora biunivocamente su π'' e le reti $|C''|$ e $|C'|$ si rappresentano rispettivamente su una rete omaloidica di curve d'ordine n $|\rho'^n|$ e nella rete delle rette. Se si considerano come corrispondenti due punti P' e P'' di π' e π'' quando sono proiezioni di uno stesso punto P della F, si ottiene una corrispondenza birazionale fra π' e π'', immagine della identità sulla superficie F_0, tale che se P' descrive una retta α' il punto P descrive una C'' e quindi il punto P'' una curva ρ''^n.

Pertanto si tratta di una trasformazione T^n in cui le reti $|\rho'^n|$ e $|\rho''^n|$ sono le due reti omaloidiche *coniugate*. Dunque *una* F_0^{2n+2}, *non rigata, dello* S_{n+4} *individua, a meno di omografie, una trasformazione* T^n, *quando, qualora la* F_0 *possieda più coppie di reti associate, si stabilisca di riferirsi ad una di esse.*

Si noti che può essere che due differenti coppie di reti associate siano proiettivamente equivalenti, ed in tal caso si potrà dire che la F_0 stessa è un modello della T^n, ma, in mancanza di tale conoscenza, è necessario riferirsi alla singola coppia di reti, e non alla F_0 soltanto.

---

(7) Si noti che la dimostrazione eseguita conduce alla conseguenza che gli n punti di contatto degli iperpiani n-tangenti F_0 devono giacere *in uno spazio* S_{n-1} *e non di dimensione minore.* Tale proprietà, viceversa, ammessa, fà immediatamente conseguire il teorema perchè allora se r ed s sono gli ordini delle componenti della curva spezzata e ρ e σ le dimensioni dei loro spazii ambiente, si deve avere: $r+s=\rho+\sigma=2n+2$, da cui necessamente: $\rho=r$, $\sigma=s$, e quindi quelle due curve sono razionali e normali. Si giunge così, tenendo conto che in tal caso la serie segata dalle residue di una C^r (o una C^s) su una C è non speciale, a due sistemi lineari residui rispetto $|C|$ di curve razionali normali. Proiettando allora dallo spazio S_r di una C^r (con $r \leq n+1$) su uno spazio opposto la F, si trova quivi una F_0' a curve sezioni razionali, e ne consegue con semplici analisi che la F contiene sempre almeno due reti di curve razionali normali d'ordine $(n+1)$.

3. — Passiamo ora ad occuparci di certe varietà connesse con le superficie-modello considerate.

Sia dunque F_0 una superficie d'ordine $2n+2$, non rigata, normale nello S_{n+4} e siano: $|C'|$ e $|C''|$ due reti di curve razionali d'ordine $n+1$ associate nel modo noto in F_0, che per brevità di discorso diremo talora prima e seconda rete.

Le C' e le C'' giacciono in spazi ad $n+1$ dimensioni, rispettivamente S'_{n+1} ed S''_{n+1}, che si distribuiscono in due schiere doppiamente infinite.

Consideriamo ad esempio gli S'_{n+1}. Essi empiono entro lo S_{n+4} una certa varietà Σ che dev'essere una forma. Infatti altrimenti per un suo punto generico passerebbero infiniti spazi S_{n-1}, e quindi gli S'_{n+1} dovrebbero segare un certo $\bar{S}'_{n+1}$ secondo degli S_{n-1} perchè una doppia infinità di questi dovrebbe riempire lo $\bar{S}'_{n+1}$. Ma allora due S'_{n+1} starebbero entro uno stesso S_{n+3}, che dovrebbe contenere anche una C'', e quindi, perchè le due C' esaurirebbero la intersezione di quello S_{n+3} con la F_0, una di quelle C' dovrebbe coincidere con quella C'', e ciò è assurdo perchè le due reti sono prive di curve comuni, *quando sia* $n > 1$ *come d'ora in poi supporremo* sempre (8).

Inoltre uno S'_{n+1} ed uno S_{n+1} si tagliano in spazi S_{n-1}, e quindi ogni S''_{n+1} giace entro la varietà Σ, *che risulta quindi una forma luogo di due schiere doppiamente infinite di spazii* S_{n+1} *d'indice finito.*

4. — Vediamo ora di che tipo risulti la varietà. Seghiamola perciò con uno S_4 generico dello S_{n+4}. Si trova in questo una Σ_3^* contenente almeno due sistemi algebricamente distinti d'indice finito di rette. La Σ_3^* è quindi una forma pluririgata (9) dello S_4. Pertanto per un teorema (10) che caratterizza tali forme o la Σ^* è una pluririgata impropria, cioè contiene un sistema irriducibile d'indice due di retto, il che nel nostro caso non è, o la Σ^* è a curve sezioni ellittiche, che è dunque il solo caso possibile.

D'altra parte la Σ non può possedere una V_{n+2} doppia, il che si vede ripetendo un ragionamento fatto poco sopra, e quindi la Σ_3^* non possiede una superficie doppia. Ne scende che la Σ_3^* e quindi la Σ deve essere una una forma cubica.

Il tipo di Σ_3^{*3} in esame è il ben noto tipo contenente due sistemi di rette d'indice uno, ed un sistema residuo d'indice quattro rispetto il sistema totale d'indice sei che deve essere posseduto da una forma cubica dello S_4. Tale Σ_3^{*3}

(8) Per $n=1$, si ottiene la superficie di VERONESE la cui varietà Σ associata è ben nota. Il caso è relativamente eccezionale, perchè in tal caso, e solo in questo, le due reti $|C'|$ e $|C''|$ coincidono in una rete unica.

(9) M. BALDASSARRI, *Le varietà pluririgate a tre dimensioni*, «Rendic. Sem. Mat. della Univ. di Padova», Vol. XIX, 1950, p. 172.

(10) Nota citata sopra, p. 340, (Aggiunta...).

contiene, com'è noto, sei punti doppi. Ne deriva che la Σ contiene una varietà del sesto ordine e dimensione n, Δ_n^6, doppia per essa.

Si seghi ora la Σ con uno S_5 generico. Si trova qui una forma cubica, studiata da E. VENERONI, luogo di due schiere di piani trisecanti secondo certe g_3^2 una sestica, doppia per la forma, che deve essere ellittica [11]; quindi la varietà Δ_n^6 è a curve sezioni ellittiche.

Si sa, d'altra parte, dalla classificazione delle varietà a curve sezioni ellittiche [12] che le Δ_n^6 di tale tipo con $n > 4$ sono necessariamente coni aventi uno S_{n-5} come vertice, e quindi per $n > 4$ la Σ stessa risulta un cono cubico con quel vertice, ed essa si ricava dalla Σ_7^3 di S_8 per proiezione da uno S_{n-5} esterno.

Possiamo dunque concludere col teorema:

TEOREMA 2. - *Gli spazii* S'_{n+1} *ed* S''_{n+1} *di due reti associate di una* F_0^{2n+2} *non rigata dello* S_{n+4} *empiono una forma cubica* Σ_{n+3} *che contiene una* Δ_n^6 *doppia a curve sezioni ellittiche. Per* $n > 4$ *la forma* Σ *è un cono avente per vertice almeno uno* S_{n-5}.

5. — Quanto abbiamo fin' ora trovato rapidamente può essere dimostrato per altra via che qui esponiamo per gli interessanti sviluppi che essa permette.

Sia F_0 una superficie dello stesso tipo e $|C'|$ e $|C''|$ le due solite reti.

Fissiamo tre certe C' ed i relativi S'_{n+1} che diciamo α'_1 α'_2 α'_3. Questi tre spazi sono centri di tre stelle Σ'_1, Σ'_2 e Σ'_3 d'iperpiani.

Diciamo allora corrispondenti tre iperpiani, uno di ciascuna stella, quando essi proiettano lo S''_{n+1} di una C''. Le corrispondenze così generate fra le stelle sono evidentemente univoche. Inoltre se ad esempio l'iperpiano per α'_1 descrive un fascio, variando quindi intorno ad uno S_{n+2}, che taglierà F_0 nell'unico punto base del fascio di C'' segate da quegli iperpiani su F_0 fuori di C', gli iperpiani corrispondenti varieranno intorno ai due S_{n+2} che congiungono α'_2 e α'_3 con quel punto, e quindi descriveranno ancora dei fasci. Si conclude che le corrispondenze così definite fra le tre stelle Σ'_i sono delle omografie, e quindi vale il teorema:

TEOREMA 3. - *Gli spazi* S''_{n+1} *di una schiera della forma* Σ *sono proiettati da tre* S'_{n+1} *dell'altra schiera secondo reti proiettive d'iperpiani.*

Consideriamo viceversa tre arbitrari S'_{n+1} di uno S_{n+4} α'_1, α'_2 ed α'_3, e leghiamo le relative stelle d'iperpiani con due omografie Ω_{12} e Ω_{23}. Risulta allora immediatamente da classiche osservazioni [13] che il luogo delle intersezioni di iperpiani corrispondenti è una forma cubica, luogo di due schiere di S_{n+1} in posizione mutua e simmetrica di spazi centro e spazi intersezione;

[11] E. VENERONI, *Su un fascio d'ipersuperficie cubiche dello* S_5, « Rendic. Ist. Lomb. », (2) 38 (1903), p. 523.

[12] G. SCORZA, *Le varietà a curve sezioni ellittiche*, « Annali Mat. », XV, p. 217.

[13] C. SEGRE, « Atti Accad. di Torino », T. 22, (1887), p. 791.

per un suo punto passa uno S_{n+1} di ciascuna schiera, due spazi di schiere diverse si segano secondo degli S_{n+1}, e due della stessa schiera secondo degli S_{n+2}.

È ancora press' a poco immediato osservare che i punti per i quali passano $\infty^1 S_{n+1}$ si hanno considerando l'intersezione degli S_{n+2} corrispondenti delle tre stelle.

Precisamente se si prende ad es. uno S'_{n+1}, e lo si considera come spazio centro, le altre due stelle di S_{n+2} segano dentro esso due stelle omografiche aventi due S_{n-2} dello S'_{n+1} come centri, che generano una V'^3_{n-1} luogo di spazi S_{n-3}, cosicchè associando due S' ed S'', lo S_{n+3} che li contiene taglia sulla varietà doppia una V^6_{n-1}, e quindi essa è appunto una Δ^6_n contenente due reti residue rispetto il sistema delle sezioni iperpiane di V^3_{n-1} cubiche.

Si noti che per un punto della Δ^6_n escono due schiere ∞^1 di S_{n+1} del primo e secondo sistema, che sono quelli dei due fasci di V'^3_{n-1} e V''^3_{n-1} passanti per quel punto, e che sono le due schiere di spazii di due coni cubici che empiono la intersezione della Σ^3_{n+3} con il cono quadrico polare del punto.

Possiamo pertanto enunciare il teorema:

TEOREMA 4. - *La* Σ^3_{n+3} *associata ad una coppia di reti di una* F_0^{2n+2} *non rigata dello* S_{n+4}, *può generarsi proiettivamente come luogo delle intersezioni degli iperpiani di tre stelle omografiche.*

6. — È senz'altro il caso di osservare che la Σ^3_{n+3} così caratterizzata non è detto debba essere di tipo generale entro la sua famiglia.

Di ciò ci si convince subito con le seguenti riflessioni. La superficie F_0 è rappresentata sul piano π mediante un sistema lineare che presenta gli stessi punti base multipli della rete omaloidica $|\rho^n|$.

Si consideri uno O^i di questi punti, supposto i-plo. Il suo intorno si trasforma su F_0 in una curva razionale e normale (cfr. n. 2) ω^i giacente entro un certo S_i.

Sulla ω^i, supposto che le C' corrispondano alle ρ^n, gli spazi S'_{n+1} della prima schiera segano una g_i^2, e pertanto gli S_{i-1} che essi segano sullo S_i devono passare tutti per uno spazio centro S_{i-3}, che è effettivo appena che $i \geq 3$, cioè appena che la $|\rho^n|$ possieda punti base almeno tripli. In tale situazione la Σ^3_{n+3} deve quindi acquistare il carattere di cono anche se $n < 5$.

Non solo ma lo S_i stesso risulta luogo delle intersezioni di due spazi S'_{n+1} variabili, e quindi lo S_i deve essere contenuto nella Δ^6_n. Se quindi $i = n - 1$. questa deve contenere uno S_{n-1}, mentre generalmente essa contiene solo spazi di dimensione $n - 2$, e quindi la Σ^3 è ancora di tipo speciale.

Uno spazio S_i del tipo considerato sopra verrà chiamato nel seguito *uno spazio fondamentale* e ad esso riserveremo il simbolo Ω_i. Si noti che per una data F_0^{2n+2} esistono due gruppi di spazi fondamentali in relazione alla simmetria delle reti $|C'|$ e $C''|$. Quando vi sarà bisogno di distinguere indicheremo con Ω_i' gli spazi fondamentali contenenti curve ω^i razionali i–secanti le C' e Ω''_k quelli in simmetrica situazione [14].

Avremo modo più avanti di precisare tale situazione, accontentandoci per il momento di queste osservazioni.

Ne segue che appunto secondo la dimensione massima δ del gruppo di spazi fondamentali la Σ^3 può essere di *tipi differenti.* Intanto se $\delta < n-1$ la Σ^3 è in generale uno S_{n-5} cono, ma se $\delta = n-1$ la Σ^3 diviene uno S_{n-4}–cono e per di più tale che dal suo S_{n-4} vertice esso proietta una varietà contenente due piani doppi.

È notevole che la Σ^3 non possa invece mai ulteriormente specializzarsi divenendo uno S_{n-3}–cono. In tal caso infatti la Δ_n^6 conterrebbe, in una stessa schiera, tre spazi Ω_{n-1} in corrispondenza ai quali si avrebbero tre ω^{n-1} e quindi tre punti multipli di molteplicità $n-1$ nella rete ρ^n il che è assurdo appena $n > 2$.

Così restano dunque precisati gli unici due tipi proiettivi di Σ che hanno interesse pel nostro argomento.

7. — È ora possibile fornire la rappresentazione analitica della Σ_{n+3}^3 che si ottiene, secondo usualissimi modi, dalla sua generazione proiettiva, che noi qui diamo soltanto per l'importanza che avranno nel seguito tali equazioni.

In linea del tutto generale si possono considerare nove forme lineari φ_{ik} nelle coordinate proiettive $x_0 x_1 \dots x_{n+4}$, ed in funzione di esse l'equazione di Σ si scrive subito sotto forma di determinante:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Converremo sempre che le: $\varphi_{l0} = \varphi_{l1} = \varphi_{l2} = 0$ siano le equazioni di un S', ed allora analogamente: $\varphi_{0m} = \varphi_{1m} = \varphi_{2m} = 0$, saranno le equazioni di un S''.

La varietà Δ_n^6, doppia per la Σ, viene immediatamente rappresentata dallo annullare i minori del secondo ordine di (1). Si trovano così quattro quadriche indipendenti la cui intersezione è appunto la Δ_n^6.

La generazione proiettiva della Δ_n^6 come luogo di spazi S_{n-2} può essere messa in evidenza dalle formule:

$$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = \varphi_{l0} : \varphi_{l1} : \varphi_{l2}, \qquad (l = 0,\ 1,\ 2) \tag{2}$$

dalle quali per eliminazione delle λ_i si trovano appunto le quattro quadriche per Δ_n^6.

---

(14) È ben noto che le singolarità base presentate da reti omaloidiche $|\rho^n|$ e $|\rho'^n|$ relative ad una stessa T^n fra due piani, sono in generale non le stesse, bensì coniugate. Lo stesso sarà dunque per gl'insiemi delle dimensioni dei due sistemi di spazii fondamentali. Cfr. ad es., H. HUDSON, *Cremona Transformations*, Cambridge, 1927, pp 18 e sg.

Le tre stelle proiettive di spazi S_{n+2} generanti Δ sono in tale caso le stelle:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_0\varphi_{l1} - \lambda_1\varphi_{l0} = 0 \\ \lambda_1\varphi_{l2} - \lambda_2\varphi_{l1} = 0 \end{aligned}\right. \qquad (l = 0,\ 1,\ 2) \tag{3}$$

Se le φ_{ik} sono scelte in modo generico la (1) rappresenta allora uno S_{n-5}-cono, il che, supposto $n \geq 5$, si rende manifesto scegliendo addirittura le φ_{ik} in modo che le equazioni $\varphi_{ik} = 0$ diano nove faccie della piramide fondamentale. La (1) assume allora la forma:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ x_6 & x_7 & x_8 \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

che mostra trattarsi appunto di un cono con vertice lo spazio $(A_9 A_{10} \dots A_{n+4})$ se A_i sono i vertici della piramide fondamentale.

Si può ora cercare come devono invece essere scelte le φ_{ik} affinchè la (1) risulti uno S_{n-4}-cono avente due spazi S_{n-1} direttori. Si osservi perciò che basterà scrivere l'equazione della Σ_6^3 di S_7 che si ottiene segando il cono con uno S_7 generico che possiamo supporre essere lo S_7: $x_8 = x_9 = \dots = x_{n+4} = 0$.

Basta in tale caso scrivere le φ_{ik} in modo che tre certi S_5 corrispondenti delle tre stelle Σ'_1 Σ'_2 Σ'_3 abbiano in comune un piano, ed è perfettamente ovvio che perciò basta scrivere la (1) nella forma:

$$\begin{vmatrix} x_0 + x_5 + \psi_{00} & x_0 + x_6 + \psi_{01} & x_0 + x_7 + \psi_{02} \\ x_1 + x_0 + \psi_{10} & x_1 + x_6 + \psi_{11} & x_1 + x_7 + \psi_{12} \\ x_2 + x_5 + \psi_{20} & x_2 + x_6 + \psi_{21} & x_2 + x_7 + \psi_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

nella quale le ψ_{ik} sono forme lineari in x_3, x_4. È chiaro che i due piani fondamentali in tale scrittura sono precisamente i due piani $(A_0 A_1 A_2)$ e $(A_5 A_6 A_7)$.

La (5) stessa pensata entro uno S_{n+4} qualsiasi rappresenta appunto il tipo di Σ che c' interessa.

8. - Fino a tal punto noi ci siamo preoccupati di caratterizzare le F_0 e le Σ congiunte, ma ci è ancora ignoto come si possa viceversa data una Σ del tipo considerato costruire dentro essa, qualora ve ne siano, tutte le F_0^{2n+2} che sono ad essa *congiunte*, volendo con ciò significare che abbiano una coppia di reti curve razionali e normali d'ordine $n+1$ distribuite entro le due schiere dei loro spazi propri, o, più strettamente, se si preferisce, della Δ_n^6.

È ovvio che un primo scopo di una tale ricerca, d'ordine critico, sarà garantirsi che effettivamente i caratteri sin qui trovati delle Σ ed esplicitamente riconosciuti siano sufficienti a determinarla come varietà congiunta ad una F_0, ed altro scopo, di ben più costruttivo rilievo, indagare più profondamente sul meccanismo rappresentativo che qui si sta cercando di mettere a punto.

Risulterà anche sino a qual punto una Σ, possibile sede di F_0 ad essa congiunte, determini le F_0 stesse.

Per favorire al più la ricerca premettiamo alcune riflessioni. Si consideri una F_0^{2n+2} dello S_{n+4}. Si sa già (cfr. n. 2) che essa contiene di conseguenza almeno due reti $|C'|$ e $|C''|$ di curve razionali normali d'ordine $n+1$. Si fissi una, ad esempio, curva C' e sia α'_0 il suo spazio ambiente.

Su una qualsiasi C'' si fissi un gruppo $\overline{\Gamma}_n$ di n punti arbitrari, e si scelga uno arbitrario $\overline{S}_{n+2}$ per il $\overline{\Gamma}_n$. Esso taglia F_0 in un gruppo di $2n+2$ punti il cui residuo rispetto il $\overline{\Gamma}_n$ è un gruppo di $n+2$ punti, contenuti in un certo S_{n+1} che diciamo σ_1.

Gli S_{n+2} per σ_1 segano allora su F_0 una ∞^2 di gruppi Γ_n che, com'è facile vedere, giacciono ognuno su una certa C''.

Si consideri infatti un iperpiano qualsiasi τ del fascio che ha il centro sullo $\overline{S}_{n+2}$, che conterrà la sezione iperpiana C_τ di F_0. Sulla C_τ gli S_{n+2} passanti per σ_1 segano fuori del gruppo fisso che è in σ_1, una g_n^1, un gruppo della quale è appunto il Γ_n.

D'altra parte le C'' segano su C_τ una g_{n+1}^2 della quale fà parzialmente parte il $\overline{\Gamma}_n$, che quindi avrà come resto un certo punto R, il cui residuo rispetto la g_{n+1}^2 è a sua volta una certa $\overline{g}_n^1$. Le g_n^1 e $\overline{g}_n^1$ hanno quindi un gruppo in comune (il $\overline{\Gamma}_n$) ed essendo serie complete (perchè C_τ ha genere $p=n-1$) si ha $g_n^1 \equiv \overline{g}_n^1$, Quindi intanto tutti gli S_{n+2} per σ_1 che giacciono in un iperpiano τ contenente $\overline{S}_{n+2}$ segano su F_0 gruppi di n punti che giacciono su curve C''. D'altra parte ogni S_{n+2} per σ_1 rientra in tale ipotesi, e quindi è vera la proprietà che abbiamo enunciata.

Si noti per di più che così si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca fra la stella di S_{n+2} per σ_1 e le curve C''. Infatti un S_{n+2} per σ_1 taglia su F_0 un gruppo Γ_n per cui passa una C'' e non più di una perchè la rete $|C''|$ è omaloidica, e viceversa se si prende una C'' essa stà in uno S''_{n+1} che taglia σ_1 in uno S_{n-2} per cui non possono passare due S_{n-1} n-secanti la C'' che ha ordine $n+1$.

La corrispondenza risulta anzi proiettiva: infatti gli S_{n+2} per σ_1 di un fascio appartengono ad un iperpiano che sega su F_0 una C, e la C'' associata a quegli S_{n+2} dovendo segare una g_n^1 fuori di un punto fisso sulla C appartengono pure ad un fascio, precisamente al fascio di C'' passanti per quel punto R. Viceversa, se si prende il fascio di C'' passanti per un punto R, e se ne scelgono due fra esse, i due S_{n+2} per σ_1 associati giacciono in un iperpiano sulla cui sezione iperpiana C la g_n^1 segata dagli S_{n+2} per σ_1 contiene già i due gruppi segati dalle C'' e quindi la g_n^1 stessa dev'essere segata dalle C'' del fascio, ed anzi si può dire che l'iperpiano così determinato passa pel punto R.

Si giunge così tramite la proiettività esistente fra le C'' e gli S_{n+2} per σ_1

ad una corrispondenza pure biunivoca fra i punti P di F_0 e gli iperpiani per σ_1.

Se in fine si considera uno S_{n+2} generico per α'_0 esso taglia, come sappiamo, F_0 in un solo punto P, cui si può associare l'iperpiano su determinato. Nasce così una corrispondenza generalmente biunivoca fra la stella di S_{n+2} che ha il centro in α'_0 e la stella d'iperpiani che ha per centro σ_1.

Si vede facilmente che questa corrispondenza è una proiettività. Infatti, se lo S_{n+2} per α'_0 varia entro un iperpiano il punto P varia sulla C'' intersezione residua dello iperpiano con F_0 fuori della C_0' contenuta in α_0'. L'iperpiano corrispondente nella stella di centro σ_1, deve allora contenere sempre il gruppo Γ_n associato a qnella C'' e quindi dovrà muoversi intorno un certo S_{n+2} contenente σ_1, cioè descrivere un fascio, e viceversa, se si prendono gli iperpiani per σ_1 di un fascio, il gruppo relativo allo S_{n+2} centro del fascio individua una sola C'' su cui deve variare P e pertanto gli S_{n+2} per α_0' associati si muovono entro l'iperpiano per α_0' che contiene quella C''.

Si ha quindi una corrispondenza generalmente biunivoca, cioè una trasformazione birazionale che associa però forme di prima specie, e quindi una proiettività.

Tuttociò può essere raccolto nell'enunciato seguente:

TEOREMA 5. - *Se si considera una* F_0^{2n+2}, *dello* S_{n+4} *e si sceglie uno* S'_{n+1}, α_0', *contenente una* C_0' *e uno* S_{n+1}, σ_1, *residuo, rispetto la serie intersezione di* F_0 *con gli* S_{n+2}, *dello* S_{n+4} *di un gruppo* Γ_n *appartenente ad una* C'', *e si associa ad ogni* S_{n+2} *per* α_0' *l'iperpiano contenente i gruppi* Γ_n *che gli* S_{n+2} *per* σ_1 *segano sulle* C'' *passanti pel punto* P *segato da quello* S_{n+2} *per* α_0' *su* F_0, *si ottiene, fra gli* S_{n+2} *per* α_0' *e gli iperpiani per* σ_1, *una corrispondenza proiettiva.*

9. — Le deduzioni del numero precedente permettono allora d'indicare immediatamente una generazione proiettiva della F_0.

Si considerino infatti tre S'_{n+1}: α'_0, α'_1, α'_2 e $(n-2)$ S_{n+1} del tipo di σ_1 che diremo: $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}$.

Esiste allora per quanto abbiamo detto una catena di proiettività fra gli elementi delle stelle di S_{n+2} che hanno per centri $\alpha'_0 \alpha'_1 \alpha'_2$ e le stelle d'iperpiani avente per centri i σ_i, generate nel modo indicato al numero precedente. Inoltre $n+1$ spazi associati s'incontrano generalmente in un solo punto P attesa la genericità dei σ_i e quindi si può senz'altro dire che il luogo delle intersezioni delle $n+1$ stelle proiettive considerate è la F_0^{2n+2} più eventualmente un certo numero di spazi, e questi in corrispondenza a quelle particolari $(n+1)$-ple di spazi associati che si tagliassero eventualmente in spazi di dimensione maggiore di zero, fuori di eventuali rette della F_0.

Si può quindi intanto enunciare:

TEOREMA 6. - *Una* F_0^{2n+2} *dello* S_{n+1} *si può sempre generare come luogo dei punti d'intersezione di tre stelle di* S_{n+2} *e di* $n-2$ *stelle d'iperpiani convenientemente associate in determinate proiettività, nella generazione comparendo però anche certi spazi oltrechè la* F_0.

10. — Analizziamo ora più approfonditamente come si generino quei certi spazii. Si consideri perciò un punto fondamentale 0^i della rete $|\rho^n|$. Ad esso corrisponde su F_0 una certa curva razionale normale ω^i giacente in un certo spazio fondamentale Ω'_i. La ω^i risulta i-secante le C'. Si prenda allora un punto P della ω'^i. Lo S_{n+2} che congiunge lo S'_{n+1} ad es. α'_0 con P contiene quindi $i+1$ punti della ω^i e quindi la contiene tutta ed analogamente per α'_1 e α'_2. Poichè d'altra parte la corrispondenza fra la stella α'_0 e la stella σ_1, ad es., è proiettiva e quindi assolutamente biunivoca, anche gl'iperpiani per σ_1 associati a quelli S_{n+2} che contengono ω^i devono contenere tutta ω_i, e quindi abbiamo scoperta una $(n+1)$-pla di spazi corrispondenti che si tagliano in uno S_i.

Inoltre queste sono le uniche eccezioni che si possono avere alla dimensione dell'intersezione di $n+1$ spazi corrispondenti, e quindi il teorema precedente si può precisare affermando che:

TEOREMA 7. - *Gli spazi che si presentano nella generazione proiettiva di cui al Teor. 6 sono gli spazi fondamentali* Ω'_i *relativi alla rete di* C', *se gli* α'_i *sono presi come spazi di curve* C'

Ciò fa subito comprendere che non sarà certo possibile invertire la precedente genesi mediante arbitrarie stelle proiettive, e che si dovrà, per rendere effettiva la inversione, cercare opportune condizioni, che, come si può già intuire, e comunque dimostreremo più avanti, consisteranno in sostanza nell'imporre appunto l'esistenza di quegli spazi fondamentali come intersezioni di convenienti $(n+1)$-ple associate delle stelle: che questo, a stretto rigore, non si possa ancora dire risulta dal fatto che non si può per il momento escludere che nella generazione indicata siano intimamente contenuti alcuni più remoti legami, che ne concedano l'esistenza e che non siano stati fin qui ancora esplicitamente avvertiti.

11. — Prima di procedere ulteriormente è bene indicare come vengono generate, nella precedente generazione, che diremo per brevità una *G-generazione* le due reti C' e C'' e le relative curve fondamenti ω'^i ed ω''^i.

Se si considerano tre iperpiani associati delle stelle α'_0 α'_1 e α'_2 essi si tagliano in uno S''_{n+1} della Σ^3_{n+3} congiunta alla F_0^{2n+2}. Le $n+1$ stelle considerate sono segate allora da quel S''_{n+1} secondo $n+1$ fasci d'iperpiani dello S''_{n+1} fra loro proiettivi che generano appunto la C''_{n+1} relativa a quel S''.

La C'_{n+1} relativa ad uno S' resta invece generata come intersezione parziale di $n+1$ stelle dello S ed essa risulta appunto d'ordine $n+1$ solo perchè dalla intersezione completa di quelle stelle si staccano gli spazi sezione di quello S' con gli spazi fondamentali Ω'_i.

Le curve ω'^i entro gli Ω'_i sono generate come luogo delle intersezioni delle C^i con lo Ω'_i, che descrivono appunto una g_i^2 i cui gruppi determinano la ω'^i, e si potrebbero anche pensare come provenienti dalla generazione delle C'' in corrispondenza a quelli S'' per i quali la generazione relativa degeneri.

Resta da vedere come risultino generate le ω''^i. Se si prende lo spazio Ω''_i di una di queste che proviene dallo spezzarsi di una C', esso è segato secondo un sistema ∞^2 di spazi S_{i-1} dagli S'' (in quanto chè la C'' sono i-secanti della ω''^i) ed è segato in un sistema ∞^2 di punti dagli S_6 intersezioni degli $n-2$ iperpiani delle stelle σ_i. La ω_i'' risulta allora come luogo degli ∞^1 punti di questo sistema che giacciono negli S_{i-1} loro corrispondenti. È ovvio e nello stesso tempo interessante come ciò generalizzi la genesi elementare di una conica come luogo delle coppie associate ed incidenti in una polarità piana, che è appunto il caso che si presenta per $i=2$.

L'osservazione che abbiamo già adoperata, che quando una C' (e lo stesso per una C'') si spezza in una C'_1 e una C'_2, una delle due curve risulti fondamentale discende ovviamente dall'osservare che siccome le C'' segano sulla C' totale una g_n^2, su una delle due componenti di ordine i esse dovranno segare una g_i^2. E viceversa ogni ω''^i può pensarsi così ottenuta perchè imponendo essa una sola condizione alle C' ne esistono ∞^1 che la contengono.

12. — La generazione proiettiva esposta nei numeri precedenti può subire certe specializzazioni senza che restino alterati i risultati. Esse, come si vedrà subito, non hanno una portata generale nel senso che non possono essere applicate ad ogni F_0, bensì a tipi particolari.

Si supponga per questo di avere una trasformazione T^n che possieda un punto fondamentale doppio, ovvero i-plo ma tale che la g_i^2 dei gruppi di tangenti di una curva ρ di $|\rho^n|$ in quel punto si spezzi in una g_2^2 e una serie residua. È chiaro che per ogni tipo di T^n, per qualsiasi n, si possono trovare particolari trasformazioni di questo tipo, lasciando invariate le caratteristiche d'ordine del gruppo fondamentale, cosicchè la restrizione che s'impone non incide però sostanzialmente per certi tipi di questioni, come ad esempio la classificazione delle T^n.

Supposto comunque di avere una tale T^n, la F_0^{2n+2} associata conterrà allora una certa conica che vogliamo chiamare semplicemente ω'', da considerarsi, eventualmente come parte di una curva fondamentale del proprio sistema, immagine di quella certa g_2^2.

Gli iperpiani per il piano α di ω'' segano su F_0 un sistema lineare di curve C^{2n} di genere $n-3$ trisecanti ω''. Quanto è stato detto nei numeri precedenti può allora qui essere ripetuto con leggere modificazioni supponendo di scegliere i σ_i nel seguente modo. Si prenda ancora un arbitrario gruppo di n-punti $\overline{\Gamma}_{n-2}$ su una C'' e un gruppo $\overline{\Gamma}_2$ di due punti su ω''. Si consideri uno S_{n+2} che contenga il gruppo totale $\overline{\Gamma}_{n-2}+\overline{\Gamma}_2$ e la conica ω''. Esso taglia ancora su F_0 un gruppo di $n-3$ punti. Si dica infine σ_i uno S_{n+1} che contenga questo gruppo e ω'' (ve ne sono ∞^2 in corrispondenza alle differenti posizioni limiti che possono essere assunte dallo S_{n+1} σ_i di un S_{n+2} prossimo a quello considerato e non contenente ω'').

Allora se si prende un iperpiano τ che passi per lo S_{n+2} considerato, gli S_{n+2} di esso per σ_i segano sulla sezione iperpiana C^{2n} residua una g^1_{n-2} che contiene il gruppo $\overline{\Gamma}_{n-2}$ ed è la serie completa individuata da quel gruppo perchè C^{2n} ha genere $n-3$. D'altra parte quel gruppo è segato anche da una C'' e se si considera il suo residuo rispetto la g^2_{n-1} che esse segano sulla C^{2n} (si ricordi che le C'' segano sulla sezione iperpiana totale una g^2_{n+1} e nel nostro caso segano una g_2^2 su ω'') si trova ancora un punto R che giace su C^{2n} e la cui serie residua rispetto la g^2_{n-1} dev'assere ancora la g^1_{n-2} segata dagli S_{n+2} per σ_i entro τ. Dopo ciò è chiaro che i ragionamenti precedentemente fatti conservano la loro validità e che si può giungere analogamente ad una generazione proiettiva della F_0 in cui i σ_i sono scelti in modo da contenere tutti il piano α di una conica fondamentale ω''.

È anzi ormai anche ovvio che si potrebbe volendo abolire la ipotesi speciale fatta che la F_0 contenga una conica fondamentale ω'', in quantochè ci si potrebbe riferire alla moltiplicità minima che appare nel sistema fondamentale, e se questa risulta $\nu>2$, si può considerare una generazione proiettiva in cui tutti i σ_i passino per lo Ω_ν'' contenente la curva ω''^ν. Si dovrà allora scegliere un gruppo di $n-\nu$ punti $\overline{\Gamma}_{n-\nu}$ su una C'' e un gruppo di ν punti sulla ω''^ν e considerare uno S_{n+2} che passi per questo gruppo e contenga Ω''_ν. Dopodiciò si dovrà riferirsi ad una serie completa $g_{n-\nu}$ su una curva intersezione iperpiana residua $C^{2n+2-\nu}$ di genere $n-\nu-1$, che sarà $\nu+1$ secante la ω''^ν, rimanendo però essenzialmente valide le conclusioni. Vogliamo raccogliere tutto quanto nel teorema:

TEOREMA 8. - *In una* G*-generazione di una* F_0^{2n+2} *dello* S_{n+4} *è lecito scegliere i centri* σ_i *in modo che essi contengano un qualsiasi spazio fondamentale* Ω''_ν.

Più avanti avremo modo di adoperare questa proprietà come una notevole fonte di semplificazione in alcuni casi speciali.

13. — È ora il momento di affrontare la ricerca delle condizioni sotto cui la G-generazione della F_0 può divenire definizione della F_0 stessa.

Il problema che ci proponiamo è il seguente: *come si devono scegliere* $n+1$ *stelle nello* S_{n+4}, *tre di spazii* S_{n+2} *ed* $n-2$ *d'iperpiani di centri in certi* S_{n+1} *rispettivamente* α_0' α_1' α_2' *e* $\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}$ *e come pure delle proiettività* *fra esse affinchè il luogo delle intersezioni delle* $\mathrm{n}+1$*-ple di spazii associati sia una* F_0^{2n+2} *dello* S_{n+4}.

Per arrivare alla risoluzione del problema, noi supporremo in un primo momento di considerare $n+1$ stelle del tipo suddetto genericamente scelte nello S_{n+4} e legate da proiettività affatto arbitrarie π_{ik} se le stelle le indichiamo coi simboli Σ_i dove per $i=0, 1, 2$ supporremo di avere le tre stelle di S_{n+2}.

In tale situazione proponiamoci di studiare la superficie Φ che si ottiene come luogo delle intersezioni di $(n+1)$–ple di spazi associati.

Cominciamo perciò con l'osservare che tre iperpiani delle stelle Σ_0 Σ_1 e Σ_2 associate nelle omografie che le π_{01}, π_{12}, subordinano fra gli iperpiani si tagliano in uno spazio S''_{n+1} della seconda schiera di spazi della varietà Σ^3_{n+3} generata delle π_{ik} fra le prime tre stelle d'iperpiani. Vediamo quale sia il luogo di punti che la Φ possiede entro quel S''. Si osservi perciò che poichè quello S'' giace, ad esempio con α'_0, entro un iperpiano, in esso gli S_{n+2} di Σ_1 segano un fascio d'iperpiani S_n che ha per centro lo S_{n-1} intersezione dello S'' con α'_0. Lo stesso si dica per α'_1 e α_2'. Agli S_{n+2} di quel fascio di Σ_1 corrisponde ad esempio in π_{03} un fascio d'iperpiani di Σ_3 che avrà come centro un certo S_{n+2}, fascio che è tagliato dallo S'' ancora in un fascio d'iperpiani dello S''. Si ottengono quindi in definitiva nello S'' $(n+1)$ fasci d'iperpiani fra loro proiettivi che generano una C''_{n+1} razionale e normale nello S''. I centri dei fasci risultano notoriamente n–secanti la C''_{n+1}. Si può dunque dire che la Φ conterrà intanto una rete di curve razionali normali d'ordine $n+1$ C'' e che gli S_{n+2} passanti per σ_1, σ_2, ... σ_{n-2} segano fuori dei σ_i la Φ in n punti.

È allora facile trovare l'ordine $\varphi(n)$ di Φ. Si consideri infatti ad esempio uno S_{n+2} per σ_{n-2}. Esso taglia la Φ in gruppi di $\varphi(n)$ punti, n dei quali non stanno in σ_{n-2}. e il rimanente x in σ_{n-2}. Questo numero x si determina immediatamente. Si pensi infatti un iperpiano generico per σ_{n-2}. Esso taglia le n stelle Σ_0, Σ_1, ..., Σ_{n-1} ancora in n stelle con analoghe caratteristiche che generano quindi la Φ' corrispondente all'ordine $\varphi(n-1)$, e siccome il σ_{n-2} ha dimensione $n+1$ il numero delle intersezioni di esso con Φ' sarà appunto $\varphi(n-1)$. Si ottiene quindi la relazione ricorrente:

$$\varphi(n) = n + \varphi(n-1).$$

Poichè com'è noto e come risulta anche dal precedente, $\varphi(3) = 3 + \varphi(2) = 3 + 6$, si ha:

$$\varphi(n) = n + (n-1) + \ldots + 5 + 4 + 3 + 6 = 3 + \frac{n(n+1)}{2} = 2n + 2 + \pi,$$

dove con π si è indicato il genere di una curva piana d'ordine n priva di punti multipli, pari a $\binom{n-1}{2}$.

Si conclude da ciò che la Φ è una superficie d'ordine $2n+2+\pi$ dello S_{n+4}, che sarà dunque a curve sezioni di genere: $p=n-1+\pi$. Inoltre, oltre la rete di curve razionali normali d'ordine $n+1$ C'', che abbiamo già messa in evidenza, essa conterrà una rete residua rispetto il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di Φ di curve C' d'ordine $n+1+\pi$ giacenti negli spazi S' di Σ^3_{n-3} di genere π, normali in quegli spazi. Una C' e una C'' hanno in comune n punti come risulta dalla precedente generazione delle C'.

Se si pone mente alla generazione ad esempio della C_0' che giace entro α_0' si vede che essa risulta generata come luogo delle interzioni di n-spazi associati di n-stelle dello S'_{n+1}, due di spazi S_{n-1} e $(n-2)$ d'iperpiani dello S', fra loro proiettive, ed anzi ogni C' può pensarsi così generata in quantochè si prenda il suo spazio come centro e s'introduca una opportuna omografia prodotto nella stella che ha quello spazio come centro.
Possiamo con ciò enunciare il teorema:

TEOREMA 9. - *Il luogo delle intersezioni degli spazi omologhi di* $n+1$ *stelle proiettive dello* S_{n+4}, *di cui tre di spazi* S_{n+2} *e le altre d'iperpiani è una superficie* Φ *d'ordine* $2n+2+\binom{n-1}{2}$ *normale nello* S_{n+4}. *La superficie* Φ *contiene due reti di curve, una* $|C''|$ *di curve razionali normali generate con fasci proiettivi d'iperpiani, e una* $|C'|$ *di curve d'ordine* $n+1+\binom{n-1}{2}$ *normali in spazi* S'_{n+1} *generate mediante le intersezioni degli spazi omologhi di* n *stelle proiettive dello* S', *tre di* S_{n-1} *e le altre di* S_n.

È chiaro che la superficie Φ che abbiamo ottenuta è la immagine nello S_{n+4} del sistema completo di curve che si ottiene aggiungendo ad una rete di curve φ^n piane d'ordine n e genere $p=\binom{n-1}{2}$ la rete delle rette del suo piano.

14. - Studiamo ora come si possa provocare la riduzione della superficie Φ ad una F_0 del nostro solito tipo.

Supponiamo perciò che le $n+1$ stelle Σ_i siano talmente riferite (in certe π_{ik}) che esista una $(n+1)$-pla di spazi omologhi i quali s'intersichino in un S_k con $k>1$. Il luogo delle intersezioni degli spazi omologhi degenera allora evidentemente nello S_k e in una superficie residua Φ'. Vogliamo determinare l'equivalenza dello S_k nei caratteri della Φ. Osserviamo che lo S_k taglia ad esempio lo S_{n+1} σ_i in un S_{k-2}, in quanto giace con esso in un iperpiano. Un S_{n+2} generico per σ_i continua a segare Φ' fuori di σ_i soltanto e ancora in n punti, in quanto la rete di C'' continua ad essere una rete di C''^{n+1} con le stesse caratteristiche di generazione di prima. Quindi basta calcolare l'equivalenza dello S_{k-2} entro σ_i rispetto il gruppo delle $n+2+\pi$ intersezioni che abbiamo prima determinato. Ciò è semplice quando si finga che quegli $n+1$ spazi omologhi si seghino dapprima in un S_{k-1}, e poi si facciano variare con continuità le π_{ik} facendo dilatare lo S_{k-1} in un S_k. Così facendo, entro σ_1 si passa da uno S_{k-3} ad uno S_{k-2}, ed il processo si può schematizzare pensando di aggiungere allo S_{k-3} una intersezione di Φ con σ_1, sia P_0, e poi un'altra intersezione per ogni retta che da P_0 va ad una $(k-2)$-pla di punti indipendenti dello S_{k-3}: si aggiungono così alle intersezioni già assorbite dallo S_{k-3} altre $k-1$ intersezioni.

Se con $\varphi(k)$ si indica l'equivalenza richiesta si ha dunque la relazione:

$$\varphi(k) = k - 1 + \varphi(k-1).$$

e tenendo presente l'evidente eguaglianza: $\varphi(2) = 1$, si ha: $\varphi(k) = \dfrac{k(k-1)}{2}$.

Contemporaneamente l'ordine delle C' si abbassa pure di $\varphi(k)$, e ciascuna di esse degenera in una curva d'ordine $n+2+\pi-\varphi(k)$ e in uno S_{k-1}. Il genere stesso delle C' si abbassa di $\varphi(k)$. È chiara ormai l'analogia perfetta che così si sviluppa fra la genesi sul piano della rete omaloidica ρ^n a partire dalla ρ^n per imposizione di successivi punti multipli base che assorbono appunto $\dfrac{k(k-1)}{2}$ unità del genere π, e la genesi di tutta una classe di superficie Φ di ordini: $2n+2+\pi-\Sigma\varphi(k)$, sino ad arrivare allo F_0^{2n+2} quando: $\pi = \Sigma\varphi(k)$.

Tutto ciò permette di sciogliere alcuni dubbi avanzati a suo tempo, enunciando che:

TEOREMA 10. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $n+1$ *stelle* Σ_i *proiettive dello* S_{n+4}, *tre delle quali* Σ_0, Σ_1, Σ_2 *di* S_{n+2} *e le altre d'iperpiani generino una superficie* F_0^{2n+2} *è che esistono delle* $(n+1)$*-ple di spazi omologhi intersecantisi secondo gli spazi fondamentali* Ω_i'.

15. — Nel processo di riduzione di una Φ ad un F_0 la generica curva C' si riduce come abbiamo visto da una $\overline{C}'$ d'ordine $n+2+\pi$ ad una C' d'ordine $n+1$ entrambi essendo normali nello S'_{n+1} d'appartenenza. Entrambe le curve si generano come luogo delle intersezioni degli spazi omologhi di n-stelle dello S'_{n+1}, siano $\Sigma'_{1,0} \dots \Sigma'_{n,0}$, delle quali, se supponiamo ad esempio che C' stia in α_0', le prime due sono le stelle di S_{n-1} segate da α_0' su Σ_1 e Σ_2 e le rimanenti sono segate da α_0' sulle Σ_i restanti e sono stelle di S_n.

La riduzione della $\overline{C}'$ nella C' avviene ancora nello S'_{n+1} per il fatto che dal luogo $\overline{C}'$ si staccano successivi spazi, la relazione numerica essendo che per uno S_{k-1} la $\overline{C}'$ si abbassa di genere come se una sua proiezione piana avesse acquistato un punto k-plo.

È ora facile assegnare una più concreta interpretazione di tale fatto. Si pensi perciò allo spazio centro, sia α'_{10}, della stella Σ_1'. Se si pensa di proiettare la C' da esso su un piano dello S'_{n+1}, si ha che lo S_{n-1} generico di $\Sigma'_{1,0}$ è unisecante della C', salvo che esistono spazi plurisecanti in corrispondenza ai punti multipli della proiezione. Se si tien conto che la corrispondenza fra le stelle $\Sigma'_{i,0}$ è assolutamente biunivoca si ha che ad uno spazio S_{n-1} plurisecante C', corrispondono nelle altre stelle spazi ancora passanti per i punti di appoggio dello S_{n-1} con la C'. Se ne deduce che gli spazi che si staccano nella generazione di C' sono esattamente quelli secondo cui gli S_{n-1} plurisecanti di C' per α'_{10} si appoggiano a C'. (Si tenga conto in tuttociò che, com'è indicato, α'_{10} è unisecante di C' e per questo uno S_{k-1} che si stacchi corrisponde a un punto k-plo).

Questa osservazione, che rende limpido ancor più il processo indicato, è assai utile qualora si vogliano cercare condizioni applicabili in un calcolo effettivo.

Pensiamo infatti di tornare alla Φ originaria. Cominciamo allora con l'imporre ad essa entro ad esempio α_0' una C'^{n+1} razionale: si staccheranno allora automaticamente dalle stelle Σ'_{i0}, entro α_0', gli spazi corrispondenti or ora indicati. Si ripeta l'imposizione di una C'^{n+1} razionale entro α_1'. Anche qui si staccheranno certi spazi entro le stelle subordinate in α_1'. Ciò non è sufficiente ancora a garantire che la Φ sia ridotta ad una F_0. Infatti non è che gli spazi che si staccano in α_0' e α_1' siano della stessa natura, nè che essi corrispondano alle stesse $(n+1)$-ple delle stelle Σ_i.

Se però si suppone che l'imposizione della seconda C' sia eseguita appunto con l'avvertenza che gli spazi che si staccano provengano dalle stesse $(n+1)$-ple di spazi delle stelle Σ_i che restano già individuate dalla generazione in α_0', si avrà allora che dovendo quelle $(n+1)$-ple avere in comune un S_{k-1} in α_0' e un altro S_{k-1} in α_1', esse dovranno avere in comune uno S_k, e quindi le condizioni imposte saranno sufficienti perchè, a norma del Teor. 9, la Φ si riduca alla F_0.

D'altronde tale particolarità nelle condizioni da imporre viene ad essere soddisfatta qualora come curva C_1' in α_1' si prenda la trasformata omografica della C_0' in una omografia di α_0' in α_1' che subordini fra le due stelle di S_{n-1} di centri α'_{10}, α'_{01} l'omografia che si ha quando si associno S_{n-1} sezioni di S_n associati nella π_{01}. E viceversa ciò è necessario in vista di quelle esigenze. Si noti che con questo è anche garantita l'eguale natura dei due gruppi di spazi che si staccano.

Si conclude da ciò col teorema:

TEOREMA 11. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie Φ si riduca ad una F_0^{2n+2} è che essa contenga entro un S'_{n+1} una curva razionale d'ordine $(n+1)$ ed entro un altro S'_{n+1} ancora una curva razionale d'ordine $n+1$ trasformata omografica della prima, secondo una omografia che trasformi una certa stella di S_{n-1} del primo S' in una stella dell'altro secondo una data proiettività.*

16. — I teoremi precedenti esauriscono praticamente il problema che ci eravamo proposto al n. 13. Essi permettono anche di rispondere al dubbio avanzato al n. 6, se e quando una certa Σ_{n+3}^{3} possa contenere, in posizione congiunta, una F_0^{2n+2}. Si risponde nel modo più semplice, che ciò è sempre possibile purchè la Σ_{n+3}^{3} contenga degli spazi corrispondenti agli spazi fondamentali della F_0^{2n+2}, risposta che è fornita dal Teor. 9 e che coincide con le congetture che già avevamo avanzate.

Passiamo ora a ricercare come i teoremi dimostrati possano fornire *una rappresentazione analitica delle trasformazioni birazionali fra due piani*, ricerca nella quale essi troveranno una notevole applicazione.

Procuriamoci innanzi tutto la rappresentazione analitica di una superficie Φ. Si considerino perciò tre S_{n+1} dello S_{n+4}, α_0', α_1' e α_2' definiti dalle equazioni

$$\varphi_{l0} = \varphi_{l1} = \varphi_{l2} = 0 \qquad (l = 0,\ 1,\ 2), \tag{6}$$

dove le φ_{lk} sono certe forme lineari rispetto un sistema di coordinate proiettive x_i omogenee dello S_{n+4}.

Siano f_{ik} altre $3(n-2)$ forme lineari con $i = 1, 2, \ldots, n-2$; $k = 0, 1, 2$, e si considerino gli $n-2$ S_{n+1}, σ_i, rappresentati dalle equazioni:

$$f_{i0} = f_{i1} = f_{i2} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-2). \tag{7}$$

Le tre stelle Σ_0, Σ_1, Σ_2 fra loro proiettive di S_{n+2} di centri gli α_l' possono allora rappresentarsi con le equazioni:

$$\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = \varphi_{l0} : \varphi_{l1} : \varphi_{l2}, \tag{8}$$

e le $n-2$ stelle d'iperpiani $\Sigma_3 \ldots \Sigma_n$ proiettive fra loro, ed alle prime, con le equazioni:

$$F_i \equiv \lambda_0 f_{i0} + \lambda_1 f_{i1} + \lambda_2 f_{i2} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-2). \tag{9}$$

Le (8) e le (9) insieme individuano allora, per generici valori delle λ, un punto $P(\lambda)$ che al variare delle λ descrive, per quanto si è già visto, una superficie Φ le cui caratteristiche, già a noi note, potrebbero qui facilmente confermarsi su questa rappresentazione.

In particolare si ottiene subito la rappresentazione piana della Φ, proiettandola da un α_l' sopra un piano, in quanto gli S_{n+2} per uno α_l' riescono unisecanti la Φ.

Se si vuole ottenere la rappresentazione di una qualsiasi curva C', occorre far coesistere insieme alle (8) e (9) le equazioni di un generico S'_{n+1} che si possono scrivere nella forma:

$$\mu_0 \varphi_{0l} + \mu_1 \varphi_{1l} + \mu_2 \varphi_{2l} = 0 \qquad (l = 0,\ 1,\ 2). \tag{10}$$

La condizione di coesistenza delle (8) (9) (10) nelle x_i fornisce un determinante di ordine $n+5$ che si presenta di ordine tre nelle μ_i e di ordine

$(n+2)$ nelle λ. L'equazione che si ottiene eguagliando a zero quel determinante fornisce una trasformata birazionale della generica C', e si potrebbe cercare di giungere alle equazioni della F_0 imponendo a questa generica trasformata di essere razionale, ma così si trovano condizioni in forma poco cospicua ed eccessivamente complessa. A noi interessa notare che supposto che le C' debbono essere razionali, le λ si potranno supporre funzioni intere di un parametro t d'ordine non superiore ad $n+2$.

Dopociò è chiaro che le equazioni di una C'_{n+1} si potranno pensare scritte nella forma:

$$x_i = \sum_{k=0}^{n+1} a_{ik} t^k \qquad (i = 0, \dots n+4) \tag{10'}$$

legando contemporaneamente le λ alle relazioni:

$$\lambda_r = \sum_{s=0}^{n+2} \alpha_{rs} t^s \qquad (r = 0,\ 1,\ 2). \tag{11}$$

Imponiamo ora alla curva rappresentata dalle (10) e (11) che diciamo C'_0 di giacere entro lo $S'_{n+1}\ \alpha_0'$ e di giacere su Φ.

Per comodità di calcoli introduciamo le notazioni:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varphi_{01} \equiv \psi_{00} & \varphi_{00} \equiv -\psi_{01} & 0 \equiv \psi_{02} \\ 0 \equiv \psi_{10} & \varphi_{02} \equiv \psi_{11} & \varphi_{01} \equiv -\psi_{12} \equiv \psi_{00} \\ \varphi_{11} \equiv \psi_{20} & \varphi_{10} \equiv -\psi_{21} & 0 \equiv \psi_{22} \\ 0 \equiv \psi_{30} & \varphi_{12} \equiv \psi_{31} & \varphi_{11} \equiv -\psi_{32} \equiv \psi_{20} \\ \varphi_{21} \equiv \psi_{40} & \varphi_{20} \equiv -\psi_{41} & 0 \equiv \varphi_{42} \\ 0 \equiv \psi_{50} & \varphi_{22} \equiv \psi_{51} & \varphi_{21} \equiv -\psi_{52} \equiv \psi_{40}. \end{array} \right.$$

Supporremo inoltre:

$$\psi_{ik}(x) \equiv \sum_{r=0}^{n+4} \nu_{ik}^{(r)} x_r, \qquad (i = 0,\ 1, \dots 5) \tag{13}$$

$$f_{ik}(x) = \sum_{r=0}^{n+4} \mu_{ik}^{(r)} x_r. \qquad (i = 1,\ 2, \dots n-2) \tag{13'}$$

Sostituendo nelle (8) e (9) si hanno allora rispettivamente le espressioni:

$$\psi_i(x) \equiv \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=0}^{n+4} \lambda_k \nu_{ik}^{(r)} x_r = 0, \tag{14}$$

$$F_i(x) \equiv \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=0}^{n+4} \lambda_k \mu_{ik}^{(r)} x_r = 0. \qquad (i = 1,\ 2, \dots,\ n-2). \tag{14'}$$

S'imponga ora a queste di essere soddisfatte identicamente dalle (10) e dalle (11) cui si aggiungano le:

$$\psi_{00}(x) = \psi_{01}(x) = \psi_{11}(x) = 0. \tag{15}$$

Si trovano con alcuni semplici calcoli i tre gruppi di condizioni in corrispondenza rispettivamente alle (14) (14') e (15):

$$(16) \qquad \sum_{k,r,s} \alpha_{ks} a_{r,\nu-s} \nu_{ik}^{(r)} = 0 \left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3, 4, 5 \\ \nu = 0, 1, \ldots, 2n+3 \\ k = 0, 1, 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} r = 0, 1, \ldots, n+4 \\ s = 0, 1, \ldots, \nu \end{array} \right.$$

$$(16') \qquad \sum_{k,r,s} \alpha_{ks} a_{r,\nu-s} \mu_{i,k}^{(r)} = 0 \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ \nu = 0, 1, \ldots, 2n+3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, 2 \\ r = 0, 1, \ldots, n+4 \\ s = 0, 1, \ldots, \nu \end{array} \right.$$

$$(16'') \qquad \sum_{r=0}^{n+4} \nu_{00}^{(r)} a_{rk} = \sum_{r=0}^{n+4} \nu_{01}^{(r)} a_{rk} = \sum_{r=0}^{n+4} \nu_{11}^{(r)} a_{rk} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Si consideri ora una trasformata omografica della C_0' in una omografia fra α_0' e α_1' che subordini fra le stelle di centri α'_{01} e α'_{10} l'omografia che è fra esse già subordinata dalla π_{01}.

Le equazioni di una tale omografia si possono scrivere nella forma:

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \psi_{01}(y) = \psi_{21}(x) & \\ \psi_{00}(y) = \psi_{20}(x) & \\ \psi_{11}(y) = \psi_{31}(x) & \\ \psi_{21}(y) = 0 & \\ \psi_{20}(y) = 0 & \\ \psi_{31}(y) = 0 & \\ y_i = \sum_{k=0}^{n+4} \rho_{ik} x_k & \qquad (i = 6, \ldots, n = 4). \end{array} \right.$$

Da queste si ricavano in definitiva le:

$$(18) \qquad y_i = \sum_{k=0}^{n+4} \rho_{ik} x_k \qquad (i = 0, \ldots, n = 4).$$

nelle quali soltanto $\delta_\rho = (n+2)(n-1)+1$ ρ_{ik} omogenee sono arbitrarie.

Le equazioni della trasformata C_1' di C_0' risultano quindi:

$$(19) \qquad x_i = \sum_{k=0}^{n+1} a'_{ik} t^k,$$

nelle quali è:

$$(20) \qquad a'_{ik} = \sum_{l=0}^{n+4} \rho_{il} a_{lk}.$$

Imponendo ancora alle (14) e (14') di essere soddisfatte identicamente dalle (19) insieme alle:

$$\lambda_r = \sum_{s=0}^{n+2} \alpha'_{rs} t^s \qquad (r = 0,\ 1,\ 2) \tag{21}$$

si trovano delle altre condizioni perfettamente analoghe alle (16) e (16'). Mancano le analoghe delle (16'') che vengono ad essere soddisfatte automaticamente per la scelta fatta dalle ρ_{ik}. I due gruppi di equazioni si possono conglobare ponendo

$$\alpha_{ks} = \alpha^{(0)}_{rs} \qquad \alpha'_{ks} = \alpha^{(1)}_{rs} \qquad a_{ik} = a^{(0)}_{ik} \qquad a'_{ik} = a^{(1)}_{ik}, \tag{22}$$

nell' unico sistema

$$A^{\nu}_{ij} \equiv \sum_{k,r,s} \alpha^{(j)}_{ks} a^{(j)}_{r,\nu-s} \nu^{(r)}_{i,k} = 0 \qquad (i = 0,\ 1, \dots,\ 5) \tag{23}$$

$$B^{\nu}_{ij} \equiv \sum_{k,r,s} \alpha^{(j)}_{ks} a^{(j)}_{r,\nu-s} \mu^{(r)}_{i,k} = 0 \qquad (i = 1, \dots,\ n-2) \tag{23'}$$

$$\Sigma \nu^{(r)}_{00} a_{rk} = \Sigma \nu^{(r)}_{01} a_{rk} = \Sigma \nu^{(r)}_{11} a_{rk} = 0 \qquad (k = 0,\ 1, \dots;\ n+1), \tag{23''}$$

$$a^{(1)}_{ij} = \sum_{l=0}^{n+4} \rho_{il} a_{lk} \tag{23'''}$$

nelle quali sono da tenere presenti i fatti seguenti:

a) Gli indici k, r, s, variano nelle sommatorie fra i limiti:

$$k = 0,\ 1,\ 2; \quad r = 0,\ 1, \dots,\ n+4; \quad s = 0,\ 1, \dots \nu.$$

b) Gli indici j e ν possono assumere i valori:

$$j = 0,\ 1; \quad \nu = 0,\ 1, \dots,\ 2n+3.$$

c) Nelle (23') per analogia si è scritto $i = 0,\ 1, \dots,\ 5$, ma in realtà se $j = 0$ le prime due sono identicamente soddisfattte, se $j = 1$ lo sono la terza e la quarta.

17. — Se indichiamo con δ_ν, δ_μ, δ_ρ, δ_a e δ_{α_j} i numeri dei rispettivi parametri che figurano come indici, e con N_j il numero delle condizioni imposte al gruppo di apice j, si trovano le espressioni totali in funzione di n:

$$\begin{gathered} \Sigma\delta = 5n^2 + 32n + 42 \\ N = \Sigma N = 4n^2 + 19n + 22. \end{gathered} \tag{24}$$

Si vede quindi che le condizioni possono effettivamente essere soddisfatte. É però bene notare esplicitamente che le N condizioni trovate non sono in generale indipendenti. Ciò si può vedere in più modi come, ad esempio, con la semplice osservazione che una stessa F_0 annette in generale $\infty^{n^2+5n-14}$ G-generazioni, e che quindi, se quelle condizioni fossero indipendenti, vi sarebbero ∞^{8n+23} superfici F_0 distinte, laddove la dimensione almeno delle F_0 omografiche ad una stessa è già più elevata.

Il fatto si presenta come ben naturale anche pensando che, imposte ad esempio le N_0 condizioni per $j=0$, esistono già opportune $(n+1)$-ple di spazi omologhi che si tagliano secondo certi S_i. Quel che resta da imporre è che quelle $(n+1)$-ple si taglino in dagli S_{i+1}, e perciò basta aggiungere ulteriori $k=n+4-i$ condizioni che forniscono totalmente un numero certo minore di N_1.

E ciò è rigoroso per valori generici delle a, compatibili con le (23); ma per di più può essere che le a si particolarizzino successivamenta secondo ch C_0' e C_1' ammettano spazi S_{n-1} k-secanti per α'_{01} e α'_{10} con valori più alti di k, ed allora il numero δ_a può diminuire.

Si conclude dunque che le condizioni trovate sono sovrabbondanti. Determinare una base minima per le A_{ij} e B_{ij} (le rimanenti condizioni sono immediatamente assorbibili dalle prime) e classificare i tipi che s' incontrano equivarrebbe sostanzialmente alla classificazione delle trasformazioni cremoniane piane.

È interessante notare che le $A_{ij}=0$ e $B_{ij}=0$ si presentano lineari in ciascuna serie di parametri ed esse potrebbero pensarsi come *plurilinearità fra opportuni spazi*: ad ogni elemento d' intersezioni di tali plurilinearità corrisponde una certa T^n. I tipi vieppiù speciali di T^n si otterrebbero imponendo al punto $P\equiv(a_{i,k})$ nel suo spazio opportune varietà ambiente.

19. — I calcoli sin qui eseguiti concedono con facilità di arrivare ad una rappresentazione analitica effettiva di una qualsiasi trasformazione birazionale piana T^n.

Basta perciò pensare che proiettando da uno S'' la F_0 su un piano π le due reti $|C''|$ e $|C'|$ si proiettano su questo rispettivamente nella rete $|\rho^n|$ e nella rete delle rette del piano. Un punto P di parametri $\lambda_0\lambda_1\lambda_2$ dà luogo ad un punto P' di coordinate η_0, η_1, η_2 e se si pensano pure le λ come coordinate su un piano (ξ) ponendo $\lambda_i=\xi_i$ si genera fra le ξ e le η una corrispondenza birazionale in cui alle rette $u_0\xi_0+u_1\xi_1+u_2\xi_2=0$ del piano (ξ) corrispondono le curve descritte da P' quando P varia su una C'', e cioè le curve ρ^n e quindi la corrispondenza è precisamente una T d'ordine n.

Per eseguire ciò in modo concreto si può porre che lo S'' da cui si proietta sia ad esempio quello di equazioni: $\varphi_{00}=\varphi_{10}=\varphi_{20}=0$. I calcoli si semplificano se si suppone:

$$\varphi_{l0}\equiv x_l \qquad (l=0,\ 1,\ 2). \tag{25}$$

Basta allora risolvere le (14) e (15) (nella quale si pensino nulli certi opportuni ν^{r}_{ik}) rispetto x_0, x_1 e x_2.

Se si pone

$$\nu^{(r)}_{ik}=\mu^{(r)}_{n-1+i,k} \qquad (i=0,\ 1,\dots 6), \tag{16}$$

si trova senz'altro:

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= \left| \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(1)} \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(2)} \ldots\ldots \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(n+4)} \right| \\ x_1 &= \left| \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(0)} \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(2)} \ldots\ldots \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(n+4)} \right| \\ x_2 &= \left| \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(0)} \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(1)} \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(3)} \ldots \sum_{k=0}^{2} \lambda_k \mu_{ik}^{(n+4)} \right| \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \ldots\, n+4,$$

nelle quali il simbolo $|a_i b_i \ldots m_i|$ indica il determinante la cui riga i–esima ha gli elementi $a_i b_i \ldots m_i$.

Per semplificare ulteriormente le (27) si convenga che se un certo indice può assumere $t+1$ valori, ed un altro i soltanto t il simbolo $|a_{ir}|^{(s)}$ indichi il determinante che si ottiene omettendo il valore $r = s$. Allora le (27) divengono semplicemente:

$$(27') \qquad x_s = \left| \sum_{k=0}^{\lambda} \lambda_k \mu_{ik}^{(r)} \right|^{(s)} \qquad (s = 0,\ 1,\ 2;\ i = 1, \ldots, n+4).$$

Le (27′) forniscono la rappresentazione piana di una superficie Φ. Se si vuole ottenere le equazioni della T^n basta aggiungere alle (27′) le (23) (23′) (23″) (23‴), e sostituire formalmente alle λ le ξ e alle x le η. Si ottiene dunque:

$$(28) \qquad \left\{\begin{aligned} &\eta_s = \left| \sum_{k=0}^{2} \xi_k \mu_{ik}^{(r)} \right|^{(s)} \qquad\qquad (s = 0,\ 1,\ 2;\ i = 1, \ldots, n+4), \\ &B_{ij}^{(\nu)} = 0 \qquad (j = 0, 1;\ i = 1, \ldots, n+4;\ \nu = 0, 1, \ldots, 2n+3), \\ &\sum_r \nu_{00}^{(r)} a_{rk} = \sum_r \nu_{01}^{(r)} a_{rk} = \sum_r \nu_{11}^{(r)} a_{rk} = 0, \qquad (k = 0,\ 1 \ldots,\ n+1). \end{aligned}\right.$$

Queste (in cui occorre tenere presente le diverse definizioni (12) (23″) (25) e (26)) costituiscono *la rappresentazione analitica di una trasformazione cremoniana di ordine* n *fra i due piani* (ξ) *ed* (η).

È da osservare che le η_s risultano polinomi di grado apparente $n+4$ nelle ξ_k, ma da essi si stacca, come fattore comune, una forma del quarto ordine, il chè si può facilmente verificare specializzando la rappresentazione, fatto su cui non indugiamo per la sua evidenza.

Si noti anche che le condizioni trovate introducono dei *parametri ausiliari* a_{ik} e ρ_{ik}.

Si potrebbe, volendo, eliminarli e si arriverebbe ad un certo numero di condizioni nei soli μ_{ik} e ν_{ik}. Ciò non è consigliabile, perchè, a parte la complessità delle relazioni cui si giungerebbe, si perderebbe così il più cospicuo carattere della rappresentazione ottenuta che è la sua flessibilità di fronte ai caratteri proiettivi, che compaiono direttamente dipendenti appunto dalle a_{ik}, o meglio dagli invarianti proiettivi della C'_0, che si esprimono appunto nelle a_{ik}. Sarebbe assai interessante determinare, in una opportuna casistica, gli invarianti proiettivi analitici relativi alle F_0^{2n+2} in funzione degli a_{ik}: essi appaiono geometricamente evidenti negli spazi fondamentali, poichè è chiaro che F_0 dello stesso ordine ma con differenti tipi di spazi fondamentali, sono proiettivamente distinte. È ovvio anche che tali invarianti diverranno di numero crescente con n sino all'infinito. Tuttavia una opportuna indeterminatezza potrebbe permettere una buona ispezione del problema, ed è in questo indirizzo che deve cercarsi il significato della nostra rappresentazione.

19. — Le condizioni assegnate permettono alcune immediate deduzioni che, più che altro, segnaliamo, perchè a loro volta potrebbero fornire eventuali punti di partenza.

Si torni al sistema delle (8) e delle (9). L'eliminazione delle $\lambda_0 \lambda_1$ e λ_2 fra esse fornisce un sistema di $n+2$ equazioni di secondo grado, rappresentative di altrettante forme quadriche. che si rivelano anzi subito come coni di S_{n-2}-vertice. Tali equazioni possono scriversi, ad esempio, nella forma:

$$(29)\qquad \begin{cases} Q_i \equiv \varphi_{00} f_{i0} + \varphi_{01} f_{i1} + \varphi_{02} f_{i2} = 0 & (i = 1, \dots, n-2) \\ Q_{n-1} \equiv \varphi_{00}\varphi_{11} - \varphi_{01}\varphi_{10} = 0 \\ Q_n \equiv \varphi_{00}\varphi_{12} - \varphi_{02}\varphi_{10} = 0 \\ Q_{n+1} \equiv \varphi_{00}\varphi_{21} - \varphi_{01}\varphi_{20} = 0 \\ Q_{n+2} \equiv \varphi_{00}\varphi_{22} - \varphi_{02}\varphi_{20} = 0, \end{cases}$$

la cui intersezione fornisce, come si sa, una superficie del tipo cha abbiamo chiamato Φ d'ordine $2n+2+\binom{n-1}{2}$, a curve sezioni iperpiane di genere: $n-1+\binom{n-1}{2}$.

Si può anzi senz'altro indurre che la Φ si ridurrà ad una F_0 se e solo se le quadriche Q_i avranno in comune un sistema di spazii fondamentali relativi ad una T^n: da cui il Teor.:

TEOREMA 12. - *Una* F_0^{2n+2} *dello* S_{n+4}, *può sempre individuarsi come intersezione residua di* $n+1$ S_{n-2}*-coni quadrici, che s'intersichino ulteriormente in un sistema di spazi fondamentali della* F_0 *stessa.*

Le condizioni espresse effettivamenle nei coefficienti delle $Q_i = 0$ perchè ciò accada sono naturalmente ancora date dalle (23), (23') e (23'').

È interessante osservare, a proposito delle (29) e del Teor. appena enunciato, che una condizione del tutto equivalente potrebbe esprimersi esigendo l'esistenza di certe forme lineari $\bar{f}_{ik}$ $(i = 1, \dots, n-2;\ k = 0, 1, 2)$ tali che le ulteriori quadriche:

$$\bar{Q}_i \equiv \varphi_{00}\bar{f}_{i0} + \varphi_{10}\bar{f}_{i1} + \varphi_{20}\bar{f}_{i2} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n-2),$$

contengano anch'esse la Φ. E ciò è chiaro perchè allora la Φ ammetterebbe una doppia generazione proiettiva simmetrica rispetto le due reti di C' e C'', che risulterebbero quindi entrambe due reti di curve razionali normali d'ordine $n+1$, e quindi la Φ si ridurrebbe ad una F_0, e contemporaneamente si staccherebbero dalla intersezione delle (29) gli spazi fondamentali di un sistema. Tutto ciò costituisce di per se un modo di attacco abbastanza elegante del problema che sarebbe degno di appropriati sviluppi.

20. — Dal punto di vista pratico della manipolazione delle formule trovate sarà certamente opportuno attenersi in ogni singolo caso alla specializzazione della generazione proiettiva della F_0, quale considerata al n. 12. È appena il caso di avvertire che essa può pure essere effettivamente invertita, ossia che, volendo generare una F_0, si può sempre scegliere gli S_{n+1} σ_i passanti per uno stesso spazio S_k con k eguale alla massima dimensione che appaia fra quelle degli spazi fondamentali (quindi $k \leq n-1$), ed in modo che in quello S_k si taglino tre S_{n+2} omologhi delle stelle di centri α'_i.

Le (28), qualora quello S_k si prenda ad esempio nello spazio: $x_0 = x_1 = \ldots = x_{r-k-1} = 0$, si semplificano in modo assai conveniente per le applicazioni pratiche.

21. — Segnalaremo, ora, senza alcuna intenzione di completezza nè di approfondimenti, alcune osservazioni relative alle coppie di reti associate contenute su una superficie F_0^{2n+2}, dello S_{n+4}.

Sappiamo già che quelle coppie provengono dalle sezioni spezzate della superficie F_0 con gli iperpiani che sono n–tangenti ad essa, e che il sistema ∞^4 che si ottiene si spezza in un certo numero di componenti irriducibili. Ogni componente individua una coppia di reti associate, ed il numero di queste coppie è dato dalla metà del numero delle curve C^{n+1} razionali normali passanti per due punti generici di F_0. Infatti viceversa una C^{n+1} razionale e normale individua anzitutto la sua rete residua rispetto il sistema $|C|$, e quindi una rete cui essa appartiene.

È d'altra parte evidente che il numero delle C^{n+1} di quel tipo passanti per due punti di F_0, non essendo nullo perchè almeno eguale a due, poichè si presenta come grado di certi sistemi di condizioni algebriche, quali ad esempio le (16) e (16') insieme, che ammettono soluzioni, *sarà in generale maggiore di due e sarà anzi crescente con l'ordine* n *della* T^n.

Anche se si considera il sistema algebrico ∞^1 ottenuto considerando le curve C con $n-1$ nuovi punti doppi di cui due fissi, il numero delle curve di tale sistema dotate di un ulteriore punto doppio si presenta come funzione crescente dell'indice ν_1 del sistema, e quindi anche di n.

Senza addentrarci nel calcolo effettivo del numero N, che presenta alcune difficoltà qualora non si voglia limitare i tipi di trasformazione, osserviamo che il calcolo diviene immediato e semplice in particolari casi concreti, e diamo, come esempio, il numero N_j nel caso di una trasformazione di DE JONQUIÈRES [15].

In tal caso la rete ρ^n ha un punto O $(n-1)$-plo e $(2n-2)$ punti base semplici P_i. Si consideri allora una curva razionale γ^i con $2 < 2i < n+1$ che abbia in O uu punto $(i-1)$-plo e $2i-2$ punti base in certi P_i: la curva residua di γ^i rispetto una generica curva C del sistema $|C| = |a + \rho^n|$, dove a è una retta di π, è una γ^{n+1-i} avente in O un punto $(n-1)$-plo e altri $2(n+1-i)-2$ punti base nei P_j residui. Le due curve γ^i e γ^{n+1-i} possono variare in due reti omaloidiche ed hanno grado relativo n: quindi rappresentano evidentemente una coppia di reti di F soddisfacenti ai nostri requisiti. È anche evidente che quelle così trovate sono le uniche coppie di reti associate. *Si trova dunque in tal caso:*

$$N_j = 1 + 1/2 \sum_{l=1}^{n-2} \binom{2n-2}{2l} = 2^{2n-4} \quad [16],$$

Il calcolo non è certo più complicato neppure per altri tipi speciali.

L'esistenza su una F_0 di più d'una coppia di reti associate per $n > 2$, permette anche di considerare *un metodo abbastanza semplice di classificazione delle* T^n. Infatti il sistema lineare relativo alla F_0^{2n+2} si potrà sempre ottenere sommando due reti omaloidiche di ordini $r < n$ e $n+1-r$, in modo che due curve delle due reti abbiano n punti comuni fuori dei punti base [17].

Questo concede di determinare abbastanza velocemente le T^n note le T^i con $i \leq n-1$.

Da questo punto di vista interesserebbe molto conoscere l'ordine minimo delle possibili reti che appaiono come possibili addendi in un sistema lineare immagine di una F_0^{2n+2}.

Si noti ancora che si può qui sciogliere un dubbio che si è lasciato impregiudicato nel n. 2.

Le diverse coppie di reti associate sono fra loro omografiche in una omografia dello S_{n+4} in se.

Infatti se anzichè proiettare F dallo spazio α' di una C' di una coppia di reti, essa si proietta dallo spazio $\bar{\alpha}'$ di una $\bar{C}'$ dell'altra coppia, le C' e le $\bar{C}'$ si proiettano sempre in due reti omaloidiche dello stesso ordine, che dovendo dare sommate con le rette due sistemi lineari dello stesso tipo, sono pure o dotate degli stessi punti base o coniugate. Quindi si può sempre

(15) In tal caso la F_0 è una superficie a curve sezioni iperellittiche.

(16) Appare probabile che N_j costituisca il massimo di N per ogni valore di n.

(17) Si noti che ciò equivale al teorema di aritmetica che: « *se si considerano numeri* $\mathrm{n_i}$ *tali che:* $\Sigma\, \mathrm{n_i} = 3(\mathrm{n}-1)$ *e* $\Sigma\, \mathrm{n_i}^2 = \mathrm{n}^2 - 1$ *per un certo* n, *si possono sempre trovare certi numeri* i *ed* $\mathrm{i_r}$ *e* j *e* $\mathrm{j_s}$ *dei quali alcuni eventualmente nulli tali che:* $\mathrm{i}+\mathrm{j} = \mathrm{n}+1$, $\Sigma\, \mathrm{i_r} = 3(\mathrm{i}-1)$, $\Sigma\, \mathrm{i_r}^2 = \mathrm{i}^2 - 1$, *e* $\mathrm{ij} - \Sigma\, \mathrm{i_r j_r} = \mathrm{n}$.

legare fra di loro le due coppie in modo che si corrispondano reti di eguale tipo. Inoltre la trasformazione birazionale piana che si ottiene associando alle rette del piano le curve della rete omologa in un'altra coppia, trasforma il sistema delle curve C in se stesso, e quindi a quella trasformazione resta associata una omografia Ω dello S_{n+4} in sè che trasforma F_0 in se stessa, scambiando fra di loro due coppie di reti associate, che è appunto quanto avevamo enunciato.

Da qui si ha un nuovo interesse allo studio di queste coppie di reti, che resta dunque collegato anche con i gruppi ∞^8 di omografie trasformanti F_0 in se stessa, di cui qui si dimostra così anche l'esistenza.

Se sulla F_0 esistono solo due reti associate, non esistono ovviamente omografie trasformanti in se stessa F_0, a meno che T^n non sia involutoria ([18]), ma ciò succede solo per $n=2$, in cui appunto T^n è involutoria. Dunque ogni F_0 ammette $\binom{N}{2}$ gruppi di ∞^8 omografie che la trasformano in se stessa scambiando due delle sue coppie di reti associate, ovvero per $N=1$, ammette un gruppo ∞^8 di omografie involutorie che scambiano fra loro le uniche due reti della F^6.

22. — Concludendo è dunque senz'altro lecito affermare che le F_0^{2n+2}, dello S_{n+4} costituiscono un modello proiettivo delle T^n fra due piani, in quantochè esse individuano lo stesso tipo di T^n a qualunque coppia di reti ci si riferisca fra le N contenute su F_0.

Ad ogni F_0^{2n+2} restano anche collegate, in posizione congiunta, altrettante varietà Σ_{n+3}^3 quante sono le coppie di reti, e queste Σ_{n+3}^3 risultano dello stesso tipo proiettivo perchè le omografie che trasformano una coppia di reti in un'altra, trasformano anche la Σ^3 congiunta alla prima coppia nella Σ^3 congiunta all'altra.

Ma il tipo proiettivo della Σ_{n+3}^3 non individua generalmente il tipo proiettivo della F_0, e dentro quindi una certa Σ_{n+3}^3 si trova un numero finito di schiere infinite di F_0 tali che due schiere sono di diverso tipo proiettivo, mentre le F_0 di una stessa schiera sono trasformate omografiche di una qualsiasi F_0 della schiera nelle omografie che trasformano in se stessa la Σ associata ad una coppia di reti (e quindi le altre).

Di tutti questi enti possediamo ora generazioni proiettive e quindi rappresentazioni analitiche.

Inoltre rapporti stretti sono stati scoperti tra le T^n e le $(n+1)$-ple di stelle in quella particolare situazione proiettiva che abbiamo chiamato una G-generazione.

([18]) Cfr. L. GODEAUX, *Op. cit.* in ([4]), pp. 28 e sg.

Restano così presso a poco soddisfatte le varie esigenze d'indagine che ci eravamo proposte.

Tuttavia restano aperte varie ed importanti questioni relative alla T^n nel nostro quadro di studio.

Centrale in tale senso si presenterebbe la ricerca di una espressione semplice che esprima le condizioni perchè $(n+1)$-stelle si trovino nelle condizioni della G-generazione: essa promuoverebbe largamente la classificazione delle T^n ed in modo elegante, e probabilmente migliorerebbe le rappresentazioni analitiche da noi fornite.

Ancora interessante sarà indagare sul carattere N e prima di tutto su una sua eventuale espressione generale e quindi sulle sue relazioni con i caratteri di una T^n.

Infine notiamo che quanto abbiamo qui fatto sul piano, sarebbe più prezioso fatto nello spazio, e ciò perchè qui meno si conoscono i fenomeni delle trasformazioni birazionali, ed anzi un lato notevole del nostro studio è che esso offre qualche idea che, forse senza eccessive diversità se pure con più fatica, potrebbe ancora servire nello spazio.