Sur une règle de Laguerre.

Memoria di M. A. OSTROWSKI (Bâle).

Sunto. - *Un teorema dovuto a* LAGUERRE *dà un limite superiore per il numero delle radici* $> \alpha$, $\alpha > 0$, *di un' equazione algebrica. In questa nota il teorema di* LAGUERRE *è provato con un ragionamento che mostra che il limite di* LAGUERRE *non è mai inferiore a quello ottenuto col teorema di* BUDAN-FOURIER.

Summary. - *A theorem due to* LAGUERRE *gives a particularly simple and generally very precise upper limit for the number of roots* $> \alpha$, $\alpha > 0$, *of an algebraic equation. A new proof of this theorem is given which shows that* LAGUERRE*'s bound is never less than that obtained from* BUDAN-FOURIER *theorem.*

1. LAGUERRE a donné 1879 ([1]) une règle pour trouver une borne supérieure pour le nombre des racines supérieures à un $\alpha > 0$, dans le cas d'un polynôme $f(x)$. Cette règle est plus facile à appliquer que celle contenue dans le théorème de BUDAN-FOURIER. Dans ce qui suit nous donnons une démonstration de la règle de LAGUERRE qui permet de montrer que *cette règle n' est jamais meilleure que celle de* BUDAN-FOURIER.

2. Posons

$$f(x) = f_n(x) = a_0 x^n + \dots + a_n\,, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

$$f_\nu(x) = a_0 x^\nu + \dots + a_\nu \qquad (\nu = 0,\ 1, \dots,\ n-1). \tag{2}$$

On calcule, comme on sait, $f(x)$ le plus rapidement en utilisant la relation récurrente

$$f_{\nu+1}(x) = x f_\nu(x) + a_{\nu+1} \qquad (\nu = 0,\ 1, \dots,\ n-1). \tag{2}$$

Ce calcul donne en même temps la valeur correspondante de tout $f_\nu(x)$.

Nous utiliserons dans ce qui suit le symbole $W(u_1, u_2, \dots, u_k)$ pour indiquer le nombre des variations des signes dans la suite $u_1, u_2, \dots, u_k$ (en supprimant les u_ν qui ont la valeur 0). Alors nous posons

$$B_f(x) = W(f(x),\ f'(x), \dots,\ f^{(n)}) \tag{4}$$

et de même dans une notation facile à comprendre

$$B_f(x \pm 0) = W(f(x \pm 0),\ f'(x \pm 0), \dots,\ f^{(n-1)}(x \pm 0),\ f^{(n)}). \tag{5}$$

Il est presqu' évident que l'on a toujours

$$B_f(x + 0) = B_f(x). \tag{6}$$

Enfin, nous posons

$$L_f(x) = W(f_n(x),\ f_{n-1}(x), \dots,\ f_0). \tag{7}$$

([1]) Cf. *Oeuvres de Laguerre,* I, pp. 6, 75.

3. Le théorème du Budan-Fourier peut être écrit dans la forme suivante (on suppose $a < b$) qui embrasse quatre cas différents:

$$B_f(a \pm 0) - B_f(b \pm 0) = N_f(a \pm 0,\ b \pm 0) + \Delta_f(a \pm 0,\ b \pm 0). \tag{8}$$

Ici le symbole $N_f(a \pm 0,\ b \pm 0)$ exprime le nombre des racines de f (les racines multiples comptées le nombre correspondant de fois) contenues suivant le cas entre les limites $a - 0,\ b + 0$ ou bien $a + 0,\ b - 0$ ou bien $a - 0$, $b - 0$ ou bien $a + 0,\ b + 0$. L'expression Δ_f est un entier pair non-négatif. En prenant en particulier $b = \infty$ on obtient de (8) la relation

$$B_f(a \pm 0) = N_f(a \pm 0,\ \infty) + \Delta_f(a \pm 0,\ \infty). \tag{9}$$

On voit donc que le nombre des racines de $f(x)$ supérieures à un nombre α est au plus égal à $B_f(\alpha + 0) = B_f(\alpha)$ et que la différence est un entier pair non-négatif. La règle correspondante de Laguerre dit que le nombre des racines de f supérieures à α est, pour $\alpha > 0$, $f(\alpha) \neq 0$, au plus égal à $L_f(\alpha)$ et que la différence est un entier pair non-négatif.

4. Nous allons démontrer que *pour un α quelconque > 0 la différence* $\mathrm{L_f}(\alpha) - \mathrm{B_f}(\alpha)$ *est un nombre non-négatif qui est pair, si* $\mathrm{f}(\alpha) \neq 0$ *et aussi pour* $\mathrm{f}(\alpha) = 0$, *si le nombre de racines de* f *comprises entre* $+0$ *et* $\alpha + 0$ *est impair, tandis que pour* $\mathrm{f}(\alpha) = 0$, *si* $\mathrm{f}(x)$ *a un nombre pair de racines entre* $+0$ *et* $\alpha + 0$, *la différence en question est positive et impaire.*

5. Dans ce qui suit, α sera toujours un nombre fixe et positif. Posons

$$\varphi(x) = f_0(\alpha)x^{n-1} + f_1(\alpha)x^{n-2} + \dots + f_{n-1}(\alpha). \tag{10}$$

On a en différentiant l'identité connue et facile à vérifier

$$f(x) = (x - \alpha)\varphi(x) + f(\alpha): \tag{11}$$

$$f^{(\nu+1)}(\alpha) = (\nu + 1)\varphi^{(\nu)}(\alpha) \qquad (\nu = 0,\ 1, \dots,\ n - 1). \tag{12}$$

6. Il résulte de la définition (4) et de la formule (12), si $f(\alpha) \neq 0$, $f'(\alpha) \neq 0$:

$$B_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ f'(\alpha)) + W(\varphi(\alpha),\ \varphi'(\alpha), \dots,\ \varphi^{(n-1)}(\alpha)),$$

$$B_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ \varphi(\alpha)) + B_\varphi(\alpha) \qquad (f(\alpha)f'(\alpha) \neq 0). \tag{13}$$

Supposons que $f(\alpha) \neq 0$, mais que l'on ait

$$f^{(\sigma)}(\alpha) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots,\ s - 1), \quad f^{(s)}(\alpha) \neq 0. \tag{14}$$

Alors on a

$$B_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ f^{(s)}(\alpha)) + W(\varphi^{(s-1)}(\alpha),\ \varphi^{(s)}(\alpha), \dots,\ \varphi^{(n-1)}(\alpha)).$$

Or, ici le second terme de droite est en vertu de (12) et de (14) $B_\varphi(\alpha)$, tandis que $f^{(s)}(\alpha)$ a le même signe que $\varphi^{(s-1)}(\alpha)$, donc aussi le même signe que $\varphi(\alpha+0)$. On a donc la relation suivante généralisant la relation (13):

$$B_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ \varphi(\alpha+0)) + B_\varphi(\alpha) \qquad (f(\alpha)\neq 0). \tag{15}$$

7. Supposons encore que $f(\alpha)\neq 0$; alors il résulte de (7), si $f_{n-1}(\alpha)\neq 0$,

$$L_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ f_{n-1}(\alpha)) + W(f_{n-1}(\alpha),\ f_{n-2}(\alpha), \ldots,\ f_0).$$

Le second terme de droite est ici évidemment en vertu de (10) $B_\varphi(0) = B_\varphi(+0)$. Dans le premier terme de droite $f_{n-1}(\alpha)$ a le signe de $\varphi(+0)$ de sorte que l'on obtient

$$L_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ \varphi(+0)) + B_f(+0) \qquad (f(\alpha)f_{n-1}(\alpha)\neq 0). \tag{16}$$

Supposons maintenant que l'on ait encore $f(\alpha)\neq 0$, mais pour un $k>1$

$$f_{n-\varkappa}(\alpha)=0 \quad (0<\varkappa<k), \qquad f_{n-k}(\alpha)\neq 0. \tag{17}$$

Alors on a

$$L_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ f_{n-k}(\alpha)) + W(f_{n-k}(\alpha),\ f_{n-k-1}(\alpha), \ldots,\ f_0). \tag{18}$$

Ici le second terme est encore $B_\varphi(+0)$, tandis que $f_{n-k}(\alpha)$ est le dernier coefficient différent de 0, de $\varphi(x)$ et a le signe de $\varphi(+0)$.

Nous obtenons donc maintenant en généralisant (16)

$$L_f(\alpha) = W(f(\alpha),\ \varphi(+0)) + B_\varphi(+0) \qquad (f(\alpha)\neq 0). \tag{19}$$

8. En soustrayant (15) de (19) on obtient en vertu de (6)

$$L_f(\alpha) - B_f(\alpha) = [B_\varphi(+0) - B_\varphi(\alpha+0)] + [W(f(\alpha),\ \varphi(+0)) - W(f(\alpha),\ \varphi(\alpha+0))], \tag{20}$$

donc d'après (8) appliquée à $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} L_f(\alpha) - B_f(\alpha) = {} & N_\varphi(+0,\ \alpha+0) + \Delta_\varphi(+0,\ \alpha+0) + \\ & + [W(f(\alpha),\ \varphi(+0)) - W(f(\alpha),\ \varphi(\alpha+0))]. \end{aligned} \tag{21}$$

Ici l'expression entre crochets est 0, si $\varphi(+0)$ et $\varphi(\alpha+0)$ ont le même signe. Mais alors $N_\varphi(+0,\ \alpha+0)$ est pair, donc $L_f(\alpha) - B_f(\alpha)$ est aussi pair et non-négatif. Si au contraire les signes de $\varphi(+0)$ et de $\varphi(\alpha+0)$ sont différents, l'expression entre crochets est $+1$ ou -1. Mais alors $N_\varphi(+0,\ \alpha+0)$ est impair de sorte que $L_f(\alpha) - B_f(\alpha)$ reste toujours non-négatif et pair, si $f(\alpha)\neq 0$.

9. Soit maintenant $f(\alpha)=0$. Alors on a d'après (12):

$$B_f(\alpha)=B_\varphi(\alpha). \tag{22}$$

D'autre part on a évidemment dans notre cas

$$L_f(\alpha)=B_\varphi(+0), \tag{23}$$

donc d'après (8) appliquée à φ:

$$L_f(\alpha)-B_f(\alpha)=B_\varphi(+0)-B_\varphi(\alpha+0)=N_\varphi(+0,\ \alpha+0)+\Delta_\varphi(+0,\ \alpha+0). \tag{24}$$

Or, $N_\varphi(+0,\ \alpha+0)$ est d'une unité plus petit que $N_f(+0,\ \alpha+0)$: nous avons finalement

$$L_f(\alpha)-B_f(\alpha)=N_f(+0,\ \alpha+0)-1+\Delta_\varphi(+0,\ \alpha+0), \tag{25}$$

et la démonstration du théorème énoncé au n. 4 est achevée [2].

---

[2] Il existe une seconde règle de LAGUERRE d'après laquelle le nombre des racines de f comprises entre 0 et α, $\alpha>0$, est au plus égal au nombre des variations de signe dans la suite

$$a_n,\ a_n+a_{n-1}\alpha,\ a_n+a_{n-1}\alpha+a_{n-2}\alpha^2,\ldots,\ a_n+a_{n-1}\alpha+\ldots+a_0\alpha^n.$$

Cette règle se déduit d'ailleurs facilement de la première règle citée au n. 4.

Il n'est pas sans intérêts que la seconde règle de LAGUERRE n'est pas « comparable » avec celle de BUDAN-FOURIER. En effet, dans le cas du polynôme $2x^2-5x+4$ on obtient pour l'intervalle (0, 1) la borne 2 par la seconde règle de LAGUERRE et la borne 0 par la règle de BUDAN-FOURIER. Cette dernière est donc dans cet exemple meilleure. Au contraire, dans le cas du polynôme x^2-x+2 on obtient pour l'intervalle (0, 1) la borne 0 par la seconde règle de LAGUERRE et la borne 2 par la règle de BUDAN-FOURIER.