Il principio di reciprocità nella Fisica.

Memoria di MARCELLO LELLI (a Bologna).

1. Negli ultimi decenni sono apparsi numerosi lavori riferentisi a particolari forme del cosidetto *principio di reciprocità*, principio che esercita sui Fisici, a quel che sembra, una particolare attrattiva, giustificata del resto dalle varie applicazioni pratiche delle quali, in qualche caso, esso principio è capace.

Tutte queste forme di uno stesso principio sono evidentemente legate da una certa analogia, da alcuni Autori, come il DONATI e il PUPPINI, ripetute volte posta in luce, la quale risulta dall'essere ognuno di tali principi fondato sulla proporzionalità intercedente fra due elementi caratteristici di uno stesso fatto fisico.

Il prof. BURGATTI, nelle sue *Lezioni sulla teoria dell' elasticità* dettate all' Università di Bologna e in nota a una recensione (1) sul volume del prof. COLONNETTI *Principi di statica dei solidi elastici,* fece inoltre notare che tali principi provengono da un' unica formula generale, indicata nel-l'*Analyse vectorielle générale* di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, e che si verificano quando sia soddisfatta una certa condizione, che Egli chiamò *di reciprocità.*

Credo utile riprendere questo importante argomento, con l'intento di indicare altre due condizioni di reciprocità le quali, unitamente a quella del BURGATTI, costituiscono i capisaldi di ogni principio di reciprocità.

2. Siano $\alpha(P)$, $\boldsymbol{u}(P)$ un' omografia e un vettore, variabili entro uno spazio S a tre dimensioni, funzioni finite, continue e monodrome, insieme alle loro derivate prime.

In ogni punto di S vale la relazione:

$$\operatorname{div}(\alpha \boldsymbol{u}) = I_1\left(\alpha \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) + \operatorname{grad} K\alpha \times \boldsymbol{u},$$

(1) Bollettino del prof. LORIA.

e ancora, considerando l'omografia coniugata $K\alpha$:

$$\operatorname{div}(K\alpha\boldsymbol{u}) = I_1\left(K\alpha\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) + \operatorname{grad}\alpha \times \boldsymbol{u},$$

dalla quale, integrando e applicando il teorema della divergenza, si ha:

$$\int_S \operatorname{grad}\alpha \times \boldsymbol{u}dS + \int_\sigma \boldsymbol{u}\times\alpha\boldsymbol{n}d\sigma + \int_S I_1\left(K\alpha\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)dS = 0, \tag{1}$$

dove σ è il complesso delle superficie che limitano S.

La (1) può dirsi *il teorema di Green generalizzato.*

Analogamente, considerando un'altra omografia $\beta(P)$ e un altro vettore $\boldsymbol{v}(P)$ definiti entro S, si avrà:

$$\int_S \operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{v}dS + \int_\sigma \boldsymbol{v}\times\beta\boldsymbol{n}d\sigma + \int_S I_1\left(K\beta\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)dS = 0. \tag{2}$$

Pertanto, qualunque significato fisico possano avere le omografie α, β e i vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, risulta che sempre *identicamente* sono eguali fra di loro, ed eguali a zero, i primi membri delle (1), (2); si ha cioè:

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{grad}\alpha \times \boldsymbol{u}dS + \int_\sigma \boldsymbol{u}\times\alpha\boldsymbol{n}d\sigma + \int_S I_1\left(K\alpha\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)dS =\\ = \int_S \operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{v}dS + \int_\sigma \boldsymbol{v}\times\beta\boldsymbol{n}d\sigma + \int_S I_1\left(K\beta\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)dS.\end{aligned} \tag{3}$$

Questa eguaglianza diremo *relazione identica di reciprocità.*

Supponiamo ora che sia verificata una almeno delle tre condizioni:

$$\int_S I_1\left(K\alpha\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)dS = \int_S I_1\left(K\beta\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)dS, \tag{4}$$

$$\int_S \operatorname{grad}\alpha \times \boldsymbol{u}dS = \int_S \operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{v}dS, \tag{5}$$

$$\int_\sigma \boldsymbol{u}\times\alpha\boldsymbol{n}d\sigma = \int_\sigma \boldsymbol{v}\times\beta\boldsymbol{n}d\sigma, \tag{6}$$

che chiameremo *condizioni di reciprocità* (1).

(1) La (4), anzi più particolarmente: $I_1\left(K\alpha\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) = I_1\left(K\beta\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)$, è la *condizione di reciprocità* indicata dal BURGATTI.

Corrispondentemente la *relazione identica* (3) assume sei diverse forme, a ognuna delle quali spetta la denominazione di *principio di reciprocità*.

Ne ommetto qui gli evidenti enunciati per venire immediatamente alle applicazioni.

*
* *

3. Il secondo teorema di Green. — Siano:

$$\alpha = \frac{d\boldsymbol{v}}{dP}; \quad \beta = \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}.$$

È facile verificare che la *condizione di reciprocità* (4) è soddisfatta. Infatti, se i vettori unitari $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ costituiscono la terna cartesiana di riferimento, si ha:

$$\left(K\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{i}\right)\times\boldsymbol{i} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{i}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{i}, \quad \text{ecc.}$$

dove i secondi membri sono simmetrici in $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Sommando i primi membri risulta $I_1\left(K\alpha\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right)$, e, scambiando α con β e $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{v}$, $I_1\left(K\beta\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right)$.

Tali espressioni sono dunque eguali e la (3) assume pertanto la forma:

$$\int_S (\Delta'\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} - \Delta'\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\,dS = -\int_\sigma\left(\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{n}\right)d\sigma, \tag{7}$$

espressione vettoriale di quello che si suole chiamare il secondo teorema di GREEN, o il lemma di GREEN.

Volendone l'enunciato scalare basta porre:

$$\boldsymbol{u} = \varphi\boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{v} = \psi\boldsymbol{a},$$

dove φ, ψ sono omotetie, cioè funzioni scalari, e $\boldsymbol{a}$ è un vettore costante in tutto S. Si ottiene:

$$\int_S (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dS = -\int_\sigma\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{7'}$$

*
* *

4. Il teorema di Betti. — Sia lo spazio S occupato da un solido elastico, non necessariamente isotropo, e siano β, $\boldsymbol{s}$; β', $\boldsymbol{s}'$ due sistemi di omografie delle tensioni e di spostamenti provocati da due diversi sistemi di forze $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$; $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{F}'_\sigma$ agenti nell'interno e sulla superficie σ che limita lo spazio S.

Ponendo nella (4) β, β' al posto di α, β ed $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ al posto di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, si riscontra che essa è verificata.

Infatti, chiamando α, α' le omografie $\frac{d\boldsymbol{s}}{dP}$, $\frac{d\boldsymbol{s}'}{dP}$ delle deformazioni, si ha:

$$I_1(\beta D\alpha') = I_1(\beta' D\alpha),$$

per essere (come risulta dall'ammettere l'esistenza di un potenziale elastico, funzione quadratica omogenea delle sole deformazioni) ciascun membro simmetrico nelle componenti di $D\alpha$ e $D\alpha'$.

E poichè:

$$I_1(\beta D\alpha') = I_1(\beta\alpha'); \quad I_1(\beta' D\alpha) = I_1(\beta'\alpha),$$

è verificata anche l'eguaglianza:

$$I_1(\beta\alpha') = I_1(\beta'\alpha),$$

in ogni punto di S, cioè la (4).

Pertanto la (3), se si tien conto delle equazioni dell'equilibrio:

$$\begin{cases} \rho\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\beta, & \rho\boldsymbol{F}' = \operatorname{grad}\beta' \\ \boldsymbol{F}_\sigma = \beta\boldsymbol{n}, & \boldsymbol{F}'_\sigma = \beta'\boldsymbol{n} \end{cases}$$

(ρ densità, $\boldsymbol{n}$ normale interna), assume la nota forma:

$$\int_S \rho\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{s}'dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma\times\boldsymbol{s}'d\sigma = \int_S \rho\boldsymbol{F}'\times\boldsymbol{s}dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}'_\sigma\times\boldsymbol{s}d\sigma. \tag{8}$$

5. Il secondo principio di reciprocità. — Anche il cosidetto *secondo principio di reciprocità*, enunciato la prima volta dal LAND [1] nel 1887 e di cui in seguito il COLONNETTI [2] ha dato due diverse dimostrazioni, può dedursi dalla (3) o ancora dalla (1).

---

(1) Wochenblatt f. Baukunde, gennaio 1887, pag. 25. Cfr. anche G. ALBENGA: *Sul teorema di reciprocità del Land*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1915.

(2) *Sul principio di reciprocità*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1912, pag. 393. G. COLONNETTI: *Principi di statica dei solidi elastici*. E. Spoerri, 1916.

Come è noto, per dedurre tale principio, si immagina che in un corpo elastico, in equilibrio sotto l'azione di date forze, sia effettuato un taglio σ_1, e che nel tempo stesso siano applicati sulle due facce del taglio due sistemi di forze distribuite, equivalenti alle tensioni interne che prima agivano attraverso σ_1. Supposto poi che alle due facce di σ_1 venga impresso un moto relativo di corpo rigido, tale cioè che l'una faccia compia rispetto all'altra una traslazione ed una rotazione, si scrive l'espressione del teorema dei lavori virtuali.

Orbene è precisamente la formula (1) quella che qui conviene. Infatti, se indichiamo con:

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$, $\boldsymbol{F}_{\sigma_1}$ le forze di massa, in superficie e quelle ora applicate su una delle due facce del taglio σ_1 (sull'altra saranno eguali ed opposte);

$\boldsymbol{s}$, β gli spostamenti dei punti del corpo seguiti all'applicazione delle forze $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$ e la relativa omografia delle tensioni;

$\delta\boldsymbol{s}$ gli ulteriori spostamenti dovuti al moto di corpo rigido impresso alle facce di σ_1 (sopra ciascuna di queste ultime li indicheremo con $\delta\boldsymbol{s}'$, $\delta\boldsymbol{s}''$ rispettivamente);

β' la nuova omografia delle tensioni,

la (1), ove si pongano in essa

$$\alpha = \beta; \quad \boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{s},$$

diviene:

$$\int_S \rho\boldsymbol{F} \times \delta\boldsymbol{s}\, dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta\boldsymbol{s}\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{F}_{\sigma_1} \times (\delta\boldsymbol{s}' - \delta\boldsymbol{s}'')\, d\sigma_1 + \tag{9}$$

$$+ \int_S I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\delta\boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS = 0.$$

Ma $K\beta = \beta$, e inoltre:

$$\int_S I_1 \left\{ \beta \frac{d\delta\boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS = 0,$$

per il teorema di MENABREA [1].

Pertanto potrà scriversi

$$\int_S \rho\boldsymbol{F} \times \delta\boldsymbol{s}\, dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta\boldsymbol{s}\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{F}_{\sigma_1} \times (\delta\boldsymbol{s}' - \delta\boldsymbol{s}'')\, d\sigma_1 = 0. \tag{10}$$

---

[1] Tale espressione, variazione del lavoro di deformazione, è poi evidentemente nulla quando la natura dei vincoli che legano il corpo, il taglio σ_1, e il moto di corpo rigido impresso siano tali da non importare alcuna deformazione elastica del corpo.

Volendo ricavare la stessa espressione mediante la più recente delle dimostrazioni date dal COLONNETTI, senza cioè ricorrere al teorema di MENABREA, basta valersi della (3) invece che della (1).

Posto in essa

$$\alpha = \beta, \quad \boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{s}\,; \quad \beta = \beta' - \beta, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{s},$$

si ha infatti

$$(11) \quad \int_S \rho\boldsymbol{F} \times \delta\boldsymbol{s}\,dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta\boldsymbol{s}\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{F}_{\sigma_1} \times (\delta\boldsymbol{s}' - \delta\boldsymbol{s}'')\,d\sigma_1 + \int_S I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\delta\boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS =$$

$$= \int_S I_1 \left\{ K(\beta' - \beta) \cdot \frac{d\boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS.$$

poichè è $\operatorname{grad}\beta = \operatorname{grad}\beta'$ ovunque, e $\beta\boldsymbol{n} = \beta'\boldsymbol{n}$ sopra σ e σ_1.

Ma, in base alle stesse considerazioni accennate al numero precedente, si ha:

$$I_1 \left\{ \beta \frac{d\delta\boldsymbol{s}}{dP} \right\} = I_1 \left\{ (\beta' - \beta) \frac{d\boldsymbol{s}}{dP} \right\},$$

corrispondendo le omografie delle deformazioni $\frac{d\delta\boldsymbol{s}}{dP}$, $\frac{d\boldsymbol{s}}{dP}$ rispettivamente a quelle delle tensioni $\beta' - \beta$ e β.

Pertanto la (11) dà ancora luogo alla (10).

Se si pone ora in quest'ultima, secondo fa il COLONNETTI nella prima delle Opere citate,

$$(12) \qquad \delta\boldsymbol{s}' - \delta\boldsymbol{s}'' = \varepsilon\boldsymbol{K} + \omega\boldsymbol{K}\wedge(P - O),$$

dove:

ε, ω sono due numeri dell'ordine di $|\delta\boldsymbol{s}|$;

$\boldsymbol{K}$ è un vettore unitario individuante l'asse del moto elicoidale risultante della traslazione e della rotazione relative impresse alle facce di σ_1;

O è un punto dell'asse suddetto;

P è un punto generico;

si ha infine:

$$(13) \qquad \int_S \rho\boldsymbol{F} \times \delta\boldsymbol{s}\,dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta\boldsymbol{s}\,d\sigma + \varepsilon\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{R} + \omega\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{M} = 0,$$

espressione generale del *secondo principio di reciprocità*, nella quale per brevità si è posto:

$$(12') \qquad \int_S \boldsymbol{F}_{\sigma_1} d\sigma_1 = \boldsymbol{R}\,; \quad \int_{\sigma_1} (P - O)\wedge\boldsymbol{F}_{\sigma_1} d\sigma_1 = \boldsymbol{M}.$$

6. Il principio del Volterra. — Nel campo dell'elasticità ha infine somma importanza, benchè meno adatto alle applicazioni che interessano gli ingegneri, il principio enunciato dal VOLTERRA fra *caratteristiche di distorsioni* e sforzi da essa generati [1], e che presenta con quello di cui s'è fatto menzione nel precedente paragrafo una notevole analogia.

Si consideri uno spazio S, multiplamente connesso, occupato da un solido elastico non soggetto all'azione di alcuna forza di massa o in superficie, ma eventualmente sottoposto a un certo sistema di sforzi interni, rappresentati da un'omografia β (funzione finita, continua, monodroma dei punti di S), dovuti a una deformazione ovunque continua e derivabile, rappresentata dall'omografia α.

Se m è l'ordine di connessione dello spazio, si suppongano eseguiti n tagli ($n < m$) indipendenti, tali cioè che ognuno diminuisca di un'unità l'ordine di connessione di S.

Ove non si applicassero in corrispondenza delle due facce di ciascuna delle superficie σ, costituenti i tagli, delle forze $\boldsymbol{F}_\sigma$ distribuite, equivalenti a quelle che prima dei tagli stessi si trasmettevano attraverso σ, le due facce subirebbero, come il VOLTERRA dimostra, un moto relativo di corpo rigido.

Applichiamo dunque a coteste facce le forze $\boldsymbol{F}_\sigma$, non solo; ma, ottenuta così la immobilità del sistema, imprimiamo noi ora un moto relativo di corpo rigido alle n coppie di superficie σ.

In virtù di queste n *distorsioni* l'omografia β delle tensioni preesistenti all'esecuzione dei tagli subirà un incremento $\delta\beta$; in particolare gli sforzi $\boldsymbol{F}_\sigma$ subiranno gli incrementi $\delta\beta\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ normale interna a ciascuna faccia delle σ); queste ultime sono pertanto le forze distribuite da applicarsi al termine delle n distorsioni al fine di mantenere l'equilibrio.

Posto poi che sia $\delta\alpha$ l'incremento dell'omografia α delle deformazioni, associando al precedente un secondo sistema di incrementi $\delta\beta'$, $\delta\alpha'$ dipendente da un secondo gruppo di n distorsioni, risulta verificata la (4), ove si faccia in essa:

$$\alpha = \delta\beta, \quad \beta = \delta\beta'$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{s}', \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}$$

($\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ sono gli incrementi dello spostamento) poichè si ha:

$$I_1 \left\{ \delta\beta \frac{d\boldsymbol{s}'}{dP} \right\} = I_1(\delta\beta\delta\alpha') = I_1(\delta\beta'\delta\alpha) = I_1 \left\{ \delta\beta' \frac{d\boldsymbol{s}}{dP} \right\} \text{ [2]}.$$

[1] V. VOLTERRA: *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1907, pag. 433.

[2] Il principio della sovrapposizione degli effetti, qui valevole, permette di trattare il solido elastico come se fosse inizialmente libero da tensioni interne.

Perciò la (3), tenuto conto dell'assenza di forze di massa e sulle superficie non costituenti i tagli, diviene:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma_i}(\boldsymbol{s}'_1-\boldsymbol{s}'_2)\times\delta\beta\boldsymbol{n}\,d\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma_i}(\boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_2)\times\delta\beta'\boldsymbol{n}\,d\sigma_i,$$

nella quale gli indici 1, 2 si riferiscono a ciascuna delle due facce di ogni taglio.

Specificando la natura della discontinuità degli spostamenti impressi [1] e introducendo la risultante e il momento risultante delle forze $\delta\beta\boldsymbol{n}$, e $\delta\beta'\boldsymbol{n}$ (*caratteristiche delle distorsioni*), così come s' è fatto nel numero precedente con le posizioni (12), (12'), si ha:

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{K}'\times(\varepsilon'\boldsymbol{R}+\omega'\boldsymbol{M})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{K}\times(\varepsilon\boldsymbol{R}'+\omega\boldsymbol{M}'),$$

espressione del principio enunciato dal VOLTERRA.

*
* *

7. I principî di Volterra e di Donati nella Elettrodinamica. — Mostrerò in questo e in alcuni dei seguenti paragrafi come si possano dedurre in modo simile anche i principî di reciprocità relativi ai fenomeni elettrici, e poichè i fatti fisici che qui prenderemo in esame si svolgono generalmente in uno spazio avente una dimensione predominante sulle altre due, premetterò alcune opportune modificazioni delle formule (3), (4), (5), (6).

8. Si consideri, entro lo spazio S, una superficie σ aperta, limitata dal contorno l e in ogni suo punto si conduca la normale.

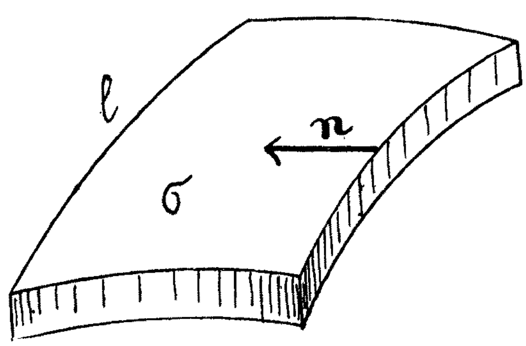

Fig. 1.

Se sopra ognuna di queste normali si prende, a partire da σ e sempre dalla stessa parte, uno stesso segmento ε, il luogo degli estremi dei segmenti così costruiti sarà una superficie σ' che, insieme a σ e alla superficie laterale che si appoggia al contorno l (fig. 1), limita un certo spazio al quale possono applicarsi le relazioni (3)... (6).

[1] Non è evidentemente necessario, al fine di ottenere una reciprocità, che la discontinuità in questione consista in un moto relativo di corpo rigido. Ove ciò non fosse risulterebbero allora discontinue sopra le σ le deformazioni $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$.

Passando al limite per $\varepsilon = 0$, risultano: *la relazione identica di reciprocità:*

$$(3') \qquad \int_\sigma \operatorname{grad} \alpha \times \boldsymbol{u} d\sigma + \int_\sigma I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} d\sigma + \int_l \boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{n} dl =$$

$$= \int_\sigma \operatorname{grad} \beta \times \boldsymbol{v} d\sigma + \int_\sigma I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \right\} d\sigma + \int_l \boldsymbol{v} \times \beta \boldsymbol{n} dl = 0,$$

e le tre *condizioni di reciprocità*:

$$(4') \qquad \int_\sigma I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} d\sigma = \int_\sigma I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \right\} d\sigma,$$

$$(5') \qquad \int_\sigma \operatorname{grad} \alpha \times \boldsymbol{u} d\sigma = \int_\sigma \operatorname{grad} \beta \times \boldsymbol{v} d\sigma,$$

$$(6') \qquad \int_l \boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{n} dl = \int_l \boldsymbol{v} \times \beta \boldsymbol{n} dl,$$

nelle quali $\boldsymbol{n}$ indica la normale ad l che è tangente a σ, rivolta verso l'interno.

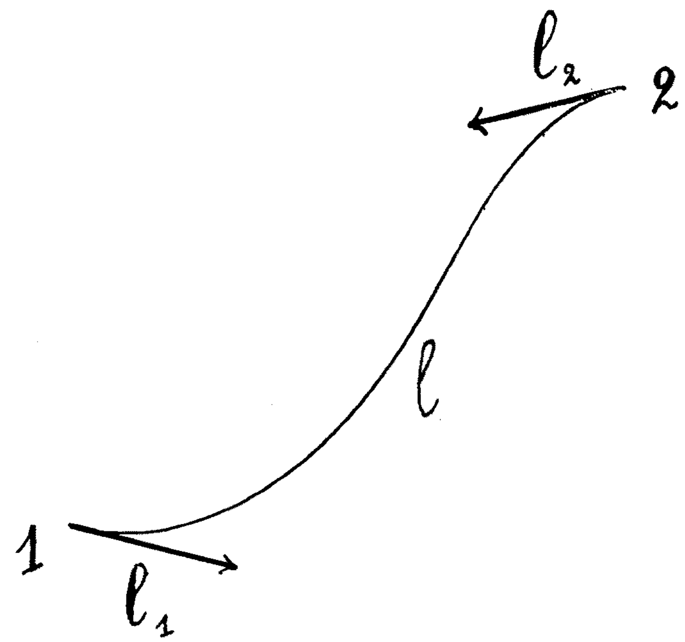

Fig. 2.

Con identico ragionamento, considerando una linea aperta l, di estremi 1, 2

(Fig. 2), si ottengono le relazioni:

$$(3'') \qquad \int_l \operatorname{grad} \alpha \times \boldsymbol{u} dl + \int_l l_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} dl + \boldsymbol{u}_1 \times \alpha \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{u}_2 \times \alpha \boldsymbol{l}_2 =$$

$$= \int_l \operatorname{grad} \beta \times \boldsymbol{v} dl + \int_l l_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \right\} dl + \boldsymbol{v}_1 \times \beta \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{v}_2 \times \beta \boldsymbol{l}_2 = 0,$$

$$(4'') \qquad \int_l l_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} = \int_l l_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \right\} dl,$$

$$(5'') \qquad \int_l \operatorname{grad} \alpha \times \boldsymbol{u} dl = \int_l \operatorname{grad} \beta \times \boldsymbol{v} dl,$$

$$(6'') \qquad \boldsymbol{u}_1 \times \alpha \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{u}_2 \times \alpha \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{v}_1 \times \beta \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{v}_2 \times \beta \boldsymbol{l}_2,$$

nelle quali $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ sono due vettori unitari tangenti alla curva l negli estremi 1, 2.

9. Tutto ciò premesso, abbiasi dapprima una distribuzione a tre dimensioni di correnti.

Lo spazio S occupato dal conduttore sia limitato dalla superficie σ, attraverso alcune zone (il cui insieme chiameremo σ_1) della quale esso è in comunicazione con l'esterno.

Entro S sia definita la funzione scalare φ, *potenziale elettrico*, derivabile, con derivate continue, ma eventualmente discontinua lungo alcune superficie che indicheremo complessivamente con σ_2, sedi di *forze elettromotrici*, che risulteranno chiuse e totalmente comprese entro S, oppure aperte, ma appoggiate al contorno σ di S.

Per tal modo lo spazio S può intendersi suddiviso, mediante le σ_2, in un certo numero di parti minori, entro le quali sarà lecito ritenere φ continua, derivabile e con derivate continue.

Insieme alla φ sia definita ancora la funzione vettoriale $\boldsymbol{i}$, *intensità della corrente* che attraversa l'unità di superficie equipotenziale (se il conduttore è isotropo), anch'essa funzione derivabile, con derivata continua.

Le quantità φ, $\boldsymbol{i}$ sono in ciascun punto dello spazio legate dalla legge di Ohm, che assume l'espressione:

$$(14) \qquad \boldsymbol{i} = -\frac{1}{R} \operatorname{grad} \varphi,$$

dove R è la resistenza offerta dall'unità di volume del conduttore.

Sarà R costante se il conduttore è omogeneo, dipendente dalle coordinate dello spazio se esso è isotropo, sarà infine un' omografia dipendente dalle coordinate dello spazio, se esso è anisotropo e non omogeneo [1].

Si considerino ora due regimi elettrici (che supporremo permanenti) $\boldsymbol{i}$, φ, E; $\boldsymbol{i}'$, φ', E' (E, E' sono le forze elettromotrici unitarie distribuite sulle superficie σ_2), e nelle (3), (4) si pongano:

$$\alpha = \varphi \quad \beta = \varphi'$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}.$$

La (4) risulta subito verificata, poichè, ad esempio, si ha:

$$I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} = I_1 \left(\varphi \cdot \frac{d\boldsymbol{i}'}{dP} \right) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i}' = 0,$$

per la permanenza del secondo regime.

Pertanto la (3) diviene:

$$\begin{aligned}(15) \qquad & \int_{\sigma_1} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 - \int_S R\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}' dS = \\ & = \int_{\sigma_1} \varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E'\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 - \int_S R\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{i} dS.\end{aligned}$$

Quando, come generalmente accade, il conduttore sia isotropo, risulta verificata anche la (5), e si ha:

$$(16) \qquad \int_{\sigma_1} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 = \int_{\sigma_1} \varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E'\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 .$$

È questo il *principio di reciprocità di Donati* esteso alle distribuzioni a tre dimensioni. Ove il sistema conduttore non sia in comunicazione con l' esterno, tale principio assume la semplice forma:

$$(17) \qquad \int_{\sigma_2} E\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 = \int_{\sigma_2} E'\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 .$$

---

[1] Può dirsi ancora che l' omografia $\frac{1}{R}$ caratterizza la conducibilità specifica del conduttore.

Quando invece manchino le discontinuità E e la corrente sia totalmente dovuta a sorgenti esterne, esso diviene

$$(18) \qquad \int_{\sigma_1} \varphi i' \times n d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} \varphi' i \times d\sigma_1 \text{ [1]}.$$

Giova osservare che la *isotropia* del mezzo, condizione sufficiente perchè valgano le (16), (17), (18), quando si confrontino due regimi permanenti, non è affatto necessaria.

Infatti a che sia verificata la condizione (5), cioè perchè sia

$$(5) \qquad \int_S Ri \times i' dS = \int_S Ri' \times i dS$$

basta assai meno; è sufficiente infatti che, pur essendo anisotropo il conduttore, sia ad esso applicabile la legge di Ohm generalizzata e che si abbia

$$Ri \times i' = KRi \times i'$$

per qualsiasi coppia (i, i'), dove KR è l'omografia coniugata di R; che è quanto dire

$$(5)''' \qquad R = KR.$$

Dunque: *perchè sia verificata la condizione* (5) *non è necessaria la isotropia del mezzo, bastando a tal fine ammettere la legge di Ohm per mezzi anisotropi e che l'omografia* K *sia una dilatazione* [2].

Se si vuole che la relazione (5) e i principi di reciprocità che ne discendono valgano per un qualsiasi spazio S considerato entro il conduttore, la condizione (5)''' diventa anche necessaria.

10. La trasformazione che le precedenti espressioni subiscono quando due od una delle dimensioni del conduttore predominino sulle altre, è immediata.

Basta premettere che in un conduttore filiforme percorso da corrente

---

(1) Questa espressione il Puppini ebbe già l'occasione di presentare, riferendosi a conduttori elettrolitici, in una Memoria: (*Modelli elettrici per lo studio delle acque filtranti*, « Il Monitore Tecnico », 1922, n. 18; *Verifica sperimentale ecc.*... « Il Monitore Tecnico », 1922, n. 35) nella quale propone di ricondurre lo studio del funzionamento idrodinamico di una falda artesiana a quello elettrodinamico di un modello elettrico di egual forma.

(2) Cfr. O. Lazzarino: Atti della R. Accad. dei Lincei, 1917, I Semestre, Fasc. II, *Sulla estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra*...

chiamasi *sezione* in un punto la superficie Ω, normale alle linee di corrente, passante per quel punto, limitata dal contorno del conduttore, e *intensità di corrente* in quella sezione il vettore risultante $\int_\Omega \boldsymbol{i} d\Omega$, che comunemente si indica ancora con $\boldsymbol{i}$.

Ma quando interessi, come nei fenomeni di induzione, la posizione geometrica del conduttore rispetto ai corpi circostanti, un conduttore filiforme verrà approssimativamente trattato come un tubo di flusso a sezione infinitesima; ciò che verrà fatto nel seguito.

Analogamente, una distribuzione superficiale, cioè una lamina piana o curva percorsa da correnti, si intenderà il luogo di una semplice infinità di linee di flusso, mentre l'intensità avrà un significato del tutto corrispondente a quello sopra definito per una distribuzione filiforme.

Ciò che invece importa rilevare si è che la funzione potenziale elettrico deve ritenersi, secondo l'esperienza, una funzione che non subisce discontinuità nel passare dalla superficie dei conduttori al coibente circostante, e che risulta nulla la derivata di tale funzione secondo una qualsiasi direzione normale a dette superficie. È dunque possibile, e in modo semplice, completare entro lo spazio coibente vicino a un conduttore filiforme o laminare, la definizione (puramente fittizia, ma fatta in maniera da conservare la continuità) delle funzioni che figurano nelle (3')... (6'), (3")... (6"), che sono state dedotte dalle (3)... (6) precisamente operando, mediante una trasformazione continua dello spazio S, sopra funzioni definite in uno spazio a tre dimensioni. Potranno cioè applicarsi le (3')... (6') alle distribuzioni superficiali, e le (3")... (6") a quelle filiformi.

Ciò premesso, abbiasi una rete di conduttori filiformi, in comunicazione con l'esterno.

Anche in questo caso, posto che in qualche ramo abbiano sede delle forze elettromotrici, intenderemo che i punti corrispondenti (punti di discontinuità della funzione φ) suddividano la rete (cfr. Fig. 3) in un certo numero r di campi lineari l separati, in ciascuno dei quali perciò il potenziale elettrico risulterà continuo.

Pertanto se con $\boldsymbol{i}$ indichiamo la corrente totale che attraversa una sezione generica Ω, e consideriamo ancora due regimi permanenti, le (4"), (5") risultano senz'altro verificate, e la (3") (cfr. n. 8) diviene:

$$\sum_1^r \boldsymbol{i}'_1 \times \varphi \boldsymbol{l}_1 + \sum_1^r \boldsymbol{i}'_2 \times \varphi \boldsymbol{l}_2 = \sum_1^r \boldsymbol{i}_1 \times \varphi' \boldsymbol{l}_1 + \sum_1^r \boldsymbol{i}_2 \times \varphi' \boldsymbol{l}_2 .$$

Se poi indichiamo con n il numero degli estremi della rete, attraverso i quali essa comunica con l'esterno, e con m [1] il numero delle discontinuità E del potenziale elettrico, e separiamo dai primi i $2m$ estremi costituenti due

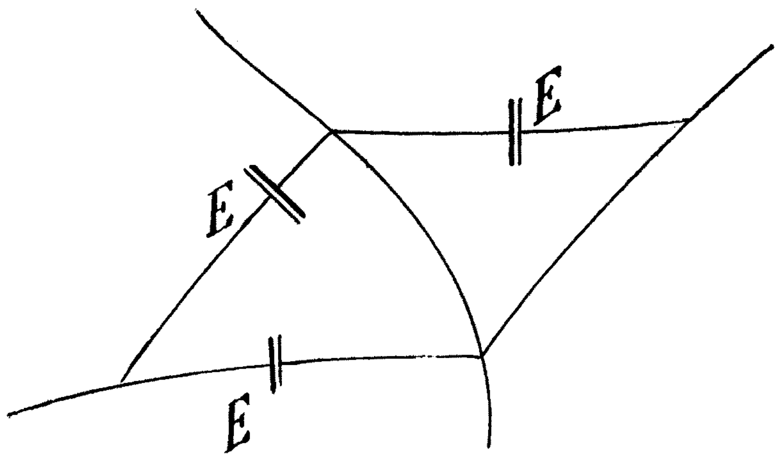

Fig. 3.

a due le forze elettromotrici E, la relazione ora scritta, ove si tenga conto anche del fatto che i vettori unitari $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ sono diretti, salvo il senso, come $\boldsymbol{i}$ ed $\boldsymbol{i}'$, assume la nota forma:

$$\sum_1^n i'\varphi + \sum_1^m i'E = \sum_1^n i\varphi' + \sum_1^m iE', \tag{19}$$

data dal Donati al suo principio [2].

Corrispondentemente ai casi che danno luogo nelle distribuzioni di spazio alle relazioni (17), (18), valgano qui le seguenti:

$$\sum_1^m i'E = \sum_1^m iE' \tag{20}$$

$$\sum_1^n i'\varphi = \sum_1^n i\varphi'. \tag{21}$$

[1] m è il numero delle località ove, o nel primo o nel secondo regime o in tutti e due, trovansi situate le forze elettromotrici.

[2] Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna. Novembre 1899, febbraio 1900, maggio 1910.

11. Del principio ora dimostrato il DONATI, nella seconda delle citate Memorie, ha dato un particolare enunciato atto a importanti applicazioni.

Si scriva la (21) relativamente al caso in cui i due regimi elettrici siano dovuti all'immissione di corrente, dapprima a mezzo di una coppia di elettrodi (a, b), poi a mezzo della coppia (c, d). Si ottiene:

$$i_{ab}(\varphi'_a - \varphi'_b) = i'_{cd}(\varphi_c - \varphi_d): \tag{22}$$

per cui, se R_{ab}, R_{cd} sono le resistenze, in virtù della legge di OHM risulta ancora:

$$\frac{\varphi'_a - \varphi'_b}{\varphi'_c - \varphi'_d} \cdot \frac{1}{R_{ab}} = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{\varphi_a - \varphi_b} \cdot \frac{1}{R_{cd}},$$

espressione che il DONATI applica alla risoluzione di alcuni quesiti di elettrodinamica.

La legge (22) va posta, per la verità, in relazione con altra, perfettamente analoga, data dal VOLTERRA nel 1882 (1), relativa a distribuzioni di spazio.

Essa si deduce dalla (18), cioè ammettendo che sia ovunque continuo il potenziale elettrico e che siano verificate le condizioni (4) e (5).

Considerati quattro punti A, B, C, D interni o sulla superficie del conduttore e tracciate, facendo centro in essi, quattro piccole sfere di raggio ε, si supponga che in un primo regime, permanente, un flusso I di corrente esca dalla sfera di centro A ed entri attraverso quella di centro B, e che successivamente durante un secondo regime, anch'esso permanente, un flusso I' esca dalla sfera di centro C e vada a quella di centro D.

La formula (18), indicando con σ_A, σ_B, σ_C, σ_D le superficie delle quattro sfere, diventa allora

$$\int_{\sigma_A+\sigma_B+\sigma_C+\sigma_D} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_{\sigma_A+\sigma_B+\sigma_C+\sigma_D} \varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma,$$

essendo φ, $\boldsymbol{i}$ il potenziale e l'intensità di corrente relative al primo regime, φ' ed $\boldsymbol{i}'$ le analoghe quantità relative al secondo.

Questa relazione risulta verificata per qualunque valore di ε; in parti-

(1) « Il Nuovo Cimento », 1882, Terza serie, Tomo XI: *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque.*

colare quando si passi al limite per $\varepsilon = 0$. Ma in tal caso si ha:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_A} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \varphi_A \boldsymbol{i}'_A \times \int_{\sigma_A} \boldsymbol{n} d\sigma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_B} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \varphi_B \boldsymbol{i}'_B \times \int_{\sigma_B} \boldsymbol{n} d\sigma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_C} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} = \varphi_C \int_{\sigma_C} \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \varphi_C I'$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_D} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} = \varphi_D \int_{\sigma_D} \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = - \varphi_D I',$$

e così dicasi dei limiti dei quattro integrali del secondo membro, i cui valori sono $\varphi'_A I$, $- \varphi'_B I$, 0, 0 rispettivamente.

Avremo dunque:

$$(\varphi_C - \varphi_D) I' = (\varphi'_A - \varphi'_B) I,$$

identica alla (22); e, se si suppone $I' = I$:

$$\varphi_C - \varphi_D = \varphi'_A - \varphi'_B, \tag{22'}$$

cioè: *se in un conduttore a tre dimensioni di cui la conducibilità varia da punto a punto si fa passare una corrente di intensità* I *da un punto* A *a un punto* B, *e in due punti* C *e* D *si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti* A *e* B *quando si faccia entrare da* C *ed escire da* D *la stessa corrente di intensità* I.

È questo il teorema di VOLTERRA, valevole evidentemente anche quando i valori φ_A, φ_B, φ'_C, φ'_D non sono finiti, purchè il loro ordine di infinito sia inferiore a quello di $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Una estensione del suo teorema fu data in seguito dal VOLTERRA nel 1915 (Rend. Accad. dei Lincei; 1° sem., pag. 231, 542) al caso di una distribuzione superficiale [1] soggetta all'azione di un campo magnetico, con la condizione che il campo agente in un regime sia eguale ed opposto a quello agente nell'altro.

---

[1] Converrebbe in questo caso valersi delle formule (3')... (6').

L'enunciato non differisce da quello sopra riportato e può senz'altro ritenersi valido anche per conduttori a tre dimensioni, non omogenei ed anisotropi [1], ma sotto particolari condizioni.

Ammesso, in tal caso, che la variazione subita dall'intensità $\boldsymbol{i}$ per effetto del campo magnetico dipenda da una certa omografia M e precisamente che questa variazione sia rappresentata dal vettore $-\frac{1}{M}\operatorname{grad}\varphi$, si assumerà come intensità di corrente l'espressione

$$\boldsymbol{i} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{M}\right)\operatorname{grad}\varphi;$$

e conseguentemente varrà la (18), o, in particolare, la (22'), quando i regimi posti a confronto siano permanenti, e quando sia verificata la condizione (5), cioè si abbia:

$$\int_S \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{M}\right)^{-1} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}' dS = \int_S \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{M}\right)^{-1} \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{i} dS.$$

Ora a questa condizione, per qualunque spazio S, si soddisfa, e solamente, supponendo

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{M} = K\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{M}\right),$$

K essendo il simbolo della omografia coniugata, cioè quando sia

$$\frac{1}{R} = K\frac{1}{R}; \quad \frac{1}{M} = -K\frac{1}{M}.$$

Le omografie $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{M}$ (quindi anche le loro inverse R ed M) devono dunque essere: l'una una *dilatazione*, l'altra un'*omografia assiale* [2].

12. Si osservi come finora si siano posti a confronto due regimi permanenti, il che importa il verificarsi della (4) o della (4''), a seconda che ci si riferisce a una distribuzione di spazio, o a conduttori filiformi.

---

[1] Cfr. E. FREDA: Rend. Acc. dei Lincei; 2° sem. 1916, pag. 28. Cfr. anche O. LAZZARINO: id. id., 1917, 1° sem., pag. 596.

[2] Cfr. O. LAZZARINO: Rend. Accad. dei Lincei; 1925, Vol. II, n. 3, 4: *Sulle condizioni di esistenza del teorema di reciprocità del Volterra.*

Orbene è importante ricordare che, ove si confrontino elementi istantanei, corrispondenti a due diversi istanti, di un regime vario, la divergenza della corrente non è generalmente nulla [1].

Pertanto, avremo che la (16), quando si tratti di conduttori isotropi o ad anisotropia soddisfacente alla condizione (5)''', diviene:

$$
(23)\qquad \begin{aligned}
&\int_{\sigma_1}\varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n}\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n}\, d\sigma_2 + \int_S \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i}'\, dS = \\
&= \int_{\sigma_1}\varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma_2 + \int_S \varphi' \operatorname{div} \boldsymbol{i}\, dS;
\end{aligned}
$$

e la (19):

$$
(24)\qquad \sum_1^n \varphi i' + \sum_1^m E i' + \sum_1^r \int_l \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i}'\, dl = \sum_1^n \varphi' i + \sum_1^m E' i + \sum_1^r \int_l \varphi' \operatorname{div} \boldsymbol{i}\, dl.
$$

Praticamente però la dipendenza dal tempo degli elementi della corrente è tale che, in confronto con la corrente *di conduzione* $\boldsymbol{i}$, quella *di spostamento* $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ è trascurabile [2].

Pertanto le (16), (19) saranno applicabili ancora ai valori istantanei di una corrente non permanente, purchè, come osserva il Donati, per forze elettromotrici si intendano le risultanti di quelle impresse e delle forze elettromotrici sviluppate per induzione.

---

[1] Indicando con $\boldsymbol{u}$ la *corrente totale* del Maxwel, e con $\boldsymbol{D}$ lo *spostamento*, si ha: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, dove la sola corrente $\boldsymbol{u}$ è solenoidale; per cui sarà solenoidale $\boldsymbol{i}$ solamente quando sia tale $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$.

[2] Indicando con $\boldsymbol{E}$ la forza elettrica, K la costante dielettrica del conduttore, λ la sua conducibilità specifica, si ha:

$$
\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{i} = \lambda \boldsymbol{E}.
$$

Perciò nel caso delle correnti alternate la condizione di trascurabilità di $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ di fronte ad $\boldsymbol{i}$, indicando con ω la pulsazione, si traduce in quella che sia trascurabile di fronte alla unità il rapporto:

$$
\frac{\frac{K}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t}}{\lambda E} = \frac{K\omega}{4\pi\lambda}.
$$

condizione che nella pratica può ritenersi sempre verificata.

Il DONATI ha fatto in proposito un' applicazione del suo principio al caso in cui la rete dei conduttori considerata al numero 10 sia attivata da forze elettromotrici alternative sinussoidali a pulsazione costante [1].

Ma non entreremo in tale questione che richiederebbe ulteriori modificazioni delle formule fondamentali, poichè nell' enunciato compaiono elementi che dipendono da variabili complesse.

Piuttosto ci proporremo di specificare la forma assunta dalle (16), (19) quando si pongano a confronto non le cosidette *caratteristiche*, ma i valori istantanei della corrente e degli altri elementi che la distinguono.

13. A tale scopo rammentiamo anzitutto che il campo elettrico, in ogni punto di uno spazio sede di fenomeni elettromagnetici, ha il valore:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi - A\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{25}$$

dove φ è il potenziale, A la costante elettromagnetica, e U è il *potenziale vettore*, definito in una distribuzione filiforme, alla quale per semplicità intendiamo per ora di riferirci, dalla relazione:

$$U = \Sigma\int_l j\frac{dl}{r}, \tag{26}$$

essendo j il modulo dell' intensità istantanea della corrente che attraversa l' elemento lineare dl, r la distanza di questo elemento dal punto nel quale si calcola il potenziale vettore.

Allora se scriviamo la legge di OHM nella forma:

$$j = \lambda E, \qquad \left(\lambda = \frac{1}{R}\right)$$

avremo, tenendo conto della (25):

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{\lambda}j - A\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{27}$$

relazione che tornerà utile nel seguito.

Ciò posto, ammettendo che la (4″) sia verificata, il che sempre accade in pratica, quando si pongano in essa:

$$\begin{cases} \alpha = \varphi & \beta = \varphi' \\ u = j' & v = j, \end{cases}$$

[1] Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 28 marzo 1917.

la (3″) assume la forma:

$$\sum_1^n j'\varphi + \sum_1^m j'E + \sum_1^r \int_l \operatorname{grad}\varphi \times j' = \sum_1^n j\varphi' + \sum_1^m jE' + \sum_1^r \int_l \operatorname{grad}\varphi' \times j\,dl.$$

Questa relazione può intendersi l'enunciato di un principio di reciprocità che lega i valori istantanei j, φ, E; j', φ', E' relativi a due diversi istanti di un regime *non stazionario*, qualora non sia soddisfatta la relazione (5″).

Ma essa, tenuto conto della (27), può anche scriversi:

$$\sum_1^n j'\varphi + \sum_1^m j'E - A\sum_1^r \int_l \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \times j'dl = \sum_1^n j\varphi' + \sum_1^m jE' - A\sum_1^r \int_l \frac{\partial \boldsymbol{U}'}{\partial t} \times j\,dl, \tag{28}$$

giacchè in ogni punto della rete si ha:

$$\frac{1}{\lambda} j \times j' = \frac{1}{\lambda} j' \times j;$$

mentre la condizione (5″) diviene:

$$\sum_1^r \int_l \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \times j'dl = \sum_1^r \int_l \frac{\partial \boldsymbol{U}'}{\partial t} \times j\,dl \ \text{[1]}. \tag{29}$$

Esaminiamo questa condizione.

Il primo membro, per la (26), può scriversi:

$$\sum_1^r \int_l \left[\sum_1^r \int_l \frac{\partial j}{\partial t} \frac{dl}{r} \right] \times j'dl,$$

e poichè la corrente che circola e la sua derivata rispetto al tempo sono le stesse in tutti i punti di uno stesso ramo, esso primo membro risulterà di termini del tipo

$$\int_{l_h} \left[\int_{l_k} \frac{\partial j_k}{\partial t} \frac{dl}{r} \right] \times j_h' dl = j_h' \frac{\partial j_k}{\partial t} \int_{l_h} dl \times \int_{l_k} \frac{dl}{r} = M_{hk} j_h' \frac{\partial j_k}{\partial t},$$

dove con h, k si indicano due rami generici.

Perciò la (29) assume la forma:

$$\sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r M_{hk} j_h' \frac{\partial j_k}{\partial t} = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r M_{hk} j_h \frac{\partial j_k'}{\partial t}. \tag{30}$$

[1] Con r si indica qui il numero dei singoli rami, numero generalmente diverso da quello dei campi lineari nei quali si è detto di intendere suddivisa la rete al principio del § 10.

In questa i coefficienti M_{hk} dipendono solamente dalla forma e dalla posizione geometrica dei rami h, k.

Ove questi siano chiusi tali coefficienti prendono notoriamente la denominazione di *coefficienti d'induzione mutua.*

Quando la (30) sia verificata, il principio (28) si riduce alla solita relazione:

$$\sum_1^n j'\varphi + \sum_1^m j'E = \sum_1^n j\varphi' + \sum_1^m jE'. \tag{31}$$

14. Giova osservare che la condizione (30) è senza dubbio verificata quando in ogni ramo sia:

$$j'\frac{\partial j}{\partial t} = j\frac{\partial j'}{\partial t}. \tag{32}$$

Questa condizione sufficiente, ammesso che le intensità siano grandezze alternative a pulsazione costante, può trasformarsi nel modo seguente.

Valendosi del noto schema secondo il quale il valore istantaneo di tali grandezze alternative risulta la proiezione sull'asse reale di un vettore che ruota con velocità angolare costante ω mantenendo un estremo nell'origine, e indicando fra parentesi quadre le proiezioni suddette, si ha:

$$j = [\bar{j}e^{i\omega t}] = j_m \cos(\varphi + \omega t),$$

dove

$$\bar{j} = j_m e^{i\varphi}$$

è la *caratteristica* di j, cioè il vettore ruotante (di grandezza j_m) al tempo $t = 0$, e φ è la fase.

Derivando rispetto al tempo, risulta:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = [i\omega\bar{j}e^{i\omega t}] = \omega j_m \cos\left(\varphi + \omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Analogamente può scriversi:

$$j' = j'_m \cos(\omega' + \omega' t')$$
$$\frac{\partial j'}{\partial t} = \omega' j'_m \cos\left(\varphi' + \omega' t' + \frac{\pi}{2}\right),$$

quando si considerino gli elementi relativi a una seconda corrente, di pulsazione ω' e fase φ'.

La (32) diviene allora:

$$\omega \cos(\varphi' + \omega' t')\cos\left(\varphi + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega' \cos(\varphi + \omega t)\cos\left(\varphi' + \omega' t' + \frac{\pi}{2}\right), \tag{32'}$$

per soddisfare alla quale è sufficiente che sia

$$(33)\qquad \begin{cases} \omega' = \omega \\ \varphi + \omega t = \varphi' + \omega' t' + k\pi. \end{cases}$$

Perciò, quando si confrontino gli elementi di due correnti sinussoidali, il verificarsi della (32′) o, in particolare, delle (33), assicura la validità del principio (31).

15. Quanto si è detto al n. 13 può ripetersi nei riguardi delle distribuzioni di correnti non stazionarie in uno spazio a tre dimensioni.

Ricordando che il potenziale vettore è in tal caso definito dalla

$$U = \int j \frac{dS}{r},$$

dove j indica l'intensità della corrente che attraversa l'unità di superficie equipotenziale, se il conduttore è isotropo, e valendosi dei soliti simboli, si trova, in luogo della (28):

$$(34)\qquad \begin{aligned} &\int_{\sigma_1} \varphi j' \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E j' \times n d\sigma_2 - A \int_S \frac{\partial U}{\partial t} \times j' dS = \\ &= \int_{\sigma_1} \varphi' j \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E' j \times n d\sigma_2 - A \int_S \frac{\partial U'}{\partial t} \times j dS. \end{aligned}$$

Questa relazione è vincolata all'isotropia del conduttore o quanto a meno alla condizione meno restrittiva indicata al termine del n. 9, essendosi eliminati gli integrali estesi ad S delle funzioni $\frac{1}{\lambda} j \times j'$ e $\frac{1}{\lambda} j' \times j$.

Non vi è luogo qui a semplificazione alcuna nei riguardi della condizione

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial t} \times j' dS = \int_S \frac{\partial U'}{\partial t} \times j dS,$$

poichè i tubi di flusso relativi a una distribuzione possono differire da quelli relativi all'altra.

Da quanto finora si è visto circa le correnti variabili può dedursi che generalmente un principio di reciprocità semplice come quello (16) o il (19) non vale, e che una tal forma si conserva solo ove si considerino degli istanti particolari; la qual cosa aveva trovato anche il DONATI che enunciò, come s'è detto, un principio che lega le *caratteristiche*, cioè le grandezze degli elementi in un particolare tempo: quello iniziale.

16. Un caso particolare della legge (28) si ha quando la rete risulti costituita di uno o più circuiti chiusi, nei quali il potenziale sia ovunque continuo e quindi la corrente dovuta a fenomeni di induzione generati da variazioni del campo elettromagnetico circostante.

In tal caso la condizione (29) è forzatamente verificata, in virtù della (28), e costituisce essa stessa un particolare principio di reciprocità [1].

Ponendo fuori del segno d'integrazione l'intensità della corrente, la qual cosa risulta lecita in pratica in virtù della proprietà solenoidale ricordata al n. 12, si ha:

$$\sum_1^r j' \int_l \frac{\partial U}{\partial t} \times dl = \sum_1^r j \int_l \frac{\partial U'}{\partial t} \times dl, \tag{35}$$

dove r indica il numero dei circuiti.

Potendosi scrivere

$$\sum_1^r j' \frac{\partial}{\partial t} \int_l U \times dl = \sum_1^r j \frac{\partial}{\partial t} \int_l U' \times dl,$$

e notando che gli integrali soprascritti valgono i flussi (che chiameremo Φ, Φ') dell'induzione magnetica abbracciati dai circuiti, risulta infine:

$$\sum_1^r j' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_1^r j \frac{\partial \Phi'}{\partial t}; \tag{36}$$

legge che non ha peraltro carattere di novità, essendo una immediata conseguenza dalla nota relazione:

$$j = -\frac{A}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ [2]},$$

nella quale j, corrente indotta nel circuito, ha senso solamente quando, come nel caso presente, essa sia solenoidale.

17. Nei numeri 9 e 15 i principi relativi a distribuzioni di spazio sono stati enunciati in base all'ipotesi che il mezzo conduttore sia isotropo, o a quelle meno restrittive indicate al termine del n. 9.

---

(1) Cfr. V. Gori: *Su una reciprocità fra variazioni di flusso d'induzione magnetica e correnti indotte in circuiti elettrici*; « Bollettino dell'Unione Matem. Ital., Anno II, n. 5.

(2) Cfr. A. Roiti: *Elementi di Fisica*, II, § 462, 469.

Ove tali ipotesi non siano verificate comparirà al solito in ciascun membro di ogni eguaglianza un termine in più.

Così la (16) diverrà:

$$(16')\qquad \begin{aligned}&\int_{\sigma_1}\varphi i'\times n d\sigma_1+\int_{\sigma_2}Ei'\times n d\sigma_2-\int_S Ri\times i' dS=\\&=\int_{\sigma_1}\varphi' i\times n d\sigma_1+\int_{\sigma_2}E' i\times n d\sigma_2-\int_S Ri'\times i dS,\end{aligned}$$

e la (34), ricordando che l'omografia $\frac{1}{\lambda}$ si è già indicata con R:

$$(34')\qquad \begin{aligned}&\int_{\sigma_1}\varphi j'\times n d\sigma_1+\int_{\sigma_2}Ej'\times n d\sigma_2-\int_S Rj\times j' dS-A\int_S\frac{\partial U}{\partial t}\times j' dS=\\&=\int_{\sigma_1}\varphi' j\times n d\sigma_1+\int_{\sigma_2}E' j\times n d\sigma_2-\int_S Rj'\times j dS-A\int_S\frac{\partial U'}{\partial t}\times j dS.\end{aligned}$$

19. Dopo esposte le reciprocità più importanti che valgono nella Elettrodinamica, terminerò ricordando quella stabilita da GAUSS nell' Elettrostatica.

Tale principio non è qui fuor di luogo, in quanto occupa nel campo dei fenomeni elettrici lo stesso posto che occupa il principio di VOLTERRA nella statica dei solidi elastici.

Si consideri un sistema di conduttori isolati e si suppongano assegnati loro due diversi sistemi di cariche, q, q'.

Il potenziale di ciascun conduttore assumerà corrispondentemente i valori φ, φ', e la forza elettrica in ciascun punto del campo i valori E, E'.

Chiamando σ la superficie che limita ciascun conduttore, ed Ω quella di una sfera sufficientemente grande perchè possa contenerli tutti, si applichino le (3), (4), (5) allo spazio S compreso fra la Ω e le σ, dopo aver posto:

$$\begin{cases}\alpha=\varphi\\ u=KE'\end{cases}\qquad\begin{cases}\beta=\varphi'\\ v=KE\end{cases}\quad (K \text{ costante dielettrica}).$$

Risulta subito che le (4), (5) sono verificate.

Infatti è:

$$\int_S I_1\left\{K\alpha\cdot\frac{du}{dP}\right\}dS=\int_S\varphi\,\mathrm{div}\,(KE)dS=0,$$

poichè KE, a meno del coefficiente $\frac{1}{4\pi}$, è, secondo l'immagine del MAXWEL, lo spostamento di un fluido incompressibile. Ed è ancora, quando si supponga isotropo il dielettrico, o ad anisotropia caratterizzata da una dilatazione:

$$\int_S \operatorname{grad} \alpha \times u dS = -\int_S E \times KE' dS = -\int_S E' \times KE dS = \int_S \operatorname{grad} \beta \times v dS,$$

in virtù della relazione:

$$E = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Pertanto la (3) diviene:

$$\Sigma \int_\sigma \varphi KE' \times n d\sigma + \int_\Omega \varphi KE' \times n d\Omega = \Sigma \int_\sigma \varphi' KE \times n d\sigma + \int_\Omega \varphi' KE \times n d\Omega.$$

Se ora si fa crescere indefinitivamente il raggio della sfera, la relazione soprascritta si semplifica nella

$$\Sigma \int_\sigma \varphi KE' \times n d\sigma = \Sigma \int_\sigma \varphi' KE \times n d\sigma,$$

giacchè il modulo di φKE diviene, quando il raggio tende all'infinito, un infinitesimo di terzo ordine rispetto all'inversa di questo raggio.

Infine, per essere

$$\int_\sigma KE \times n d\sigma = 4\pi q; \quad \int_\sigma KE' \times n d\sigma = 4\pi q',$$

e φ costante su ciascuna sfera, risulta:

(37) $$\Sigma \varphi q' = \Sigma \varphi' q.$$

*
* *

20. Il principio di Puppini. — Si consideri un ammasso poroso occupato in una certa sua regione S totalmente da acqua (o da un qualsiasi altro liquido) in movimento. Lo spazio S risulti limitato da un complesso σ di superficie, parte permeabili, parte impermeabili.

Indicando con z la quota di un punto generico di S sopra un piano orizzontale di riferimento, con p la pressione unitaria nell'intorno del punto, con ω

il peso specifico del liquido (che si suppone omogeneo), e posto

(38) $$z + \frac{p}{\omega} = h \quad (\textit{carico piezometrico}),$$

(39) $$f = -\operatorname{grad} h \quad (\textit{pendenza motrice}),$$

si ha notoriamente:

(40) $$q = \mu f,$$

espressione della legge Darcy-Ritter, dove q è il vettore *portata* per unità di superficie di egual carico piezometrico, se il mezzo è isotropo, e μ è il coefficiente di filtrazione (1).

Ciò posto, se h, f, q; h', f', q' sono due diversi sistemi di carichi, pendenze motrici e portate corrispondenti a due diversi regimi idrodinamici (non necessariamente permanenti), si ponga nelle (3), (4), (5):

(41) $$\begin{cases} \alpha = h & \beta = h' \\ u = q' & v = q. \end{cases}$$

Con ciò la (4) è senz'altro verificata, per essere ad esempio:

$$I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} = I_1 \left(h \frac{dq'}{dP} \right) = h \operatorname{div} q' = 0,$$

per la continuità del moto e per la incompressibilità del fluido.

Pertanto la (3) assume la forma:

(42) $$-\int_S f \times \mu f' dS + \int_\sigma h q' \times n d\sigma = -\int_S f' \times \mu f dS + \int_\sigma h' q \times n d\sigma,$$

ove si è tenuto conto delle:

$$\begin{cases} \operatorname{grad} h = -f \\ q = \mu f \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{grad} h' = -f' \\ q' = \mu f'. \end{cases}$$

Supponiamo ora che la funzione μ sia in ciascun punto dell'ammasso indipendente dalla direzione del moto, cioè che l'ammasso sia idraulicamente isotropo, oppure che, mancando l'isotropia, l'omografia μ sia una *dilatazione*.

In tal caso è allora verificata anche la (5), e la (42) si semplifica nella:

(43) $$\int_\sigma h q' \times n d\sigma = \int_\sigma h' q \times n d\sigma.$$

(1) Nei riguardi di questo coefficiente può farsi anche qui l'ipotesi che sia un'*omotetia* per ammassi porosi isotropi, che sia un'*omografia* quando venga a mancare l'isotropia.

È questo il principio di reciprocità dovuto al PUPPINI [1]. Esso risulta come conseguenza di tre ipotesi: il verificarsi della legge DARCY-RITTER, la incompressibilità del liquido e l'isotropia del mezzo (o, più generalmente, la anisotropia individuata da una dilatazione).

Ma condizione essenziale a che possa enunciarsi un principio di reciprocità è solamente il verificarsi della prima unitamente ad una delle due rimanenti.

Quando ad esempio sia μ indipendente dalla direzione del moto, ma, per essere il moto vario, si voglia tener conto della lieve compressibilità del liquido e non valga quindi più la (4), si ha:

$$\int_S h \operatorname{div} \boldsymbol{q}' dS + \int_\sigma h\boldsymbol{q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_S h' \operatorname{div} \boldsymbol{q} dS + \int_\sigma h'\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{n}\, d\sigma. \tag{44}$$

Le (42), (44) rappresentano pertanto due espressioni più generali della (43), corrispondenti al non verificarsi di una delle due ultime ipotesi necessarie alla validità della (43) stessa.

Praticamente quest'ultima sarà accettabile ove si pongano a confronto due regimi permanenti, nel qual caso scompare l'effetto della piccola compressibilità del liquido, e quando l'ammasso poroso sia costituito, o da piccoli elementi sferici di grandezza variabile con continuità da punto a punto, o da elementi di tal forma che risulti una dilatazione l'omografia μ che caratterizza la permeabilità del mezzo, il che importa il verificarsi della (40) e della (5) [2].

21. Anche l'estensione data dal PUPPINI al teorema (43) in base al principio della sovrapposizione degli effetti risulta immediata, mentre lo stesso principio di sovrapposizione è sostituito qui dalla proprietà lineare degli operatori *grad* ed I_1.

Si considerino infatti tre sistemi di carichi, pendenze motrici e portate h, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{q}$; h', $\boldsymbol{f}'$, $\boldsymbol{q}'$; h'', $\boldsymbol{f}''$, $\boldsymbol{q}''$, corrispondenti a tre diversi regimi di deflusso attraverso S; il primo preesistente all'attivazione mediante pozzi di una certa zona σ_1 del contorno σ, zona che in questo primo regime è dunque in riposo; gli altri due regimi dovuti a due diversi modi di erogare acqua attraverso σ_1; e si ponga nelle (3), (4):

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha = h' - h & \beta = h'' - h \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{q}'' - \boldsymbol{q} & \boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}. \end{array}\right. \tag{45}$$

---

[1] U. PUPPINI: « Il Monitore Tecnico », novembre 1911.

[2] Di questo principio ha avuto occasione di occuparsi anche lo scrivente in una nota apparsa sul « Monitore Tecnico, nn. 30-32 dell'anno 1923; n. 21 del 1924.

Si riscontra subito che, ammessa la incompressibilità dell'acqua, o la permanenza del moto, la (4) è verificata, perchè si ha ad esempio:

$$I_1\left\{K\alpha\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right\}=(h'-h)(\operatorname{div}\boldsymbol{q}''-\operatorname{div}\boldsymbol{q})=0.$$

Perciò la (3), ove si indichi con σ_2 la parte di σ residua dopo σ_1, e si tengano presenti le (39), (40), (45) assume la forma:

$$(46)\qquad \begin{aligned} &-\int_S(\boldsymbol{f}'-\boldsymbol{f})\times\mu(\boldsymbol{f}''-\boldsymbol{f})dS+\int_{\sigma_1+\sigma_2}(h'-h)(\boldsymbol{q}''-\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{n}d\sigma=\\ &=-\int_S(\boldsymbol{f}''-\boldsymbol{f})\times\mu(\boldsymbol{f}'-\boldsymbol{f})\,dS+\int_{\sigma_1+\sigma_2}(h''-h)(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{n}d\sigma.\end{aligned}$$

E se si suppone isotropo il mezzo, oppure che sia μ una dilatazione, con che anche la (5) risulta verificata:

$$(47)\qquad \begin{aligned} &\int_{\sigma_1}(h'-h)\boldsymbol{q}''\times\boldsymbol{n}d\sigma_1+\int_{\sigma_2}(h'-h)(\boldsymbol{q}''-\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{n}d\sigma_2=\\ &=\int_{\sigma_1}(h''-h)\boldsymbol{q}'\times\boldsymbol{n}d\sigma_1+\int_{\sigma_2}(h''-h)(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{n}d\sigma_2,\end{aligned}$$

poichè $\boldsymbol{q}$ è nullo su σ_1.

A questo punto, tenendo conto delle reali condizioni nelle quali si presentano le falde artesiane [1] in natura, pare lecita l'ipotesi che sia trascurabile il secondo termine di ognuno dei due membri della (47), in quanto le *depressioni* $(h'-h)$, $(h''-h)$ prodotte nelle lontane zone permeabili della superficie σ_2 attraverso le quali la falda comunica con serbatoi naturali o con sorgenti (quando lo spazio S considerato si estenda sino a quelle) possono ritenersi assai piccole in confronto con quelle provocate su σ_1, mentre d'altra parte, per la continuità, il contributo totale delle portate unitarie $\boldsymbol{q}'$ su σ_1 e $(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q})$ su σ_2 (e rispettivamente $\boldsymbol{q}''$ su σ_1 e $(\boldsymbol{q}''-\boldsymbol{q})$ su σ_2) risulta invariato.

Sotto quest'ultima condizione potrà dunque scriversi:

$$(48)\qquad \int_{\sigma_1}(h'-h)\boldsymbol{q}''\times\boldsymbol{n}d\sigma_1=\int_{\sigma_1}(h''-h)\boldsymbol{q}'\times\boldsymbol{n}d\sigma_1,$$

[1] Alle falde freatiche occorre applicare senz'altro la (47), poichè fanno necessariamente parte della zona permeabile di σ_2 alcune superficie che devono allacciarsi a σ_1 e che sono quindi a distanza finita.

che è il noto terzo enunciato dato dal PUPPINI nel 1914, nel quale gli integrali sono estesi alle sole superficie attraverso le quali i pozzi comunicano con la falda.

In merito a questa espressione, atta ad interessanti applicazioni, dovrà pertanto avanzarsi una riserva in più oltre alle tre, della validità della legge DARCY-RITTER, dell'incompressibilità del liquido (quando il moto è vario) e dell'isotropia (o della anisotropia corrispondente a una dilatazione): quella della effettiva trascurabilità delle depressioni $(h' - h)$ e $(h'' - h)$.

Quando ciò non fosse la (48) risulta solo l'espressione approssimata di una legge rigorosamente espressa dalla (47).

Si è detto poco sopra che le depressioni $(h' - h)$, $(h'' - h)$ da ritenersi trascurabili sono quelle corrispondenti alle lontane superficie σ_2 delle sorgenti (quando S si estenda sino a quelle); ma effettivamente, perchè valga la (48), non occorre che S si estenda a tutta la parte della falda permeabile occupata dall'acqua, ognuna delle relazioni soprascritte potendo essere riferita anche a una piccola parte dell'ammasso, purchè della sua superficie limite faccia parte la σ_1.

In tal caso le depressioni $(h' - h)$, $(h'' - h)$ non sarebbero più trascurabili; ma è facile riconoscere che possono allora, e in ogni caso, elidersi, per essere eguali, i secondi termini della (47), solamente quando la parte permeabile della superficie σ_2 può con deformazione continua portarsi a distanza infinita, senza uscire, s'intende, dallo spazio occupato dall'acqua.

Infatti, scrivendo la (47) nella forma abbreviata

$$\int_{\sigma_1} + \int_{\sigma_2} = \int_{\sigma_1}' + \int_{\sigma_2}', \tag{47}$$

e facendo variare di posizione la σ_2, si scorge facilmente che gli integrali $\int_{\sigma_2}$, $\int_{\sigma_2}'$ subiscono eguali incrementi.

Supponiamo allora che σ_2 possa portarsi a distanza infinita. Corrispondentemente andranno a zero $\int_{\sigma_2}$ e $\int_{\sigma_2}'$; dunque questi integrali erano eguali anche prima della deformazione di σ_2 e possono togliersi dalla (47).

Reciprocamente: se per una qualsiasi coppia di regimi idraulici si ha

$$\int_{\sigma_2} = \int_{\sigma_2}',$$

lo spazio S deve essere infinito. Poichè basta supporre che σ_2 sia una superficie di egual carico in ciascuno dei tre regimi (preesistente e di attivazione dei pozzi) e che sia ivi $h' = h''$.

Risulta allora che, comunque si emungano i pozzi attraverso σ_1, sempre deve essere:

$$(h' - h)\int_{\sigma_2}(q'' - q) \times n d\sigma_2 = (h'' - h)\int_{\sigma_2}(q' - q) \times n d\sigma_2 ,$$

dove è $h' - h = h'' - h$ in ogni punto di σ_2.

Orbene queste due differenze devono anche essere nulle e quindi deve σ_2 trovarsi a distanza infinita da σ_1, altrimenti ne seguirebbe l'assurdo che sono eguali le portate affluenti ai pozzi nei due sistemi di erogazione, portate che sono invece del tutto arbitrarie.

Dalle considerazioni esposte risulta dunque che, a rigore, a nessuna falda artesiana [1] è applicabile la legge (48), laddove nella pratica potrà questa relazione applicarsi con tutta tranquillità alle falde occupate dall'acqua per una notevole estensione.

22. Terminerò l'esposizione delle leggi di reciprocità che si riferiscono alla filtrazione, osservando che potrebbe in tale campo enunciarsi anche un teorema identico a quello che il Volterra ha dato nella elettrodinamica, sia valendosi della formula (43), sia ricorrendo alla (48).

Se non che sotto ciascuna delle due forme esso teorema perde molta parte dell'interesse che gli è stato riconosciuto nel caso di una corrente elettrica o di un flusso di calore.

Infatti, riferendosi dapprima alla (43), va posto in rilievo che sono necessariamente incluse, nel complesso σ delle superficie che racchiudono la falda permeabile, anche le lontane superficie σ_a di alimentazione e di erogazione attraverso le quali la falda comunica con l'esterno.

Pertanto in ciascuno dei due regimi posti a confronto, le superficie di immissione (σ_A, σ_O, secondo le notazioni usate al n. 11) dovrebbero necessariamente coincidere con σ_a, mentre σ_B e σ_D potrebbero effettivamente rappresentare quelle relative a due pozzi distinti B e D. Inoltre converrebbe immaginare che in un regime si erogasse acqua dal solo pozzo B, e che nell'altro si ponesse in azione il solo pozzo D; infine la falda permeabile

[1] Alle falde freatiche, ripetiamo, non può in alcun caso convenire la (48), poichè a far parte della zona permeabile di σ_2 sono anche necessariamente le superficie che si collegano a σ_1.

dovrebbe supporsi inizialmente in riposo, se si vuole che la portata erogata da ciascun pozzo eguagli quella entrante attraverso la superficie σ_a.

Ciò posto, essendo sensibilmente invariabile durante qualsiasi erogazione il carico sulla lontana superficie σ_a, risulta, detto h il carico preesistente ai due regimi della falda in riposo:

$$(h - h''_B)Q'_B = (h - h'_D)Q''_D$$

dove h'_D, Q'_B sono il carico piezometrico e la portata relativi a un regime, h''_B, Q''_D le analoghe quantità relative all'altro.

Se poi si suppone $Q''_D = Q'_B$, si ha:

$$h - h''_B = h - h'_D$$

relazione che è evidentemente contenuta nella (48).

Ove ci si valga, invece, della stessa relazione (48) e si considerino quattro pozzi distinti, si ottiene sì una legge nuova, di cui è immediato l'enunciato, ma non presenta questa un notevole interesse pratico, giacchè bisognerebbe supporre che durante ciascun regime l'acqua che si attinge da un pozzo fosse contemporaneamente versata in un altro.

23. Il principio di Lorentz. — Ripeterò qui, per essere completo, un teorema di reciprocità, dovuto al LORENTZ ed esposto dal BURALI-FORTI e dal MARCOLONGO nel secondo volume dell'*Analyse vectorielle générale*, relativo ai moti vorticosi dei liquidi viscosi.

Osservando che le equazioni dell'equilibrio sono in tal caso:

$$(49) \qquad \begin{cases} \operatorname{grad} \beta = \rho\left(\boldsymbol{F} - \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \\ \beta \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}_\sigma \end{cases},$$

dove $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$ sono le forze agenti sull'unità di massa e in superficie, $\boldsymbol{v}$ è la velocità, e β è l'omografia delle pressioni, se ne deduce che alla massa liquida occupante uno spazio S limitato dalla superficie σ, sono applicabili i risultati ottenuti nei riguardi dei solidi elastici, purchè alle forze di massa si sostituiscano le *forze perdute* $\boldsymbol{F} - \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, e alla omografia delle deformazioni quella $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ delle velocità di deformazione.

Fatta pertanto l'ipotesi dell'incompressibilità, risulta verificata la (4), ove si ponga in essa:

$$\begin{cases} \alpha = \beta & \beta = \beta' \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \end{cases}$$

essendo β, v; β', v' due sistemi di omografie delle pressioni e le velocità corrispondenti a due diversi sistemi di forze F, F_σ; F', F'_σ; mentre la (3) diviene:

$$(50)\qquad \int_S \rho\left(F-\frac{dv}{dt}\right)\times v'dS+\int_\sigma F_\sigma\times v'd\sigma=\int_S \rho\left(F'-\frac{dv'}{dt}\right)\times v dS+\int_\sigma F'_\sigma\times v d\sigma.$$

Nel caso di moti lenti e stazionari si ha:

$$(51)\qquad \int_S \rho F\times v'dS+\int_\sigma F_\sigma\times v'd\sigma=\int_S \rho F'\times v dS+\int_\sigma F'_\sigma\times v d\sigma,$$

relazione perfettamente rispondente al teorema di Betti.

In merito a questo principio giova osservare che, mentre nel caso di un solido elastico non muta, da un sistema di sollecitazioni ad un altro, la individualità delle particelle cimentate, qui la natura stessa del fatto fisico importa che gli elementi fluidi, i quali in un certo regime occupavano lo spazio S, vengano in un secondo regime sostituiti con altri diversi dai primi.

Ma subito si riconosce che anche un corpo elastico potrebbe essere sostituito con altro, purchè di egual forma geometrica. Solamente, affinchè per i due, sottoposti ciascuno a un proprio sistema di forze, valga tuttavia il teorema di Betti, occorre e basta che nei punti geometricamente corrispondenti sia la stessa la funzione *potenziale elastico*, cioè siano gli stessi i 21 moduli di elasticità.

Pertanto nel caso presente il liquido in moto dovrà, nei riguardi dinamici, essere omogeneo, poichè ogni particella della massa liquida che trovasi in un regime o andrà poi a trovarsi in un secondo regime entro lo spazio S, può trasportarsi in un punto qualunque di S; dovrà cioè essere lo stesso ovunque il coefficiente di viscosità.

* * *

24. I principi di Volterra e Puppini nella Termodinamica [1]. — Si consideri un corpo conduttore (solido o liquido o gassoso indifferentemente) occupante lo spazio S, e limitato dalla superficie σ attraverso la quale avvengono

[1] « Il Nuovo Cimento »: 1882, Serie III, Tomo XI; « Il Monitore Tecnico », 1916, n. 8.

scambi di calore; e si supponga, per rimanere in un caso più generale, che la massa conduttrice possegga eventuali sorgenti interne di calore.

Chiamando T la temperatura ed

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} T$$

il vettore *caduta di temperatura*, vale notoriamente la legge:

$$\boldsymbol{Q} = K\boldsymbol{F}, \tag{52}$$

dove $\boldsymbol{Q}$ è il vettore *flusso di calore* per unità d'area di una isoterma (se il conduttore è isotropo) e per unità di tempo, e K è un'omografia che, nel caso di un conduttore isotropo, prende il nome di *coefficiente di conducibilità termica*.

Se T, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{Q}$; T', $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{Q}'$ sono gli elementi relativi a due diversi regimi termodinamici, potrà scriversi un principio di reciprocità ove si ammetta, oltre la legge (52), una almeno delle due seguenti proprietà: l'isotropia termica del mezzo o la solenoidalità di $\boldsymbol{Q}$. Corrispondentemente sarà verificata la condizione (5) ovvero la (4), quando si ponga in esse:

$$\begin{cases} \alpha = T & \beta = T' \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{Q}' & \boldsymbol{v} = \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$

Se si ammette l'isotropia oppure che, essendo anisotropo il conduttore, sia una *dilatazione* [1] l'omografia K, è verificata la (5); si ha cioè:

$$-\int_S \boldsymbol{F} \times K\boldsymbol{F}' dS = -\int_S \boldsymbol{F}' \times K\boldsymbol{F} dS;$$

mentre la (3) diviene:

$$\int_S T \operatorname{div} \boldsymbol{Q}' dS + \int_\sigma T\boldsymbol{Q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_S T' \operatorname{div} \boldsymbol{Q} dS + \int_\sigma T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma, \tag{53}$$

nella quale:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{Q} = c\frac{\partial T}{\partial t} + \varphi,$$

[1] Cfr. n. 9 di questa Nota.

essendo c il calore specifico, t il tempo, φ l'eventuale contributo interno per unità di tempo e di volume.

Se invece si suppone $\operatorname{div} \boldsymbol{Q} = \operatorname{div} \boldsymbol{Q}' = 0$, come nel caso di due regimi permanenti e quando sia φ nullo ovunque, vale la (4), avendosi ad esempio:

$$I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} = T \operatorname{div} \boldsymbol{Q}' = 0 ;$$

mentre la (3) assume la forma:

$$-\int_S \boldsymbol{F} \times K\boldsymbol{F}' dS + \int_\sigma T\boldsymbol{Q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = -\int_S \boldsymbol{F}' \times K\boldsymbol{F} dS + \int_\sigma T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma. \tag{54}$$

Quando infine fossero verificate entrambe le ipotesi, si avrebbe:

$$\int_\sigma T\boldsymbol{Q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_\sigma T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma, \tag{55}$$

espressione formalmente identica alla (43).

Quest'ultima e la (53) sono gli enunciati dati dal Puppini.

Una forma particolare della (55) è la legge esposta dal Volterra nel 1882 unitamente all'identica legge relativa alle correnti elettriche, di cui s'è già data la dimostrazione nel n. 11 di questa nota, e che qui va identicamente ripetuta.

Fatto centro in quattro punti A, B, C, D situati entro lo spazio S occupato dal conduttore (isotropo o ad anisotropia soddisfacente alla condizione del Lazzarino), si traccino quattro sfere σ_A, σ_B, σ_C, σ_D, di raggio ε, e si supponga poi che in un primo regime termico un certo flusso Φ di calore, avente carattere solenoidale se il regime è permanente, entri per σ_A ed esca per σ_B, mentre in un secondo regime, anch'esso permanente, un diverso flusso Φ' di calore entri per σ_C ed esca per σ_D.

La formula (55), poichè attraverso il contorno σ dello spazio S occupato dal conduttore non c'è movimento di calore, assume allora la forma:

$$\int_{\sigma_A + \sigma_B + \sigma_C + \sigma_D} T\boldsymbol{Q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_{\sigma_A + \sigma_B + \sigma_C + \sigma_D} T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma. \tag{55'}$$

Passando al limite per $\varepsilon = 0$, risulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_A} TQ'\times n d\sigma &= T_A Q'_A \times \int_{\sigma_A} n d\sigma = 0 \\
\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_B} TQ'\times n d\sigma &= T_B Q'_B \times \int_{\sigma_B} n d\sigma = 0 \\
\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_C} TQ'\times n d\sigma &= T_C \int_{\sigma_C} Q'\times n d\sigma = T_C \Phi' \\
\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_D} TQ'\times n d\sigma &= T_D \int_{\sigma_D} Q'\times n d\sigma = - T_D \Phi'
\end{aligned}$$

e lo stesso dicasi degli integrali estesi a σ_A, σ_B, σ_C, σ_D del secondo membro della (55'), i quali assumono rispettivamente i valori $T''_A \Phi$, $- T''_B \Phi$, 0, 0.

Perciò si ottiene:

$$\Phi'(T_C - T_D) = \Phi(T''_A - T''_B),$$

e, supponendo infine che sia $\Phi' = \Phi$,

$$T_C - T_D = T'_A - T'_B\,;$$

cioè: *il dislivello termico determinato nei punti* C, D *da un flusso qualsiasi di calore entrante per* A *e uscente per* B *è eguale a quello provocato nei punti* A, B *da un medesimo flusso entrante per* C *e uscente per* D.

* * *

25. In tutti gli esempi fin qui presentati non si è tenuto conto alcuno della condizione (6).

Tale ommissione è stata fatta con intenzione, poichè in pratica i teoremi più semplici e più importanti sono generalmente quelli nei quali i termini della relazione (3) che rimangono a costituire il principio di reciprocità sono precisamente gli integrali di superficie della condizione (6) medesima.

Pertanto sono generalmente da ritenersi privi di interesse pratico quei principi, dedotti dalla condizione (6), o dalla (6) associata a una delle altre due, nei quali i termini che si dimostrano eguali sono tutti integrali di spazio.

Ciò non di meno, in ordine alle applicazioni del metodo che siamo venuti esponendo, sono da considerare anche tutti gli enunciati, per brevità ommessi, che discendono dalla suddetta condizione, dei quali alcuni potrebbero tornare utili nel campo delle ricerche prettamente scientifiche.

26. Da quanto si è esposto nei precedenti numeri sorge anzitutto la grande semplicità del metodo vettoriale nei confronti con qualsiasi altro. Infatti, mediante la relazione identica (3), associata alle condizioni (4), (5) [e ci si potrebbe valere anche della (6)], è stato possibile dimostrare speditamente i più importanti principi di reciprocità che valgono nella Fisica, e si sono ottenuti risultati, se non nuovi nell'argomento cui si riferiscono, certamente assai più generali.

A questo metodo potrà opporsi che esso è proficuo solamente in quanto la quasi totalità dei teoremi esposti era conosciuta e che solo tale conoscenza ci ha guidati nella scelta delle opportune omografie α, β e dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ da sostituire nelle (3), (4), (5); mentre la fonte diretta alla quale tuttora converrebbe rivolgersi in una nuova indagine rimarrebbe ancora quella di carattere energetico cui attinsero alcuni degli Autori di tali ricerche.

Ma è facile riconoscere che la relazione fondamentale (3) [o la (1), il che è equivalente] è suscettibile di una espressiva interpretazione fisica e che perciò non è affidata al caso la scelta delle omografie e dei vettori più opportuni.

Basta, ad esempio, pensare al significato della (1) nella teoria dell'elasticità.

Posto che α sia l'omografia delle tensioni interne e $\mathbf{u}$ il vettore spostamento, la (1) è l'espressione del *principio della conservazione dell'energia* quando α corrisponde ad $\mathbf{u}$, è il *teorema dei lavori virtuali* nel caso opposto, purchè $\mathbf{u}$ sia un sistema *possibile* di spostamenti, ad esempio sia dovuto a un'altra omografia β delle tensioni.

Orbene questa interpretazione della (1) si conserva in tutte le altre applicazioni, anche se le dimensioni vengono a mutare per il mutato significato dei simboli.

Dunque il metodo esposto risulta in diretto rapporto coi principi fondamentali della Meccanica, ai quali ha dovuto pure ricorrere anche chi, come il Donati, seguito poi dal Puppini, si è riferito inoltre al *principio del massimo dell'entropia.*

Un particolare cenno su questo punto chiarirà questo asserto.

Mi riferisco al principio di reciprocità valevole in una rete di fili conduttori, e precisamente alla seconda dimostrazione data dal DONATI nei Rendiconti della R. Accademia delle Scienze in Bologna, Novembre, Dicembre 1899.

Ivi il problema è ricondotto alla ricerca di un *estremo condizionato* della funzione calore svolto per effetto JOULE, la condizione essendo rappresentata dal principio della conservazione dell'energia.

Seguendo un noto procedimento si è così condotti ad annullare la variazione prima di una certa funzione (somma di quella che esprime il calore svolto con la condizione moltiplicata per una costante di immediata determinazione), quando si assegnino alle variabili intensità della corrente degli incrementi *compatibili coi vincoli* (nel caso specifico *solenoidali*); quando, ad esempio, si assegnino degli incrementi dati dalle intensità corrispondenti a un secondo regime, alterate mediante uno stesso fattore numerico infinitamente piccolo, che sia lo stesso in tutti i punti della rete.

Ora, la relazione che così il DONATI ricava per nulla differisce da quella che immediatamente risulta dal *teorema dei lavori virtuali* (1), teorema che è ancora rappresentato in tutta la sua generalità dalla (1), quando α ed u siano funzioni che non corrispondono a uno stesso regime.

Pertanto alla (1) e quindi alla (3) spetta nella Fisica un'importanza che non si limita solamente al suo carattere analitico.

Dalle osservazioni sovraesposte risulta poi ancora che *ogni principio di reciprocità è una conseguenza del teorema dei lavori virtuali.*

27. Concludendo: ogni qualvolta in un campo, che sia sede di fenomeni fisici, esistono un'omografia α (che può anche ridursi a un'omotetia) e un vettore u, può subito scriversi la relazione identica (3), mentre la condizione di proporzionalità, cui usualmente si fa appello, si traduce qui nel fatto che esiste un elemento fisico, che potrebbe anche essere rappresentato dallo stesso vettore u, proporzionale a grad α, o che risulta il trasformato di grad α secondo un'altra omografia.

Ma la (3), di per sè sola, non dice nulla. Perchè possa scriversi un principio di reciprocità occorre verificare se, in virtù del significato fisico di α e u, è soddisfatta una almeno delle condizioni (4), (5), (6). In dipendenza di tali condizioni varrà dunque un principio anzichè un altro.

Consideriamo infine queste condizioni.

---

(1) Un'espressione in tutto corrispondente è quella che regola l'equilibrio dei fili flessibili. Cfr. P. BURGATTI: *Meccanica Razionale*; 1ª edizione, pag. 188 (1).

La (4)

$$\int_S I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} dS = \int_S I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{dv}{dP} \right\} dS,$$

quando α, β non siano delle omografie particolari, come nell' Elasticità, esprime l'eguaglianza dei *lavori virtuali interni*, che nel caso ricordato risulta da una nota proprietà delle forme quadratiche omogenee.

Quando α, β si riducono invece a delle omotetie, come negli esempi che interessano l' Elettrologia, l' Idraulica, la Termodinamica, la (4) è verificata (condizione sufficiente, ma non necessaria) ove siano **u**, **v** *solenoidali*, il che accade (se **u**, **v** rappresentano velocità) quando il moto sia permanente, oppure quando, essendo vario il moto, è *incompressibile* il fluido in movimento.

La condizione (5):

$$\int_S \operatorname{grad} \alpha \times \mathbf{u} dS = \int_S \operatorname{grad} \beta \times \mathbf{v} dS,$$

esprime l'eguaglianza dei *lavori esterni di massa*.

Con riferimento ai campi della Fisica nei quali abbiamo avuto occasione di usarla e conformemente a quanto ha dimostrato il Prof. Lazzarino, diremo: condizione sufficiente [1] affinchè essa sia verificata è che l'omografia (α e β) caratterizzante le proprietà specifiche del mezzo sia una *dilatazione* se questo è anisotropo, un'*omotetia* se questo è isotropo.

Da ultimo la (6):

$$\int_\sigma \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{u} d\sigma = \int_\sigma \beta \mathbf{n} \times \mathbf{v} d\sigma,$$

esprime l'eguaglianza dei *lavori virtuali in superficie*.

Si è già rilevato in proposito che ben raramente potrà dirsi a priori che essa è verificata, poichè generalmente costituisce piuttosto essa stessa il più suggestivo principio di reciprocità che si tende a dimostrare, anzichè una condizione la cui evidenza risulti immediata.

Bologna, Scuola Ingegneri, ottobre 1924.

---

(1) In tutte le applicazioni esposte le condizioni (4), (5), (6) sono risultate sostituite da quelle più restrittive, sufficienti, ma non necessarie, nelle quali l'eguaglianza corre fra le funzioni da integrarsi, anzichè fra i loro integrali, così come fu già fatto dal Burgatti. Ciò non di meno nel corso di questo lavoro si è conservata la forma integrale alle tre condizioni, poichè non è detto a priori che non esistano fatti fisici pei quali, comunque varino le grandezze degli elementi posti a confronto, entro *prefissati* campi σ ed S, l'eguaglianza degli integrali sia quella sola che è sempre verificata.