I sottogruppi del gruppo modulare con coefficienti del corpo di Jacobi-Eisenstein e un teorema sui gruppi finiti.

Memoria di GIOVANNI SANSONE (a Firenze).

SOMMARIO — Introduzione — § 1 - 1. L'indice $\mu(n)$ dei sottogruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ del gruppo Γ di sostituzioni lineari unimodulari con coefficienti del campo di JACOBI-EISENSTEIN $\left(1, \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ - 2. Il poliedro fondamentale del sottogruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ - § 2 - 3. I campi fondamentali dei gruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ - 4. Impossibilità di limitare con un numero finito di piani e sfere di riflessione i poliedri fondamentali dei gruppi $\Gamma_{\mu(n)}$, con n intero razionale pari, diverso da 2 - § 3 - 5. Relazioni fondamentali fra le sostituzioni generatrici del gruppo $\bar{\Gamma}$ di sostituzioni lineari con coefficienti del corpo $K(\varepsilon)$ con determinante ± 1 - § 4 - 6. Sulla indipendenza delle sostituzioni S, T, U , generatrici del gruppo finito $G_{2\mu(n)}$ e sulle loro relazioni caratteristiche nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ - § 5 - 7. Dimostrazione del teorema fondamentale sui gruppi $G_{2\mu(n)}$. Lemmi preliminari - 8. Dimostrazione del teorema fondamentale nel caso di moduli primi con $2(1-\varepsilon)$ - § 6 - 9. Il teorema fondamentale per i moduli $m(1-\varepsilon), 3m, 2m, 2m(1-\varepsilon), 6m$ con m primo con 6 - 10. Immagine geometrica dei gruppi $G_{2\mu(1-\varepsilon)}, G_{2\mu(2)}$ - § 7 - 11. Il gruppo delle sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1+4ma & 4mb \\ 4mc & 1+4md \end{pmatrix}, \left[\frac{c}{1+4ma}\right] = +1$, e il caso eccezionale dei moduli $4m$ - 12. Il gruppo delle sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1+3m(1-\varepsilon)a & 3m(1-\varepsilon)b \\ 3m(1-\varepsilon)c & 1+3m(1-\varepsilon)d \end{pmatrix}, \left[\frac{c}{1+3m(1-\varepsilon)a}\right]_3 = +1$ e il caso eccezionale dei moduli $3(1-\varepsilon)m$.

INTRODUZIONE

Nella mia Memoria *I sottogruppi del gruppo di Picard e due teoremi sui gruppi finiti analoghi al teorema del Dick* ⁽¹⁾ e nella Nota *Le relazioni fondamentali tra le operazioni generatrici del gruppo modulare finito con coefficienti del campo di Gauss* ⁽²⁾ scrissi che i metodi da me trovati potevano applicarsi allo studio dei gruppi del BIANCHI di sostituzioni lineari con

⁽¹⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Tomo XLVII, pp. 273-332). Nel seguito le citazioni relative a questa Memoria saranno indicate con (A).

⁽²⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XLIX.

coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari ⁽³⁾. In questa Nota infatti io studio i gruppi Γ di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

con coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del corpo $K(\varepsilon)$, $\left(\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ di JACOBI-EISENSTEIN delle radici cubiche dell'unità, ma le ricerche possono estendersi ai gruppi di sostituzioni lineari unimodulari con coefficienti dei corpi $K(i\sqrt{2})$; $K\left(\frac{-1 + i\sqrt{D}}{2}\right)$, $D = 7, 11, 15, 19$ e in generale a quei corpi il cui poliedro fondamentale abbia un solo vertice singolare ⁽⁴⁾ e si possa limitare con un numero finito di piani e sfere di riflessioni.

Il procedimento generale che si presenta è il seguente. Dato il gruppo Γ di sostituzioni lineari unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

con coefficienti di un corpo quadratico immaginario, si può determinare con un semplice ragionamento aritmetico l'indice finito $\mu(n)$ del suo sottogruppo invariante $\Gamma_{\mu(n)}$ formato dalle sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ caratterizzate dalle relazioni:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } n),$$

con n intero del corpo (§ 1, (A)). Costruito il poliedro fondamentale del gruppo Γ , si determinano, combinando le riflessioni sulle facce del poliedro, le sue sostituzioni ellittiche generatrici (§ 5, (A)); queste sono anche le sostituzioni ellittiche generatrici del gruppo modulare finito $G_{\mu(n)}$ di ordine $\mu(n)$ mediante il quale Γ si rappresenta per $\Gamma_{\mu(n)}$. Un primo gruppo di relazioni tra le sostituzioni di $G_{\mu(n)}$ sono quelle che esprimono il periodo delle sue sostituzioni ellittiche generatrici, un altro gruppo di condizioni si ottiene

⁽³⁾ L. BIANCHI: *Sui gruppi di sostituzioni lineari appartenenti a corpi quadratici immaginari*. (Mathematische Annalen, Bd. XL; pp. 332-412).

⁽⁴⁾ Questa circostanza si deve presentare secondo un teorema enunciato dal BIANCHI, ma ancora non dimostrato, per i corpi quadratici privi di ideali secondari. Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽³⁾, p. 333.

dall'esprimere che le sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ si rappresentano in $G_{\mu(n)}$ con l'unità (§ 7, (A)). Per provare poi se le relazioni trovate tra le sostituzioni generatrici di $G_{\mu(n)}$ sono sufficienti a caratterizzarlo, basta dimostrare che le sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1+na & nb \\ nc & 1+nd \end{pmatrix}$ con a, b, c, d interi del corpo sono esprimibili come prodotti di un numero finito di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$ (§ 8 a § 11, (A)). Questa proposizione non è in generale vera nel corpo di GAUSS $K(i)$, ove fanno eccezione i moduli $n \equiv 0 \pmod{4}$ ⁽⁵⁾, così nel corpo $K(\varepsilon)$ fanno soltanto eccezione i moduli divisibili per 2^λ , $(1-\varepsilon)^{\lambda+1}$ con $\lambda > 2$, in altre parole quei moduli che contengono il divisore 2^λ , o la potenza $(1-\varepsilon)^\lambda$ del divisore $1-\varepsilon$ del numero primo critico del corpo.

Riassumiamo ora i risultati di questa Nota.

L'indice $\mu(n)$ del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ in Γ è dato dalla formula:

$$(1) \quad \mu(n) = \frac{1}{\lambda} N^3(n) \prod_i^{1 \dots h} \left(1 - \frac{1}{N^2(p_i)} \right),$$

essendo $N(n)$ la norma del numero n , il prodotto esteso a tutti i fattori primi $p_1, p_2, \dots, p_h$ essenzialmente distinti di n , e $\lambda = 1$ per $n = \pm 2\varepsilon^\rho$, ($\rho = 0, 1, 2$) e $\lambda = 2$ in ogni altro caso (§ 1).

Il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ ha almeno $\mu(n):3N(n)$ vertici impropri, e il gruppo $\bar{\Gamma}_{\mu(n)}$ ottenuto da $\Gamma_{\mu(n)}$ ampliandolo con la rotazione $z' = -z$ e la riflessione $z' = z_0$ non può limitarsi per n intero razionale pari, diverso da 2, con un numero finito di piani e sfere di riflessione del gruppo stesso (§ 2). Le sostituzioni generatrici del gruppo $\bar{\Gamma}$ ottenuto da Γ ampliandolo con la rotazione $z' = -z$ sono:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix},$$

caratterizzate dalle relazioni:

$$(2) \quad S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1 \quad (\S 3).$$

Indicando con $G_{2\mu(n)}$ il gruppo modulare finito di ordine $2\mu(n)$ mediante il quale $\bar{\Gamma}$ si rappresenta per $\Gamma_{\mu(n)}$, si trova che nell'ipotesi che il numero

⁽⁵⁾ Cfr. la nota dell'A., loc. cit. ⁽²⁾.

$n = n_1 + n_2 \varepsilon$ sia primo con $2(1 - \varepsilon)$, le S , T , U considerate come sostituzioni generatrici di questo gruppo oltre che dalle (2) sono legate dalle relazioni:

$$(3) \quad \begin{aligned} [(US)^2(TU)^2]^{n_1}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_2} &= 1, \\ [(US)^2(TU)^2]^{-n_2}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_1-n_2} &= 1, \end{aligned}$$

e ne segue il teorema: *Se i legami fra tre operazioni di natura qualsiasi S , T , U sono espressi dalle (2) e (3) (o da conseguenze di queste) ed esse sono atte a generare un gruppo finito, l'ordine del gruppo è $2\mu(n)$ con $\mu(n)$ espresso dalla (1) (§ 4 e § 5).*

Nel § 6 si dimostra che il teorema è vero per i moduli $2^\lambda(1 - \varepsilon)^\mu m$ con m primo con $2(1 - \varepsilon)$; $\lambda = 0, 1$; $\mu = 0, 1$; e come esempio si studiano i gruppi $G_{2^\lambda(1-\varepsilon)}$ e $G_{2^\lambda(2)}$ isomorfi rispettivamente coi gruppi ampliati del tetraedro e dell'icosaedro regolare.

Nel § 7 infine si dimostra che il teorema non sussiste per i moduli $4m$, $(1 - \varepsilon)^3 m$ qualunque sia m . Tali casi eccezionali sono conseguenza dei due notevoli teoremi:

a) Tutte le sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1 + 4ma, & 4mb \\ 4mc, & 1 + 4md \end{pmatrix}$, per le quali il simbolo di JACOBI dei residui quadratici $\left[\frac{c}{1 + 4ma} \right]$ abbia il valore $+1$ formano gruppo.

b) Tutte le sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1 + 3m(1 - \varepsilon)a, & 3m(1 - \varepsilon^2)b \\ 3m(1 - \varepsilon)c, & 1 + 3m(1 - \varepsilon)d \end{pmatrix}$, per le quali il simbolo relativo ai residui cubici $\left[\frac{c}{1 + 3m(1 - \varepsilon)a} \right]_3$ abbia il valore $+1$ formano gruppo.

§ 1. L'indice $\mu(n)$ dei sottogruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ del gruppo Γ di sostituzioni lineari unimodulari con coefficienti interi del campo di Jacobi-Eisenstein $\left(1, \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$. Il poliedro fondamentale del sottogruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$.

1. Si consideri il gruppo Γ di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

a coefficienti interi del corpo $K(\varepsilon)$, $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Siccome il corpo $K(\varepsilon)$

(privo di ideali secondari) si comporta come il corpo di GAUSS agli effetti della divisibilità ⁽⁶⁾, ripetendo i ragionamenti del § 1, (A) ⁽⁷⁾ concluderemo che il sottogruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ di sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \alpha - 1 \equiv \delta - 1 \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n},$$

con n intero del corpo $K(\varepsilon)$, è un sottogruppo invariante di indice $\mu(n)$, con

$$\mu(n) = \frac{1}{\lambda} N^3(n) \prod_i^{1 \dots h} \left(1 - \frac{1}{N^2(p_i)}\right),$$

essendo $N(n)$ la norma del numero n , il prodotto esteso a tutti i fattori primi $p_1, p_2, \dots, p_h$ distinti di n , e con $\lambda = 1$ per $n = \pm 2\varepsilon^2$, ($\rho = 0, 1, 2$), e $\lambda = 2$ negli altri casi.

Si avrà ad esempio

$$\mu(1 - \varepsilon) = \frac{1}{2} 3^3 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = 12; \quad \mu(2) = 4^3 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 60.$$

2. Costruiamo il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$, verificheremo così per via geometrica che si ha $\mu(1 - \varepsilon) = 12$.

Infatti il gruppo di sostituzioni lineari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{1 - \varepsilon},$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del corpo $K(\varepsilon)$ ha per poliedro fondamentale il tetraedro regolare T_0 limitato dai tre piani,

$$\eta = 0, \quad \eta = \xi \sqrt{3}, \quad \xi \sqrt{3} + \eta = \sqrt{3}$$

e dalla sfera:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

essendo (ξ, η, ζ) una terna di assi ortogonali con gli assi ξ, η nel piano limite del semispazio iperbolico, e il semiasse $\zeta > 0$ interno allo stesso semi-

⁽⁶⁾ Cfr. ad es. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*. (Bologna, N. Zanichelli, 1923), p. 101 e seg.

⁽⁷⁾ Cfr. G. SANSONE, loc. cit. ⁽¹⁾, p. 276 e seg.

spazio ⁽⁸⁾, e il gruppo considerato ha l'indice 24 nel gruppo di sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Associando a T_0 il simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$, considerando cioè il poliedro T limitato dai 4 piani (Fig. 1)

$$\eta = \pm \xi\sqrt{3}, \quad \xi\sqrt{3} \pm \eta = \sqrt{3},$$

e dalle due sfere:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

esso è il poliedro fondamentale del gruppo

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon).$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0,$$

Tale gruppo coincide col gruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ perchè avendosi

$$\alpha\delta \equiv 1 \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon)$$

segue

$$\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1 \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon)$$

e cambiando al più il segno ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, si ha

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon).$$

Segue che il gruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ ha l'indice 24 nel gruppo $\bar{\Gamma}$

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

e perciò l'indice 12 in Γ .

⁽⁸⁾ Cfr. L. BIANCHI: *Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non euclideo in tetraedri e ottaedri regolari.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V degli Atti, vol. XVIII, 1° sem. 1909, pp. 645-652), p. 645 e seg.

Le sostituzioni $Q_1, Q_2, \dots, Q_{12}$ che danno la rappresentazione di Γ per mezzo di $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ formano il gruppo tetraedrale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

§ 2. I campi fondamentali dei gruppi $\Gamma_{\mu(n)}$.

3. Il tetraedro T' limitato dai 3 piani

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \xi \pm \eta\sqrt{3} = 0,$$

e dalla sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

è il poliedro fondamentale del gruppo $\bar{\Gamma}$ di sostituzioni lineari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del corpo $K(\varepsilon)$ ⁽²⁾. Associando a T' il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = \frac{1}{2}$ si ha che la piramide P limitata dai 4 piani

$$\xi \pm \eta\sqrt{3} = 0, \quad \xi \pm \eta\sqrt{3} = 1,$$

e dalle due sfere

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

è il poliedro fondamentale del gruppo Γ (Fig. 2).

Fig. 2.

Chiamando con Σ la divisione regolare del semispazio iperbolico operata dalla piramide P e considerando la rete dei prismi a base quadrangolare determinata dai due sistemi di piani $\xi \pm \eta\sqrt{3} = l$ con l intero arbitrario, troviamo che ad ogni prisma della rete appartiene una cella di Σ avente per

⁽²⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽³⁾, p. 365.

vertice il punto all'infinito V_∞ del semispazio iperbolico. Escluso il caso $n = \pm(1 - \epsilon)^2$, $\rho = 0, 1, 2$, da noi esaminato al § 1, i movimenti di $\Gamma_{\mu(n)}$ che lasciano fisso V_∞ sono le traslazioni $z' = z + nb$ con b intero arbitrario. Segue che nel parallelogramma Q' di vertici $o, n, n\epsilon, -n\epsilon^2$ non vi sono punti equivalenti per una traslazione $z' = z + nb$ (Fig. 3).

Infatti le traslazioni $z' = z + n\epsilon^2$, $\rho = 0, 1, 2$, inducono in un punto una traslazione equipollente al vettore $\pm n\epsilon^2$ e portano pertanto un punto interno a Q' in un punto esterno; le traslazioni $z' = z \pm n(1 - \epsilon)\epsilon^2$, $\rho = 0, 1, 2$ indu-

Fig. 3.

cono in un punto una traslazione di ampiezza uguale alla diagonale di Q' che unisce i vertici $n, n\epsilon$ e per esse i punti interni a Q' sono portati in punti esterni; ogni altra traslazione $z' = z + nb$ è di ampiezza maggiore della diagonale maggiore di Q' , quindi in Q' non vi sono punti equivalenti per le traslazioni considerate.

Consideriamo ora il prisma formato dai 4 piani normali al piano limite che segnano su di esso il parallelogrammo Q' ; i punti interni a questo prisma non sono equivalenti per le sostituzioni di Γ che lasciano fisso V_∞ . Con cambiamenti leciti, a questo prisma possiamo sostituire un insieme I di celle di Σ che non sono equivalenti rispetto a $\Gamma_{\mu(n)}$ e tali che ogni altra cella di Σ di vertice V_∞ sia equivalente ad una cella di I per una traslazione di $\Gamma_{\mu(n)}$.

Le celle di I sono in numero uguale al rapporto tra l'area del parallelogrammo Q' che è $N(n) \frac{\sqrt{3}}{2}$ e l'area del parallelogrammo limitato dai 4 piani

$\xi \pm \eta\sqrt{3} = 0, \xi \pm \eta\sqrt{3} = 1$, che è $\frac{1}{6}\sqrt{3}$, cioè sono $3(n_1^2 + n_2^2 - n_1n_2)$, (v. Fig. 3, caso $n = 3 + \epsilon$). (continua)

Ne segue allora ⁽¹⁰⁾ che si può costruire un poliedro fondamentale $P_{\mu(n)}$ di $\Gamma_{\mu(n)}$ composto di $\mu(n)$ celle congruenti a P tale che ogni cella ne abbia aderente un'altra almeno per un vertice, e che attorno ad ogni suo vertice improprio vi siano $3N(n)$ celle di Σ e quindi con $\mu(n):3N(n)$ vertici impropri, e perciò questo numero è il minor numero di vertici impropri del poliedro fondamentale di $\Gamma_{\mu(n)}$.

4. È ancora facile provare che supposto il modulo n intero razionale pari, e diverso da 2, ampliando il gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ con la rotazione $z' = -z$ e la riflessione $z' = z_0$ si ha un gruppo $\bar{\Gamma}_{\mu(n)}$ di cui il poliedro fondamentale non può limitarsi con un numero finito di facce e sfere di riflessione del gruppo stesso. Infatti la riflessione di $\bar{\Gamma}_{\mu(n)}$ sono:

$$z' = \frac{(1 + na_1 + na_2\epsilon)z_0 + nb_1\sqrt{3}}{nc_1\sqrt{3}z_0 + (1 + na_1 + na_2\epsilon^2)}, \quad z' = \frac{(1 + na_1 + na_2\epsilon)z_0 + nb_1}{nc_1z_0 - (1 + na_1 + na_2\epsilon^2)},$$

essendo rispettivamente

$$\begin{aligned} (1 + na_1 + na_2)^2 - 3na_2(1 + na_1) + 3n^2b_1c_1 &= 1, \\ (1 + na_1 + na_2)^2 - 3na_2(1 + na_1) + n^2b_1c_1 &= 1, \end{aligned}$$

e per $c_1 \neq 0$ le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\begin{aligned} \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{2(1 + na_1) - na_2}{2nc_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{3n^2c_1^2}, \\ \left(\xi - \frac{2(1 + na_1) - na_2}{2nc_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 &= \frac{1}{n^2c_1^2}, \end{aligned}$$

mentre per $c_1 = 0$, avendo supposto $n \neq 2$, si ha $a_2 = a_1 = 0$ e i corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione $\xi = \frac{n}{2}b$, $\eta = \frac{n}{2}b\sqrt{3}$, con b intero qualunque.

Proviamo che il punto di coordinate $\left(\frac{q}{n}, \frac{q\sqrt{3}}{n}, 0\right)$, con q primo con n non solo non è sull'intersezione di due piani di riflessione (evidente) ma non è nè interno nè su qualsiasi sfera di riflessione.

⁽¹⁰⁾ Cfr. p. 287 (A).

Infatti $\left(\frac{q}{n}, \frac{q\sqrt{3}}{n}, 0\right)$ può essere interno o su una sfera di riflessione quando si abbia:

$$\left[\frac{q}{n} - \frac{a_2}{2c_1}\right]^2 + \left[\frac{q\sqrt{3}}{n} + \frac{2(1+na_1) - na_2}{2nc_1\sqrt{3}}\right]^2 \leq \frac{1}{3n^2c_1^2},$$

$$\left[\frac{q}{n} - \frac{2(1+na_1) - na_2}{2nc_1}\right]^2 + \left[\frac{q\sqrt{3}}{n} - \frac{a_2\sqrt{3}}{2c_1}\right]^2 \leq \frac{1}{n^2c_1^2},$$

ovvero

$$3(2c_1q - na_2)^2 + [6qc_1 + 2(1+na_1) - na_2]^2 \leq 4,$$

$$[2c_1q - 2(1+na_1) + na_2]^2 + 3(2c_1q - na_2)^2 \leq 4,$$

e per la parità di n , deve essere rispettivamente:

$$2c_1q - na_2 = 0, \quad 6c_1q + 2(1+na_1) - na_2 = 0,$$

$$2c_1q - 2(1+na_1) + na_2 = 0, \quad 2c_1q = na_2$$

dalle quali $-2c_1q = 1 + na_1$; $2c_1q = 1 + na_1$ le quali sono impossibili avendo supposto n pari.

Ne segue, come si era prima affermato, che il poliedro fondamentale di $\bar{\Gamma}_{\mu(n)}^0$ non può limitarsi con un numero finito di piani e sfere di riflessioni del gruppo.

§ 3. Relazioni fondamentali fra le sostituzioni generatrici del gruppo $\bar{\Gamma}$.

5. Nella Memoria citata del BIANCHI ⁽¹¹⁾ è dimostrato che il gruppo $\bar{\Gamma}^0$ di sostituzioni di prima e seconda specie

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$, interi del corpo $K(\epsilon)$ ha per poliedro fondamentale il tetraedro T con un vertice improprio limitato dalle 4 facce:

$$\eta = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \xi = \eta\sqrt{3}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

⁽¹¹⁾ L. BIANCHI, loc. cit. (3), p. 365.

Il gruppo $\bar{\Gamma}^0$ si può quindi generare con le 4 riflessioni:

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0 + 1, \quad z' = \frac{\epsilon z_0}{-\epsilon^2}, \quad z' = \frac{1}{z_0},$$

che indicheremo rispettivamente con A, B, C, D , si ha perciò

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} z_0, \quad B = \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} z_0, \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon, & 0 \\ 0, & -\epsilon^2 \end{pmatrix} z_0, \quad D = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} z_0,$$

con

$$A^2 = 1, \quad B^2 = 1, \quad C^2 = 1, \quad D^2 = 1.$$

Avendosi poi

$$AD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} z, \quad BD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} z, \quad DC = \begin{pmatrix} 0, & -\epsilon \\ \epsilon^2, & 0 \end{pmatrix} z,$$

quindi

$$(AD)^2 = 1, \quad (BD)^2 = 1, \quad (CD)^2 = 1, \quad DA = AD, \quad DB = (BD)^2, \quad DC = CD$$

segue che le sostituzioni del gruppo $\bar{\Gamma}$

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

($\alpha, \beta, \delta, \gamma$ interi del corpo $K(\epsilon)$) si generano con le 3 sostituzioni ellittiche:

$$S = AD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad T = BD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \quad U = CD = \begin{pmatrix} 1, & -\epsilon \\ \epsilon^2, & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1.$$

Vogliamo trovare tutte le relazioni indipendenti tra le S, T, U . Si consideri il tetraedro T' ottenuto associando a T il simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$ cioè il tetraedro limitato dai 4 piani (Fig. 4):

$$\xi = \pm \eta \sqrt{3}, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

i cui vertici sono:

$$V_0 = (0, 0, 1), \quad V_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right), \quad V_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right), \quad V_3 = \infty$$

prodotto formato con le altre due sostituzioni, ossia le S , T , U considerate come operazioni del gruppo $G_{2\mu(n)}$ sono indipendenti.

Per determinare delle altre relazioni fra le S , T , U oltre le (I), troviamo le sostituzioni di $\Gamma_{\mu(n)}$ che lasciano fisso V_∞ . Escluso il caso $n = \pm(1 - \epsilon)\epsilon^\rho$, $\rho = 0, 1, 2$ esse hanno la forma:

$$(4) \quad z' = \begin{pmatrix} 1 & nl \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z$$

e posto

$$n = n_1 + n_2\epsilon, \quad l = l_1 + l_2\epsilon,$$

quindi

$$(n_1 + n_2\epsilon)(l_1 + l_2\epsilon) = l_1(n_1 + n_2\epsilon) + l_2[-n_2 + (n_1 - n_2)\epsilon]$$

le sostituzioni precedenti si compongono con le potenze delle traslazioni

$$\begin{pmatrix} 1 & n_1 + n_2\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & n_1 - n_2 - n_2\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e per queste nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & n_1 + n_2\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & n_1 - n_2 - n_2\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Ma si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (US)^2(TU)^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (SU)^2(TU)^2(SU)^2,$$

e le precedenti diventano:

$$(II) \quad \begin{aligned} [(US)^2(TU)^2]^{n_1}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_2} &= 1, \\ [(US)^2(TU)^2]^{-n_2}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_1-n_2} &= 1. \end{aligned}$$

Inversamente dalle (II) e (I) segue che ogni sostituzione $z' = \begin{pmatrix} 1 & nl \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z$ nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ si rappresenta con l'identità. Basterà provare per questo che le due sostituzioni $(US)^2(TU)^2$ e $(SU)^2(TU)^2(SU)^2$ sono permutabili, cioè basterà provare che:

$$(US)^2(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = (SU)^2(TU)^2(SU)^2(US)^2(TU)^2$$

ovvero avendosi $(SU)^2(US)^2 = 1$ e $(TU)^3 = 1$, basterà provare che:

$$(US)^2(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = (SU)^2 TU$$

e moltiplicando a sinistra per $(SU)^2$ e a destra per $(TU)^2(SU)^2$ occorre verifi-

care che :

$$(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = [(TU)^2(SU)^2]^3 = 1.$$

Ma è

$$(TU)^2(SU)^2 = UT^2(SU)^2 = USTUSU = US(TU)(US)^{-1}$$

perciò

$$[(TU)^2(SU)^2]^3 = [(US)(TU)(US)^{-1}]^3 = (US)(TU)^3(US)^{-1} = 1.$$

Notiamo infine che ogni sostituzione parabolica del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ è una trasformata della (4) ⁽¹³⁾, segue che le (II) esprimono le relazioni fra le S, T, U che si hanno dalla condizione che le sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ si rappresentano nel gruppo con l'unità. Dimosteremo nel § seguente che le (I) e (II) rappresentano tutte le relazioni indipendenti tra le operazioni del gruppo $G_{2\mu(n)}$ quando il modulo n non è divisibile per 2^2 , od $(1-\varepsilon)^3$ cioè ogni relazione fra le S, T, U in $G_{\mu(n)}$ è conseguenza delle (I) e (II), segue quindi il teorema: *Se i legami fra tre operazioni S, T, U sono espressi dalle relazioni:*

$$(I)^* \quad S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1,$$

$$(II)^* \quad [(US)^2(TU)^2]^{n_1}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_2} = 1, \\ [(US)^2(TU)^2]^{-n_2}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_1-n_2} = 1,$$

(o da loro conseguenze) e il numero $n = n_1 + n_2\varepsilon$ non è divisibile per 2^2 e $(1-\varepsilon)^3$, ed esse sono atte a generare un gruppo finito, il gruppo da esse generato è isomorfo oloedricamente col gruppo modulare $G_{2\mu(n)}$ di ordine

$$(III)^* \quad 2\mu(n) = \frac{2}{\lambda} N^3(n) \prod_i^{1 \dots h} \left(1 - \frac{1}{N^2(p_i)}\right).$$

prendendo $\lambda = 1$ per $n = \pm 2\varepsilon^2$, ($\rho = 0, 1, 2$) e $\lambda = 2$ negli altri casi, e il prodotto esteso a tutti i fattori primi essenzialmente distinti di $n_1 + n_2\varepsilon$.

§ 5. Dimostrazione del teorema fondamentale sui gruppi $G_{2\mu(n)}$ nel caso di moduli primi con $2(1-\varepsilon)$.

7. Una sostituzione $\Omega = S^{\alpha_1} T^{\beta_1} U^{\gamma_1} S^{\alpha_2} T^{\beta_2} U^{\gamma_2} \dots$ rappresenta nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ l'identità quando si abbia $\Omega = 1$, oppure

$$(5) \quad \Omega \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}.$$

⁽¹³⁾ Cfr. p. 304 (A).

Nel primo caso, come si è detto al § 3 la Ω è conseguenza delle (1), nel secondo caso, Ω ha la forma:

$$(6) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 + na, & nb \\ nc, & 1 + nd \end{pmatrix}$$

e il teorema sarà dimostrato ove si provi che per n non divisibile per 2^2 , $(1 - \epsilon)^3$ la (6) è il prodotto di un numero finito di trasformate della sostituzione parabolica $\begin{pmatrix} 1, & nk \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$. Seguiremo per questo la via già tenuta nella memoria citata ⁽¹⁴⁾ riconducendo il teorema a quello del DICK, (gruppo modulare con coefficienti del campo minimo di razionalità).

Premettiamo le seguenti osservazioni ⁽¹⁵⁾:

Osservazione 1^a. Se la sostituzione unimodulare $\begin{pmatrix} 1 + na, & nb \\ nc, & 1 + nd \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$, anche la sostituzione unimodulare $\begin{pmatrix} 1 + na, & nb' \\ nc, & 1 + nd' \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$.

Osservazione 2^a ⁽¹⁶⁾. Se la sostituzione unimodulare $\begin{pmatrix} 1 + na, & nb \\ nc, & 1 + nd \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$ anche la sostituzione $\begin{pmatrix} 1 + na, & \pm nbe^{-p} \\ \pm nce^p, & 1 + nd \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$.

Seguono i soliti Lemmi, ci limiteremo però a dare quelle dimostrazioni che subiscono qualche modificazione.

Lemma 1°. Data una sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + na, & nb \\ nc, & 1 + nd \end{pmatrix}$ esiste una sua trasformata, che moltiplicata per sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$ assume la forma $\begin{pmatrix} 1 + N\alpha, & N\beta \\ N\gamma, & 1 + N\delta \end{pmatrix}$ con N multiplo arbitrario di n .

Sia $N = nq$, e supponiamo dapprima che nella Ω sia c primo con q . Sia allora x radice della congruenza $a - cx \equiv 0 \pmod{q}$, la trasformata di Ω :

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1, & x \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & -x \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + n(a - cx), & nb_1 \\ nc, & 1 + nd_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + nqa_1, & nb_1 \\ nc, & 1 + nd_1 \end{pmatrix}$$

ha già il primo coefficiente $\equiv 1$ modulo $nq = N$.

⁽¹⁴⁾ Cfr. § 10, p. 311 e seg. (A).

⁽¹⁵⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾, n. 2.

⁽¹⁶⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾, n. 2.

Sia ora $\frac{c}{r} \mid \frac{q}{k}$, $\frac{b_1}{s} \mid \frac{q}{l}$ cioè $c = kq + r$, $b_1 = lq + s$ si ha:

$$\Omega_2 = \Omega_1 \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -nr, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -ns \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + nq\alpha, & nq\beta \\ nq\gamma, & 1 + nd_2 \end{pmatrix}$$

ed essendo Ω_2 unimodulare, è $d_2 \equiv 0 \pmod{q}$ cioè $d_2 = q\delta$ e quindi la Ω_2 ha la forma richiesta.

Quando nella Ω non sia c primo con q , se poniamo y uguale al prodotto di tutti i fattori primi di q non contenuti in c , nella sostituzione:

$$\Omega_3 = \Omega \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ ny, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + na, & nb \\ 1 + n[c + y(1 + na)], & 1 + nd_1 \end{pmatrix}$$

è $c + y(1 + na)$ primo con q e perciò possiamo operare sulla Ω_3 come si è operato prima sulla Ω .

Più in particolare ragionando come nel Lemma 1° del § 10 della Memoria citata (A) si ha:

Lemma 2°. *Data una sostituzione unimodulare (6), si può moltiplicarla a destra e a sinistra per opportune trasformate della sostituzione parabolica $\begin{pmatrix} 1, & nk \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ in guisa che la sostituzione prodotta abbia la forma:*

$$(7) \quad \Omega' = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N\gamma, & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del corpo $K(\epsilon)$, N intero razionale, (N multiplo arbitrario non nullo di n) e quando ci occorra $N \equiv 0 \pmod{12}$.

Nel seguito N , ove non si avverta espressamente indica un numero intero razionale.

Lemma 3°. *Se una sostituzione Ω ha la forma (7), è lecito moltiplicarla per una sostituzione parabolica di $\Gamma_{\mu(n)}$ in guisa che la parte reale e il coefficiente di ϵ di γ siano primi tra loro.*

Si ha infatti:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ Nx, & 1 \end{pmatrix} \Omega = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N[\gamma + x(1 + N^2\delta)], & 1 + N^2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N\pi, & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$$

con $\pi = \gamma + x(1 + N^2\delta)$. Supposto $1 + N^2\delta$ primo con 6 , si può trovare un x_0 tale che sia

$$(8) \quad \gamma + x_0(1 + N^2\delta) \equiv 2 - \epsilon \pmod{6},$$

e posto $x = x_0 + 6t$ si ha allora:

$$\pi = \gamma + x_0(1 + N^2\delta) + 6(1 + N^2\delta)t.$$

Il numero $6(1 + N^2\delta)$ è per le ipotesi fatte primo con $\gamma + x_0(1 + N^2\delta)$, si può perciò assegnare all'indeterminata t ⁽¹⁷⁾ un valore per il quale π risulti primo complesso; esso è per la (8) di primo grado, e perciò ha la parte reale e il coefficiente di ε primi tra loro. Quando non sia $1 + N^2\delta$ primo con 6, posto h uguale al prodotto dei fattori primi di 6 non contenuti in $1 + N^2\delta$, la sostituzione

$$\Omega_1 = \Omega \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ Nh, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N\gamma_1, & 1 + N^2\delta_1 \end{pmatrix}$$

ha il quarto coefficiente primo con 6.

Lemma 4°. *Se nella sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + N^2(a_1 + a_2\varepsilon), & N(b_1 + b_2\varepsilon) \\ N(c_1 + c_2\varepsilon), & 1 + N^2(d_1 + d_2\varepsilon) \end{pmatrix}$, c_1 e c_2 sono primi tra loro, ad essa, salvo moltiplicarla per sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$ si può dare la forma:*

$$\begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N(c_1 + c_2\varepsilon^2)\beta \\ N(c_1 + c_2\varepsilon), & 1 + N^2\delta \end{pmatrix},$$

con α, β, δ interi razionali.

Può evidentemente supporre $c_1 - c_2 \neq 0$, perchè ove si abbia $c_1 - c_2 = 0$ cioè $c_1 = c_2$ per l'ipotesi fatta che c_1 e c_2 siano primi tra loro, si ha $c_1 = c_2 = \pm 1$ e perciò $c_1 + c_2\varepsilon = \pm\varepsilon^2$, e la trasformata della sostituzione Ω

$$\begin{pmatrix} 1, & \pm\alpha\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & \mp\alpha\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & N\beta \\ \pm N\varepsilon^2, & 1 \mp N^2\beta\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & N\beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pm N\varepsilon^2, & 1 \end{pmatrix}$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche.

Supposto allora c_1 e c_2 primi tra loro, $c_1 - c_2 \neq 0$, si possono determinare gli interi x_1 e x_2 , y_1 e y_2 in guisa che si abbia rispettivamente:

$$(c_1 - c_2)x_2 + c_2x_1 + d_2 = 0, \quad (c_1 - c_2)y_2 + c_2y_1 + a_2 = 0$$

⁽¹⁷⁾ Qui facciamo uso del teorema di DIRICHLET sulla progressione aritmetica esteso da E. ECHT alle progressioni $a + bx$ con a e b interi di un corpo $K(\theta)$ e con a primo con l'ideale principale (b) . Cfr. E. ECHT: *Ueber di L-Functionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper*. (Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math. phys. Klasse, 1917, pp. 299-318) p. 300.

e la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1, & N(x_1 + x_2\varepsilon) \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & N(y_1 + y_2\varepsilon) \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

ha la forma richiesta.

Lemma 5°. *Se Ω è una sostituzione del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$, si possono determinare due prodotti di sostituzioni paraboliche S_1, S_2 di $\Gamma_{\mu(n)}$ tali che si abbia:*

$$S_1 \Omega S_2 = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N(1 + N^2\gamma_0)\beta \\ N(1 + N^2\gamma), & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$$

con α, β, δ interi razionali, (γ, γ_0) interi coniugati).

Infatti per il Lemma precedente ad Ω può darsi la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N(c_1 + c_2\varepsilon)\beta \\ N(c_1 + c_2\varepsilon), & 1 + N^2\delta \end{pmatrix},$$

e supporre in essa $1 + N^2\alpha$ primo con 6.

Consideriamo il prodotto

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N(c_1 + c_2\varepsilon)\beta \\ N(c_1 + c_2\varepsilon), & 1 + N^2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ Nx, & 1 \end{pmatrix} = \Omega_1$$

e indicando con x_0 un intero complesso radice della congruenza

$$(10) \quad c_1 + c_2\varepsilon + (1 + N^2\alpha)x_0 \equiv 1 \pmod{N^2}$$

si scelga l'intero t in guisa che il numero:

$$\pi = c_1 + c_2\varepsilon + x_0(1 + N^2\alpha) + N^2(1 + N^2\alpha)t = 1 + N^2\gamma$$

sia un numero primo ⁽¹⁸⁾. Se π è di secondo grado (intero razionale), la Ω_1 per le osservazioni 1^a e 2^a è un prodotto di sostituzioni paraboliche; se π è di primo grado, perciò colla parte reale e il coefficiente di ε primi tra loro, nella (9), posto $x = x_0 + N^2t$, possiamo operare come abbiamo indicato nel lemma precedente e ne segue il lemma ora enunciato.

Lemma 6°. *Una sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + N^2cc_0\alpha, & Nc_0\beta \\ Nc\gamma, & 1 + N^2cc_0\delta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi razionali, c e c_0 interi coniugati è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$ ⁽¹⁹⁾.*

⁽¹⁸⁾ Cfr. ⁽¹⁷⁾.

⁽¹⁹⁾ Cfr. 10 (A), p. 315.

Corollario 1°. Se una sostituzione (unimodulare) $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha & Nc_0\beta \\ Nc\gamma & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi assoluti è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$ anche la sostituzione unimodulare $\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha & Nc_0\beta_1 \\ Nc\gamma_1 & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$ con β_1 e γ_1 interi assoluti ($\beta_1\gamma_1 = \beta\gamma$) è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$ ⁽²⁰⁾.

Corollario 2°. Se la sostituzione $\begin{pmatrix} 1 + na & nc_0R_2 \\ ncR_1 & 1 + nd \end{pmatrix}$ con n, a, d, R_1, R_2 interi assoluti è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$, anche la sostituzione $\begin{pmatrix} 1 + na & nc_0R'_2 \\ ncR'_1 & 1 + nd \end{pmatrix}$ con R'_1, R'_2 interi assoluti, $R'_1R'_2 = R_1R_2$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$ ⁽²¹⁾.

Lemma 7°. Se Ω è una sostituzione del gruppo $\Gamma_{\mu(N)}$, la sostituzione Ω^e è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$.

Diremo che una sostituzione Ω appartiene all'esponente h , quando h è il più piccolo esponente positivo per il quale si abbia $\Omega^h = S$ con S prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$.

Si può dimostrare ⁽²²⁾:

a) se una sostituzione appartiene all'esponente h , qualsiasi sua trasformata moltiplicata per un numero finito di sostituzioni paraboliche arbitrarie appartiene all'esponente h ;

b) data una sostituzione Ω ad essa se ne può sostituire un'altra

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha & N(1 + N^2\gamma_0)\beta \\ N(1 + N^2\gamma) & 1 + N^2\delta \end{pmatrix},$$

con α, β, δ interi razionali, che appartiene allo stesso esponente h , ed h deve risultare un divisore dell'indicatore di GAUSS

$$L = \varphi \{ [1 + N^2\gamma + (1 + N^2\alpha)(y_1 + y_2\varepsilon)] \{1 + N^2\gamma_0 + (1 + N^2\alpha)(y_1 + y_2\varepsilon^2)\} \}$$

essendo $1 + N^2\gamma + (1 + N^2\alpha)(y_1 + y_2\varepsilon)$ un numero colla parte reale e il coefficiente di ε primi tra loro, e $1 + y_1 + y_2\varepsilon$ primo con N .

Supponiamo come si è detto al lemma 1°, $N \equiv 0 \pmod{12}$ e cominciamo dal provare che se h ha un divisore primo dispari p , esso deve essere uguale

⁽²⁰⁾ Cfr. 10 (A), p. 315.

⁽²¹⁾ Cfr. loc. cit. ⁽²⁾, n. 2.

⁽²²⁾ Cfr. 10 (A), p. 316.

a 3; per questo dimostriamo che preso un numero primo dispari $p \neq 3$ si possono determinare y_1 e y_2 in guisa che L non sia divisibile per p .

Si può supporre nella (11), $1 + N^2\alpha$ primo con p , ⁽²³⁾ e siano x ed a due soluzioni delle congruenze

$$(12) \quad \begin{cases} 1 + N^2\gamma + x(1 + N^2\alpha) \equiv 2 & (\text{mod. } 9p^2), \\ 1 + x + 9p^2a \equiv 1 - \epsilon & (\text{mod. } 8). \end{cases}$$

I numeri x e a esistono, essendo $9p^2$ primo con $1 + N^2\alpha$, ed 8 primo con $9p^2$. Essendo per le ipotesi fatte il numero $8 \times 9p^2(1 + N^2\alpha)$ primo con $1 + N^2\gamma + (x + 9p^2a)(1 + N^2\alpha)$ si può scegliere l'indeterminata z in guisa che il numero

$$(13) \quad \pi = 1 + N^2\gamma + (x + 9p^2a)(1 + N^2\alpha) + 8 \times 9p^2(1 + N^2\alpha)z$$

sia primo ⁽²⁴⁾ e poichè non può aversi insieme

$$\begin{cases} \pm 5\epsilon^p \equiv 2 & (\text{mod. } 3) \\ \pm 5\epsilon^p \equiv 1 - \epsilon & (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

segue che π è di primo grado, inoltre possiamo scegliere z in guisa che π sia in modulo maggiore di N^2 e perciò primo con N^2 .

Si ha poi dalla (13) e dalla prima delle (12)

$$\pi\pi_0 \equiv 4 \quad (\text{mod. } 9p^2)$$

e perciò

$$\pi\pi_0 - 1 \equiv 3 \quad (\text{mod. } 9p^2)$$

ossia $L = \varphi(\pi\pi_0) = 3 + 9p^2q$, che non è divisibile per p , supposto $p \neq 3$.

Si ha di più che la massima potenza di 3 che divide L è il numero 3 stesso, perciò h può contenere come divisore dispari al massimo 3.

Si osservi ancora che dalla (13) e dalla seconda della (12) segue:

$$\pi\pi_0 \equiv (1 - \epsilon)(1 - \epsilon^2) = 3 \quad (\text{mod. } 8)$$

cioè $\pi\pi_0 - 1 = 8l + 2$ ovvero $L = 2(4l + 1)$ quindi se h è pari la massima potenza del 2 contenuto in esso è 2, cioè h è un divisore di 6 e perciò Ω può appartenere ad un esponente divisore di 6, ossia Ω^6 è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$.

⁽²³⁾ Cfr. 10 (A), p. 318.

⁽²⁴⁾ Cfr. ⁽¹⁷⁾.

Lemma 8. Se nella sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + n^2a & nb \\ nc & 1 + n^2d \end{pmatrix}$ si ha

$$\begin{cases} 1 + n^2a \equiv \pm \varepsilon^2 & (\text{mod. } c); \rho = 0, 1, 2; \\ c \equiv 1 & (\text{mod. } n^2), \end{cases}$$

la Ω è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$ ⁽²⁵⁾.

8. Teorema. La sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + na & nb \\ nc & 1 + nd \end{pmatrix}$ quando il modulo n è primo con $2(1 - \varepsilon)$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$.

Infatti applicando la trasformazione indicata nel Lemma 1° e 5°, la può assumere la forma:

$$(14) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha & N(1 + N^2\gamma_0)\beta \\ N(1 + N^2\gamma) & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$$

con N primo con $2(1 - \varepsilon)$, α, β, δ interi razionali.

È lecito supporre $1 + N^2\gamma$ numero primo, e

$$(15) \quad 1 + N^2\gamma \equiv 2 + 9\varepsilon \pmod{36},$$

e perciò complesso di 1° grado. Ove ciò non sia si può trasformare la (14) in guisa che restino soddisfatte le condizioni ora dette. Infatti nella (14) possiamo supporre $1 + N^2\alpha$ primo con $2(1 - \varepsilon)$, [perchè in caso opposto nella sostituzione

$$\Omega \begin{pmatrix} 1, N(1 + N^2\gamma_0)x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha + N^2(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)x & N\beta_1(1 + N^2\gamma_0) \\ N(1 + N^2\gamma) & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$$

essendo $N(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)$ primo con $1 + N^2\alpha$, si può scegliere x in guisa che il primo coefficiente sia primo con $2(1 - \varepsilon)$; basta porre x uguale al prodotto dei fattori (o al fattore) di $2(1 - \varepsilon)$ non contenuti in $1 + N^2\alpha$. Esiste allora una radice x_0 della congruenza:

$$(16) \quad 1 + N^2\gamma + (1 + N^2\alpha)N^2x_0 \equiv 2 + 9\varepsilon \pmod{36},$$

(perchè $N^2(1 + N^2\alpha)$ è primo con $2(1 - \varepsilon)$) e si può ancora scegliere l'indeterminata t in guisa che il numero

$$\pi = 1 + N^2\gamma + (1 + N^2\alpha)N^2x_0 + 36(1 + N^2\alpha)N^2t$$

sia primo complesso [perchè $36(1 + N^2\alpha)N^2$ è primo con $1 + N^2\gamma + (1 + N^2\alpha)N^2x_0$] e di conseguenza di primo grado a causa della (16).

⁽²⁵⁾ Cfr. 10 (A), p. 319.

Nella sostituzione

$$\Omega \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ N^3(x_0 + 36t), & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta_i \\ N\pi, & 1 + N^2\delta_i \end{pmatrix}$$

il fattore primo π del 3° coefficiente soddisfa alle due condizioni

$$\begin{aligned} \pi &\equiv 1, & (\text{mod. } N^2), \\ \pi &\equiv 2 + 9\varepsilon & (\text{mod. } 36) \end{aligned}$$

e col procedimento del Lemma 6° potremo formare la sostituzione

$$S_1 \Omega S_2 = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\pi_0\beta' \\ N\beta & 1 + N^2\delta' \end{pmatrix}$$

con S_1 e S_2 prodotti di sostituzioni paraboliche, α , β' , δ' interi razionali. Supponiamo senz'altro che nella (14) sia $1 + N^2\gamma$ primo di primo grado e sia soddisfatta la (15).

Dalla (15) segue

$$(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0) \equiv 67 \quad (\text{mod. } 36),$$

perciò $\frac{1}{6} \varphi[(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)] = 11 + 6q$, ossia il numero $\frac{1}{6} \varphi[(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)]$ è primo con 6.

Dalla (14) si ha poi

$$\Omega^{\frac{1}{6}\varphi} = \begin{pmatrix} (1 + N^2\alpha)^{\frac{1}{6}\varphi} + N^2(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)\alpha_i, & N(1 + N^2\gamma_0)\beta_i \\ N(1 + N^2\gamma)\gamma_i, & (1 + N^2\delta)^{\frac{1}{6}\varphi} + N^2(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)\delta_i \end{pmatrix},$$

con α_i , β_i , γ_i , δ_i interi razionali.

Ora avendosi

$$\begin{aligned} (1 + N^2\alpha)^{\frac{1}{6}\varphi} &\equiv \pm \varepsilon^p & (\text{mod. } 1 + N^2\gamma) \\ 1 + N^2\gamma &\equiv 1 & (\text{mod. } N^2) \end{aligned}$$

per il Lemma 8° la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} (1 + N^2\alpha)^{\frac{1}{6}\varphi} + N^2(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)\alpha_i, & N(1 + N^2\gamma_0)\beta_i\gamma_i \\ N(1 + N^2\gamma), & (1 + N^2\delta)^{\frac{1}{6}\varphi} + N^2(1 + N^2\gamma)(1 + N^2\gamma_0)\delta_i \end{pmatrix}$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$, e per il corollario 1° del

Lemma 6° anche la sostituzione $\Omega^{\frac{1}{6}\varphi} = \Omega^{11+6q}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$, ossia Ω appartiene ad un esponente divisore di $11+6q$ e per il Lemma 7° all'esponente 1, e perciò la sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix}$ con n primo con $2(1-\varepsilon)$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$.

§ 6. Il teorema fondamentale per i moduli $m(1-\varepsilon)$, $3m$, $2m$, $2m(1-\varepsilon)$, $6m$.

9. Teorema 1°. La sostituzione unimodulare $\Omega = \begin{pmatrix} 1+2m\alpha, & 2m\beta \\ 2m\gamma, & 1+2m\delta \end{pmatrix}$ con m dispari, ha il periodo 1 o 3.

Possiamo supporre γ primo con 2, in caso opposto si può sostituire alla Ω l'altra sostituzione $\Omega \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2m, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m\alpha, & 2m\beta \\ 2m[\gamma+(1+2m\alpha)], & 1+2m\delta \end{pmatrix}$ e il numero $\gamma+(1+2m\alpha)$ è primo con 2. Indichi ora x una soluzione della congruenza

$$(17) \quad 1+2m\alpha+2m\gamma x \equiv 1+6\varepsilon \pmod{12},$$

(x esiste perchè $2m\gamma$ e 12 hanno per massimo comune divisore $2(1-\varepsilon)\lambda$ con $\lambda \leq 2$) e si prenda t in guisa che il numero $\pi = 1+2m\alpha+2m\gamma x+12m\gamma t$ sia primo (ciò è possibile perchè $12m\gamma$ è primo con $1+2m\alpha+2m\gamma x$) e perciò per la (17) di primo grado (è impossibile infatti la congruenza $\pm 5\varepsilon^p \equiv 1 \pmod{6}$); si avrà dalla (17) che il numero primo $p = \pi\pi_0$ ha la forma $4h+3$ cioè $p \equiv 3 \pmod{4}$, e quindi $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ ⁽²⁶⁾.

Ora si ha per la trasformata Ω_1 di Ω (che ha lo stesso periodo di Ω)

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1, & -(x+6t) \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & x+6t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi, & 2mb \\ 2m\gamma, & 1+2md \end{pmatrix}$$

e sono possibili due casi $\left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = 1$, $\left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = -1$ ⁽²⁷⁾.

⁽²⁶⁾ Cfr. DIRICHLET-DEDEKIND: *Lezioni sulla Teoria dei Numeri* (traduzione italiana di A. FAIFOFER) p. 86.

⁽²⁷⁾ Per il significato del simbolo $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]$ relativo ai corpi quadratici in un corpo algebrico e la sua riduzione all'ordinario simbolo di LEGENDRE, cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽⁶⁾, p. 328 a 345. Per il teorema di reciprocità relativo a questi simboli, cfr. E. ECHE: *Vorlesungen über*

1.° Caso. Sia $\left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = 1$; esisterà (essendo π di primo grado), un intero razionale g per il quale si abbia $g^2 \equiv \gamma \pmod{\pi}$; e sia ancora a un intero razionale tale che si abbia $1 + 2ma \equiv g^{-1} \pmod{\pi\pi_0}$; si avrà

$$(1 + 2ma)^2 \gamma \equiv 1 \pmod{\pi},$$

ovvero

$$(1 + 2ma)^2 \gamma = 1 + \pi q.$$

Considerando una sostituzione unimodulare $\Omega_2 = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2 & 2mb_1 \\ 2mq & 1 + 2md_1 \end{pmatrix}$ si ha:

$$\Omega_2 \Omega_1^{-1} = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2 & 2mb_1 \\ 2mb & 1 + 2md_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2md & -2mb \\ -2m\gamma & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2ma_2 & 2mb_2 \\ -2m & 1 + 2md_2 \end{pmatrix}$$

ed essendo $\begin{pmatrix} 1 + 2ma_2 & 2mb_2 \\ -2m & 1 + 2md_2 \end{pmatrix}$ un prodotto di sostituzioni paraboliche perchè si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2ma_2 & 2mb_2 \\ -2m & 1 + 2md_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2mB \\ -2m & 1 - 4mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2mB \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2m & 1 \end{pmatrix}$$

è $\Omega_2 \Omega_1^{-1} = S^{-1}$ ove S^{-1} è un prodotto di sostituzioni paraboliche, ed infine $\Omega_1 = S \Omega_2$ quindi Ω_1 (e perciò Ω) hanno lo stesso periodo di Ω_2 .

Consideriamo ora una sostituzione unimodulare $\Omega_3 = \begin{pmatrix} 1 + 2ma & 2mq_0 b_3 \\ 2mq & 1 + 2md_3 \end{pmatrix}$ con b_3 e d_3 interi razionali: è $\Omega_3^2 = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2 + 4m^2 q q_0 a_4 & 2mq_0 b_4 \\ 2mq c_4 & 1 + 2md_4 \end{pmatrix}$ ed essa ha il periodo 1 o 3; ha anche il periodo 1 o 3 la sostituzione

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2 + 4m^2 q q_0 a_4 & 2mq_0 b_4 c_4 \\ 2mq & 1 + 2md_4 \end{pmatrix}$$

die Theorie der algebraischen Zahlen. (Leipzig 1923, Akademische Verlagsgesellschaft) p. 242 a 249. Il teorema di reciprocità nei corpi quadratici immaginari ha la forma semplicissima: Fra due numeri dispari α, β di cui uno almeno sia primario (cioè congruente col quadrato di un numero del corpo rispetto al modulo 4) ha luogo la relazione $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = \left[\frac{\beta}{\alpha}\right]$ (dal teor. 165, pag. 246). Se uno dei numeri è pari, si ha l'altro teorema: Se α è un numero dispari residuo quadratico del modulo 8, è $\left[\frac{2}{\alpha}\right] = 1$ (dal teorema 167, p. 249).

poichè il prodotto $\Omega_3^2 \Omega_4^{-1}$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + 4m^2 q q_0 A, & 2m q_0 B \\ 2m q C, & 1 + 4m^2 q q_0 D \end{pmatrix} \quad (A, B, C, D \text{ interi assoluti})$$

ed è quindi (per il Lemma 6°, § 5) un prodotto di sostituzioni paraboliche; ha ancora il periodo 1 o 3 la trasformata di Ω_4

$$\begin{pmatrix} 1, & 2m q_0 a_4 \\ & 1 \end{pmatrix} \Omega_4 \begin{pmatrix} 1, & -2m q_0 a_4 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2, & 2m q_0 B_1 \\ 2m q, & 1 + 2m D_1 \end{pmatrix}$$

e infine tenuto conto che questa differisce da Ω_2 per una sostituzione parabolica (perchè hanno il primo ed il terzo coefficiente eguali) anche la Ω_2 (e perciò la Ω) ha il periodo 1 o 3. c. d. d.

2.° Caso. Sia nella $\Omega_1 = \begin{pmatrix} \pi, & 2m q \\ 2m \gamma, & 1 + 2m d \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\gamma}{\pi}\right) = -1$. È anche

$$\left[\frac{-\gamma}{\pi}\right] = \left[\frac{-1}{\pi}\right] \left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = - \left[\frac{-1}{\pi}\right] = - \left(\frac{-1}{\pi \pi_0}\right) = - \left(\frac{-1}{p}\right) = 1,$$

quindi la sostituzione $\begin{pmatrix} \pi, & -2mb \\ -2m \gamma, & 1 + 2m d \end{pmatrix}$ per il caso precedente appartiene all'esponente 1 o 3; ed anche la Ω_1 (ragionando come all'osservazione 2°, § 5), ed infine la Ω ha il periodo 1 o 3.

10. Teorema 2°. Qualsiasi sostituzione $\begin{pmatrix} 1 + 6m\alpha, & 1 + 6m\delta \\ 6m\gamma, & 6m\beta \end{pmatrix}$ con m primo con 6 si può esprimere con un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$.

Possiamo supporre (Lemma 1°, § 5) m intero razionale dispari, primo con 3. Tenuto conto del teorema precedente e ragionando come nella seconda delle Memorie citate dall'A. ⁽²⁸⁾ si prova poi:

a) La sostituzione $\begin{pmatrix} (1 + 6ma)^3, & 6mb \\ 6mc, & 1 + 6md \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$.

b) Indicando col simbolo $\left[\frac{c}{1 + 6ma}\right]_3$ il simbolo generalizzato di JACOBI sui

⁽²⁸⁾ Cfr. nota ⁽²⁾.

residui cubici ⁽²⁹⁾, si ha che la sostituzione: $\begin{pmatrix} 1+6ma, & 6mb \\ 6mc, & 1+6md \end{pmatrix}$ con $1+6ma$ primo, di primo grado e $\left[\frac{c}{1+6ma} \right]_3 = 1$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$ ⁽³⁰⁾.

c) La sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1+6ma, & 6mb \\ 6mc, & 1+6md \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(6m)}$.

Infatti possiamo alla Ω sostituire una sua trasformata, in cui sia $1+6ma$ primo, di primo grado, e inoltre $a \equiv \varepsilon \pmod{3}$. Ove questo non sia nella Ω

⁽²⁹⁾ Cfr. per i residui cubici, P. BACHMANN: *Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie*. (Leipzig 1872), p. 185 a 199 e p. 224.

Abbiamo usato per i residui cubici il simbolo $\left[\frac{m}{n} \right]_3$ per distinguerlo da quello dei residui quadratici. Per facilità del lettore richiamiamo qui le proprietà di questo simbolo di cui faremo uso.

Se m è un numero primo, ed n è primo con m , si ha sempre $n^{\frac{N(m)-1}{3}} \equiv \varepsilon^2 \pmod{n}$, e si porrà per definizione $\left[\frac{n}{m} \right]_3 = \varepsilon^2$. La condizione necessaria e sufficiente perchè sia risolubile la congruenza $x^3 \equiv n \pmod{m}$ è che si abbia $\left[\frac{n}{m} \right]_3 = 1$. Per i simboli $\left[\frac{n}{m} \right]_3$ valgono le seguenti proprietà:

$$a) \left[\frac{n}{m} \right]_3 \left[\frac{n'}{m} \right]_3 = \left[\frac{nn'}{m} \right]_3;$$

$$b) \left[\frac{-1}{m} \right]_3 = 1, \left[\frac{\varepsilon}{m} \right]_3 = \varepsilon^{\frac{N(m)-1}{3}};$$

$$c) \left[\frac{n}{q} \right]_3 = 1 \text{ per } q \text{ primo intero razionale};$$

$$d) \left[\frac{1-\varepsilon}{a+b\varepsilon} \right]_3 = \varepsilon^{\frac{2}{3}(a+1)} \text{ supposto } a+b\varepsilon \text{ scritto sotto forma primaria, cioè con } a \equiv -1 \pmod{3}, b \equiv 0 \pmod{3}.$$

e) Se m e n sono due numeri primi sotto forma primaria (diversi dall'unità) è $\left[\frac{n}{m} \right]_3 = \left[\frac{m}{n} \right]_3$ (teorema di reciprocità, valido anche quando uno dei due numeri m od n sia il 2).

Al simbolo generalizzato di JACOBI $\left[\frac{m}{n} \right]_3$, con m e n primi tra loro daremo il solito significato;

notiamo che si può provare, che se il numero α ha la forma primaria, si ha $\left[\frac{\varepsilon}{\alpha} \right]_3 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$ secondo che si abbia $\alpha x_0 \equiv 1, 4, 7 \pmod{9}$. Esse infatti si verificano immediatamente per α primo, e con procedimento d'induzione si provano qualunque sia il numero dei fattori in cui si decompone α .

⁽³⁰⁾ Cfr. per la dimostrazione il teorema precedente.

si può supporre sia c primo con 3, basterà in caso opposto considerare la sostituzione:

$$\Omega \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 6m, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6ma, & 6mb \\ 6m[c + (1 + 6ma)], & 1 + 6md \end{pmatrix}$$

e se x indica una soluzione della congruenza $a - cx \equiv \varepsilon \pmod{3}$, ove si scelga t in guisa che sia il numero $\pi = 1 + 6m(a - cx) + 18mct$ primo (e perciò di primo grado) si ha che la trasformata Ω_1 di Ω

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1, & x - 3t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & -x + 3t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi, & 6mb_1 \\ 6mc, & 1 + 6md_1 \end{pmatrix}$$

soddisfa alle condizioni richieste.

Ora se è $\left[\frac{c}{\pi}\right]_3 = 1$, Ω_1 e perciò Ω è un prodotto di sostituzioni paraboliche

(caso b); se invece è $\left[\frac{c}{\pi}\right]_3 = \varepsilon^\lambda$ avendosi

$$\pi\pi_0 = (1 + 6m\varepsilon + 9q)(1 + 6m\varepsilon^2 + 9q_0) = 1 - 6m + 9Q$$

è $\rho = \frac{1}{3}(\pi\pi_0 - 1) = -2m + 3Q$ cioè ρ è primo con 3 e se ρ_1 indica una soluzione della congruenza $\rho\rho_1 + \lambda \equiv 0 \pmod{3}$ si ha:

$$\left[\frac{c\varepsilon^{\rho_1}}{\pi}\right]_3 = \varepsilon^\lambda \left[\frac{\varepsilon}{\pi}\right]_3^{\rho_1} = \varepsilon^{\lambda + \rho\rho_1} = 1,$$

onde la sostituzione $\begin{pmatrix} \pi, & 6mb_1\varepsilon^{-\rho_1} \\ 6mc\varepsilon^{\rho_1}, & 1 + 6md_1 \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$, e quindi Ω_1 (per l'osservazione 2^a § 5) e perciò la Ω sono prodotti di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$. c. d. d.

Tenuto conto del Lemma 1^o si ha:

Corollario 1^o. *Tutte le sostituzioni $\begin{pmatrix} 1 + na, & nb \\ nc, & 1 + nd \end{pmatrix}$ quando sia $n = 2^\lambda(1 - \varepsilon)^\mu m$ con m primo con 6, $\lambda = 0, 1$; $\mu = 0, 1$ sono prodotti di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$.*

Corollario 2^o. *Il teorema enunciato al § 4 è vero per i moduli $2^\lambda(1 - \varepsilon)^\mu m$ con m primo con 6, $\lambda = 0, 1$; $\mu = 0, 1$.*

Proveremo nel paragrafo seguente che se il modulo n è multiplo di 4 o di $(1 - \varepsilon)^3$ non è più vero il teorema enunciato nel § 4.

Qui come applicazione daremo l'interpretazione geometrica dei gruppi $G_{2^{1(1-\epsilon)}}$, $G_{2^{1(2)}}$.

Quando sia $n = 1 - \epsilon$ avendosi

$$(SU)^2 = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \equiv 1 \quad (\text{mod. } 1 - \epsilon)$$

le (I) del § 4 diventano :

$$(17) \quad S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^2 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1,$$

e le (II) essendo ora $n_1 = 1$, $n_2 = -1$, $(TU)^2(TU)^{-2} = 1$, $(TU)^6 = 1$, ed esse sono soddisfatte per le (17).

Le (17) caratterizzano il gruppo ampliato del tetraedro regolare, (di ordine 24). Infatti indicando con V_1, V_2, V_3, V_4 i vertici di un tetraedro regolare, posto

$$S = (V_1, V_2), \quad T = (V_1, V_3, V_2), \quad U = (V_1, V_2)(V_3, V_4)$$

cioè S uguale alla riflessione sopra il piano che passa per lo spigolo V_3V_4 e il punto medio di V_1V_2 ; T uguale alla rotazione a periodo 3 attorno alla congiungente il vertice V_4 col centro della faccia $V_1V_2V_3$; U uguale al ribaltamento attorno alla retta congiungente i punti medi degli spigoli opposti V_1V_2, V_3V_4 i movimenti S, T, U soddisfano alle (17) e generano il gruppo ampliato del tetraedro regolare ⁽³¹⁾, come poteva prevedersi per i risultati del § 1.

Quando sia $n = 2$, le relazioni (I) e (II) del § 4 diventano :

$$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^3 = 1, \\ [(US)^2(TU)^2]^2 = 1, \quad [(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^2 = 1.$$

L'ultima relazione scritta è conseguenza delle altre. Infatti essa può scriversi :

$$(SU)^2(TU)^2(SU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = (SU)^2(TU)^2(US)^2(TU)^2(SU)^2 = \\ = (US)^2[(US)^2(TU)^2]^2(SU)^2 = 1,$$

⁽³¹⁾ Cfr. ad es. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*. (Pisa, Spoerri 1899), p. 123, p. 129.

quindi le relazioni fra le S, T, U diventano

$$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \\ (SU)^5 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1, \quad [(US)(TU)^2]^2 = 1.$$

È facile vedere che il gruppo G_{240} è isomorfo col gruppo ampliato dell'icosaedro regolare. Infatti indicando con $\infty, 1, 2, 3, 4, 5$ un vertice dell'icosaedro e ordinatamente i 5 vertici adiacenti, e con $\infty', 1', 2', 3', 4', 5'$ i vertici opposti, posto :

$$T = (0, 4, 2')(0', 4', 2')(1, 3, \infty')(1', 3', \infty) \\ U = (0, \infty)(0', \infty')(1, 4)(1', 4')(2, 2')(3, 3'), \\ S = (2, 4')(2', 4')(3, \infty')(3', \infty),$$

le T e U rappresentano rispettivamente due rotazioni a periodo 3 e 2 del gruppo ampliato dell'icosaedro e generano un gruppo tetraedrale G_{12} che lascia fermo uno dei cinque ottaedri inscritti nell'icosaedro; S rappresenta una riflessione che trasforma l'ottaedro considerato in un altro ottaedro inscritto, e facilmente si verifica che le S, T, U generano l'intero gruppo dell'icosaedro ⁽³²⁾.

Del resto la sostituzione $P = (UT^2)S(TU)S$ è un movimento a periodo 5 attorno ai vertici 1 e 1', e il gruppo ampliato G_{120} dell'icosaedro si rappresenta per G_{12} con gli indici :

$$1, \quad P, \quad P^2, \quad P^3, \quad P^4, \quad S, \quad SP, \quad SP^2, \quad SP^3, \quad SP^4.$$

§ 7. I moduli $4m, 3(1 - \epsilon)m$ come moduli eccezionali.

11. Vogliamo ora provare che il teorema enunciato nel § 4 non sussiste quando il modulo n sia divisibile per il numero 4, o per il numero $(1 - \epsilon)^3$; basterà provare, nei due casi, che esistono delle sostituzioni unimodulari :

$$\begin{pmatrix} 1 + 4ma, & 4mb \\ 4mc, & 1 + 4md \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 + 3m(1 - \epsilon)a, & 3m(1 - \epsilon^2)b \\ 3m(1 - \epsilon)c, & 1 + 3m(1 - \epsilon)d \end{pmatrix}$$

che non sono prodotti di sostituzioni paraboliche.

Per il lemma 1° del § 5 supponiamo che sia m intero razionale, e limitiamoci ora al primo caso. È fondamentale, in vista di quanto ci proponiamo

⁽³²⁾ Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. ⁽³¹⁾, p. 124, p. 129.

di provare, dimostrare il teorema: *Tutte le sostituzioni unimodulari,*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & 4m\beta \\ 4m\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4m}$$

per le quali sia $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] = 1$ ⁽³³⁾ formano gruppo.

Siano $\begin{pmatrix} \alpha, & 4m\beta \\ 4m\lambda\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\lambda, & 4mb \\ 4mc, & d \end{pmatrix}$ due sostituzioni unimodulari del gruppo $\Gamma_{\mu(4m)}$ per le quali si abbia:

$$\left[\frac{\lambda\gamma}{\alpha}\right] = 1, \quad \left[\frac{c}{a\lambda}\right] = 1;$$

dove con λ abbiamo indicato il massimo comun divisore tra il terzo coefficiente della prima sostituzione e il primo della seconda, e dove potremo supporre a e λ scelti in guisa che si abbia contemporaneamente:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \\ \lambda \equiv 1 \end{cases} \pmod{4}; \quad \begin{cases} a \equiv 1 - \varepsilon \\ \lambda \equiv -(1 - \varepsilon^2) \end{cases} \pmod{4}.$$

Sia ancora ω una radice della congruenza:

$$(18) \quad a\alpha\omega \equiv 1 \pmod{8}$$

e possiamo supporre sia ω primo e primo con γa (infatti se ω_0 è una radice della congruenza $a\alpha\omega_0 \equiv 1 \pmod{8}$, posto $\omega = \omega_0 + 8q$, si può scegliere q in guisa che il numero $\omega_0 + 8q$ sia primo e primo con γa).

Avendosi:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & 4m\beta \\ 4m\lambda\gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\lambda, & 4mb \\ 4mc, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma), & 4m(\lambda a\beta + b\delta) \\ 4m(c\alpha + \lambda d\gamma), & d\delta + 16m^2c\beta \end{pmatrix}$$

è

$$\begin{aligned} \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma)}\right] &= \left[\frac{c}{\lambda}\right] \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right] \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{a\alpha + 16m^2b\gamma}\right] = \\ &= \left[\frac{c}{\lambda}\right] \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right] \left[\frac{ac\alpha + \lambda ad\gamma}{a\alpha + 16m^2b\gamma}\right] \left[\frac{a}{a\alpha\omega + 16m^2b\gamma\omega}\right] \left[\frac{a}{\omega}\right] \end{aligned}$$

od anche tenuto conto:

$$a) \quad \lambda ad = 1 + 16m^2bc;$$

$$b) \quad \left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] = \left[\frac{\lambda}{\alpha}\right];$$

⁽³³⁾ Cfr. ⁽²⁷⁾.

c) del teorema di reciprocità;

d) $a\alpha\omega \equiv 1 \pmod{8}$ e perciò $\left[\frac{2}{a\alpha\omega}\right] = 1$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma)}\right] &= \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{\gamma}{a\alpha + 16m^2b\gamma}\right]\left[\frac{b\gamma\omega}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right] = \\ &= \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{\gamma}{a\alpha + 16m^2b\gamma}\right]\left[\frac{\gamma}{\omega}\right]\left[\frac{b\gamma\omega}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right] = \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{a\alpha\omega}{\gamma}\right]\left[\frac{\gamma}{\omega}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{\gamma}{a}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right] = \\ &= \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]\left[\frac{a\alpha\omega}{\gamma}\right]\left[\frac{\gamma}{a\alpha\omega}\right]\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right] = \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right] = \\ &= \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]. \end{aligned}$$

Ma è

$$\left[\frac{bc}{a}\right] = \left[\frac{-1}{a}\right] = \left[\frac{-1}{a\alpha\omega}\right]\left[\frac{-1}{\alpha\omega}\right] = \left[\frac{-1}{\alpha\omega}\right] = \left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{-1}{\alpha}\right] = \left[\frac{-1}{\omega}\right],$$

e perciò $\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{c}{a}\right] = \left[\frac{-1}{\omega}\right]$, ma è anche $\left[\frac{c}{a}\right]\left[\frac{c}{\lambda}\right] = 1$, quindi $\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{c}{\lambda}\right] = \left[\frac{-1}{\omega}\right]$, ed allora $\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma)}\right] = \left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]$.

Distinguiamo ora i due casi $a \equiv 1 \pmod{4}$, $a \equiv 1 - \varepsilon \pmod{4}$:

a) $a \equiv 1 \pmod{4}$. È allora $\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right] = 1$, ma è anche $\omega \equiv 1 \pmod{4}$

(cioè ω è primario) perciò $\left[\frac{-1}{\omega}\right] = 1$ ossia $\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma)}\right] = 1$.

b) $a \equiv 1 - \varepsilon \pmod{4}$; essendo $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ è per la (18) $\omega \equiv -(1 - \varepsilon^2) \pmod{4}$, e analogamente se ω' è un altro numero primo, radice della congruenza (18) è $\omega' \equiv -(1 - \varepsilon^2) \pmod{4}$ perciò $a\omega' \equiv 1$, $\omega\omega' \equiv (1 - \varepsilon^2)^2 \pmod{4}$ ossia $a\omega'$ e $\omega\omega'$ sono primari.

Si ha quindi:

$$\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right] = \left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right]\left[\frac{a\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a\omega'}\right] = \left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right].$$

Ora se $\omega(\omega')$ è intero razionale, anche $\omega' = \omega + 8q$ ($\omega = \omega' + 8q$) si può supporre intero razionale, ed è

$$\left[\frac{-1}{\omega}\right] = \left(\frac{1}{\omega}\right) = 1, \quad \left[\frac{\omega'}{\omega}\right] = \left(\frac{\omega'^2}{\omega}\right) = 1, \quad \left[\frac{\omega}{\omega'}\right] = \left(\frac{\omega^2}{\omega'}\right) = 1,$$

quindi $\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right] = 1$ e perciò $\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma)}\right] = 1$.

Siano invece ω e ω' di 2° grado possiamo supporli primi con $1 - \varepsilon$, e poichè $\omega(1 - \varepsilon)$ e $\omega(-3 - \varepsilon)$ sono primari si avrà:

- a) $\left[\frac{-1}{\omega}\right] = \left(\frac{-1}{\omega\omega_0}\right) = -1$, (perchè $\omega\omega_0 \equiv 3 \pmod{4}$);
- b) $\left[\frac{-1}{\omega}\right] \left[\frac{\omega'}{\omega}\right] \left[\frac{\omega}{\omega'}\right] = - \left[\frac{\omega}{(1-\varepsilon)\omega'}\right] \left[\frac{\omega}{1-\varepsilon}\right] \left[\frac{1-\varepsilon}{\omega}\right] \left[\frac{(1-\varepsilon)\omega'}{\omega}\right] = - \left[\frac{\omega}{1-\varepsilon}\right] \left[\frac{1-\varepsilon}{\omega}\right] =$
 $= - \left[\frac{\omega(-3-\varepsilon)}{1-\varepsilon}\right] \left[\frac{-(3+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\right] \left[\frac{1-\varepsilon}{-\omega(3+\varepsilon)}\right] \left[\frac{1-\varepsilon}{-(3+\varepsilon)}\right] = - \left[\frac{-1}{1-\varepsilon}\right] \left[\frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] \left[\frac{1-\varepsilon}{3+\varepsilon}\right];$
- c) $\left[\frac{-1}{1-\varepsilon}\right] = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$, $\left[\frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] = \left[\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] = 1$, $\left[\frac{1-\varepsilon}{3+\varepsilon}\right] = 1$; (perchè $(1-\varepsilon)^2 \equiv 1 \pmod{3+\varepsilon}$); perciò $\left[\frac{-1}{\omega}\right] \left[\frac{\omega'}{\omega}\right] \left[\frac{\omega}{\omega'}\right] = 1$ e quindi $\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma)}\right] = 1$, c. d. d.

Corollario 1°. *Se una sostituzione unimodulare*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha, & 4m\beta \\ 4m\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4m}$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(4m)}$ è $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] = +1$.

Infatti una sostituzione parabolica ha la forma $\begin{pmatrix} 1 + 4mkxy, & -4mky^2 \\ 4mkx^2, & 1 - 4mkxy \end{pmatrix}$ ed è $\left[\frac{kx^2}{1 + 4mkxy}\right] = \left[\frac{k}{1 + 4mkxy}\right]$, ed osservando che se k è pari $1 + 4mkxy$ è congruo 1 modulo 8, è lecito applicare il teorema di reciprocità, e quindi $\left[\frac{kx^2}{1 + 4mkxy}\right] = 1$.

Se poi la Ω è un prodotto di sostituzioni paraboliche, tenuto conto del teorema precedente, segue il nostro corollario.

Corollario 2°. *Qualunque sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + 4ma, & 4mb \\ 4mc, & 1 + 4md \end{pmatrix}$ con $\left[\frac{c}{1 + 4ma}\right] = -1$ non può esprimersi come prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo $\mu(4m)$.*

Dalle cose dette ed osservando che si possono costruire quante si vogliono sostituzioni unimodulari, per le quali si abbia $\left[\frac{c}{1 + 4ma}\right] = -1$ segue che il teorema del § 4, n.° 6 non sussiste per i moduli $4m$, qualunque sia m .

12. La via da seguire nel secondo caso, cioè per i moduli multipli di $(1 - \varepsilon)^3$ è la medesima, salvo che ai simboli relativi ai residui quadratici sostituiremo i simboli relativi ai residui cubici.

Teorema. *Tutte le sostituzioni unimodulari*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & 3m(1-\varepsilon^2)\beta \\ 3m(1-\varepsilon)\gamma, & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \quad [\text{mod. } 3(1-\varepsilon)m],$$

per le quali sia $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]_3 = 1$ ⁽³⁴⁾ formano gruppo.

Siano infatti $\begin{pmatrix} \alpha, & 3m(1-\varepsilon^2)\beta \\ 3m(1-\varepsilon)\gamma, & \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\gamma, & 3m(1-\varepsilon^2)b \\ 3m(1-\varepsilon)c, & d \end{pmatrix}$ due sostituzioni di $\Gamma_{\mu[3m(1-\varepsilon)]}$, cioè tali che si abbia:

$$\alpha \equiv \delta \equiv a\lambda \equiv d \equiv 1 \quad [\text{mod. } 3(1-\varepsilon)]$$

e inoltre sia $\left[\frac{\gamma\lambda}{\alpha}\right]_3 = 1$, $\left[\frac{c}{a\lambda}\right]_3 = 1$.

Abbiamo indicato con λ il massimo comun divisore tra il terzo coefficiente della prima sostituzione ed il primo della seconda, quindi λ ed a sono primi tra loro, e supponiamo, come del resto è lecito $a \equiv \lambda \equiv 1 \pmod{3}$.

Il prodotto delle due sostituzioni è

$$\begin{pmatrix} \lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma), & 3m(1-\varepsilon^2)(a\lambda\beta + b\delta) \\ 3m(1-\varepsilon)(c\alpha + \lambda d\gamma), & d\delta + 27m^2c\beta \end{pmatrix},$$

e occorre provare che $\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)}\right]_3 = 1$.

Tenuto conto che $ac\alpha + \lambda ad\gamma = c(a\alpha + 27m^2b\gamma) + \gamma$ si ha:

$$\begin{aligned} \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)}\right]_3 &= \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 = \\ &= \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 \left[\frac{a}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3^3 = \\ &= \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 \left[\frac{a}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3^2. \end{aligned}$$

Poichè è a primo con $1-\varepsilon$, applicando all'ultimo fattore il teorema di reciprocità, si ha:

$$\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)}\right]_3 = \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\lambda}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 \left[\frac{m^2b\gamma}{a}\right]_3^2.$$

⁽³⁴⁾ Cfr. ⁽²⁹⁾.

Distingueremo ora i tre casi :

- a) $a \equiv 1 \pmod{3(1-\epsilon)}$;
- b) $a \equiv 4 \pmod{3(1-\epsilon)}$;
- c) $a \equiv -2 \pmod{3(1-\epsilon)}$.

Caso a). Sia $a \equiv 1 \pmod{3(1-\epsilon)}$; per qualunque γ è :

$$\left[\frac{\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma} \right]_3 = \left[\frac{a\alpha}{\gamma} \right]_3 = \left[\frac{a}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3,$$

quindi :

$$\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)} \right]_3 = \left[\frac{c}{\lambda} \right]_3 \left[\frac{\alpha}{\lambda} \right]_3 \left[\frac{a}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{m^2}{a} \right]_3 \left[\frac{b}{a} \right]_3 \left[\frac{\gamma}{a} \right]_3^2.$$

Ma avendosi $\left[\frac{\lambda\gamma}{\alpha} \right]_3 = 1$ e $\alpha \equiv 1 \pmod{3(1-\epsilon)}$ è anche $\left[\frac{\alpha}{\lambda\gamma} \right]_3 = \left[\frac{\alpha}{\lambda} \right]_3 \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 = 1$;
da $\left[\frac{c}{a\lambda} \right]_3 = 1$ segue $\left[\frac{c}{\lambda} \right]_3 = \left[\frac{c}{a} \right]_3^2$; infine è $\left[\frac{a}{\gamma} \right]_3 = \left[\frac{\gamma}{a} \right]_3$ quindi

$$\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)} \right]_3 = \left[\frac{c}{\lambda} \right]_3 \left[\frac{m^2}{a} \right]_3 \left[\frac{b}{a} \right]_3^2 = \left[\frac{c}{a} \right]_3^2 \left[\frac{m^2}{a} \right]_3 \left[\frac{b}{a} \right]_3^2 = \left[\frac{m^2bc}{a} \right]_3^2 = \left[\frac{-1}{a} \right]_3^2 = 1.$$

Caso b). Sia $a \equiv 4 \pmod{3(1-\epsilon)}$ e quindi $\lambda \equiv 7 \pmod{3(1-\epsilon)}$; è di conseguenza $aa_0 \equiv 7 \pmod{9}$, $\lambda\lambda_0 \equiv 4 \pmod{9}$ ed infine

$$\left[\frac{\epsilon}{a} \right]_3 = \epsilon^2, \quad \left[\frac{\epsilon}{\lambda} \right]_3 = \epsilon \quad (^{35}).$$

Posto $\gamma = \epsilon^p \Pi(q) \Pi(\omega)$, $a\alpha + 27m^2b\gamma = \Pi_1(q) \Pi_1(\omega)$ ove con q e ω abbiamo indicato rispettivamente i fattori primi (sotto forma primaria) di primo e secondo grado dei numeri γ e $a\alpha + 27m^2b\gamma$, osservando che è

$$a\alpha + 27m^2b\gamma \equiv 4 \pmod{3(1-\epsilon)}$$

si ha :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma} \right]_3 &= \left[\frac{\epsilon}{a\alpha + 27m^2b\gamma} \right]_3^p \left[\frac{\Pi(q)\Pi(\omega)}{\Pi_1(q)\Pi_1(\omega)} \right]_3 = \epsilon^{2p} \left[\frac{\Pi_1(q)\Pi_1(\omega)}{\Pi(q)\Pi(\omega)} \right]_3 = \\ &= \epsilon^{2p} \left[\frac{a\alpha + 27m^2b\gamma}{\gamma} \right]_3 = \epsilon^{2p} \left[\frac{a}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 = \epsilon^{2p} \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{a}{\epsilon^p \Pi(q)\Pi(\omega)} \right]_3 = \epsilon^{2p} \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{\Pi(q)\Pi(\omega)}{a} \right]_3 = \\ &= \epsilon^{2p} \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{\epsilon^p \Pi(q)\Pi(\omega)}{a} \right]_3 \left[\frac{\epsilon}{a} \right]_3^{2p} = \epsilon^{2p} \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{\gamma}{a} \right]_3 \epsilon^{4p} = \left[\frac{\alpha}{\gamma} \right]_3 \left[\frac{\gamma}{a} \right]_3; \end{aligned}$$

e ancora come prima $\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)} \right]_3 = 1.$

(³⁵) Cfr. (²⁹).

Caso c). In modo analogo al caso b) si esamina l'ultimo caso:

$$a \equiv -2 \quad [\text{mod. } 3(1-\varepsilon)].$$

Corollario 1°. Se una sostituzione unimodulare

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha, & 3m(1-\varepsilon^2)\beta \\ 3m(1-\varepsilon)\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \quad (\text{mod. } 4)$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu[3m(1-\varepsilon)]}$, e $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]_3 = 1$.

Infatti se Ω è una sostituzione parabolica, ha la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + 3m(1-\varepsilon)kxy, & -3m(1-\varepsilon)ky^2 \\ 3m(1-\varepsilon)kx^2, & 1 - 3m(1-\varepsilon)kxy \end{pmatrix}$$

e per essa si ha:

$$\left[\frac{kx^2}{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 = \left[\frac{k}{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 \left[\frac{x}{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3^2.$$

Posto $k = \varepsilon^2 \Pi(q) \Pi(w)$, tenuto conto che

$$[1 + 3m(1-\varepsilon)kxy][1 + 3m(1-\varepsilon^2)k_0x_0y_0] \equiv 1 \quad (\text{mod. } 9)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \left[\frac{k}{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 &= \left[\frac{\varepsilon}{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3^2 \left[\frac{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}{\Pi(q)\Pi(w)}\right]_3 = \\ &= \left[\frac{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}{k}\right]_3 = 1, \end{aligned}$$

analogamente $\left[\frac{x}{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 = 1$ e perciò $\left[\frac{kx^2}{1 + 3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 = 1$.

Se poi la Ω è un prodotto di sostituzioni paraboliche, tenuto conto del teorema precedente segue il nostro corollario.

Corollario 2°. Qualunque sostituzione $\begin{pmatrix} 1 + 3m(1-\varepsilon)a, & 3m(1-\varepsilon^2)b \\ 3m(1-\varepsilon)c, & 1 + 3m(1-\varepsilon)d \end{pmatrix}$ nella quale sia $\left[\frac{c}{1 + 3m(1-\varepsilon)a}\right]_3 = -1$ non può esprimersi come prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu[3m(1-\varepsilon)]}$.

Dalle cose dette segue che il teorema del § 4, n.° 6, non sussiste per i moduli $3(1-\varepsilon)m$, qualunque sia m ⁽³⁶⁾.

Firenze, giugno 1924.

⁽³⁶⁾ In altra nota ci proponiamo di trovare le ulteriori condizioni che caratterizzano i gruppi $G_{2\mu(4m)}$, $G_{2\mu[3m(1-\varepsilon)]}$, così come abbiamo fatto nel nostro lavoro: *Le relazioni fondamentali del gruppo modulare finito con coefficiente nel campo di Gauss*, (loc. cit. (2)).