Sulle varietà abeliane reali.

Memoria 2ª di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova).

(Vedi la Memoria 1ª negli « Annali di Matematica », serie IV, tomo II, pagg. 67-106).

§ 4. Proprietà reali dei sistemi Σ appartenenti alle varietà abeliane. Il problema dei gruppi semicanonici reali.

13. **Trasformazione delle ϑ.** — Sia V_p una varietà abeliana *di tipo reale*, corrispondente ad una tabella normale del tipo (VII) (incluso il caso $\lambda = 0$, in cui la (VII) si riduce alla (V) con $e_1 = e_2 = ... = e_p = 1$) nella quale, come sempre, supporremo che le ε_{rs} abbiano i valori di uno degli *schemi normali* (VIII). Poichè la relazione normale corrispondente ha i divisori unitarî, così il relativo sistema Φ_1 è un sistema Σ (n.° 9) e le sue varietà son notoriamente rappresentate, al variare delle c_i, dalle equazioni

$$\vartheta(u_1 - c_1,\ u_2 - c_2, ..., u_p - c_p) = 0, \tag{1}$$

il cui primo membro verrà spesso abbreviatamente indicato con $\vartheta[u - c]$.

Il sistema Σ è trasformato in sè stesso da tutte le simmetrie $u'_i \equiv \bar{u}_i + \gamma_i$ (49), in quanto la corrispondente sostituzione (IX) sui cicli muta in sè la relazione normale, ed anche, per analoga ragione dalle $u'_i \equiv -\bar{u}_i + \delta_i$; cioè insomma, se V_p non è singolare, da *tutte* le simmetrie di V_p (n.° 6). Fissata una, S, di queste simmetrie, ad esempio, come a noi converrà, la $u'_i \equiv \bar{u}_i$, e detti c_i, c'_i i *parametri* (cioè le costanti delle relative equazioni (1)) di due varietà V, V' di Σ in essa corrispondenti, ci proponiamo di esprimere le c'_i mediante le c_i, cioè di scrivere *le equazioni (fra i parametri) della trasformazione indotta dalla simmetria S entro al sistema Σ.*

Poichè dall'equazione $\vartheta[u - c] = 0$ di V, si deduce subito per V' l'equazione

$$\bar{\vartheta}[u - \bar{c}] = 0, \tag{2}$$

così tutto si riduce a trasformare il primo membro della (2) in una $\vartheta[u - c']$,

(49) Qui per evitare equivoci, indichiamo le costanti delle simmetrie con γ_i, δ_i anzichè con c_i, d_i.

cioè ad esprimere la $\bar{\vartheta}$ mediante la ϑ. La possibilità di tale espressione è *a priori* garantita dall'*equivalenza* fra la tabella normale e la sua *coniugata*, ch'è pure normale (n.° 9).

Tratteremo per semplicità il problema nei due casi (*diasimmetrico* ed *ortosimmetrico*) corrispondenti a $p = 2$, $\lambda = 2$, che dànno indicazioni più che sufficienti per la discussione del caso generale.

Se, indicando provvisoriamente con σ_{rs} i periodi ai cicli N_s, ricordiamo che

$$\vartheta(u_1, u_2) = \sum_{m_1, m_2}^{-\infty, +\infty} e^{\pi i(\sigma_{11}m_1^2 + 2\sigma_{12}m_1m_2 + \sigma_{22}m_2^2) + 2\pi i(m_1u_1 + m_2u_2)} \quad (3)$$ [50],

abbiamo intanto subito

$$\bar{\vartheta}(u_1, u_2) = \sum_{m_1, m_2}^{-\infty, +\infty} e^{-\pi i(\bar{\sigma}_{11}m_1^2 + 2\bar{\sigma}_{12}m_1m_2 + \bar{\sigma}_{22}m_2^2) - 2\pi i(m_1u_1 + m_2u_2)} \quad (3')$$

e quindi nel *caso diasimmetrico* in cui

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} + i\tau_{11}, \quad \sigma_{22} = \frac{1}{2} + i\tau_{22}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = i\tau_{12}, \quad (4)$$

tenendo conto che, *se m è intero*, si ha sempre

$$-m^2\frac{\pi i}{2} \equiv m^2\frac{\pi i}{2} - m\pi i, \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

risulta

$$\bar{\vartheta}(u_1, u_2) = \vartheta\left(-u_1 - \frac{1}{2}, -u_2 - \frac{1}{2}\right),$$

cioè, per la *parità* della ϑ

$$\bar{\vartheta}(u_1, u_2) = \vartheta\left(u_1 + \frac{1}{2}, u_2 + \frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

Invece nel *caso ortosimmetrico*, avendosi

$$\sigma_{11} = i\tau_{11}, \quad \sigma_{22} = i\tau_{22}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{1}{2} + i\tau_{12}, \quad (6)$$

si trova analogamente $\bar{\vartheta}(u_1, u_2) = \vartheta(-u_1, -u_2)$ ed infine

$$\bar{\vartheta}(u_1, u_2) = \vartheta(u_1, u_2). \quad (7)$$

---

(50) Nel confronto colla definizione di RIEMANN (KRAZER, § 4) si tenga presente la differenza delle convenzioni circa i periodi ai cicli M_i (1 invece di πi).

Così procedendo si ottengono in generale le seguenti *formule di trasformazione delle* ϑ

$$
\text{(XI)}\quad
\begin{aligned}
&d) &\quad \bar{\vartheta}(u_1, u_2, \ldots, u_p) &= \vartheta\left(u_1 + \frac{1}{2}, \ldots, u_\lambda + \frac{1}{2}, u_{\lambda+1}, \ldots, u_p\right)\\
&o) &\quad \bar{\vartheta}(u_1, u_2, \ldots, u_p) &= \vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p),
\end{aligned}
$$

mediante le quali dalla (2) si deducono per la *trasformazione indotta entro al sistema* Σ *dalla simmetria* $u'_i \equiv \bar{u}_i$ le seguenti equazioni

$$
\text{(XII)}\quad
\begin{aligned}
&d) &\quad c'_h \equiv \bar{c}_h + \frac{1}{2},\quad c'_k \equiv \bar{c}_k \text{ [51]} &\qquad (h = 1, 2, \ldots, \lambda;\ k = \lambda + 1, \ldots, p)\\
&o) &\quad c'_i \equiv \bar{c}_i &\qquad (i = 1, 2, \ldots, p).
\end{aligned}
$$

La deduzione delle analoghe equazioni corrispondenti alle altre simmetrie è immediata, dato che esse son prodotti della $u'_i \equiv \bar{u}_i$ per *trasformazioni ordinarie*; e d'altronde presenta meno interesse perchè, come fu osservato più volte, ogni simmetria *dotata di punti uniti* è riducibile (scelti opportunamente i parametri) alla $u'_i \equiv \bar{u}_i$.

Sul modello $V_p^{(0)}$ dove $u'_i \equiv \bar{u}_i$ è il coniugio, diremo addirittura che le (XII) son *le equazioni del coniugio di* Σ.

14. Varietà reali di Σ e trasformazioni di prima specie che le mutano in sè. — Per comodità di discorso ci riferiremo al predetto modello $V_p^{(0)}$, con che resta sottinteso che consideriamo solo varietà *dotate di punti reali*.

Le condizioni perchè una varietà ϑ sia reale, sono espresse dalle (XII) nelle quali al posto delle c' si scrivano ancora le c. Nel caso ortosimmetrico si ottengono così le stesse equazioni che servono a determinare i parametri dei punti reali di $V_p^{(0)}$; sicchè trascrivendo la (8) del n.° 7 (cfr. n.° 12, I) troviamo per i *parametri delle* ϑ *reali nel caso ortosimmetrico* i valori

$$
\text{(8o)}\qquad c \equiv r + (0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p),
$$

nella cui formulazione seguiamo le convenzioni del § 2.

---

[51] Aggiungendo ai secondi membri il periodo al ciclo $N_1 + N_2 + \ldots + N_\lambda$, si vede che alle (XII d) possono sostituirsi le $c'_h \equiv \bar{c}_h + j_h$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$ con $j_h = i(\tau_{h1} + \tau_{h2} + \ldots + \tau_{h\lambda})$.

Invece i *parametri delle ϑ reali nel caso diasimmetrico,* hanno i valori

$$c \equiv r + (1, 1, \ldots, 1, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p), \tag{8d}$$

che si desumono facilmente dalle (XIId) ([52]).

Le (8) in corrispondenza ai valori che può assumere la semicaratteristica a secondo membro, dànno $2^{p-\lambda}$ *sistemi di ϑ reali,* che in certa guisa fan riscontro alle $2^{p-\lambda}$ falde della varietà; le ϑ di ciascun sistema ottenendosi al variare dei parametri reali r_i.

Ogni varietà $\vartheta[u-c]=0$, è mutata in sè da *una* (ed una sola) trasformazione di 1ª specie T, di equazioni $u'_i \equiv -u_i + 2c_i$; viceversa una T di equazioni $u'_i \equiv -u_i + \gamma_i$ muta in sè 2^{2p} varietà ϑ (reali o no), i cui parametri si ottengono aggiungendo a $\frac{\gamma_i}{2}$ i 2^{2p} semiperiodi incongrui.

Se la $\vartheta[u-c]=0$ è reale, cioè se le c_i hanno i valori (8), le costanti $2c_i$ della T risultano congrue a numeri reali, cioè *T è reale e muta in sè tutte le falde di $V_p^{(0)}$* (n.° 7); viceversa se le γ_i son congrue a numeri reali, *la T muta in sè $2^{2p-\lambda}$ ϑ reali* che, ridotte le γ_i reali, *hanno i parametri*

$$(9)\quad \begin{array}{ll} d) & c \equiv \frac{1}{2}\gamma + (g_1, g_2, \ldots, g_p \mid 1, 1, \ldots, 1, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p) \\ o) & c \equiv \frac{1}{2}\gamma + (g_1, g_2, \ldots, g_p \mid 0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p). \end{array}$$

Il numero delle ϑ reali mutate in sè da T è dunque eguale a quello dei punti uniti reali di T (n.° 7); e così comincia ad affermarsi *anche nel campo reale* quella *reciprocità* fra i punti di V_p e le varietà ϑ di Σ, che notoriamente sussiste nel campo complesso ([53]).

È noto che *una* $\vartheta[u-c]=0$ *contiene* $2^{p-1}(2^p-1)$ *punti uniti della corrispondente T.* Ricordiamo brevemente come si giunge a tal risultato.

Gli argomenti dei punti uniti di T sono $c_i + \sigma_i$ (σ_i *semiperiodo*); quindi *la condizione d'appartenenza di quei punti alla* $\vartheta[u-c]=0$, *è* $\vartheta[\sigma]=0$.

([52]) Se queste congruenze si scrivono sotto la forma della nota precedente, si trova subito $c \equiv r + \frac{1}{2}j + (0, 0, \ldots, 0; h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p)$ dove j_h non è (come r_h) arbitrario, ma ha il valore predetto; ed i valori così ottenuti coincidono cogli (8 d) perchè $\frac{1}{2}j_h$ differisce dal semiperiodo $\overline{(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)}$ per una quantità *reale.*

([53]) Per $p=2$, cfr. ENRIQUES-SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* [Acta Math., vol. 32, (1909) pp. 283-392 e 33 (1910) pp. 321-403] n.° 23.

Essa è verificata allora e solo che il semiperiodo σ_i ha ***caratteristica dispari*** [54], cioè appunto per $2^{p-1}(2^p-1)$ valori di quella caratteristica (n.° 5).

Se la ϑ, e quindi la T, è reale, *quanti fra i predetti punti son reali?* Perciò bisogna che gli argomenti $c_i+\sigma_i$ abbian valori spettanti a punti reali ((8) del n.° 7); quindi, tenuto conto delle (9), *che il semiperiodo σ_i abbia una caratteristica* ***dispari*** *del tipo*

$$(10)\quad \begin{array}{ll} d) & (g_1, g_2, \ldots, g_p \,|\, 1, 1, \ldots, 1, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p) \\ o) & (g_1, g_2, \ldots, g_p \,|\, 0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p). \end{array}$$

Se ora ricordiamo (n.° 5) che ogni semicaratteristica del secondo gruppo, *esclusa la semicaratteristica impropria* $\overline{(0, 0, \ldots, 0)}$ appartiene a 2^{p-1} caratteristiche dispari, troviamo subito che le caratteristiche (10) e quindi *i punti uniti reali cercati sono* $2^{p-1}\cdot 2^{p-\lambda}$ *nel caso diasimmetrico*, $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ *nel caso ortosimmetrico*; giacchè nel primo si possono dare ad $h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p$ tutti i $2^{p-\lambda}$ valori possibili, nel secondo bisogna *eccettuarne i valori nulli.*

Inoltre negli argomenti $c_i+\sigma_i$ dei punti uniti, che son del tipo (8) (n.° 7), la semicaratteristica a secondo membro varia soltanto al variare delle h nelle (10), mentre le g dànno contributo alle parti reali; e tanto basta per concluderne che *i punti uniti considerati si distribuiscono a* 2^{p-1} *a* 2^{p-1} *su tante falde di* $V_p^{(0)}$, *quant'è nelle formule predette il coefficiente di* 2^{p-1}.

Nel caso diasimmetrico queste sono $2^{p-\lambda}$, *cioè tutte le falde di* $V_p^{(0)}$; invece *nel caso ortosimmetrico rimane esclusa una falda*, ch'è quella avente, nella (8) del n.° 7, la stessa semicaratteristica delle costanti c_i della ϑ.

Analogamente si prova che per un punto unito reale d'una T reale, passano $2^{p-1}\cdot 2^{p-\lambda}$, o risp. $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ ϑ *reali*, ecc.

Se $p=2$ le formule ottenute esprimono il numero dei punti doppi *reali* della g_2^1 sopra una curva reale di Σ; in perfetto accordo col n.° 8.

14. Il problema dei gruppi semicanonici reali. I. Caso delle curve con rami reali. — Nelle conclusioni predette è quasi interamente contenuta (almeno per le curve con punti reali) la risoluzione d'un interessante problema, segnato dalla magistrale impronta dell'opera kleiniana [55]. È il problema di determi-

---

[54] KRAZER, Cap. VII, § 1. Questo almeno *quando i moduli sono generali.*

[55] Cfr. KLEIN, *Ueber Realitätsverhältnisse* (citata), *Riemann'sche Flächen*, Parte III. La tirannia dello spazio c'impedisce d'illustrare con maggiore ampiezza i molteplici rapporti della questione colla teoria delle ϑ-Riemanniane, e di ricordare al lettore le linee generali dei procedimenti di KLEIN. Ci riserbiamo però di ritornarvi in altro luogo.

nare il numero ed il comportamento dei *gruppi semicanonici reali*, d'una *curva reale* C di genere p (gruppi Γ_{p-1} di $p-1$ punti, che contati due volte son gruppi canonici), cioè *il numero degli* S_{p-1} *reali* $p-1$ *tangenti della curva canonica* (reale) C_{2p-2} di S_{p-1} (bitangenti della quartica piana, piani tritangenti della sestica sghemba di genere 4, ecc.) e la *distribuzione dei loro contatti* sui rami di C.

Per precisare nei riguardi di quest'ultimo punto la posizione del problema, indichiamo con μ (>0) il numero dei rami di C, e riuniamo in una stessa *classe* tutti i gruppi di $p-1$ punti, G_{p-1}, reali, i cui *punti reali* son distribuiti con *data parità* sui rami di C.

Otterremo tante classi quant'è il numero dei simboli $[t_1, t_2, \ldots, t_\mu]$ introdotti al n.° 8, cioè $2^{\mu-1}$, oppure $2^{\mu-1}-1$ secondo che μ è minore od eguale a $p+1$. Diremo brevemente con KLEIN, che tante son le classi *combinatoriamente possibili*.

Ricordiamo ancora dal n.° 8 che il *carattere reale* λ di C vale $p+1-\mu$, e che ad ognuna delle ($2^{p-\lambda}$ o risp. $2^{p-\lambda}-1$) classi predette, corrisponde una falda della $V_{p-1}^{(0)}$ imagine reale dei G_{p-1} di C.

Sia $W_p^{(0)}$ la *varietà di Jacobi imagine reale delle serie lineari d'ordine* p *di* C. Ai punti d'una varietà ϑ di $W_p^{(0)}$ corrispondono su C le serie i cui G_p son contenuti parzialmente in una g_{2p-1}^{p-1} e viceversa; in particolare se la g_{2p-1}^{p-1} risulta dall'aggiungere alla serie canonica un punto *fisso* O, le serie individuate dai G_p che hanno quel punto come fisso ([56]).

Quando O è *reale* lo è anche la varietà ϑ corrispondente, che indicheremo con V; e la T di 1ª specie che muta in sè V è imagine della corrispondenza fra i G_p per O che si ottiene associando due G_p provenienti (aggiungendo O) da due G_{p-1} *mutuamente residui rispetto alla serie canonica*. I punti uniti di T appartenenti a V provengono dunque dai Γ_{p-1} semicanonici, e pertanto il numero di questi gruppi *reali* coincide con quello dei punti uniti *reali* di T appartenenti a V. Si ha dunque, in base al n.° precedente (e posto $\lambda = p+1-\mu$) la conclusione:

Il numero dei gruppi semicanonici reali appartenenti ad una curva reale C, *di genere* p, *con* $\mu>0$ *rami reali, è* $2^{p-1}\cdot 2^{\mu-1}$ *nel caso diasimmetrico* $2^{p-1}(2^{\mu-1}-1)$ *nel caso ortosimmetrico*.

Si vede poi subito che due Γ_{p-1} di classi diverse, aggregati ad O, dànno due G_p pure di classi diverse, cioè corrispondenti (n.° 8) a punti di falde

([56]) Cfr. la mia Nota, *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di Jacobi*. [Atti Accad. Torino, vol. 50 (1914-15), pp. 439-455] ed il Cap. IX del KRAZER.

diverse di $W_p^{(0)}$, e viceversa: sicchè la distribuzione dei Γ_{p-1} in classi, corrisponde a quella dei punti uniti reali di T sulle falde di $W_p^{(0)}$. Sussiste quindi il teorema:

Una classe combinatoriamente possibile, che contenga gruppi semicanonici reali, ne contiene 2^{p-1}. Nel caso diasimmetrico e nel caso ortosimmetrico massimo ($\lambda = 0$) ciò si verifica per tutte le classi: negli altri casi ortosimmetrici una classe rimane esclusa.

È questa la classe corrispondente al simbolo $[1, 1, \ldots, 1]$ cioè quella degli S_{p-1} aventi *un numero dispari di contatti con tutti i rami di C_{2p-2}*. Ci limitiamo ad ennnciarlo senza dimostrazione, riservandoci di tornare in altro luogo sull'argomento ([57]).

15. **Il problema dei gruppi semicanonici reali.** II. **Caso delle curve senza punti reali.** — La discussione di questo problema ci condurrà anche a precisare il *carattere delle tabelle normali corrispondenti alle curve prive di punti reali,* a complemento di quel che si è già detto al n.° 8 (cfr. il n.° 12, III).

Riprendiamo, dal n.° 8, la considerazione delle $W_q^{(0)}$ imagini reali delle serie lineari d'ordine $q \geq p$ d'una curva reale C, che, come si è osservato sono altrettanti *modelli reali* della V_p di JACOBI relativa a C; e mostriamo che *se C non ha rami reali due modelli siffatti, corrispondenti a valori di q aventi diversa parità possono esser distinti di fronte alle trasformazioni birazionali reali.*

Difatti, sia $u_1, u_2, \ldots, u_p$ un sistema d'integrali *reali e normali* di C; e ricordiamo che, fissata l'origine delle integrazioni, le equazioni del *coniugio* di C saranno del tipo $u'_r \equiv \bar{u}_r + \gamma_r$, colle γ_r congrue a numeri imaginarî puri j_r più un semiperiodo reale σ_r (n.° 6). Dette U_r le somme degli u_r nei gruppi G_{p+h} di C (che sono integrali di 1ª specie di V_p), la trasformazione indotta fra le serie lineari d'ordine $p+h$ dal coniugio di C, ha per corrispondente su V_p la simmetria $U'_r \equiv \bar{U}_r + (p+h)\gamma_r$ dalla quale proviene il modello $W_{p+h}^{(0)}$ (su cui quella simmetria è il coniugio, e gli U_r son reali e normali). Ora, *se $p+h$ è pari,* si ha $(p+h)\sigma_r \equiv 0$, quindi quella simmetria è $U'_r \equiv \bar{U}_r + (p+h)j_r$, cioè (n.° 6) è *della stessa classe di* $U'_r \equiv \bar{U}_r$, mentre

([57]) La classe corrispondente al simbolo $[1, 1, \ldots, 1]$ va esclusa anche nel caso ortosimmetrico massimo, ma allora non è, nel nostro senso, *combinatoriamente possibile,* perchè $t_1 + t_2 + \ldots + t_\mu > p - 1$. Nel confronto col numero precedente si tenga presente che se $\mu = p + 1$, V ha *una falda di meno di* $W_p^{(0)}$, di guisa che i punti uniti reali di T appartenenti a V sono esclusi da una falda di $W_p^{(0)}$.

se $p+h$ *è dispari* si ha $(p+h)\sigma_r \equiv \sigma_r$, quindi quella simmetria non è della classe di $U'_r \equiv \bar{U}_r$, almeno quando $\sigma_r \neq 0$ (58).

Torniamo ora al nostro problema, esaminando separatamente i due casi del genere pari e dispari.

a) Genere p pari. Sappiamo già (n.° 8) che $\lambda = p$, ed allora nell'espressione di γ_r manca (n.° 6) il semiperiodo σ_r. Inoltre essendo $p-1$ dispari, *non vi sono* Γ_{p-1} *reali.*

Detta O l'origine delle integrazioni, e, come prima, V la varietà ϑ corrispondente ai G_p col punto fisso O, se associamo due punti di V quando provengono da due G_p ottenuti aggregando ad O due G_{p-1} *coniugati*, otteniamo su V una simmetria rappresentata dalle equazioni $U'_r \equiv \bar{U}_r + (p-1)j_r$, che si può estendere a tutta la V_p (59). Tale simmetria è *della classe di* $U'_r \equiv \bar{U}_r$ sicchè il modello reale $V_p^{(0)}$ corrispondente (essendo $\lambda = p$) ha *una falda*; e su di esso la V è reale. Se $V_p^{(0)}$ fosse di tipo diasimmetrico la V conterrebbe 2^{p-1} punti uniti della corrispondente T (n.° 13) e quindi esisterebbero altrettanti Γ_{p-1} reali. Ma ciò è assurdo, dunque $V_p^{(0)}$ e quindi (anche) *la tabella normale relativa a* C *ha carattere ortosimmetrico.*

b) Genere p dispari. Consideriamo su C le serie lineari d'ordine $p+1$, g_{p+1}, che in generale hanno la dimensione 1, e tra esse quelle *reali*, alle quali corrispondono i punti reali di $W^{(0)}_{p+1}$. Il coniugio subordina tra i loro elementi un'*antiproiettività involutoria*, che *a priori* (essendo *dispari* la dimensione dell'ente) può avere o no elementi uniti (60); quindi *a priori* tali g_{p+1} reali possono essere di due tipi nettamente distinti e non deducibili uno dall'altro per continuità. Dunque $W^{(0)}_{p+1}$ *ha una o due falde* (una ne ha certo in corrispondenza alle g_{p+1} individuate dai G_{p+1} reali).

Proviamo che non può verificarsi il primo caso. Difatti essendo $W^{(0)}_{p+1}$ un modello reale di V_p con punti reali, sarebbe (n.i 7, 8) $\lambda = p$ e quindi il coniugio di C avrebbe le equazioni $u'_r \equiv \bar{u}_r + j_r$. Ma allora i gruppi di p punti corrispondenti alle somme $U_h \equiv r_h + \frac{p}{2} j_h$ (r_h numero reale arbitrario) sarebbero reali, il che è assurdo perchè p è dispari. Dunque $W^{(0)}_{p+1}$ *ha due falde* e $\lambda = p-1$.

---

(58) Se C ha punti reali la questione non si presenta perchè, avendo il coniugio punti uniti, è $\sigma_r = 0$, anzi si può addirittura supporre $\gamma_r = 0$, scegliendo come origine un punto reale.

(59) Le U_r son somme relative a gruppi di p punti di C.

(60) Segre, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse*, ecc. [Math. Ann., vol. 40 (1892), pp. 413-467] pag. 431-32.

Sulla $W^{(0)}_{p+1}$ consideriamo la ϑ *reale* corrispondente alle g_{p+1} individuate dai G_{p+1} con due punti fissi A, B imaginari coniugati. Essa ha *una sola falda* perchè le g_{p+1} reali che contengono la coppia A, B appartengono tutte al primo dei tipi sopra considerate, in quanto la serie residua è una g_{p-1} reale che in generale riducesi ad *un solo gruppo* reale.

Se la $W^{(0)}_{p+1}$ fosse di tipo diasimmetrico la varietà ϑ predetta conterrebbe $2 \cdot 2^{p-1}$ punti uniti della relativa T, divisi in due gruppi, ciascuno di 2^{p-1} punti, appartenenti alle due falde di $W^{(0)}_{p+1}$ e quindi avrebbe anch'essa due falde. Dunque la $W^{(0)}_{p+1}$ (cioè la tabella normale relativa a C) è di tipo ortosimmetrico, ed allora il numero dei punti uniti di T, che, come si vede subito dà ancora il numero dei gruppi semicanonici reali, è 2^{p-1}. In conclusione:

Una curva reale C, di genere p, priva di punti reali, ha carattere reale $\lambda = p$ o $p - 1$ secondo che p è pari o dispari, e matrice normale ortosimmetrica ([61]). *Il numero dei suoi gruppi semicanonici reali vale rispettivamente 0 o 2^{p-1}.*

Pertanto *anche in questo caso ognuna delle classi combinatoriamente possibili, contiene 2^{p-1} gruppi semicanonici reali.*

§ 5. Il caso critico nella classificazione delle superficie di Jacobi e delle curve di genere 2 reali.

16. **Posizione del problema e programma della discussione.** — Dalle conclusioni del n.° precedente, e del n.° 8, risulta che data una matrice normale di tipo reale, corrispondente ad una curva reale C ([62]), è perfettamente determinato, dagli elementi caratteristici fin quì considerati, il numero dei rami reali di C ed il suo carattere diasimmetrico od ortosimmetrico, fatta eccezione per le *matrici ortosimmetriche di carattere reale $\lambda = p$ o $p - 1$* (secondo che p è pari o dispari) a cui possono corrispondere sia curve con $p + 1 - \lambda$ (cioè risp. *uno* o *due*) rami reali, sia curve prive di rami reali.

([61]) Se la distinzione fra curve di tipo diasimmetrico ed ortosimmetrico, si basa, con KLEIN, sul noto carattere topologico delle corrispondenti superficie di RIEMANN, le curve prive di rami reali son tutte di *tipo diasimmetrico.*

([62]) La matrice normale si suppone in ogni caso determinata partendo dalla relazione di RIEMANN di cui si parla al n.° 12, III, per modo da eliminare ogni ambiguità anche nel caso delle *curve singolari.* Quest'ipotesi è implicita nelle considerazioni dei due numeri precedenti.

Nasce quindi il problema di distinguere i due casi, sempre in base ad elementi dedotti dalle tabelle normali: alla sua discussione, *nel caso del genere due*, è dedicato il presente paragrafo [63].

Per precisarne bene la posizione, partiamo da una *matrice normale ortosimmetrica di genere e carattere reale eguali a 2*

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & \frac{1}{2}+i\tau_{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+i\tau_{21} & i\tau_{22} \end{matrix} \right\|, \qquad \Delta > 0 \, (\tau_{12} = \tau_{21})$$

ed indichiamo con $F^{(0)}$ la *superficie di Jacobi reale, con una falda* ad essa corrispondente.

Intendiamo con ciò, a norma dei numeri 4, 6 (le cui considerazioni si trasportino a tabelle normali) di riferirci al modello (determinato a meno d'una trasformazione birazionale reale) corrispondente alla simmetria $u'_i \equiv \overline{u}_i$ (o ad un'altra della sua classe); mentre il modello $F_1^{(0)}$ corrispondente alla simmetria $u'_i \equiv -\overline{u}_i$ (per cui gl'integrali normali della (1) *non sono reali*) si assocerà alla *matrice complementare* della (1).

La superficie $F^{(0)}$ contiene, entro al sistema Σ, delle curve $C^{(0)}$ (di genere 2) *reali*, che, a norma delle (8 *o*) (n.° 14) son quelle corrispondenti a valori *reali* dei parametri c_i delle ϑ. Esse hanno come tabella normale la stessa (1), e quindi (n.° 8) possono avere *uno* o *zero* rami reali [64]: però in ogni caso *sono tutte dello stesso tipo*, perchè, come si vede subito, posson dedursi una dall'altra mediante trasformazioni di 2ª specie ($u'_i \equiv u_i + c_i$) *reali*.

La stessa $F^{(0)}$ è poi *l'imagine reale propria*, nel senso del n.° 8, delle coppie di punti d'una sua $C^{(0)}$. Per quanto ciò emerga senz'altro dalla rappresentazione trascendente, si può persuadersene per via geometrica, considerando il sistema *reale* ∞^1, Γ costituito dalle curve di Σ che passano per un punto *reale* P di $F^{(0)}$, ed associando ad ogni coppia di punti di $C^{(0)}$ l'ulteriore intersezione delle due curve di Γ da essi determinate.

---

[63] Per $p = 1$ il problema non ha senso giacchè ad una matrice $|1, i\tau|$ corrispondono tante curve con *due rami*, provenienti dalle simmetrie della classe di $u' \equiv \overline{u}$, quanto curve *prive di rami*, provenienti dalle simmetrie della classe di $u' \equiv \overline{u} + \frac{1}{2}$, giacchè in questo caso la curva coincide colla propria varietà di JACOBI.

[64] Si noti che, se $C^{(0)}$ non ha punti reali e si assume *un suo punto* come origine delle integrazioni, le equazioni del coniugio non rimangono più $u'_i \equiv \overline{u}_i$.

Viceversa se si parte da una curva reale $C^{(0)}$ di genere 2, avente come matrice normale la (1), cioè (n.i 8, 15) da una curva ortosimmetrica con un ramo reale, o da una curva priva di rami reali, l'imagine reale propria $F^{(0)}$ delle sue coppie di punti è del tipo predetto, ha come matrice normale la stessa (1), ecc. In conclusione:

Ad una matrice normale del tipo (1) *possono corrispondere superficie di Jacobi $F^{(0)}$ reali, con una falda, e curve reali $C^{(0)}$ di genere 2 d'uno dei due tipi seguenti:*

a) *Superficie su cui tutte le $C^{(0)}$ reali hanno un ramo reale;* lo diremo il caso ***propriamente ortosimmetrico;***

b) *Superficie su cui tutte le $C^{(0)}$ reali son prive di rami reali;* lo diremo il caso ***impropriamente ortosimmetrico.***

Per stabilire in base alla tabella (1) la distinzione fra i due casi, partiremo dall'osservazione, fatta al n.° 8, che *due curve $C^{(0)}$, $C_1^{(0)}$ corrispondenti a matrici* (1) *complementari, e le relative superficie di Jacobi $F^{(0)}$, $F_1^{(0)}$ appartengono l'una al tipo* a), *l'altra al tipo* b).

Questa osservazione fa intravedere l'esistenza di un rapporto fra il tipo della $C^{(0)}$ e della $F^{(0)}$, ed il *determinante* $\Delta = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2$ della (1) (che per la condizione del n.° 12, IV è *positivo*) appena si ricordi la relazione $16\Delta\Delta_1 = 1$ che intercede fra i determinanti di due matrici complementari (n.° 4 e n.° 12 V), dalla quale si deduce che ai valori di Δ (o di Δ_1) $> \frac{1}{4}$ corrispondono i valori di Δ_1 (o di Δ) $< \frac{1}{4}$. E la previsione, è come vedremo, confermata dal seguente teorema:

I casi propriamente ed impropriamente ortosimmetrico corrispondono rispettivamente a $\Delta < \frac{1}{4}$ ed a $\Delta > \frac{1}{4}$. Nel caso di transizione $\Delta = \frac{1}{4}$ le due superficie $F^{(0)}$, $F_1^{(0)}$ coincidono (si equivalgono per trasformazioni reali) *e la curva $C^{(0)}$ si spezza in due curve ellittiche imaginarie coniugate* (unisecantisi).

Ecco infine una breve visione d'assieme delle fasi attraverso cui passerà la nostra discussione, a titolo di *programma dei numeri seguenti:*

I) Date due matrici (1) entrambe con $\Delta > \frac{1}{4}$ $\left(\text{o} < \frac{1}{4}\right)$ si può passare con continuità dall'una all'altra senza che cessi d'esser verificata la condizione ($\Delta > 0$) d'esistenza della $F^{(0)}$, e senza che la curva del sistema Σ (corrispondente alla relazione normale) si spezzi, giacchè tale spezzamento può verificarsi solo per $\Delta = \frac{1}{4}$. Poichè durante tal variazione le curve reali di $C^{(0)}$ non possono cambiar tipo, ne segue che non cambia neppure quello della superficie $F^{(0)}$, e quindi che i due tipi *a)*, *b)* corrispondono l'uno a $\Delta > \frac{1}{4}$, l'altro a $\Delta < \frac{1}{4}$.

II) Se $\Delta = \frac{1}{4}$ la superficie di Jacobi corrispondente alla (1) *è singolare* ed ammette una trasformazione birazionale *singolare* che muta l'una nell'altra le due simmetrie $u'_i \equiv \bar{u}_i$, $u'_i \equiv -\bar{u}_i$; quindi $F^{(0)}$ ed $F_1^{(0)}$ sono equivalenti per trasformazioni reali. Inoltre le curve C di Σ si spezzano in due curve ellittiche unisecantisi, che, quando C è reale (cioè è una $C^{(0)}$) sono imaginarie coniugate; viceversa ad ogni superficie $F^{(0)}$ delle coppie di punti di due curve ellittiche imaginarie coniugate, corrisponde una matrice (1) con $\Delta = \frac{1}{4}$.

III) Il caso impropriamente ortosimmetrico corrisponde a $\Delta > \frac{1}{4}$, e quindi il caso propriamente ortosimmetrico a $\Delta < \frac{1}{4}$.

17. I) **Separazione dei due tipi in base alle disuguaglianze** $\Delta \gtrless \frac{1}{4}$. — Supposto, com'è lecito (cfr. la nota ([48])) $\tau_{11} > 0$, poniamo $\tau_{11} = \sqrt{2}x$, $\tau_{22} = \sqrt{2}y$, $\tau_{12} = \tau_{21} = z$, ed interpretiamo le x, y, z come coordinate ortogonali di punto in S_3. Allora le due equazioni $\Delta = 0$, $\Delta = \frac{1}{4}$ divengono

$$z^2 - 2xy = 0, \quad z^2 - 2xy = -\frac{1}{4}, \tag{2}$$

e rappresentano la prima il *cono rotondo* Γ generato dalla rotazione degli assi x, y intorno alla loro bisettrice $x = y$, l'altra *l'iperboloide a due falde rotondo* J coassiale, generato dall'iperbole $8xy = 1$ ($z = 0$), del quale Γ è il *cono asintotico*.

Ad ogni punto del semispazio $x > 0$ ($\tau_{11} > 0$) *interno al cono* Γ ($\Delta > 0$), cioè alla *falda* Γ_0 di Γ generata dai *semiassi positivi* x, y, resta così associata una tabella (1) soddisfacente alla condizione d'esistenza $\Delta > 0$, quindi una superficie $F^{(0)}$: viceversa ad una tal superficie corrisponde un sistema di punti (provenienti dalle tabelle *equivalenti* alla (1) nel senso della nota ([42])) interni a Γ_0 e giacenti tutti (per l'invarianza di Δ) sulla stessa falda dell'iperboloide $z^2 - 2xy = \Delta$.

I punti per cui (oltre a $\tau_{11} > 0$ e $\Delta > 0$) si ha $\Delta > \frac{1}{4}$ sono interni alla falda J_0 di J giacente nel semispazio $x > 0$, ed i punti per cui $\Delta < \frac{1}{4}$ sono compresi fra J_0 e Γ_0, cioè sono esterni ad J_0 ed interni a Γ_0 (Fig. 1). Le due regioni così associate a $\Delta > \frac{1}{4}$ e $\Delta < \frac{1}{4}$ sono *connesse*, e tanto basta per confermare che *il passaggio continuo di cui in* I) *è compatibile colla condizione d'esistenza di* $F^{(0)}$.

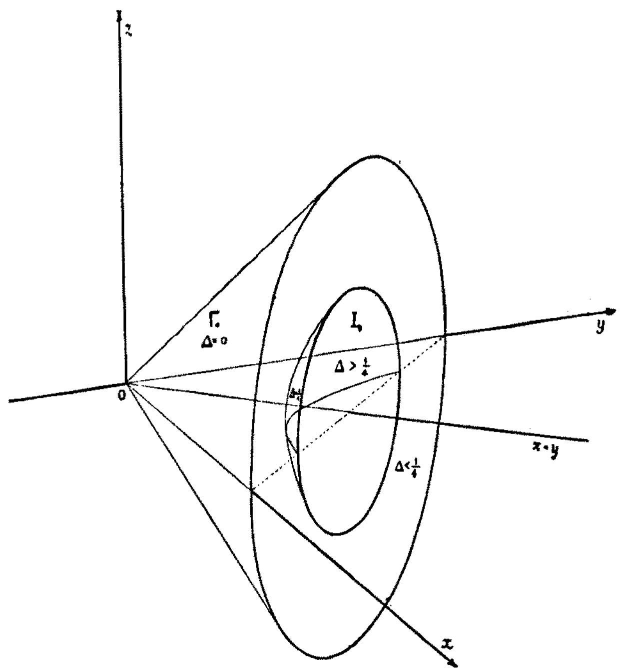

Fig. 1.

Rimane da provare che *per* Δ *diverso da* $\frac{1}{4}$ *la curva di* Σ *non può mai spezzarsi.* Un tale spezzamento, può, com'è noto, avvenire solo quando Σ *è somma di due fasci ellittici unisecantisi,* cioè *quando i periodi* (1) *soddisfano a due relazioni di divisore zero* la cui somma sia la relazione normale $(13)+(24)=0$ corrispondente a Σ ([65]).

Siano a_{rs}, a'_{rs} i coefficienti (primi tra di loro) delle due relazioni di divisore 0, e supponiamone scelti i segni in modo che la condizione di dar per somma $(13)+(24)=0$, si esprima mediante le

$$(3) \quad a_{12}+a'_{12}=a_{14}+a'_{14}=a_{23}+a'_{23}=a_{34}+a'_{34}=0, \quad a_{13}+a'_{13}=a_{24}+a'_{24}=1.$$

Scrivendo la prima per i periodi (1), e separando il reale dall'immaginario

([65]) BAGNERA-DE FRANCHIS, loc. cit., n.° 9. Vedi anche la mia Memoria: *Sulle superficie di Jacobi semplicemente singolari* [Memorie dei XL (3), vol. 21 (1919)], n.° 2. Si può aggiungere che *l'invariante simultaneo* delle due relazioni (che esprime il numero delle intersezioni tra le curve dei due fasci) deve risultare eguale ad 1; ma ciò non darebbe nulla di nuovo perchè tal condizione *è conseguenza* delle precedenti.

troviamo

$$
\begin{aligned}
&(4) && 2a_{12}+a_{13}+a_{42}-2a_{34}D=0 \\
&(4') && a_{14}\tau_{22}+a_{32}\tau_{11}+(a_{13}+a_{42}+a_{43})\tau_{12}=0;
\end{aligned}
\qquad \left(D=\Delta+\frac{1}{4}\right)
$$

poi, esprimendo che le due relazioni hanno il divisore 0, e tenendo conto delle (3), otteniamo

$$(5) \qquad a_{12}a_{43}+a_{13}a_{24}+a_{14}a_{32}=0, \quad a_{13}+a_{24}=1.$$

Perchè la (4′) sia compatibile colla condizione d'esistenza $\Delta>0$, occorre che *il piano uscente dall'origine* rappresentato dalla (4′), in cui, come prima, si ponga $\tau_{11}=\sqrt{2}\cdot x$, $\tau_{22}=\sqrt{2}\cdot y$, $\tau_{12}=\tau_{21}=z$, sia *secante* rispetto al cono Γ, il che porta alla condizione

$$(6) \qquad (a_{13}+a_{42}+a_{43})^2-4a_{14}a_{32}>0,$$

dalla quale, mediante le (4), (5) con qualche elaborazione si ricava

$$(7) \qquad 2a_{34}^2D<1+a_{34}^2.$$

Ora non può essere $a_{34}=0$, perchè dalla (4) e dalla seconda delle (5) si ricaverebbe $2(a_{12}+a_{13})=1$, ch'è evidentemente assurda; inoltre il primo membro della (7) è *intero* perchè lo sono a_{34} e (per la (4)) $2a_{34}D$. Se fosse $D>\frac{1}{2}$ quel primo membro risulterebbe maggiore di a_{34}^2, quindi almeno eguale ad $1+a_{34}^2$ in contraddizione colla (7) stessa. Dunque $D\leq\frac{1}{2}$, cioè $\Delta\leq\frac{1}{4}$.

Ragionando allo stesso modo sulla *matrice complementare* della (1) *che si trova in analoghe condizioni*, si ricava $\Delta_1\leq\frac{1}{4}$, e siccome $16\Delta\Delta_1=1$, così $\Delta\geq\frac{1}{4}$.

Si conclude in definitiva che lo spezzamento considerato può avvenire solo quando $\Delta=\frac{1}{4}$, e così resta provata la prima parte del nostro assunto.

18. II) **Il caso di transizione** $\Delta=\frac{1}{4}$. — Dimostriamo anzitutto che in questo caso *le due supeficie* $F^{(0)}$, $F_1^{(0)}$ *sono equivalenti per trasformazioni reali*, è quindi che alle due simmetrie $u'_i\equiv\bar{u}_i$, $u'_i\equiv-\bar{u}_i$ non corrispondono più due classi distinte (nel senso del n. 6) ma *una sola classe reale.*

Perciò passiamo alla *tabella complementare* della (1), sostituendo (n.° 12, V) ai relativi cicli normali M_1, M_2, N_1, N_2 i nuovi cicli

(8) $$P_1 = M_1 - 2N_2, \quad P_2 = M_2 - 2N_1; \quad Q_1 = M_2 - N_1, \quad Q_2 = M_1 - N_2,$$

ed agl'integrali normali u_1, u_2 i nuovi integrali normali

(9) $$v_1 = \frac{i}{2}(\tau'_{12}u_1 + \tau'_{22}u_2), \quad v_2 = \frac{i}{2}(\tau'_{11}u_1 + \tau'_{21}u_2),$$

dove le $\tau'_{r,s}$ son gli elementi reciproci delle $\tau_{r,s}$. Tenendo conto delle relative espressioni mediante le $\tau_{r,s}$ e di $\Delta = \frac{1}{4}$, troviamo facilmente che la matrice cercata è

(1, *c*) $$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & \frac{1}{2} - i\tau_{21} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - i\tau_{12} & i\tau_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Ora da questa si può passare alla (1) non soltanto mediante l'operazione inversa di quella che ci vi ha condotti, ma anche sostituendo ai relativi cicli P_1, P_2, Q_1, Q_2, i cicli, $-P_1$, P_2, $-Q_1 + P_2$, $Q_2 - P_1$ e quindi agli integrali normali v_1, v_2 i nuovi integrali $V_1 = -v_1$, $V_2 = v_2$ [66]. Poichè *gli* u_1, u_2 *son reali su* $F^{(0)}$ *e i* V_1, V_2 (come i v_1, v_2) *su* $F_1^{(0)}$, e le matrici corrispondenti sono ora *identiche*, ne segue che se si associa ad ogni punto (u_1, u_2) di $F^{(0)}$, il punto (V_1, V_2) di $F_1^{(0)}$ dove $V_1 = u_1$, $V_2 = u_2$, si ha una *trasformazione birazionale reale che muta* $F^{(0)}$ *in* $F_1^{(0)}$.

E ciò, tenuto conto delle espressioni di V_1, V_2, val quanto dire che le formule

(10) $$\begin{aligned} u'_1 &\equiv 2i(\tau_{21}u_1 - \tau_{11}u_2) \\ u'_2 &\equiv 2i(\tau_{22}u_1 - \tau_{12}u_2), \end{aligned}$$

rappresentano, sulla superficie di JACOBI F di cui F^0 ed $F_1^{(0)}$ son modelli reali, una *trasformazione birazionale singolare* che muta una nell'altra le due simmetrie $u'_i \equiv \bar{u}_i$, $u'_i \equiv -\bar{u}_i$, come del resto si verifica direttamente.

La superficie F è dunque singolare; e difatti i periodi (1), oltre che dalla relazione normale $(13) + (24) = 0$ son legati anche dalla $\Delta = \frac{1}{4}$ che può

[66] È questa una *trasformazione dei periodi normali* che rispetta la condizione (*a*) della nota [42] cioè *conserva la realtà degl'integrali normali.* Diremo perciò che le matrici normali (1) (1. *c*) sono *equivalenti nel campo reale.*

scriversi

$$(13) + (42) + 2\cdot(34) = 0, \tag{11}$$

e quindi da *tutte le relazioni del fascio*

$$(\lambda + \mu)(13) + (\lambda - \mu)(24) + 2\mu(34) = 0, \tag{12}$$

il cui *divisore* è $\lambda^2 - \mu^2$. Per $\lambda = \pm\mu$ si hanno quindi le *due relazioni di divisore zero*

$$(13) + (34) = 0, \quad (24) - (34) = 0, \tag{13}$$

la cui somma è la relazione normale $(13) + (24) = 0$, che son richieste (n.° prec.) per lo spezzamento di Σ. Poichè le (13) con ovvio significato dei simboli, possono scriversi

$$(1 - 4\cdot 3) = 0, \quad (2 - 3\cdot 4) = 0,$$

così se, indicando con $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ periodi ai cicli normali della (1), passiamo a nuovi periodi primitivi (cioè a nuovi cicli) Ω_i ponendo

$$\Omega_1 = \omega_1 - \omega_4, \quad \Omega_2 = \omega_3, \quad \Omega_3 = \omega_4, \quad \Omega_4 = \omega_2 - \omega_3, \tag{14}$$

le (13) (riferite ai nuovi cicli) divengono

$$(12) = 0, \quad (34) = 0. \tag{15}$$

La tabella dei nuovi periodi degli integrali normali u_1, u_2 è

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - i\tau_{12} & i\tau_{11} & \frac{1}{2} + i\tau_{12} & -i\tau_{11} \\ -i\tau_{22} & \frac{1}{2} + i\tau_{21} & i\tau_{22} & \frac{1}{2} - i\tau_{21} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

ed i *due integrali ellittici* v_1, v_2 si ottengono combinando linearmente u_1, u_2 in modo che, com'è possibile in forza delle (15), si annullino i due periodi Ω_1, Ω_2 oppure Ω_3, Ω_4, cioè ponendo

$$\begin{aligned} v_1 &= i\tau_{22}u_1 - \left(\frac{1}{2} + i\tau_{12}\right)u_2 \\ v_2 &= -i\tau_{22}u_1 - \left(\frac{1}{2} - i\tau_{12}\right)u_2 . \end{aligned} \tag{17}$$

Allora, al posto della (16) si ottiene la tabella

$$(18)\qquad \begin{Vmatrix} i\tau_{22} & -\frac{1}{2}-i\tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\tau_{22} & -\frac{1}{2}+i\tau_{12} \end{Vmatrix},$$

ed inoltre le equazioni del coniugio di $F^{(0)}$, da $u'_i \equiv \bar{u}_i$ divengono

$$(19)\qquad v'_1 \equiv \bar{v}_2, \quad v'_2 \equiv \bar{v}_1,$$

il che mostra che $F^{(0)}$ (ed $F_1^{(0)}$) è *la superficie* (imagine propria) *delle coppie di punti di due curve ellittiche imaginarie coniugate.*

Viceversa siano C_1, C_2 due curve ellittiche imaginarie coniugate, v_1 un integrale di 1ª specie di C_1 coi periodi $a+ib$, $c+id$ ai cicli primitivi A_1, B_1, v_2 l'integrale *coniugato* di C_2, coi periodi $a-ib$, $c-id$ ai cicli A_2, B_2 *coniugati* di A_1, B_1. La superficie di JACOBI $F^{(0)}$ imagine propria delle coppie di punti delle due curve (ch'è *reale*) corrisponderà alla tabella

$$(20)\qquad \begin{Vmatrix} a+ib & c+id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-ib & c-id \end{Vmatrix},$$

ed avrà come equazioni del coniugio le (19).

Passiamo ora ad *integrali reali* w_1, w_2 ponendo

$$(21)\qquad w_1 = v_1 + v_2, \quad w_2 = i(v_2 - v_1),$$

e rendiamo *reali i cicli del primo gruppo*, sostituendo agli A_i, B_i (così continuiamo ad indicare anche i cicli della superficie di JACOBI, a cui son relativi i periodi (20)) i nuovi cicli

$$(22)\qquad M_1 = A_1 + A_2, \quad M_2 = B_1 + B_2, \quad N_1 = B_2, \quad N_2 = A_1,$$

che, per effetto del coniugio subiscono la sostituzione (IX o) del n.° 12 I ($p=\lambda=2$). Si trova subito che i nuovi periodi di w_1, w_2 sono

$$(23)\qquad \begin{Vmatrix} 2a & 2c & c-id & a+ib \\ 2b & 2d & d+ic & b-ia \end{Vmatrix},$$

e non resta che *normalizzare gl'integrali reali*, rispetto ai cicli M_1, M_2, cioè porre

$$(24)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2D}(dw_1 - cw_2) \\ u_2 &= -\frac{1}{2D}(bw_1 - aw_2), \end{aligned} \qquad D=(ad-bc),$$

per ottenere in definitiva la tabella

$$(25)\qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -i\dfrac{c^2+d^2}{2D} & \dfrac{1}{2}+i\dfrac{bd+ac}{2D} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2}+i\dfrac{bd+ac}{2D} & -i\dfrac{a^2+b^2}{2D} \end{matrix} \right\|$$

ch'è *normale, ortosimmetrica, con* $\lambda=2$ *e* $\Delta=\frac{1}{4}$.

Dalle considerazioni esposte risulta che una coppia di curve ellittiche imaginarie coniugate rappresenta un *tipo di transizione* fra la curva reale di genere 2 ortosimmetrica con un ramo, e la curva reale di genere 2 senza rami reali. Si può rendersene conto tanto per *via topologica*, quanto per *via algebrica*; ma i limiti di questo scritto non ci consentono tal digressione.

19. **Identificazione del tipo corrispondente a** $\Delta>\frac{1}{4}$. — In quest'ultima parte della discussione ci riferiremo a *periodi pseudonormali*, e costruiremo curve di genere 2 *prive di rami reali* sulle quali $|\Delta|$ ha un valore arbitrariamente grande. Ricordando che da una matrice normale si ottiene subito una matrice pseudonormale (n.° 12, I) collo stesso $|\Delta|$ e che per quest'ultime $|\Delta|$ è invariante (n.° 3) ne dedurremo che *il caso impropriamente ortosimmetrico corrisponde a* $\Delta>\frac{1}{4}$.

Consideriamo la curva Γ di genere 2, *priva di rami reali*, rappresentata dall'equazione

$$(26)\qquad w^2=(z^2+a^2)f(z),$$

nella quale a è un numero reale (positivo), ed $f(z)$ un polinomio di 4° grado a coefficienti reali, e radici complesse coniugate α, $\bar\alpha$, β, $\bar\beta$, *negativo per tutti i valori reali di* z.

Segnati sul piano complesso $z=x+iy$ i 6 punti di diramazione $+ia$, $-ia$, α, $\bar\alpha$, β, $\bar\beta$ della funzione w, tagliamo il piano stesso lungo i tre segmenti paralleli all'asse y che li congiungono, e sovrapponendolo ad un secondo piano tagliato allo stesso modo, costruiamo la *superficie di Riemann R* relativa a Γ, riunendo i bordi opposti di due tagli appartenenti a piani diversi (Fig. 2).

Da facili considerazioni aiutate dalla figura, risulta subito che:

a) Al coniugio di Γ corrisponde su R la *simmetria* S nella quale sono omologhi due punti *di fogli diversi* simmetrici rispetto all'asse x ([67]);

b) I cicli A_1, A_2 della figura son mutati in sè da S, cioè son *reali*; invece i cicli B_1, B_2 son trasformati rispettivamente in $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$. Pertanto, a norma della (II) (n.° 2), e tenuto conto che $p = \lambda = 2$, si conclude che *i cicli* A_1, A_2, B_1, B_2 *sono pseudonormali*; sicchè la relativa tabella dei periodi dei due *integrali di 1ª specie reali* di Γ

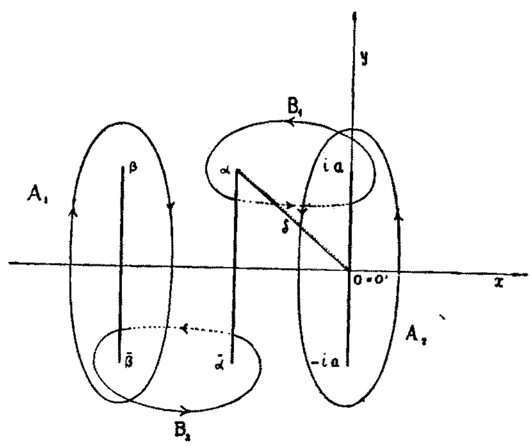

Fig. 2.

$$u = \int \frac{z\,dz}{w}, \quad v = \int \frac{dz}{w}, \tag{27}$$

sarà del tipo

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{1}{2}a_{11} + ib_{11} & \frac{1}{2}a_{12} + ib_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{21} + ib_{21} & \frac{1}{2}a_{22} + ib_{22} \end{Vmatrix}, \tag{28}$$

ed il *determinante* Δ *della matrice pseudonormale* corrispondente ai cicli A_i, B_i, che si deduce dalla (28) *normalizzando gl'integrali reali* rispetto ai cicli A_1, A_2, risulterà eguale a $\| b_{rs} \| : \| a_{rs} \|$.

Facciamo ora tendere a zero il numero reale a. Al limite *la curva* Γ *degenera nella curva ellittica* Γ' *priva di rami reali*

$$w^2 = z^2 f(z), \tag{29}$$

([67]) Invece la simmetria S_1 nella quale si corrispondono due punti *dello stesso foglio* simmetrici rispetto all'asse x, ch'è il prodotto di S per la g_2^1, corrisponde (n.° 8) al coniugio della curva $w^2 = -(z^2 + a^2)f(z)$ (*complementare* di Γ) che ha *un ramo reale* rappresentato su R dal circuito avente sede lungo l'asse x.

la cui equazione, posto $\eta = \frac{w}{z}$ può scriversi

$$\eta^2 = f(z), \tag{30}$$

e i due integrali u, v divengono

$$u' = \int \frac{dz}{\eta}, \quad v' = \int \frac{dz}{z \cdot \eta}, \tag{31}$$

sicchè *u rimane di 1^a specie,* mentre *v diviene di 3^a specie,* e acquista *due singolarità logaritmiche* nei due punti di Γ' corrispondenti a $z = 0$.

Durante la variazione di a il taglio $+ia$, $-ia$ della R si restringe fino a chiudersi; al limite rimane una superficie R' (della curva Γ') coi *due* tagli $\alpha\,\bar{\alpha}$, $\beta\,\bar{\beta}$, sulla quale i due punti O, O' sovrapposti nell'origine son da considerarsi come distinti, e sono precisamente i *punti di singolarità logaritmica* dell'integrale v'.

Durante la variazione di R possiamo supporre che i cicli A_1, A_2, B_2 restino invariati; invece il ciclo B_1, per effetto della chiusura del taglio che attraversa si riduce ad un *cammino aperto* δ congiungente i due punti O, O' attraverso al taglio $\alpha\,\bar{\alpha}$, ed omologo a quello risultante dai due segmenti rettilinei $O\alpha$, $\alpha O'$ percorsi su fogli differenti.

Indichiamo con a'_{rs}, b'_{rs} i valori *limiti* degli a_{rs}, b_{rs}. Intanto a'_{11}, a'_{12}, b'_{11}, b'_{12} son *finiti* perchè u' è di 1^a specie; anzi $a'_{12} = 0$ perchè *su R' il ciclo A_2 è omologo a zero,* mentre b'_{12} è certo *diverso da zero* altrimenti u' avrebbe un solo periodo non nullo a'_{11}. Invece, degli a'_{21}, a'_{22}, b'_{21}, b'_{22} il primo e l'ultimo *son finiti* perchè i cicli A_1, B_2 non circondano nè contengono singolarità logaritmiche di v', e lo è anche a'_{22} che, come *periodo polare di v' relativo alla singolarità logaritmica in O* vale

$$a'_{22} = \frac{2\pi i}{\sqrt{f(0)}} \text{ [68]}; \tag{32}$$

mentre b'_{21} *è infinito* in quanto esprime il valore di v' lungo il cammino δ congiungente i due punti di singolarità logaritmica OO'. Si ha quindi

$$\lim \| a_{rs} \| = k, \quad \lim \| b_{rs} \| = \infty, \tag{33}$$

---

[68] Si noti che a'_{22}, limite del numero *reale* a_{22}, è reale perchè $f(0)$ è *negativo.* Il segno di $\sqrt{f(0)}$ dipende dalle convenzioni fatte circa la distribuzione dei valori di w sui due fogli di R.

con k finito; e dunque in definitiva

$$\lim \Delta = \infty, \tag{34}$$

cioè per a sufficientemente piccolo $|\Delta| > \frac{1}{4}$, conformemente al nostro proposito.

§ 6. Le varietà di Kummer reali.

20. **Richiami introduttivi.** — La questione che imprendiamo a trattare, e che presentiamo come un primo esempio d'applicazione dei nostri procedimenti a varietà abeliane di rango > 1, per la sua estensione, e per la varietà dei problemi accessorî a cui si collega, domanderebbe, in una trattazione dettagliata, uno sviluppo forse più ampio di quello che non ci sia concesso dai limiti imposti al presente scritto. Ci limiteremo quindi di necessità alle questioni di maggiore rilievo.

Chiameremo ***varietà di Kummer*** la varietà algebrica a p dimensioni K_p, imagine dell'involuzione Γ generata sopra una varietà abeliana V_p di *rango e divisori* 1 (cioè contenente almeno un sistema Σ) da una trasformazione di 1ª specie T, p. es. dalla $u'_i \equiv -u_i$.

Comunemente la denominazione si attribuisce ad un particolare *modello proiettivo* M_p della K_p, che si può costruire, in uno spazio ad $N = 2^p - 1$ dimensioni, ponendone le coordinate omogenee proporzionali a 2^p funzioni ϑ del secondo ordine, *pari*, di p argomenti, scelte opportunamente. L'*ordine* di M_p è $2^{p-1} \cdot p!$; in particolare per $p = 2$ si ha la nota *superficie di Kummer* ([69]).

Ad ogni coppia di punti di V_p coniugati in T corrisponde un punto di M_p; in particolare ai 2^{2p} punti uniti di T corrispondono 2^{2p} *punti singolari di molteplicità* 2^{p-1}, e su K_p altrettante *varietà razionali* H_{p-1} *fondamentali* per la corrispondenza (1, 2) fra K_p e V_p.

La caratteristica del semiperiodo collegato ad un punto unito di T si dirà *caratteristica del punto singolare* (o della H_{p-1}) corrispondente, e servirà anche a denotare il punto stesso.

Al sistema L delle sezioni iperpiane di M_p corrisponde su V_p un *sistema lineare* Λ, di dimensione $2^p - 1$, costituito da *varietà* ϑ *del* 2° *ordine* mutate

([69]) Talune delle proprietà quì richiamate si trovano in WIRTINGER, *Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche* [Monatsh. für Math. u. Phys., vol. I (1890), pp. 113-128] altre sono facili generalizzazioni di quelle del caso $p = 2$. Per quest'ultime cfr. ENRIQUES-SEVERI, loc. cit., n.i 46-49.

in sè da T, al quale appartengono, come particolari *varietà spezzate*, le coppie di varietà ϑ (del 1° ordine) d'un sistema Σ, corrispondenti in T. Le loro imagini su M_p sono particolari sezioni con *iperpiani tangenti* lungo una M_{p-2} d'ordine $2^{p-3} \cdot p!$, appartenente ad uno spazio di dimensione $N-p-1$; l'inviluppo di tali iperpiani è *duale* della M_p.

Dalle brevi notizie date al n.° 9 sui sistemi di varietà intermediarie si deduce subito che il *sistema lineare* Λ *è completo*; quindi lo è anche L cioè M_p *è normale*.

Quando le due varietà ϑ di Σ corrispondenti in T coincidono, e quindi, se le equazioni di T sono $u'_i \equiv -u_i + c_i$, hanno i parametri $\frac{c_i}{2} + \sigma_i$ (σ_i semiperiodo), l'iperpiano corrispondente *tocca addirittura* M_p *lungo tutta l'intersezione* ch'è dunque una M_{p-1} d'ordine $2^{p-2} \cdot p!$ Si hanno così 2^{2p} *varietà singolari*, ed altrettanti *iperpiani singolari*, a ciascuno dei quali collegheremo la *caratteristica* del corrispondente σ_i.

Per ogni punto singolare passano $2^{p-1}(2^p-1)$ iperpiani singolari, e dualmente.

Le 2^{2p} varietà ϑ predette son trasformate *complessivamente* in sè da $2 \cdot 2^{2p}$ trasformazioni ordinarie *involutorie* di V_p che, se la T è $u'_i \equiv -u_i$, hanno le equazioni $u'_i \equiv \pm u_i + \sigma_i$. Alle due trasformazioni di specie diversa provenienti dallo stesso semiperiodo (che sono una il prodotto dell'altra per la T) corrisponde *una stessa omografia* che trasforma in sè la M_p; sicchè M_p *ammette un gruppo di* 2^{2p} *omografie involutorie.*

Fissate ad arbitrio p costanti α_i, si associ ad ogni punto $u_i \equiv p_i$ di V_p la $\vartheta[u-q]=0$, i cui parametri soddisfano alle relazioni $p_i - q_i \equiv \alpha_i$. La corrispondenza così ottenuta, ha, come si vede subito, *carattere involutorio*; la diremo una *polarità abeliana di* V_p *di parametri* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

La condizione perchè un punto appartenga alla propria ϑ polare, è $\vartheta[\alpha]=0$, cioè è *indipendente dal punto*; le polarità abeliane sono quindi *polarità uniformi se* $\vartheta[\alpha] \neq 0$, *sistemi nulli se* $\vartheta[\alpha]=0$.

Le trasformazioni di 2ª specie di V_p mutano *ogni* polarità abeliana di V_p in sè stessa; invece le trasformazioni di 1ª specie mutano la polarità di parametri $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ in quella di parametri $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_p)$. Vi sono pertanto 2^{2p} *polarità abeliane mutate in sè stesse da ogni trasformazione di 1ª specie di* V_p, e sono quelle aventi come parametri i 2^{2p} semiperiodi incongrui. In questo caso la condizione $\vartheta[\alpha]=0$, è, come sappiamo, soddisfatta allora e solo che *la caratteristica del semiperiodo* α_i *è dispari:* sicchè *fra le predette polarità* $2^{p-1}(2^p+1)$ *sono uniformi, e* $2^{p-1}(2^p-1)$ *son sistemi nulli.*

A queste polarità corrispondono, nello spazio S_N di M_p, $2^{p-1}(2^p+1)$ *polarità ordinarie* [70] e $2^{p-1}(2^p-1)$ *sistemi nulli che trasformano in sè la* M_p (il luogo nell'inviluppo duale di cui sopra); in particolare mutano i punti singolari negl'iperpiani singolari. Anzi da quanto precede si trae che un punto ed un iperpiano singolare assegnati, si corrispondono in *una sola* fra le predette polarità la cui caratteristica (cioè la caratteristica del corrispondente semiperiodo) è la differenza fra le caratteristiche del punto e dell'iperpiano.

Ogni varietà di KUMMER (in senso proiettivo) M_p, è, come abbiamo visto, collegata ad un sistema Σ della varietà V_p; quindi, se V_p non è singolare, è perfettamente determinata dalla V_p stessa a meno d'un'omografia. Viceversa se due varietà M_p, M'_p collegate rispettivamente ai sistemi Σ, Σ' delle varietà V_p, V'_p sono *omografiche*, si prova senza difficoltà (imitando un ragionamento che richiameremo tra poco) che quelle V_p e quei Σ sono birazionalmente identici: quindi in particolare, che una stessa M_p non può provenire da più coppie (V_p, Σ) birazionalmente distinte.

21. **Genesi delle varietà di Kummer reali.** — Il problema più generale concernente le varietà di KUMMER reali (in senso invariantivo) è ovviamente quello di classificare tutte le simmetrie che possono esistere sulla K_p. Noi però discuteremo soltanto il *caso più ristretto* delle simmetrie che conducono a *modelli reali del tipo proiettivo di* M_p.

Trasportiamoci addirittura sopra un modello $M_p^{(0)}$ siffatto, o più in generale sopra un suo equivalente proiettivo M_p, e quindi supponiamo che M_p *ammetta un'antiproiettività involutoria* s (imagine del coniugio di $M_p^{(0)}$, cioè) *dotata, in* S_N, *di punti uniti*. Quali condizioni restano con ciò imposte alla V_p, ed alla trasformazione T?

Per rispondere a tale questione, partiamo dall'osservare che la s trasforma in sè stesso il gruppo dei punti singolari di M_p, cioè l'insieme degli *elementi di diramazione* della corrispondenza (1, 2) fra M_p e V_p. Ne deduciamo subito, per il tramite d'un noto ragionamento, che *la simmetria s è imagine d'una*

(70) Ci si rende facilmente conto del perchè le *polarità uniformi* di V_p si trasformano in polarità che (in senso complesso) *non sono uniformi*. La condizione perchè un punto P di M_p giaccia sulla sua sezione iperpiana polare, è che il corrispondente P_1 di V_p giaccia sulla ϑ polare, *oppure sulla sua corrispondente in* T. Ora la prima circostanza è impossibile, perchè la polarità di V_p *è uniforme*, ma la seconda si presenta per tutti i punti di V_p i cui parametri soddisfano all'equazione $\vartheta[2u-\alpha]=0$, ai quali corrispondono i punti di M_p *autoconiugati* nella polarità ordinaria considerata.

trasformazione antibirazionale S *di* V_p *in sè permutabile colla* T [71], la quale, in forza del carattere antiproiettivo ed involutorio di s, è necessariamente *una simmetria od una trasformazione ciclica di 4° ordine avente per quadrato la* T, che trasforma in sè stesso il sistema Λ di V_p (corrispondente al sistema delle sezioni iperpiane di M_p) e quindi il sistema Σ associato ad M_p.

Si noti che la $S_1 = TS = ST$ è un'altra trasformazione *dello stesso tipo* avente ancora per imagine la s.

Viceversa ad una S di V_p del tipo predetto, corrisponde sopra la M_p associata ad un sistema Σ trasformato in sè da S, un'antiproiettività involutoria s. Poichè la dimensione $N = 2^p - 1$ dello spazio d'appartenenza di M_p *è dispari*, possono darsi due casi:

a) La s *è dotata in* S_N (in particolare, ma non necessariamente, su M_p) *di punti uniti*, è quindi è riducibile *proiettivamente* al coniugio. Diremo allora che la M_p, in quanto ammette una trasformata proiettiva $M_p^{(0)}$ reale, ***è proiettivamente reale.***

b) La s *è priva di punti uniti*, ed allora non è riducibile proiettivamente al coniugio. La M_p non ammette trasformate proiettive, ma solo *trasformate birazionali reali*: e si dirà ch'essa ***non è proiettivamente reale*** [72].

In forza della posizione fatta, *solo i tipi proiettivamente reali interessano il nostro problema.*

---

[71] Il « *noto ragionamento* » a cui si allude si basa sulle osservazioni seguenti: Entro alla riemanniana R_{2p} di M_p gli elementi di diramazione predetti (che sulla K_p son le varietà fondamentali H_{p-1}) son rappresentati da 2^{2p} varietà *reali* R_{2p-2}, girando intorno alle quali *si scambiano* i due punti P_1, P_2 di V_p corrispondenti ad un punto P di M_p; e un tale scambio avviene *soltanto in quel caso*, giacchè M_p è regolare, cioè ha *connessione lineare* 1. Se P, Q son due punti di M_p corrispondenti in s, quando P gira intorno ad una delle predette R_{2p-2}, lo stesso accade di Q, ecc.

[72] S'intende che su quelle trasformate reali, il coniugio s' è l'imagine di s. Non si può, almeno *a priori* escludere che queste siano alla loro volta $M_p^{(0)}$, ciò potendo verificarsi se sulla M_p esistono dei sistemi L' aventi le stesse caratteristiche invariantive del sistema L delle sezioni iperpiane, che siano mutati in sè da s. Ed allora si possono fare due ipotesi: α) Il sistema L' è mutato in L da qualche trasformazione birazionale τ di M_p in sè (di sistemi siffatti ne esistono notoriamente sulle M_2) ed allora detta ω la trasformazione birazionale che muta $M_p^{(0)}$ in M_p, la $\omega\tau$ è una *proiettività* fra $M_p^{(0)}$ ed M_p. Le $M_p^{(0)}$, M_p sono dunque omografiche, ma ciò non è in contraddizione con b) perchè la $\omega\tau$ non muta più (come ω) s' in s ma in un'antiproiettività σ *dotata di punti uniti.* β) L ed L' son birazionalmente distinti, ed allora $M_p^{(0)}$ corrisponde (nel senso precisato) ad *un'altra coppia* (V_p, Σ) per cui la S corrispondente ad s' soddisfa alle condizioni perchè si verifichi il caso a). Rimane però dubbia la possibilità di questo caso.

22. **Tipi provenienti da simmetrie.** — Denotiamo, al solito, con u_i integrali *reali* e *normali* di V_p, e supponiamo che la T sia $u'_i \equiv -u_i$, e la S, $u'_i \equiv \bar{u}_i + c_i$; allora la S_1 sarà $u'_i \equiv -\bar{u}_i + c_i$ (73). Più avanti ci converrà talvolta, per avere equazioni più convenienti, ricorrere ad un cambiamento di parametri; in proposito notiamo subito che:

1°) le equazioni $u'_i \equiv -u_i$ sono invarianti per qualunque cambiamento *omogeneo* di parametri;

2°) ai secondi membri delle equazioni di T, S si può aggiungere (o togliere) uno *stesso* sistema di numeri imaginari puri j_i, trasformando quelle equazioni in $u'_i \equiv -u_i + j_i$, $u'_i \equiv \bar{u}_i + c_i + j_i$. Basta cambiare i parametri u_i negli $u_i - \frac{1}{2} j_i$;

3°) ai secondi membri delle equazioni di T si può aggiungere (o togliere) un sistema di numeri reali r_i senz'alterare le equazioni di S. Basta cambiare gli u_i in $u_i - \frac{1}{2} r_i$.

Ciò premesso, ricordiamo dal n.° 6 che le costanti c_i d'una simmetria hanno le espressioni

$$c \equiv j + (0, 0, \ldots, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \ldots, g_p), \tag{1}$$

valide anche (n.° 12, I) se gl'integrali son normali. Qui per la *permutabilità* di S con T occorre di più che sia $2c_i \equiv 0$, cioè che le c_i sian *semiperiodi*; sicchè le j_i saranno semiperiodi imaginari puri. Ora un semiperiodo siffatto è una combinazione lineare dei semiperiodi ai cicli (imaginari puri) $P_1, P_2, \ldots, P_p$, e quindi, stante le espressioni (n.° 12, V) di questi cicli, si può ridurre, per sottrazione di periodi, ad una somma di semiperiodi ai cicli $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda$, $N_{\lambda+1}, N_{\lambda+2}, \ldots, N_p$: sicchè la (1) può scriversi

$$c \equiv (g_1, g_2, \ldots, g_p \,|\, 0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p). \tag{2}$$

Il *criterio direttivo* per la più opportuna classificazione dei tipi in parola, è fornito dall'osservazione seguente;

---

(73) S'intende che gli u_i son *reali* rispetto ad S e *normalizzati* in base alla relazione di RIEMANN a cui corrisponde il sistema Σ (reale rispetto ad S) collegato alle sezioni iperpiane di M_p (l'osservazione è superflua se V_p non è singolare). Avendo scelto come T la *particolare* $u'_i \equiv -u_i$ occorre lasciare alla S *tutta la sua generalità*: ma le trasformazioni che riducono S alla forma $u'_i \equiv \bar{u}_i + c_i$ e normalizzano gl'integrali, sono *omogenee*, quindi non alterano le equazioni di T.

I *punti uniti di s*, cioè i *punti reali* del corrispondente modello reale di M_p, provengono o da *punti uniti di* S o da *coppie comuni ad* S *e* T, cioè da *punti uniti di* S_1; inoltre la S ha punti uniti quando nella (2) si ha $g_{\lambda+1}=g_{\lambda+2}=...=g_p=0$, e la S_1 invece quando $h_{\lambda+1}=h_{\lambda+2}=...=h_p=0$ (n.° 6). In base a questa osservazione tratteremo separatamente i casi seguenti:

I) *Entrambe le simmetrie* S, S_1 *hanno punti uniti* (quindi *i tipi corrispondenti son sempre proiettivamente reali*).

Avendosi $g_{\lambda+1}=g_{\lambda+2}=...=g_p=h_{\lambda+1}=h_{\lambda+2}=...=h_p=0$, la (2) diviene

$$c \equiv (g_1, g_2, ..., g_\lambda, 0, 0, ..., 0), \tag{3}$$

e quindi, sottraendo dalle c_h il periodo al ciclo $g_1N_1+g_2N_2+...+g_\lambda N_\lambda$ oppure al ciclo $g_\lambda N_1+g_{\lambda-1}N_2+...+g_1N_\lambda$ secondo che la matrice normale è *diasimmetrica* od *ortosimmetrica*, può scriversi

$$(4) \quad \begin{array}{ll} d) & c_h \equiv -i(g_1\tau_{h1}+g_2\tau_{h2}+...+g_\lambda\tau_{h\lambda}) \\ o) & c_h \equiv -i(g_\lambda\tau_{h1}+g_{\lambda-1}\tau_{h2}+...+g_1\tau_{h\lambda}). \end{array}$$

Le costanti c_h son dunque *imaginarie pure*, e perciò col cambiamento di parametri 2) si posson far sparire dai secondi membri delle equazioni di S, riducendole ad $u'_i \equiv \bar{u}_i$; però le equazioni di T divengono $u'_i \equiv -u_i - c_i$. Ma aggiungendo ora alle c_i il periodo predetto, le costanti dei secondi membri divengono *reali* e quindi si possono far sparire dalle equazioni di T senza alterare quelle di S. In definitiva le equazioni di T, S si son ridotte alle

$$u'_i \equiv -u_i; \quad u'_i \equiv \bar{u}_i, \tag{5}$$

quindi $M_p^{(0)}$ *è l'imagine dell'involuzione* Γ *generata dalla trasformazione di 1ª specie* $u'_i \equiv -u_i$ *sulla varietà abeliana reale* $V_p^{(0)}$ *di cui* $u'_i \equiv \bar{u}_i$ *è il coniugio*. Si noti che *la* T *muta in sè stesse tutte le falde di* $V_p^{(0)}$ (n.° 7) e che gl'integrali u_i son rimasti normali perchè le trasformazioni operate sono pure addizioni di costanti.

Di $M_p^{(0)}$ siffatte se ne hanno, per un dato p, tanti tipi quanti sono i valori di λ, distinguendo per λ pari il caso diasimmetrico da quello ortosimmetrico. In tutto dunque $\left[\frac{3p+2}{2}\right]$ *tipi*; in particolare 4 per $p=2$.

II) *Una sola delle due simmetrie* S, S_1 *ha punti uniti* (quindi ancora *i tipi corrispondenti son proiettivamente reali*).

Per il comportamento simmetrico di S, S_1 si può supporre che quella simmetria sia la S, sicchè le c_i son del tipo

$$c \equiv (g_1, g_2, \ldots, g_\lambda, 0, 0, \ldots, 0 \,|\, 0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p), \tag{6}$$

con qualcuna delle h *diversa da zero*. Colle stesse trasformazioni del caso precedente, le equazioni di T, S si riducono a

$$u'_i \equiv -u_i + (0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p), \quad u'_i \equiv \bar{u}_i, \tag{7}$$

sicchè, *come prima la T è reale sulla $V_p^{(0)}$ di cui $u'_i \equiv \bar{u}_i$ è il coniugio*, ma ora *essa è una di quelle trasformazioni che scambiano fra di loro le falde di $V_p^{(0)}$*. Data l'identità del comportamento di queste trasformazioni ([74]) si ha anche qui un tipo per ogni valore di λ e carattere diasimmetrico od ortosimmetrico, *escluso* $\lambda = p$, in cui le (7) riduconsi alle (5) (e d'altronde $V_p^{(0)}$ ha *una sola falda*), cioè in tutto $\left[\frac{3p-1}{2}\right]$ *tipi*, in particolare 2 per $p = 2$.

III) *Nessuna delle simmetrie S, S_1 ha punti uniti.*

Allora le c_i hanno i valori generali (2) con qualcuna delle g e delle h d'indice $> \lambda$ diversa da zero. Con trasformazioni analoghe alle precedenti, le equazioni di T, S possono allora ridursi alla forma

$$\begin{aligned} u'_i &\equiv -u_i, \\ u'_i &\equiv \bar{u}_i + (0, 0, \ldots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \ldots, g_p \,|\, 0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p). \end{aligned} \tag{8}$$

23. **Separazione dei tipi proiettivamente reali.** — Nell'ultimo caso del n.° precedente la s non ha su M_p punti uniti e quindi *il modello reale corrispondente non ha punti reali*; esso dunque sarà o non sarà *proiettivamente reale* secondo che l'*antiproiettività* s avrà o non avrà in S_N punti uniti. Ci proponiamo di approfondire tal distinzione.

Incominciamo perciò coll'osservare che, in uno spazio S_N *dispari*, un'antiproiettività involutoria s ha o non ha punti uniti, secondo che in un fascio d'iperpiani *unito* esistono o no elementi uniti. Difatti nell'ipotesi negativa i punti uniti di s potrebbero esistere soltanto nello S_{N-2} asse, e d'altronde ciò è impossibile perchè allora s sarebbe riducibile proiettivamente al coniugio e quindi i suoi punti uniti non potrebbero localizzarsi in un S_{N-2}; nell'ipotesi

---

([74]) Scegliendo opportunamente la *falda origine* (n.° 7) e i periodi normali, si può supporre che nelle (7) le h abbian valori prefissati, ad es. (1, 0,..., 0) *qualunque* sia la T del tipo considerato.

affermativa ci son certo punti uniti entro ad ogni iperpiano (del fascio) unito, perchè $N-1$ è pari.

Ciò premesso, detti c_i, d_i, due *arbitrari* sistemi di costanti, consideriamo su V_p le due varietà $\vartheta[u+c]=0$, $\vartheta[u+d]=0$, e le loro corrispondenti in T, $\vartheta[u-c]=0$, $\vartheta[u-d]=0$, e formiamo il rapporto

$$\frac{\vartheta[u+c]\vartheta[u-c]}{\vartheta[u+d]\vartheta[u-d]}. \tag{9}$$

Tenendo conto dei fattori che acquistano le ϑ quando le u aumentano di periodi, si vede subito che la (9) è una *funzione uniforme* del punto di V_p, che, per la parità della ϑ, assume lo stesso valore in due punti corrispondenti in T. Si tratta dunque d'una *funzione razionale del punto di* M_p.

D'altronde quella funzione si annulla nei punti della sezione iperpiana (tangente) corrispondente a $\vartheta[u+c]\vartheta[u-c]=0$, e diviene infinita nei punti della sezione iperpiana corrispondente a $\vartheta[u+d]\vartheta[u-d]=0$, quindi è *lineare fratta*, e, scelte opportunamente le coordinate omogenee x_i in S_N si può supporre ridotta ad $\dfrac{x_1}{x_2}$; in altre parole si può porre su M_p

$$\rho x_1 = \vartheta[u+c]\vartheta[u-c], \quad \rho x_2 = \vartheta[u+d]\vartheta[u-d]. \tag{10}$$

Se ora disponiamo dell'arbitrarietà delle costanti c_i, d_i in modo che gl'iperpiani $x_1=0$, $x_2=0$ si corrispondano in s, il fascio $x_1-\lambda x_2=0$ risulterà unito, e dall'antiproiettività ivi subordinata si potrà decidere della natura della s.

Ma affinchè $x_1=0$, $x_2=0$ si corrispondono in s, basta che $\vartheta[u+c]=0$, $\vartheta[u+d]=0$ (e di conseguenza $\vartheta[u-c]=0$, $\vartheta[u-d]=0$) si corrispondano in S. Si potranno quindi assumere ad arbitrio le c_i, ad esempio *tutte nulle*, ed allora le d_i resteranno determinate in base alle (8) ed alle formule di trasformazione delle ϑ del n.° 13; e precisamente avranno i valori

$$(11)\quad \begin{array}{ll} d) & (1, 1,\dots, 1, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2},\dots, g_p \mid 0, 0,\dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2},\dots, h_p) \\ o) & (0, 0,\dots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2},\dots, g_p \mid 0, 0,\dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2},\dots, h_p) \end{array}$$ [75].

Ora pensando le x_1, x_2 delle (10) (nelle quali le c_i, d_i hanno i valori stabiliti) come valori assunti in un dato punto P di M_p si calcolino i valori x'_1, x'_2 assunti

[75] Si noti che le d_i son *semiperiodi*, quindi le due varietà $\vartheta[u+d]=0$, $\vartheta[u-d]=0$ *coincidono*, come del resto le corrispondenti $\vartheta[u+c]=0$, $\vartheta[u-c]=0$ (essendo le c_i nulle). Insomma $x_1=0$, $x_2=0$ son due *iperpiani singolari*.

nel punto P' corrispondente in s, sostituendo al posto delle u_i le u'_i date dalle seconde delle (8); e questi valori si confrontino con $\bar{\rho}\,\bar{x}_1$, $\bar{\rho}\,\bar{x}_2$ tratti pure dalle (10) tenendo conto delle formule di trasformazione del n.° 13; e dei fattori che acquistano le ϑ quando le u_i aumentano di periodi ([76]). Con calcoli che risparmiamo al lettore si trova

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
\bar{\rho}\,\bar{x}_2 &= \rho x'_1 \cdot e^{2\pi i \sum_{\lambda+1}^{p} h_t\left(u_t + \frac{g_t}{2}\right)} \\
\bar{\rho}\,\bar{x}_1 &= \rho x'_2 \cdot e^{2\pi i \sum_{\lambda+1}^{p} h_t u_t - \pi \sum_{\lambda+1}^{p} \sum_{\lambda+1}^{p} h_r h_s \tau_{rs}}
\end{aligned}
$$

e quindi, posto $x = \dfrac{x_1}{x_2}$, ed indicato con k il numero *reale positivo* $e^{-\pi \sum_{\lambda+1}^{p} \sum_{\lambda+1}^{p} h_r h_s \tau_{rs}}$

$$
(13)\qquad x' = \frac{k}{\pm \bar{x}},
$$

valendo il segno $+$ *od il segno* $-$ *secondo che* $\sum_{\lambda+1}^{p} h_t g_t$ cioè *la caratteristica del semiperiodo* $(0, 0,\ldots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2},\ldots, g_p \,|\, 0, 0,\ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2},\ldots, h_p)$ *è pari o dispari.*

La (13) rappresenta l'antiproiettività subordinata da s nel fascio $x = \text{cost}$; essa ha o non ha elementi uniti secondo che vale il segno $+$ od il segno $-$, quindi:

I tipi del caso III sono o non sono proiettivamente reali, secondo che la caratteristica del semiperiodo dal quale dipendono le equazioni (8) *della simmetria S, è pari o dispari.*

Questi tipi esistono per ogni valore di $\lambda < p$; ma per $\lambda = p-1$ si hanno soltanto tipi *non* proiettivamente reali perchè soltanto g_p, h_p possono, e *devono* essere diverse da zero (eguali ad 1). Distinguendo al solito il caso diasimmetrico da quello ortosimmetrico, troviamo così facilmente $\left[\dfrac{3p-4}{2}\right]$ *tipi proiettivamente reali e* $\left[\dfrac{3p-1}{2}\right]$ *tipi birazionalmente ma non proiettivamente reali*; in particolare, per $p = 2$, risp. 1 o 2 tipi.

([76]) KRAZER, § 4. Occorrerà modificare quelle formule in base alla già avvertita differenza di convenzioni, circa i periodi normali.

24. Tipi provenienti da trasformazioni cicliche di 4° ordine.

IV) Se la S è ciclica di 4° ordine ed $S^2 = T$, i punti uniti di S e di $S_1 = ST = TS$ sono anche punti uniti di T, e, come vedremo, esistono sempre. Queste trasformazioni dànno quindi luogo a *tipi proiettivamente reali privi di punti ordinarî reali ed aventi solo alcuni punti singolari reali.*

Detti u_i, p integrali di 1ª specie *qualunque* di V_p (la quale stavolta, almeno a priori *non è di tipo reale*) siano, com'è sempre lecito supporre, $u'_i \equiv - u_i$ le equazioni di T, e

$$u'_i \equiv \lambda_{i1}\bar{u}_1 + \lambda_{i2}\bar{u}_2 + \dots + \lambda_{ip}\bar{u}_p + \sigma_i, \tag{14}$$

le equazioni di S. Tenendo conto che T trasforma in sè S e che $S^2 = T$, si trova subito che σ_i *è un semiperiodo,* e che se al suo posto nelle (14) si pone lo *zero* si ottiene ancora una trasformazione del tipo di S. *D'ora in poi indicheremo questa con* S e la (14) con S_σ; e ci occuperemo della S riservandoci di provare che S *ed* S_σ *sono equivalenti,* di fronte alle trasformazioni birazionali di V_p, e quindi di fronte al problema. Notiamo però fin d'ora che la condizione perchè essendo $S^2 = T$ sia anche $S_\sigma{}^2 = T$ è $\sigma_i \equiv \lambda_{i1}\bar{\sigma}_1 + \lambda_{i2}\bar{\sigma}_2 + \dots + \lambda_{ip}\bar{\sigma}_p$, cioè che $u_i \equiv \sigma_i$ sia un punto unito della S.

Proviamo ora che *le trasformazioni del tipo considerato esistono solo se p è pari; ed allora, con un cambiamento omogeneo dei parametri le equazioni di S possono ridursi alle*

$$u'_1 \equiv \bar{u}_2,\ u'_2 \equiv -\bar{u}_1;\quad u'_3 \equiv \bar{u}_4,\ u'_4 \equiv -\bar{u}_3; \dots;\quad u'_{p-1} \equiv \bar{u}_p,\ u'_p \equiv -\bar{u}_{p-1}. \tag{15}$$

Osserviamo difatti che se le (14), colle σ_i nulle, si considerano come *eguaglianze* anzichè come *congruenze,* resta ancor vero che il loro quadrato è $u'_i = - u_i$ (77), sicchè se le u_i s'interpretano come *coordinate omogenee* di punto in un S_{p-1}, le (14) rappresentano ivi un'*antiproiettività involutoria* (perchè allora $u'_i = - u_i$ è *l'identità*). Se questa avesse un punto unito, che, a meno d'un cambiamento (omogeneo) dei parametri si può supporre sia $u_2 = u_3 = \dots = u_p = 0$, nelle (14) sarebbe $\lambda_{21} = \lambda_{31} = \dots = \lambda_{p1} = 0$, ed allora scrivendo che $S^2 = T$ verrebbe $\lambda_{11}\bar{\lambda}_{11} = -1$ ch'è assurda perchè $\lambda_{11}\bar{\lambda}_{11}$ *è positivo.* Dunque *quell'antiproiettività non ha elementi uniti,* quindi $p - 1$ è dispari, cioè *p è pari.*

Assumendo come vertici della piramide fondamentale di S_{p-1}, $\frac{p}{2}$ coppie di punti corrispondenti (il che implica un cambiamento omogeneo dei para-

(77) Ciò non sarebbe più vero se le σ_i fossero $\neq 0$.

metri) le equazioni di quell'antiproiettività, avuto riguardo alla non esistenza di punti uniti, si riducono subito alla forma (15) colla presenza al più d'un fattore ρ nei secondi membri. Tornando alle congruenze, e scrivendo che $S^2 = T$, viene $\rho\bar{\rho} = 1$, dunque $\rho = e^{i\varphi}$ ed allora cambiando u_i in $e^{-i\frac{\varphi}{2}}u_i$ si ottengon proprio le (15).

Dimostriamo ancora che *la sostituzione*

$$C'_i = m_{i1}C_1 + m_{i2}C_2 + \dots + m_{i,\,2p}C_{2p}, \qquad (i = 1, 2, \dots, 2p) \tag{16}$$

indotta dalla S sui cicli d'un sistema primitivo, può, mediante una trasformazione unimodulare ridursi alla forma

$$\begin{gathered} C'_1 = C_2,\ C'_2 = -C_1;\quad C'_3 = C_4,\ C'_4 = -C_3; \dots; \\ C'_{2p-1} = C_{2p},\quad C'_{2p} = -C_{2p-1}, \end{gathered} \tag{17}$$

analoga alla (15).

Anche la sostituzione (16), come la (14), è ciclica di 4° ordine, ed il suo quadrato è la $C'_i = -C_i$ indotta da T sui cicli d'un sistema qualunque di V_p. Nel corso della dimostrazione supporremo che $2p$ sia un numero pari *qualunque* (quindi che p possa anche esser dispari), e, come al n.° 1, sostituiremo ai simboli C_i altrettante variabili x_i.

Il teorema è vero per $p = 1$. Difatti se la sostituzione

$$x'_1 = n_{11}x_1 + n_{12}x_2,\quad x'_2 = n_{21}x_1 + n_{22}x_2, \tag{18}$$

sottostà alle condizioni imposte alla (16), si ha anzitutto $n_{11}^2 + n_{12}n_{21} = -1$, $n_{11} = -n_{22}$; poi cambiando le variabili in

$$X_1 = \lambda x_1 + \mu x_2,\quad X_2 = (\lambda n_{11} + \mu n_{21})x_1 + (\lambda n_{12} + \mu n_{22})x_2, \tag{19}$$

(λ, μ interi) si ha senz'altro $X'_1 = X_2$ e quindi (perchè il quadrato è $X'_i = -X_i$) anche $X'_2 = -X_1$; sicchè la (18) è ridotta come proposto, *a patto che la* (19) *sia unimodulare*. Perciò occorre che gl'interi λ, μ soddisfino all'equazione

$$n_{12}\lambda^2 - 2\lambda\mu n_{11} - \mu^2 n_{21} = \pm 1, \tag{20}$$

la quale *ha effettivamente soluzioni* perchè il determinante della forma quadratica a primo membro è eguale a -1 [78].

[78] Od anche, in virtù d'un teorema di FROBENIUS (loc. cit., §§ 3, 4) perchè n_{11}, n_{12}, n_{21} son *primi fra di loro*.

Passando ora al caso generale, scriviamo la 1ª delle (16) sotto la forma

$$x'_1 = m_{11}x_1 + \delta(n_{12}x_2 + \dots + n_{1,2p}x_{2p}), \tag{21}$$

dove δ è il m. c. d. di $m_{12},\dots, m_{1,2p}$ e perciò $n_{12},\dots, n_{1,2p}$ son *primi tra di loro*; e poniamo

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = n_{12}x_2 + n_{13}x_3 + \dots + n_{1,2p}x_{2p}, \tag{22}$$

scegliendo per X_3, $X_4,\dots$, X_{2p} opportune combinazioni lineari (a coefficienti interi) delle x_2, $x_3,\dots$, x_{2p} in modo che la sostituzione risulti *unimodulare*. Nelle nuove variabili, la prima delle (16), cioè la (21), è $X'_1 = m_{11}X_1 + \delta X_2$ e allora (sempre perchè il quadrato è $X'_i = -X_i$) anche la seconda è dello stesso tipo; quindi, in virtù di quanto precede, esse possono ulteriormente ridursi ad $X'_1 = X_2$, $X'_2 = -X_1$.

Dopo ciò il problema sarà ricondotto a $2p-2$ variabili, e quindi il procedimento sarà proseguibile, se dalle espressioni di X'_3, $X'_4,\dots$, X'_{2p} si potranno far sparire X_1, X_2. E questo scopo si raggiunge se (denotando sempre con m_{ik} i coefficienti) alle variabili X_i $(i = 3, 4,\dots, 2p)$ si sostituiscono le $y_i = X_i + m_{i1}X_2$ giacchè ciò fa sparire la X_1, e di conseguenza, per la proprietà del quadrato, la X_2. *Il teorema è così dimostrato.*

Ora cambiamo le notazioni dei nostri cicli, indicando con D_1, $D_2,\dots$, D_p i cicli C_i d'indici dispari, e con D_{p+1}, $D_{p+2},\dots$, D_{2p} quelli d'indici pari; ed inoltre denotiamo con

$$\begin{array}{c|cccccc|} & D_1 & D_2 & D_p & D_{p+1} & D_{p+2} & D_{2p} \\ \hline u_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & \dots\, \omega_{1p} & \tau_{11} & \tau_{12} & \dots\, \tau_{1p} \\ u_2 & \omega_{21} & \omega_{22} & \dots\, \omega_{2p} & \tau_{21} & \tau_{22} & \dots\, \tau_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p & \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots\, \omega_{pp} & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \dots\, \tau_{pp} \end{array}, \tag{23}$$

i relativi periodi degli u_i. Facendo descrivere al punto di V_p uno dei cicli D_i, e tenendo conto degl'incrementi che allora, in virtù delle (17) (scritte fra i D_i) subiscono i due membri delle (15) si trovano le relazioni

$$\tau_{2i-1,h} = \overline{\omega}_{2i,h}, \quad \tau_{2i,h} = -\overline{\omega}_{2i-1,h}, \tag{24}$$

le quali esprimono che *ogni riga di posto dispari della matrice* $\|\tau_{rs}\|$ *è coniugata della riga di posto successivo della* $\|\omega_{rs}\|$, *ed ogni riga di posto pari della* $\|\tau_{rs}\|$ *è coniugata della riga di posto precedente della* $\|\omega_{rs}\|$ *cambiata di segno.*

Viceversa data una matrice (23), soddisfacente alle (24), *che ammetta una relazione principale, di divisori 1, e trasformata in sè dalla* (17) ([79]), sulla V_p corrispondente le (15) rappresentano una trasformazione S del tipo voluto.

Cerchiamo ora i punti uniti della S. Poichè essi sono punti uniti di T, i loro argomenti devon esser *semiperiodi* σ_i, soddisfacenti, per la (15), alle condizioni $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$, $\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1$, ecc.. Ma posto $\sigma_i = (g_1, g_2, \ldots, g_p \mid h_1, h_2, \ldots, h_p)$ si ha per la (23) esplicitamente

$$(25) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &\equiv \frac{1}{2}(g_1\omega_{11} + g_2\omega_{12} + \ldots + g_p\omega_{1p} + h_1\tau_{11} + h_{12}\tau_{12} + \ldots + h_p\tau_{1p}) \\ \sigma_2 &\equiv \frac{1}{2}(g_1\omega_{21} + g_2\omega_{22} + \ldots + g_p\omega_{2p} + h_1\tau_{21} + h_2\tau_{22} + \ldots + h_p\tau_{2p}), \text{ ecc.,} \end{aligned}$$

e quindi, tenuto conto della (24), le condizioni predette son soddisfatte allora e soltanto che $g_i = h_i$. Dunque *S ha 2^p punti uniti, cioè metà di quelli di T.*

Se poi si ricorda che le relazioni $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$, $\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1$, ecc., esprimono anche la condizione perchè la S_σ

$$(26) \qquad u'_1 \equiv \bar{u}_2 + \sigma_1, \quad u'_2 \equiv -\bar{u}_2 + \sigma_2, \text{ ecc.}$$

abbia per quadrato la T, si conclude che di trasformazioni siffatte ne esistono precisamente 2^p che potran dirsi *associate* alla S. E queste S_σ sono evidentemente le stesse delle (14) inizialmente considerate.

Ogni S_σ è il prodotto di S per la $u'_i \equiv u_i + \sigma_i$ ed è anche *la trasformata di S mediante la trasformazione di 2^a specie* $u'_i \equiv u_i + (g_1, g_2, \ldots, g_p)$ le g essendo quelle di σ_i, come si verifica agevolmente. Pertanto *S ed S_σ sono equivalenti,* come avevamo affermato.

In conclusione si ha così *per p pari un nuovo tipo proiettivamente reale*; e quindi in totale:

([79]) Si vede facilmente che queste condizioni son compatibili colle (24), e non traggono di conseguenza altre relazioni, di guisa che la V_p è in generale *non singolare*. Per $p = 2$ una matrice (23) soddisfacente a quelle condizioni, può dedursi dalla matrice *normale*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a+ib & c \\ 0 & 1 & c & -a+ib \end{vmatrix}, \qquad (D_2 = b^2 > 0)$$

cambiando segno alla 2^a colonna e scambiandola colla 3^a: anzi in tal caso si può provare che *ogni matrice di Riemann* (23) *che soddisfi alle condizioni in parola può trasformarsi nella predetta matrice normale.* Per p pari > 2 una matrice *composta* con $\frac{p}{2}$ matrici cosiffatte fornisce un esempio che conferma la compatibilità enunciata.

Il numero dei tipi di varietà di Kummer M_p reali è $\frac{9p-2}{2}$ *o* $\frac{9p-5}{2}$ *secondo che p è pari o dispari* [80].

25. **Proprietà e caratteristiche distintive reali dei tipi ottenuti.** — Esaminiamo dapprima i tipi del n.° 22.

I) La simmetria $S(u'_i \equiv \bar{u}_i)$ ha come punti uniti tutti i punti reali di $V_p^{(0)}$, cioè quelli delle $2^{p-\lambda}$ falde, di argomenti (n.° 7)

$$u \equiv r + (0, 0, \dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p), \tag{27}$$

e la simmetria $S_1(u'_i \equiv -\bar{u}_i)$ lascia invece uniti i punti di argomenti

$$u \equiv j + (0, 0, \dots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \dots, g_p), \tag{28}$$

cioè quelli che *divengon reali* sulle $2^{p-\lambda}$ falde della *varietà complementare* di $V_p^{(0)}$ che, per comodità di linguaggio, chiameremo *falde fittizie* di $V_p^{(0)}$.

Due falde reali o due falde fittizie non hanno punti comuni; invece una falda reale ed una falda fittizia hanno in comune il *punto unito reale di T*

$$(0, 0, \dots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \dots, g_p \,|\, 0, 0, \dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p), \tag{29}$$

e, al variare delle due falde, si ottengono così tutti i $2^{2p-\lambda}$ punti singolari *reali* della T, di cui ogni falda, reale o fittizia, ne contiene come sappiamo (n.° 7) 2^p.

Ai punti delle falde reali e fittizie corrispondono (n.° 22) i punti reali di $M_p^{(0)}$: questa pertanto ha *una falda sola, divisa in $2^{p+1-\lambda}$ regioni*, connesse nel modo indicato attraverso ai $2^{2p-\lambda}$ punti singolari reali.

Fra le 2^{2p} ϑ unite in T da cui provengono gl'iperpiani singolari di $M_p^{(0)}$, ve ne sono, come sappiamo (n.° 14) $2^{2p-\lambda}$ unite in S, cioè, su $V_p^{(0)}$, *reali* (ed unite anche in S_1) che hanno i parametri (9) del n.° 14 per $\gamma_i = 0$; ognuna di esse contiene $2^{p-1} \cdot 2^{p-\lambda}$ dei predetti punti uniti reali, *nel caso diasimmetrico*, e $2^{p-1}(2^{p-\lambda} - 1)$ *nel caso ortosimmetrico*.

---

[80] In particolare ($p = 2$) si hanno dunque *otto tipi di superficie di Kummer reali*, quanti ne ha trovati il ROHN nel suo noto lavoro *Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche* [Math. Ann., vol. 18 (1881), pp. 99-159]. Per quanto i nostri punti di vista sian del tutto diversi, in quanto il ROHN parte dal considerare la M_2 di KUMMER come superficie singolare d'un sistema di complessi quadratici confocali, e dalla loro rappresentazione in coordinate di KLEIN, siam dolenti che i limiti di questo scritto non ci consentano più dettagliati raffronti.

Infine il numero delle polarità e dei sistemi nulli reali di $M_p^{(0)}$ si determina subito osservando che ognuna di tali corrispondenze muta un punto singolare reale in un iperpiano singolare pure reale: tenendo fisso il primo e facendo variare il secondo si hanno così $2^{2p-\lambda}$ corrispondenze reali, delle quali son sistemi nulli quelle provenienti dagl' iperpiani passanti per il punto ([81]). In conclusione:

Le varietà di Kummer reali, appartenenti ad uno dei $\left[\frac{3p+2}{2}\right]$ *tipi del caso I (di carattere reale* λ*) hanno una falda reale,* $2^{2p-\lambda}$ *punti singolari ed altrettanti iperpiani singolari reali.*

La falda stessa resta suddivisa dai punti singolari reali in $2^{p+1-\lambda}$ *regioni, che si possono separare in due classi, ciascuna delle quali ne contiene* $2^{p-\lambda}$*. Una regione contiene* 2^p *punti singolari reali; due regioni della stessa classe non hanno punti comuni, mentre due regioni di classe diversa son connesse attraverso ad un punto singolare.*

Per ogni punto singolare reale passano $2^{p-1}\cdot 2^{p-\lambda}$ *iperpiani singolari reali nel caso diasimmetrico,* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ *nel caso ortosimmetrico e dualmente. Infine nel primo caso la varietà ammette* $2^{2p-\lambda-1}$ *polarità e altrettanti sistemi nulli reali, nel secondo* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}+1)$ *polarità e* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ *sistemi nulli reali.*

Appartengono a questo gruppo i tipi I*a* ($\lambda=0$), II*a* ($\lambda=1$), III ($\lambda=2$, dias.), IV*a* ($\lambda=2$, ortos.) del ROHN.

II) I punti reali di $M_p^{(0)}$ corrispondono (n.° 22) soltanto ai punti uniti di $S\,(u'_i \equiv \overline{u}_i)$ cioè ai punti reali di $V_p^{(0)}$. Ma la T scambia a due a due le falde di $V_p^{(0)}$, dunque a ciascuna coppia di falde corrisponde una falda di $M_p^{(0)}$; inoltre la T non ha punti uniti reali, quindi $M_p^{(0)}$ non ha punti singolari reali, nè analogamente iperpiani singolari reali.

Determiniamo ora le polarità ed i sistemi nulli reali. Essi provengono da quelle fra le 2^{2p} *polarità abeliane* di V_p, mutate in sè da T (cioè aventi come parametri α_i dei *semiperiodi*) che sono, su $V_p^{(0)}$, *reali*, cioè vengon trasformate in sè stesse da S.

Ora a due punti *coniugati* $u_i \equiv p_i$, $u_i \equiv \overline{p}_i$ di $V_p^{(0)}$, corrispondono in una polarità abeliana π, di parametri α_i, le due varietà $\vartheta[u+\alpha-p]=0$, $\vartheta[u+\alpha-\overline{p}]=0$; quindi π sarà reale se quelle due varietà risulteranno anch' esse *coniugate* (corrispondenti in S) cioè se fra i loro parametri $p_i-\alpha_i$,

---

([81]) Si vede subito che il numero delle *omografie reali* di $M_p^{(0)}$ in sè è in ogni caso eguale alla *somma* dei due numeri che dànno le polarità ed i sistemi nulli reali.

$\bar{p}_i - \alpha_i$ correranno le relazioni (XII) del n.° 13. Effettuando la sostituzione, le p_i spariscono, e per le α_i si ottengono subito i valori (8) del n.° 14; senonchè in questo caso le α_i son semiperiodi e quindi devon esserlo anche le relative parti reali r_i: quindi in definitiva

$$(30)\quad \begin{array}{ll} d) & \alpha \equiv (g_1, g_2, ..., g_p \mid 1, 1, ..., 1, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, ..., h_p) \\ o) & \alpha \equiv (g_1, g_2, ..., g_p \mid 0, 0, ..., 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, ..., h_p). \end{array}$$

Di qui segue subito che le corrispondenze reali cercate sono in tutto $2^{2p-\lambda}$; e la distinzione dei due tipi, in base alla *parità* delle caratteristiche di α (n.° 20) è d'altronde immediata. Dunque:

Le varietà di Kummer reali appartenenti ad uno dei $\left[\frac{3p-1}{2}\right]$ *tipi del caso* II *(di carattere reale $\lambda < p$) hanno $2^{p-\lambda-1}$ falde reali e nessun punto e iperpiano singolare reale. Esse ammettono $2^{2p-\lambda-1}$ polarità ed altrettanti sistemi nulli reali, nel caso diasimmetrico $2^{p-1}(2^{p-\lambda}+1)$ polarità e $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ sistemi nulli, nel caso ortosimmetrico.*

Appartengono a questo gruppo i tipi I*b* ($\lambda = 0$) e II*b* ($\lambda = 1$) del ROHN.

III) In questo caso, come sappiamo, la $M_p^{(0)}$ *non ha punti reali*; essa però ammette lo stesso numero di polarità e sistemi nulli reali del caso precedente. Difatti adesso le equazioni di S sono $u'_i \equiv \bar{u}_i + \sigma_i$ (σ_i semiperiodo) sicchè a due punti corrispondenti $u_i \equiv p_i$, $u_i \equiv \bar{p}_i + \sigma_i$, corrispondono, in una polarità abeliana π, le due varietà $\vartheta[u + \alpha - p] = 0$, $\vartheta[u + \alpha - \bar{p} - \sigma] = 0$. Ma la condizione perchè due ϑ siano omologhe in S non è più, fra i parametri, rappresentata dalle (XII) del n.° 13, sibbene da quelle che se ne deducono incrementando di σ_i i secondi membri: sicchè per le α_i si ritrovano ancora i valori (30). Pertanto:

Le varietà di Kummer reali, appartenenti ad uno dei $\left[\frac{3p-4}{2}\right]$ *tipi del caso* III *(di carattere reale $\lambda < p-1$) non hanno punti reali. Esse ammettono però lo stesso numero di polarità e di sistemi nulli reali del caso precedente* [82].

Appartiene a questo gruppo il tipo I*c* ($\lambda = 0$) di ROHN; inoltre, come si è già osservato (n.° 23), *per $p = 2$ si hanno anche due tipi birazionalmente ma non proiettivamente reali.*

---

[82] Queste corrispondenze reali si possono considerare anche *sui modelli reali* dei $\left[\frac{3p-1}{2}\right]$ tipi birazionalmente ma non proiettivamente reali, *senza però estenderle allo spazio.*

IV) Veniamo infine al tipo del n.° 24. Come si è visto, esso non ha punti ordinarî reali, ma solo 2^p *punti singolari reali*, e, analogamente, 2^p iperpiani singolari reali ([83]).

Inoltre per un punto singolare reale *non* passano iperpiani singolari reali. Volendo dimostrare questa proprietà per la via consueta, ricorrendo ai parametri delle 2^p ϑ unite in S, occorrerebbe valersi di *periodi normali* che noi non possediamo. Ma possiamo pervenire all'enunciata conclusione, anche per la seguente via:

Intanto la proprietà è vera per $p=2$, giacchè una *conica singolare reale* non può avere *punti isolati reali* senza avere un ramo reale; e d'altronde non può avere rami reali perchè $M_2^{(0)}$ non ha punti ordinarî reali. Ne segue che la proprietà è vera per le $M_p^{(0)}$ corrispondenti a matrici (23) *composte* con $\frac{p}{2}$ matrici analoghe di genere 2; e quindi, per continuità è vera in generale.

Infine, procedendo come nel caso I, si trova subito che $M_p^{(0)}$ ammette 2^p polarità e nessun sistema nullo reale, sicchè in definitiva:

Le varietà di Kummer reali del tipo corrispondente al caso IV *(p pari) non hanno punti ordinarî reali, ma hanno 2^p punti singolari (isolati) reali, ed altrettanti iperpiani singolari reali non passanti per quei punti. Esse ammettono 2^p polarità e 0 sistemi nulli reali.*

Come caso particolare ($p=2$) si ha il tipo IV*b* del ROHN.

§ 7. Esempio di discussione d'un caso singolare.

28. **Presentazione del caso. Preliminari generici e specifici.** — Per quanto gran parte delle nostre conclusioni abbiano valore per varietà abeliane singolari e non singolari giacchè è in fondo di loro *proprietà comuni* che ci siamo fin quì occupati, ben poco abbiam potuto dire finora circa le *nuove questioni* che si presentano nell'esame dei casi singolari dal punto di vista reale. Come *primo avviamento allo studio di tali questioni*, vogliam presentare al lettore l'analisi di un caso speciale opportunamente preparato.

Diciamo però subito *qual'è in argomento la questione per noi principale.* Come per una varietà abeliana, l'esser singolare ([84]) porta in generale

([83]) Considerando come elementi di V_p, anzichè i punti, le varietà ϑ di Σ, le S, T vi subordinano trasformazioni analoghe, ecc.

([84]) Quì, come al § 2 « *singolare* » va riferito all'*indice di moltiplicabilità.*

di conseguenza un *ampliamento nel gruppo delle trasformazioni birazionali in sè,* per l'intervento di *trasformazioni birazionali singolari,* così è da prevedersi, che se la varietà è di tipo reale, lo stesso accadrà delle trasformazioni antibirazionali, in particolare che si presenteranno *nuovi tipi di simmetrie.* Potrà dunque alterarsi il numero delle *classi reali* in cui si ripartiscono le varietà reali birazionalmente identiche alla data; ed il problema che consideriamo come principale, è quello di precisare la natura ed il significato dell'alterazione.

Abbiamo di proposito parlato di *nuovi tipi,* non di simmetrie *singolari* perchè *la distinzione delle trasformazioni in ordinarie e singolari è impropria nel caso antibirazionale*; o, quanto mai, se una distinzione analoga è pur possibile, deve fondarsi su criterî del tutto diversi. Difatti mentre le trasformazioni birazionali *ordinarie* possono caratterizzarsi mediante le loro equazioni $u'_i \equiv \pm u_i + c_i$ *la cui forma è invariante per qualunque cambiamento di parametri,* questo non accade (quando esistono) per le trasformazioni antibirazionali $u'_i \equiv \pm \bar{u}_i + c_i$; mentre per contrapposto le equazioni di *qualunque* simmetria possono, come sappiamo, ridursi a quella forma. Una delle ragioni di tal differenza sembra risiedere in ciò, che, *mentre le trasformazioni birazionali ordinarie mutano in sè stessi tutti i sistemi* Φ_1 *della varietà* (perchè la corrispondente tresformazione dei periodi muta in sè tutte le relazioni di RIEMANN) *una simmetria* (per limitarci a questo caso) almeno nelle ipotesi più semplici, *muta in sè uno solo od una classe subordinata di quei sistemi,* rispetto ai quali, ed ai corrispondenti integrali normali, ha il carattere di trasformazione ordinaria ([85]). L'esempio che andiamo a svolgere illustrerà ampiamente tali osservazioni preliminari.

Consideriamo una superficie iperellittica *F di tipo reale,* cioè contenente una simmetria *S di carattere reale* $\lambda = 0$, ed indichiamo con A_1, A_2, B_1, B_2 i cicli d'un *sistema pseudonormale* relativo ad *S*. Supponiamo poi che fra i relativi periodi degl'integrali di 1ª specie di *F* interceda una relazione di RIEMANN *principale e di divisore 1*

$$(1) \qquad R \equiv a_{12}(12) + a_{13}(13) + a_{14}(14) + a_{23}(23) + a_{24}(24) + a_{34}(34) = 0,$$

a coefficienti tutti diversi da zero, ed inoltre, per ciascuno dei due gruppi $(a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24})$ (a_{12}, a_{34}) primi tra di loro.

([85]) Si possono però costruire esempî di V_p *singolari* contenenti simmetrie che ne trasformano in sè *tutti* i sistemi Φ.

La sostituzione $A'_i = A_i$, $B'_i = -B_i$ che la S induce (n.° 2) sui cicli A_i, B_i muta la R in

(2) $$R' \equiv a_{12}(12) - a_{13}(13) - a_{14}(14) - a_{23}(23) - a_{24}(24) + a_{34}(34) = 0,$$

che, per l'ipotesi fatta sui coefficienti, *è distinta da R*; quindi:

a) La superficie F è singolare (ha indice di singolarità > 0);

b) Il sistema Σ corrispondente alla (1) *non è reale* rispetto ad S, cioè F *non è reale in quanto superficie di Jacobi* corrispondente a quel sistema Σ;

c) Le due relazioni $R - R' = 0$, $R + R' = 0$, che, liberate da fattori, son del tipo

(3) $$A \equiv a_{13}(13) + a_{14}(14) + a_{23}(23) + a_{24}(24) = 0, \quad B \equiv a_{12}(12) + a_{34}(34) = 0,$$

son trasformate in sè stesse dalla sostituzione predetta. Di esse, come sappiamo dal n.° 10 *solo la A è principale,* e quindi ad essa corrisponde un sistema di varietà intermediarie (del 1° ordine) Φ_0 *reale* rispetto ad S. Detto δ il *divisore* della A (che supponiamo sia un *numero primo* > 1) *la F è quindi reale come superficie di Picard di divisore* δ.

Ora riduciamo, col procedimento del n.° 10, la A alla *forma normale*

(4) $$A \equiv (13) + \delta(24) = 0,$$

e sia

(5) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & i\tau_{12} \\ 0 & \frac{1}{\delta} & i\tau_{21} & i\tau_{22} \end{vmatrix} \quad (\tau_{rs} = \tau_{sr}),\ \Delta = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 > 0,$$

la corrispondente *tabella normale*, relativa ai cicli normali M_1, M_2, M_3, M_4 ed agl'integrali normali u_1, u_2. Poichè la sostituzione che riduce la primitiva A alla forma (4) opera separatamente sui due gruppi di cicli A_i, B_i, così per effetto di essa la B rimane ancora dello stesso tipo, e la trasformata di R è ancora, come inizialmente, $A + B$. Scrivendo che questa ha divisore 1, si trova

(6) $$a_{12}a_{34} = \delta - 1,$$

e quindi il *divisore della relazione* $\lambda A + \mu B = 0$ vale

(7) $$d = \lambda^2\delta + \mu^2(1 - \delta).$$

Pertanto, se $d = \delta$, *poichè δ è primo* sarà μ divisibile per δ, e posto $\lambda = x$, $\mu = \delta y$ verrà

(8) $$x^2 - \delta(\delta - 1)y^2 = 1,$$

cosicchè *i sistemi Φ di divisore δ corrispondono alle relazioni* $xA + \delta yB = 0$ *nelle quali gl'interi x, y* (primi fra di loro) *soddisfano all'equazione di Pell* (8). In particolare il sistema Φ_0 corrisponde ad $x = 1$, $y = 0$.

Fissato, com'è lecito, il segno di x *positivo*, ricordiamo che detta x_1, y_1 la *soluzione minima positiva* della (8), che, come si riconosce subito è

$$x_1 = 2\delta - 1, \quad y_1 = 2, \tag{9}$$

ogni altra soluzione x_α, y_α si ricava in modo noto dalla posizione

$$x_\alpha + y_\alpha\sqrt{\delta(\delta - 1)} = [x_1 + y_1\sqrt{\delta(\delta - 1)}]^\alpha, \tag{10}$$

nella quale α *è un intero arbitrario positivo o negativo* ([86]). Indicando con Φ_α il corrispondente sistema di varietà intermediarie *del 1° ordine*, otterremo così un *insieme numerabile di tali sistemi*, che potremo ordinare nella successione

$$\ldots, \quad \Phi_{-2}, \quad \Phi_{-1}, \quad \Phi_0, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \ldots. \tag{11}$$

29. **Trasformazioni birazionali ed antibirazionali della superficie F.** — Siano ora

$$\begin{aligned} u'_1 &\equiv p\bar{u}_1 + q\bar{u}_2 + c_1 \\ u'_2 &\equiv r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2 + c_2, \end{aligned} \tag{12}$$

le equazioni d'una trasformazione antibirazionale di F in sè, ed

$$M'_i = m_{i1}M_1 + m_{i2}M_2 + m_{i3}M_3 + m_{i4}M_4, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{13}$$

quella della corrispondente sostituzione fra i cicli M_i. Eguagliando al solito gl'incrementi dei due membri di (12) lungo due cicli corrispondenti, troviamo *otto relazioni* fra gli m_{rs}, le p, q, r, s, ed i periodi (5), che, dopo eliminazione delle p, q, r, s si riducono a relazioni a coefficienti interi fra quest'ultimi. Nell'ipotesi ch'essi sian legati *soltanto dalle* $A = 0$, $B = 0$ tali relazioni dànno in definitiva

$$\begin{gathered} m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{24} = m_{31} = m_{34} = m_{42} = m_{43} = 0, \\ m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = m, \quad m_{14} = -\rho\delta a_{34}, \\ m_{41} = \rho a_{12}, \quad m_{23} = \rho a_{34}, \quad m_{32} = -\rho\delta a_{12}, \end{gathered} \tag{14}$$

([86]) Cfr. Dirichlet, *Lezioni sulla Teoria dei Numeri* (Venezia, Tip. Emiliana, 1881), §§ 83, 84. Vedi anche la mia Memoria citata alla nota ([65]), in cui ai n.i 2, 3 è trattata una questione che ha talune analogie coll'attuale.

con m e ρ *interi*; dalle quali risostituendo nelle relazioni iniziali si ricava

$$p = m - i\rho\delta a_{34}\tau_{12}, \quad q = i\rho\delta a_{34}\tau_{11}$$
$$r = - i\rho\delta a_{34}\tau_{22}, \quad s = m + i\rho\delta a_{34}\tau_{12}. \tag{15}$$

La (13) è quindi

$$M'_1 = mM_1 - \rho\delta a_{34}M_4, \quad M'_2 = mM_2 + \rho a_{34}M_3$$
$$M'_4 = \rho a_{12}M_1 - mM_4, \quad M'_3 = - \rho\delta a_{12}M_2 - mM_3, \tag{16}$$

e se esprimiamo che il suo determinante (o quello $ps - qr$ della (12)) è eguale a ± 1 troviamo

$$m^2 - \delta(\delta - 1)\rho^2 = \pm 1, \tag{17}$$

cioè, salvo il doppio segno del 2° membro, *la stessa equazione di Pell* (8) (87).

Supponiamo anzi, per rendere più intimo il legame fra i problemi connessi alle due equazioni, che *la* (17) *non abbia soluzioni quando il secondo membro è* -1, come accade p. es. quando δ *è un numero primo della forma* $4k + 1$.

Ad ogni soluzione m, ρ della (17), assieme alla sua opposta $-m$, $-\rho$ corrisponde *una schiera* di trasformazioni (12) che si ottengono tutte da una fra esse moltiplicandola per le trasformazioni ordinarie: e le (16) son determinate a meno d'un cambiamento di segno dei secondi membri, corrispondente al cambiamento di segno di m, ρ, cioè al prodotto per una trasformazione di 1ª specie.

Ogni schiera può quindi collegarsi ad una soluzione m_α, ρ_α della (17) con m_α positivo; indicandola con S_α possiamo quindi, al modo delle Φ_α, ordinare le S_α in una successione

$$\ldots, \; S_{-2}, \; S_{-1}, \; S_0, \; S_1, \; S_2, \ldots, \tag{18}$$

nella quale la S_0 corrisponde ad $m = 1$, $\rho = 0$, cioè contiene le trasformazioni $u'_i \equiv \pm \bar{u}_i + c_i$ tra cui c'è la simmetria S.

Un'analoga conclusione sussiste per le *trasformazioni birazionali*, dal momento che esse possono ottenersi come prodotti della $u'_i \equiv \bar{u}_i$ per quelle delle schiere S_α, cioè son rappresentate ancora dalle (12) nei secondi membri delle quali al posto delle $\bar{u}_i$ si scrivano le u_i. Se s'indica con T_α la schiera di queste trasformazioni che proviene dalla S_α, la corrispondente sostituzione

(87) Il determinante della (16) è il *quadrato* del 1° membro della (17) quindi di fatto vale $+1$, conformemente ad un risultato del CHERUBINO. Cfr. la nota (14).

sui cicli M_i si ottiene dalla (16) moltiplicandola (a sinistra) per la $M'_1 = M_1$, $M'_2 = M_2$, $M'_3 = -M_3$, $M'_4 = -M_4$ (indotta sui cicli normali dalla $u'_i \equiv \bar{u}_i$) cioè *cambiando nei secondi membri il segno di* M_3, M_4.

Poichè la matrice (5) ha *carattere reale nullo* (n.° 6) *nella schiera* S_0 *vi sono quattro classi di simmetrie*: ed è facile vedere che *la stessa cosa si verifica per le altre schiere.* Difatti la (12) dove le p, q, r, s hanno i valori (15), quando $c_1 = c_2 = 0$ è involutoria, quindi *è una simmetria dotata di punti uniti* (p. es. $u_1 = u_2 = 0$); sicchè con un cambiamento di parametri può ridursi ad $u'_i \equiv \bar{u}_i$. Simultaneamente la (16) ch'è pure involutoria, può, a norma del n.° 2, ridursi alla $N'_1 = N_1$, $N'_2 = N_2$, $N'_3 = -N_3$, $N'_4 = -N_4$ [88], mostrando che le simmetrie della schiera S_α hanno anch'esse *carattere reale nullo*, e quindi si distribuiscono in 4 classi come si è sopra asserito.

30. Trasformazione delle Φ e classi reali corrispondenti alla superficie F. — Quante fra le predette classi di simmetrie sono effettivamente distinte di fronte alle trasformazioni birazionali (ed antibirazionali) di F in sè? Per rispondere a questa domanda cerchiamo come son trasformati i sistemi Φ_α della F.

Perciò (n.° 9) trasformiamo mediante l'inversa della (16), cioè la (16) stessa, le relazioni $A = 0$, $B = 0$. Troviamo facilmente, le notazioni riferendosi ai primi membri, e supposto che agli m, ρ delle (16) sian sostituiti m_α, ρ_α

$$(19) \qquad \begin{aligned} A' &= -(m_{2\alpha}A + \delta\rho_{2\alpha}B) \\ B' &= (\delta - 1)\rho_{2\alpha}A + m_{2\alpha}B, \end{aligned}$$

da cui intanto segue che la relazione $A = 0$ è trasformata in $m_{2\alpha}A + \delta\rho_{2\alpha}B = 0$, cioè (per l'identità delle equazioni (8) (17)) che le S_α mutano Φ_0 in $\Phi_{2\alpha}$. Poi, tenendo conto che, come risulta facilmente dalle (10)

$$(20) \qquad m_{p+q} = m_p m_q + \delta(\delta - 1)\rho_p\rho_q, \quad \rho_{p+q} = m_p\rho_q + m_q\rho_p,$$

si vede, mediante le (19), che la relazione

$$m_pA + \delta\rho_pB = 0,$$

[88] Si prova con facilità che condizione necessaria e sufficiente perchè una sostituzione unimodulare involutoria su *due* variabili, di coefficienti m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} sia riducibile alla $x'_1 = x_1$, $x'_2 = -x_2$ è che sia $m_{11} = -m_{22}$ e che m_{12}, m_{21} siano *entrambi pari.* Ora a tali condizioni soddisfano le due sostituzioni in cui si decompone la (16) considerata come operante su ciascuna delle coppie M_1, M_4; M_2, M_3 perchè come risulta dalle (9) (10) l'intero ρ è sempre *pari.*

corrispondente a Φ_p, è mutata in quella corrispondente a $\Phi_{2\alpha-p}$; in particolare per $\alpha=0$, che le S_0 mutano Φ_p in Φ_{-p}. Infine tenendo conto che le T_α sono prodotti d'una S_0 per le S_α si perviene alla conclusione:

Il sistema Φ_p è mutato dalle trasformazioni della schiera T_α in $\Phi_{2\alpha+p}$, da quelle della schiera S_α in $\Phi_{2\alpha-p}$.

Ne segue che *le trasformazioni birazionali T_α non lasciano fisso alcun sistema Φ fatta eccezione per le T_0 (trasformazioni ordinarie) che li lascian fissi tutti; mentre le trasformazioni antibirazionali di ogni schiera S_α lascian fisso un sistema Φ e precisamente Φ_α.*

Inoltre si ricava che *la condizione perchè due sistemi $\Phi_p\Phi_q$ siano equivalenti di fronte alle trasformazioni (birazionali ed antibirazionali) di F in sè, è che gl' indici p, q abbiano la stessa parità.*

In tal caso saranno evidentemente equivalenti anche le simmetrie che mutano in sè quei sistemi (e viceversa); e pertanto si conclude che la F possiede *otto classi di simmetrie* effettivamente distinte, cioè che *alla classe definita in senso complesso da F appartengono otto classi di superficie reali*, vale a dire *il doppio di quante si hanno, per $\lambda=0$, nel caso non singolare.*

Quattro fra queste classi hanno per rappresentanti le simmetrie della schiera S_0 che corrispondono alla tabella normale (5), le altre quattro hanno come rappresentanti le simmetrie della schiera S_1. Cerchiamo qual'è la tabella normale corrispondente.

Sostituendo nelle (16) alle m, ρ la *soluzione minima positiva* $m_1=2\delta-1$, $\rho_1=2$, dalla (17) si ricava

$$(21)\qquad \begin{aligned} M'_1 &= (2\delta-1)M_1 - 2\delta a_{34}M_4, & M'_2 &= (2\delta-1)M_2 + 2a_{34}M_3 \\ M'_4 &= 2a_{12}M_1 - (2\delta-1)M_4, & M'_3 &= -2\delta a_{12}M_2 - (2\delta-1)M_3, \end{aligned}$$

ed inoltre la relazione corrispondente al sistema Φ_1 mutato in sè da S_1 è

$$(22)\qquad (2\delta-1)A + 2\delta B = 0.$$

Per passare a *cicli normali* del tipo considerato al n.° 10, occorrerà trovare una sostituzione che riduca le (21) alla forma caratteristica corrispondente alle tabelle normali di carattere reale 0 (n.° 10, IV) e *contemporaneamente normalizzi* la relazione (22).

Con qualche tentativo si trova che tal sostituzione è

$$(23)\qquad \begin{aligned} N_1 &= \delta M_2 + a_{34}M_3, & N_2 &= M_1 + a_{34}M_4 \\ N_4 &= a_{12}M_2 + M_3, & N_3 &= a_{12}M_1 + \delta M_4, \end{aligned}$$

e calcolando i periodi di u_1, u_2 ai *nuovi cicli normali* N_i si ha la tabella

$$(24)\qquad \left|\begin{matrix} ia_{34}\tau_{11} & 1-ia_{34}\tau_{12} & -a_{12}+i\delta\tau_{12} & i\tau_{11} \\ 1+ia_{34}\tau_{12} & -ia_{34}\tau_{22} & i\delta\tau_{22} & \frac{a_{12}}{\delta}+i\tau_{22} \end{matrix}\right| .$$

Gl' integrali u_1, u_2 *non sono dunque normali ai nuovi cicli,* e ciò è evidente a priori, dal momento che le equazioni delle simmetrie della schiera S_1 non sono della forma $u'_i \equiv \pm \bar{u}_i + c_i$ ma della forma (12) per i valori di p, q, r, s dedotti dalle (15) ponendo $m = 2\delta - 1$, $\rho = 2$. Ma osservando che il determinante dei periodi (24) ai cicli N_1, N_2 vale $a_{34}^2\Delta - 1$, cioè per la B e per la (6), $-\frac{1}{\delta}$, si ottengono come *integrali normali ai cicli* N_i

$$(25)\qquad \begin{aligned} U_1 &= \delta[ia_{34}\tau_{22}u_1 + (1-ia_{34}\tau_{12})u_2] \\ U_2 &= (1+ia_{34}\tau_{12})u_1 - ia_{34}\tau_{11}u_2, \end{aligned}$$

e la *relativa tabella normale* è allora

$$(26)\qquad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & i\delta\tau_{22} & i\tau_{12} \\ 0 & \frac{1}{\delta} & i\tau_{12} & i\frac{\tau_{11}}{\delta} \end{matrix}\right| .$$

La superficie F ammette quindi due tabelle normali di tipo reale (5) (26) *non equivalenti nel campo reale,* cioè non riducibili una all'altra con una trasformazione che *conservi la realtà degl' integrali normali.* Difatti una tale equivalenza condurrebbe, come al n.° 18, ad una trasformazione birazionale per effetto della quale ie simmetrie della schiera S_0 si muterebbero in quelle della S_1 contrariamente alle conclusioni precedenti.

Nota aggiunta durante la correzione delle bozze. — Nei riguardi dell'applicazione dei nostri procedimenti e risultati ***a tutte le varietà algebriche irregolari*** (di tipo reale) crediamo opportuno aggiungere alla nota (7) un ulteriore chiarimento esplicativo riguardante l'*interpretazione topologica* della formula (2) (n.° 1) e delle analoghe del testo. Tali formule, perfettamente corrette quando i ***sistemi di cicli primitivi*** si considerano, come a noi basta, quali ***sostituti simbolici*** dei corrispondenti ***sistemi di periodi primitivi*** degl' integrali di 1ª specie, lo sono anche in senso topologico (sostituendo al segno d'*eguaglianza* quello d'*omologia*) se riferite a *varietà algebriche prive di torsione lineare* (come le varietà abeliane e le curve algebriche), mentre nel caso delle varietà con ***indice di torsione lineare*** σ non nullo, l'interpretazione topologica è lecita solo a patto di ***prescindere dall'aggiunta di cicli divisori dello zero.*** Invero, com'è noto, ogni ciclo (lineare) di quest'ultime varietà può esprimersi come combinazione lineare a coefficienti interi dei cicli d'un ***sistema fondamentale*** costituito da $2p$ cicli ***indipendenti*** C_i e da certi q ***divisori dello zero*** Γ_j; e nella sostituzione unimodulare con cui si passa dal sistema C_i, Γ_j ad un sistema analogo C'_i, Γ'_j (p. es. al trasformato mediante una simmetria S) i Γ'_j si esprimono ***soltanto mediante i*** Γ_j, giacchè, in caso contrario i C_i dovrebbero soddisfare a relazioni d'omologia contraddicenti alla loro indipendenza. Ne segue che nelle formule esprimenti i C'_i mediante i C_i, Γ_j, i coefficienti m_{ih} dei C_h formano un determinante eguale a ± 1, e quindi che, ***a patto di trascurare i*** Γ_i si può attribuire ancora alle (2) significato topologico. Infine, dato che ***i periodi degl'integrali di 1ª specie ai cicli*** Γ_i ***sono nulli,*** ogni influenza di questi cicli sulle (2) si elimina nel passaggio ai periodi, onde resta confermato il *valore simbolico* affatto generale di quelle relazioni.