Dualità per alcune classi di moduli E-compatti (*) (**).

ADALBERTO ORSATTI (Padova)

Summary. – *Starting from a topological module E over a commutative discrete ring A, the category $C(E)$ of E-compact modules is defined as the class of all A-modules topologically isomorphic to closed submodules of direct product of copies of E. Under suitable assumptions it is shown that $C(E)$ is dual of the category of abstract A-modules M for which* $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ *separates points of M. The duality theory so obtained contains as particular cases Pontryagin's duality between discrete and compact abelian groups and Macdonald's duality between lineary discrete and linearly compact modules over a complete local ring. There are also some applications to the theory of linearly compact modules over noetherian rings.*

1. – Introduzione.

1.1. – Nella teoria dei moduli esistono diversi tipi di dualità tra categorie di moduli astratti e categorie di moduli topologici. Particolarmente significative sono la dualità di PONTRYAGIN tra la categoria dei gruppi abeliani discreti e la categoria dei gruppi abeliani compatti e la dualità di LEFSCHETZ tra gli spazi vettoriali astratti e gli spazi vettoriali linearmente compatti sopra un dato corpo. La teoria di LEFSCHETZ è stata successivamente generalizzata da diversi autori (KAPLANSKY, LEPTIN, ed altri) finchè MACDONALD [5] ha provato che, per ogni anello noetheriano locale e completo A, la categoria di tutti gli A moduli è duale di quella degli A-moduli linearmente compatti. (Si rinvia al citato lavoro di MACDONALD per la bibliografia).

Queste teorie hanno in comune il fatto che, in ciascuna di esse, la classe C dei moduli topologici in considerazione è formata da moduli *E-compatti* nel senso che esiste in C un modulo E tale che i moduli di C sono tutti e soli quelli topologicamente isomorfi a sottomoduli chiusi di prodotti topologici di copie di E.

Questa circostanza è legata al fatto che il duale di un modulo M, astratto o topologico, è formato da E-caratteri cioè da morfismi di M in E e, nel caso che M appartenga a C, la topologia di M coincide con la topologia debole dei caratteri.

Nel presente lavoro si studia una dualità per la categoria dei moduli E-compatti dove E è un modulo topologico soddisfacente a certe condizioni, sopra un anello commutativo, ottenendo una teoria della quale le dualità prima menzionate possono considerarsi come casi particolari.

(*) Entrata in Redazione il 10 aprile 1976.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

1.2. – Esporremo ora brevemente in che modo si è impostato il lavoro, indicando i risultati ottenuti.

Siano A un anello commutativo ed E un modulo topologico completo e di Hausdorff sopra l'anello A munito della topologia discreta. Supporremo sempre soddisfatti le seguenti due condizioni:

P_1) L'applicazione che ad ogni $a \in A$ fa corrispondere la moltiplicazione per a in E è un ismorfismo di A sull'anello degli endomorfismi continui di E.

P_2) E non contiene sottomoduli piccoli: cioè esiste in E un intorno U di 0 tale che l'unico sottomodulo di E contenuto in U sia $\{0\}$.

Indichiamo con Mod-A la categoria degli A-moduli astratti, cioè degli A-moduli non topologizzati. Un modulo $M \in$ Mod-A si dirà E-discreto se $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ separa i punti di M. Denotiamo con $D(E)$ la categoria dei moduli E-discreti e con $C(E)$ quella dei moduli E-compatti e definiamo per ogni modulo M appartenente a $D(E)$ oppure a $C(E)$ il modulo duale M^* nel modo seguente: se $M \in D(E)$, M^* è $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ munito della topologia della convergenza semplice; se $M \in C(E)$, M^* è il modulo astratto formato dai morfismi *continui* di M in E. In entrambi i casi gli elementi di M^* si chiamano i caratteri di M. Si verifica che per ogni M appartenente a $D(E)$ oppure a $C(E)$ M^* appartiene rispettivamente a $C(E)$ oppure a $D(E)$. Indichiamo infine con Δ il funtore controvariante da $D(E)$ a $C(E)$ che associa ad ogni modulo di $D(E)$ il suo duale e ad ogni morfismo il suo trasposto.

Nella prima parte del lavoro (§ 2 e 3) si studiano delle condizioni affinchè il funtore Δ sia una dualità nel senso che per ogni modulo M appartenente a $D(E)$ oppure a $C(E)$ il morfismo canonico di M nel proprio biduale M^{**} sia un isomorfismo. Il risultato principale è il seguente:

Se la topologia di E è compatta oppure è discreta e se, per ogni intero positivo n, ogni carattere di un sottomodulo chiuso di E^n si estende ad un carattere di E^n, allora i moduli E-discreti sono riflessivi (ma non lo sono in generale quelli E-compatti). Ferme restando le ipotesi precedenti Δ è una dualità se e solo se i caratteri di E^n separano sottomoduli chiusi e punti di E^n.

Non siamo riusciti a stabilire se la suddetta proprietà di estensione dei caratteri sia in generale necessaria affinchè Δ risulti una dualità.

La seconda parte del lavoro è dedicata ad esempi ed applicazioni della precedente teoria.

Nel § 4 A è l'anello Z degli interi ed E è il gruppo compatto K dei reali modulo 1.

Con metodi elementari si riesce a far vedere, applicando i criteri di cui sopra, che il funtore Δ è una dualità tra la categoria $D(K)$ di tutti i gruppi abeliani e la categoria $C(K)$ dei gruppi abeliani K-compatti. Ammettendo il teorema di PETER-WEYL (ogni gruppo compatto è K-compatto) si ottiene la dualità di PONTRYAGIN.

Nel § 5 si studia più dettagliatamente il caso in cui la topologia di E è quella discreta. Si vede allora che ogni modulo E-compatto è linearmente topologizzato ed è modulo topologico sopra l'anello A dotato della topologia finita che gli compete in quanto anello degli endomorfismi di E. Lo stesso A, con questa topologia, diventa un modulo E-compatto. Le condizioni affinchè Δ sia una dualità si esprimono in modo significativo attraverso il filtro degli ideali aperti di A.

Nel § 6 A è un anello locale noetheriano completo con ideale massimale $\boldsymbol{m}$, E è l'inviluppo iniettivo dell'A-modulo semplice $A/\boldsymbol{m}$, la topologia di E è quella discreta. Allora la topologia finita di A coincide con la $\boldsymbol{m}$-adica, $D(E)$ coincide con Mod-A e $C(E)$ con la categoria dei moduli linearmente compatti sopra l'anello A dotato della topologia $\boldsymbol{m}$-adica. Si verifica facilmente che Δ è equivalente alla dualità di MACDONALD [5] tra gli A-moduli linearmente discreti e gli A-moduli linearmente compatti.

Nel § 7 si globalizza la situazione precedente e si studiano i moduli linearmente compatti sopra un anello commutativo noetheriano R munito della topologia Ω-adica, dove Ω denota l'insieme degli ideali massimali di R. In questo caso A è il prodotto diretto degli anelli locali completi $\hat{R}_{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{m} \in \Omega$, E è la somma diretta degli inviluppi iniettivi degli R-moduli semplici $A/\boldsymbol{m}$, e la topologia di E è discreta. E ha una naturale struttura di A-modulo, l'anello degli endomorfismi di E è isomorfo ad A nel senso della P_1), e la topologia finita di E coincide con la topologia prodotto delle topologie $\boldsymbol{m}$-adiche degli $R_{\boldsymbol{m}}$. Si verificano le condizioni affinchè il funtore $\Delta: D(E) \to C(E)$ sia una dualità. Si dimostra che la categoria degli R-moduli linearmente compatti è naturalmente equivalente alla categoria degli A-moduli linearmente compatti — su A dotato della topologia finita — e che quest'ultima è una sottocategoria piena $C_0(E)$ di $C(E)$. L'equivalenza è dovuta essenzialmente al fatto che A con la topologia finita è il completamento Ω-adico di R. Si prova quindi che un R-modulo topologico discreto — con R dotato della topologia Ω-adica — è linearmente compatto se e solo se è artiniano. Questo fatto implica che i recenti risultati di FAKHRUDDIN [3] sulla struttura algebrica dei moduli linearmente compatti sopra un dominio d'integrità noetheriano ed h-locale si estendono ad un anello noetheriano qualunque.

Un modulo $M \in C(E)$ è linearmente compatto se e solo se $M^* = \bigoplus_{\boldsymbol{m} \in \Omega} M_{\boldsymbol{m}}$ dove, per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$, $M_{\boldsymbol{m}} \in$ Mod-$\hat{R}_{\boldsymbol{m}}$.

Si prova infine l'equivalenza delle tre seguenti condizioni: $D(E) =$ Mod-A; $C(E) = C_0(E)$; Ω è finito.

Ringrazio G. DE MARCO e C. NĂSTĂSESCU per le frequenti conversazioni sull'argomento e gli utili suggerimenti che mi hanno dato. In particolare la dimostrazione della Proposizione 3.6 è dovuta a G. DE MARCO.

2. – Definizione e risultati preliminari.

2.1. Sia A un anello commutativo con unita $1 \neq 0$.

Denotiamo con Mod-A la categoria degli A-moduli astratti. Se M, L sono oggetti di Mod-A, $\mathrm{Hom}_A(M, L)$ indica il modulo dei morfismi di M in L. Denotiamo con MTA la categoria dei moduli topologici di Hausdorff sopra l'anello A munito dalla topologia discreta. Naturalmente in MTA i morfismi si intendono continui, i prodotti diretti ed i sottomoduli si intendono dotati rispettivamente della topologia prodotto e della topologia relativa. A volte i sottomoduli della categoria MTA si chiameranno sottomoduli topologici.

Tutti i moduli considerati sono unitari. N denota l'insieme degli interi positivi.

2.2. – Fissiamo in MTA un modulo completo E soddisfacente le condizioni P_1) e P_2).

DEFINIZIONE 1. – Un modulo $M \in MTA$ si dice *E-completamente regolare* (risp. *E-compatto*) se M è topologicamente isomorfo ad un sottomodulo (risp. sottomodulo chiuso) di un modulo topologico del tipo E^X dove X è un insieme.

Osserviamo che un modulo E-completamente regolare è E-compatto se e solo se è completo.

Indichiamo con $B(E)$ la categoria dei moduli E-completamente regolari e con $C(E)$ quella dei moduli E-compatti. Entrambe sono sotto categorie piene di MTA. $B(E)$ è chiusa rispetto ai prodotti ed ai sottomoduli, $C(E)$ rispetto ai prodotti ed ai sottomoduli chiusi.

DEFINIZIONE 2. – Sia $M \in MTA$: un *carattere* di M è un morfismo continuo di M nel modulo topologico E. Sia $M \in \text{Mod-}A$: un carattere di M è un morfismo di M nel modulo astratto E.

Se M è un A-modulo qualunque e se H è un sottoinsieme non vuoto del modulo dei caratteri di M, la *topologia debole di* H è la minima topologia su M per cui tutti i caratteri appartenenti ad H sono continui.

PROPOSIZIONE. – *Sia $M \in MTA$. Le condizioni che seguono sono equivalenti*

(*a*) *M è E-completamente regolare*

(*b*) *M ha come base di intorni di* 0 *una famiglia di insiemi del tipo*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \xi_i^{-1}(U) \qquad (n \in N)$$

(*c*) *La topologia di M coincide con la topologia debole di una famiglia H di caratteri di M*

dove U è un intorno di 0 *in E e gli ξ_i sono caratteri di M.*

DIM. – (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) consideriamo M come sottomodulo topologico del modulo E^X. La topologia di M coincide con la topologia debole delle restrizioni ad M delle proiezioni $\pi_x \colon E^X \to E$ $(x \in X)$. Tali restrizioni sono caratteri di M.

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*). Siano τ la topologia di M, w la topologia debole dei caratteri di M. Chiaramente $\tau \supseteq w$. D'altra parte τ ha come base di intorni di 0 una famiglia di insiemi che sono intorni di 0 per la topologia w. Allora $\tau = w$.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*). Sia $\delta \colon M \to E^H$ il morfismo diagonale dei caratteri appartenenti ad H. Poichè M è di Hausdorff ed ha la topologia debole di H, δ è una immersione algebrica e topologica di M nel modulo E^H.

2.3. – Sia $M \in \text{Mod-}A$. Chiameremo *duale* di M e lo indicheremo con M^* il modulo dei caratteri di M, $\text{Hom}_A(M, E)$, considerato come sottomodulo topologico del modulo E-compatto E^M. Evidentemente $M^* \in C(E)$ poichè $\text{Hom}_A(M, E)$ è chiuso in E^M. Una base di intorni di 0 in M^* è data dagli insiemi del tipo:

$$W(F;\, U) = \{\xi \in M^* \colon \xi(F) \subseteq U\}$$

dove F è un sottoinsieme finito di M ed U è intorno di 0 in E.

Sia $M \in MTA$. Chiameremo duale di M, e lo indicheremo ancora con M^*, il modulo astratto formato dai caratteri di M.

Sia $f\colon M \to L$ un morfismo della categoria Mod-A oppure della categoria MTA. Il morfismo $f^*\colon L^* \to M^*$ definito da:

$$f^*(\xi) = \xi \circ f \qquad (\xi \in L^*)$$

è un morfismo della categoria MTA o Mod-A rispettivamente. Basta far vedere che se f è un morfismo di Mod-A allora f^* è continuo. Siano infatti F un sottoinsieme finito di M ed U un intorno di 0 in E. Allora $f(F)$ è un sottoinsieme finito di L e risulta:

$$f^*\big(W(f(F);\, U)\big) \subseteq W(F;\, U)$$

In entrambi i casi f^* si chiamerà il *morfismo trasposto* di f.

Sia M un modulo appartenente a Mod-A oppure a MTA e sia $M^{**} = (M^*)^*$ il biduale di M. Per ogni $x \in M$ consideriamo il morfismo $\tilde{x}\colon M^* \to E$ così definito:

$$\tilde{x}(\xi) = \xi(x) \qquad (\xi \in M^*)\,.$$

Mostriamo che $\tilde{x}$ è un carattere di M^*. Se $M \in \text{MTA}$ la cosa è ovvia. Se $M \in \text{Mod-}A$, M^* è sottomodulo topologico del modulo E-compatto E^M e $\tilde{x}$ coincide con la restrizione ad M^* della proiezione $\pi_x\colon E^M \to E$ che è continua.

L'applicazione $\omega_M\colon M \to M^{**}$ data da:

$$\omega_M(x) = \tilde{x} \qquad (x \in M)$$

si chiamerà il *morfismo canonico* di M nel proprio biduale M^{**}. Quando la cosa non dia adito ad equivoci, si potrà scrivere ω in luogo di ω_M.

Sia $f\colon M \to L$ un morfismo della categoria Mod-A oppure della categoria MTA e si ponga $f^{**} = (f^*)^*$. Una verifica diretta mostra che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & L \\ {\scriptstyle \omega_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_L} \\ M^{**} & \xrightarrow[f^{**}]{} & L^{**} \end{array}$$

è commutativo.

Un modulo M, appartenente a Mod-A oppure a MTA, si dirà *riflessivo* se ω_M è un isomorfismo nella corrispondente categoria. È evidente che affinchè un modulo di MTA sia riflessivo è necessario che esso sia E-compatto.

D'altra parte, se un modulo $M \in$ Mod-A è riflessivo, esso è della forma L^* con $L \in MTA$ è pertanto M è isomorfo ad un sottomodulo del modulo astratto E^L. Ciò implica che M è E-discreto nel senso precisato dalla seguente

DEFINIZIONE. – Un modulo $M \in$ Mod-A si dice *E-discreto* se $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ separa i punti di M, ossia se per ogni $x \in M$, $x \neq 0$, esiste $f \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$ tale che $f(x) \neq 0$.

Denotiamo con $D(E)$ la sottocategoria piena di Mod-A formata dai moduli E-discreti. È chiaro che un modulo della categoria Mod-A è E-discreto se e solo se esso è algebricamente isomorfo ad un sottomodulo di un modulo astratto del tipo E^X.

Ciò significa che $D(E)$ coincide con la sottocategoria di Mod-A cogenerata da E. Si noti che risulta $D(E) = $ Mod-A se e solo se, per ogni A-modulo semplice S, E contiene un sottomodulo isomorfo all'inviluppo iniettivo di S.

PROPOSIZIONE. – *Se* $M \in D(E)$, ω_M *è iniettivo. Se* $M \in B(E)$, ω_M *è un'immersione algebrica e topologica.*

DIM. – In entrambi i casi ω è iniettivo poichè M^* separa i punti di M. Supponiamo $M \in B(E)$ e siano F un sottoinsieme finito di M^*, U un intorno di O in E. Allora $W = W(F; U)$ è intorno di O in M^{**}, e $V = \bigcap_{\xi \in F} \xi^{-1}(U)$ è intorno di O in M. Risulta:

$$\omega(V) = \{\tilde{x} : x \in M, \tilde{x}(F) \subseteq U\} = \omega(M) \cap W .$$

Ciò prova che ω è continuo. D'altra parte, per la Proposizione 2.2, gli insiemi del tipo V formano una base di intorni di O per la topologia di M e pertanto ω è una applicazione aperta di M su $\omega(M)$ dotato della topologia relativa.

Il nostro obbiettivo è di determinare delle condizioni affinchè le classi dei moduli riflessivi di Mod-A e MTA coincidano rispettivamente con $D(E)$ e $C(E)$.

2.4. PROPOSIZIONE. – *Sia* $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *una famiglia di moduli E-completamente regolari e sia* $M = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ *il prodotto topologico degli* M_λ. *Per ogni carattere* f *di* M *esiste un sottoinsieme finito* F *di* Λ *tale che*:

$$\mathrm{Ker}(f) \geqslant \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus F} M_\lambda .$$

Di conseguenza M^* *è naturalmente isomorfo al modulo E-discreto* $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^*$.

DIM. – Per ogni $\lambda \in \Lambda$ denotiamo con π_λ la proiezione di M su M_λ e con ε_λ l'inclusione di M_λ in M così definita: se $y \in M_\lambda$ si ponga $\pi_\lambda(\varepsilon_\lambda(y)) = y$, $\pi_\mu(\varepsilon_\lambda(y)) = 0$ per $\mu \neq \lambda$.

Siano f un carattere di M ed U in intorno di O in E non contenente sottomoduli $\neq \{0\}$ di E. Esiste un intorno W di O in M tale che $f(W) \leqslant U$. Non è restrittivo supporre $W = \bigcap_{\lambda \in F} \pi_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ dove F è un sottoinsieme finito di Λ e per ogni $\lambda \in F$ V_λ è intorno di O in M_λ. Sia H il sottomodulo di M così definito:

$$H = \{x \in M : \pi_\lambda(x) = 0,\ \forall \lambda \in F\}\,.$$

Allora $H \leqslant W$, quindi $f(H) \leqslant U$ da cui $f(H) = 0$. È pertanto chiaro che $f \circ \varepsilon_\lambda = 0$ per quasi tutti i λ. Da ciò segue che l'assegnazione $f \to \sum_{\lambda \in \Lambda} f \circ \varepsilon_\lambda$ definisce un isomorfismo di M^* su $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda^*$.

COROLLARIO. – *Sia X un insieme. Il duale del modulo E-compatto E^X coincide con il modulo libero avente per base l'insieme delle proiezioni $\pi_x \colon E^X \to E$ $(x \in X)$.*

2.5. – La proposizione che segue è una conseguenza di fatti ben noti. Tuttavia, per completezza, ne diamo un cenno di dimostrazione.

PROPOSIZIONE. – *Sia $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di moduli E-discreti. L'isomorfismo canonico*

$$\varphi \colon \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, E) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_A(M_\lambda, E)$$

è un isomorfismo topologico di $(\bigoplus_\lambda M_\lambda)^*$ su $\prod_\lambda M_\lambda^*$.

DIM. – Per ogni $f \in (\bigoplus_\lambda M_\lambda)^*$ denotiamo con f_λ la restrizione di f a M_λ. Allora $\varphi(f) = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Si verifica che φ è continuo usando le proiezioni π_λ di $\prod_\lambda M_\lambda^*$ sugli M_λ^*. Mostriamo che φ è aperto. Poichè è biiettivo, è sufficiente provare, che per ogni $x \in \bigoplus_\lambda M_\lambda$ ed ogni intorno di U di O in E, $\varphi(W(x; U))$ è intorno di O in $\prod_\lambda M_\lambda^*$. Possiamo scrivere $x = \sum_{\lambda \in F} x_\lambda$ dove F è un sottoinsieme finito di Λ ed $x_\lambda \in M_\lambda$. Sia V un intorno di O in E e poniamo $W_0 = \bigcap_{\lambda \in F} \pi_\lambda^{-1}(W(x_\lambda; V))$. W_0 è intorno di O in $\prod_\lambda M_\lambda^*$. Ora, se V è abbastanza piccolo, risulta $\varphi(W(x; U)) \supseteq W_0$.

Sia infatti $g \in W_0$; possiamo scrivere $g = \varphi(f)$ con $f \in (\bigoplus_\lambda M_\lambda)^*$. Poichè $\varphi(f) = (f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, si ha $f_\lambda(x_\lambda) \in V$ per ogni $\lambda \in F$ da cui $f(x) = \sum_{\lambda \in F} f(x_\lambda) \in U$, cioè $f \in W(x; U)$. Allora $g \in \varphi(W(x; U))$.

COROLLARIO. – *Il duale del modulo libero E-discreto $A^{(X)}$ è topologicamente isomorfo, in modo naturale, al modulo E-compatto E^X.*

DIM. – Basta provare che il modulo E-compatto A^* è topologicamente isomorfo ad E. Consideriamo l'isomorfismo canonico $\varphi \colon A^* \to E$ dato da $\varphi(\xi) = \xi(1)$ $(\xi \in A^*)$.

Siano $a \in A$ ed U un intorno di O in E; allora $\varphi(W(a; U)) = \{x \in E: ax \in U\}$ è un intorno di O in E poichè la moltiplicazione per a è un endomorfismo continuo di E. Ciò prova che φ è aperto. D'altra parte $\varphi^{-1}(U) = \{\xi \in A^*: \xi(1) \in U\} = W(1; U)$, quindi è continuo.

3. – La dualità.

3.1. – Sia $\Delta: D(E) \to C(E)$ il funtore controvariante che associa ad ogni modulo M di $D(E)$ il duale M^* e ad ogni morfismo f di $D(E)$ il morfismo trasposto f^*.

DEFINIZIONE. – Diremo che Δ è una *dualità* se per ogni modulo M appartenente a $D(E)$ oppure a $C(E)$ il morfismo canonico ω $M \to M^{**}$ è un isomorfismo in $D(E)$ o $C(E)$ rispettivamente.

Affinchè Δ sia una dualità è sufficiente, per la Proposizione 2.3, che ω sia suriettivo.

3.2. – In generale — ferme restando le condizioni P_1) e P_2) — Δ non è una dualità, come si vede con il seguente esempio.

Sia A l'anello dei polinomi nelle due indeterminate u, v sopra un corpo commutativo fissato ad arbitrio. Poniamo $E = A$ e dotiamo E della topologia discreta: le condizioni P_1) e P_2) sono evidentemente verificate. Consideriamo l'ideale $M = (u, v)$ di A ad osserviamo che $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ è naturalmente isomorfo ad A. Infatti fissato $\xi \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ risulta $\xi(uv) = u\xi(v) = v\xi(u)$ per cui $v\xi(u)$ appartiene all'ideale primo (u) di A. Poichè $v \notin (u)$ dev'essere $\xi(u) \in (u)$ cioè $\xi(u) = bu$ con $b \in A$. da $u\xi(v) = v\xi(u) = vbu$ segue $\xi(v) = bv$. Dunque ξ coincide con la moltiplicazione per b e ciò prova l'asserto.

Ora il modulo astratto M è ovviamente E-discreto e lo stesso M, munito della topologia discreta, è E-compatto. In entrambi i casi $M^* \simeq A$ da cui $M^{**} \simeq A$. Ma M — come A-modulo — non è isomorfo ad A.

3.3. – Studieremo ora delle condizioni affinchè il funtore $\Delta: D(E) \to C(E)$ sia una dualità nel senso precisato in 3.1. L'indagine sarà alquanto superficiale, tuttavia si otterà un criterio abbastanza significativo nel caso in cui la topologia di E sia compatta oppure discreta.

Siano M un modulo E-discreto ed $\omega: M \to M^{**}$ il morfismo canonico. Considerando M^* come sottomodulo topologico (e chiuso) del modulo E-compatto E^M, si vede che, per ogni $x \in M$, $\omega(x)$ coincide con la restrizione ad M^* della proiezione $\pi_x: E^M \to E$. Allora:

1) ω è suriettivo se e solo se ogni carattere di M^* si estende ad un carattere di E^M (Si tenga presente il Corollario 2.4.)

2) La topologia di M^* coincide con la topologia debole di $\omega(M)$.

Da queste considerazioni discende che ogni modulo E discreto è riflessivo se per ogni modulo E-compatto L si verifica una delle due seguenti condizioni:

a) Se L è sottomodulo topologico del modulo E-compatto E^X, ogni carattere di L si estende ad un carattere di E^X.

b) Se la topologia di L coincide con la topologia debole di un sottomodulo H di L^*, allora $H = L^*$.

Come ora vedremo, queste due condizioni sono equivalenti. Osserviamo che se ogni $L \in C(E)$ verifica la *a*) o la *b*) lo stesso accade per ogni modulo di $B(E)$ poichè ogni modulo E-completamente regolare e sottomodulo denso di un modulo E-compatto.

PROPOSIZIONE. – *Sia M un modulo E-completamente regolare.*

Le condizioni che seguono sono equivalenti:

(a) *Se M è sottomodulo topologico del modulo E-compatto E^X, ogni carattere di M si estende ad un carattere di E^X.*

(a') *Se M è sottomodulo topologico del modulo $L \in B(E)$, ogni carattere di M si estende ad un carattere di L.*

(b) *Se H è un sottomodulo di M^* e se la topologia di M coincide con la topologia debole di H, allora $H = M^*$.*

DIM. – L'equivalenza $(a) \Leftrightarrow (a')$ è ovvia.

$(a) \Rightarrow (b)$. Se M ha la topologia debole di H, M è sottomodulo topologico del modulo E-compatto E^H ed i caratteri di M appartenenti ad H coincidono con le restrizioni ad M delle proiezioni $\pi_h\colon E^H \to E$, $h \in H$. Sia $\xi \in M^*$; ξ si estende ad un carattere $\bar{\xi}$ di E^H; per il Corollario 2.4, $\bar{\xi}$ è combinazione lineare a coefficiente in A di proiezioni π_h. Dunque $\xi \in H$, da cui $H = M^*$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Sia M un sottomodulo topologico di E^X e sia H il sottomodulo di M^* generato dalle restrizioni ad M delle proiezioni π_x, $x \in X$. M ha la topologia debole di H poichè E^X ha la topologia debole delle π_x. Allora $M^* = H$ e quindi ogni carattere di M si estende ad un carattere di E^X.

3.4. DEFINIZIONE. – Sia $\mathcal{A}$ una sottocategoria di MTA. Diremo che $\mathcal{A}$ ha la *proprietà di estensione dei caratteri* (e scriveremo $\mathcal{A} \subseteq PEC$) se, per ogni modulo $L \in \mathcal{A}$, ogni carattere di un qualunque sottomodulo di L si estende ad un carattere di L.

Si osservi che $B(E) \subseteq PEC$ se e solo se $C(E) \subseteq PEC$.

La proposizione che segue è evidente:

PROPOSIZIONE. – *Se $C(E)$ ha la proprietà di estensione dei caratteri allora per ogni $M \in D(E)$ il morfismo canonico $\omega\colon M \to M^{**}$ è un isomorfismo.*

3.5. – Se $C(E) \subseteq PEC$ ogni modulo E-discreto è riflessivo, ma in generale Δ non è una dualità poichè, come si vedrà in 7.3, possono esistere dei moduli E-compatti non isomorfi ai propri biduali. Tuttavia, se $C(E) \subseteq PEC$, si può determinare una condizione necessaria e sufficiente affinchè Δ sia una dualità.

Proposizione. – *Le affermazioni che seguono sono equivalenti*

(*a*) *La categoria $C(E)$ ha la proprietà di estensione dei caratteri ed il funtore Δ $D(E) \to C(E)$ è una dualità.*

(*b*) *Siano M un modulo E-compatto, B un sottomodulo chiuso di M, ξ un carattere di B, x_0 un elemento di $M \setminus B$. Allora ξ si estende ad un carattere $\bar{\xi}$ di M tale che $\bar{\xi}(x_0) \neq 0$.*

Dim. – (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Poichè $C(E) \subseteq PEC$, ξ si estende ad un carattere ξ' di M. Se $\xi'(x_0) = 0$, basterà trovare un carattere di M nullo su B e diverso da zero in x_0. Si supponga per assurdo che ogni carattere di M nullo su B sia nullo anche in x_0; siano L il sottomodulo chiuso di M generato da $B + Ax_0$ ed $i: B \to L$ l'inclusione canonica. Per la proprietà di estensione dei caratteri il morfismo di restrizione $i^*: L^* \to B^*$ è un isomorfismo di moduli E-discreti e pertanto $i^{**}: B^{**} \to L^{**}$ è biiettivo. Si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & L \\ {\scriptstyle \omega_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_L} \\ B^{**} & \xrightarrow{i^{**}} & L^{**} \end{array}$$

Poichè ω_B ed ω_L sono isomorfismi, i è biiettivo il che è assurdo.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*). Per le proposizioni 3.4 e 2.3 è sufficiente dimostrare che per ogni $L \in C(E)$ il morfismo canonico ω_L è suriettivo. Si supponga $\omega(L) \neq L^{**}$ e sia $x_0 \in L^{**} \setminus \omega(L)$. $\omega(L)$ è chiuso in L^{**} poichè ω è una immersione topologica ed L è completo. Esiste un carattere η di L^{**}, nullo su $\omega(L)$, tale che $\eta(x_0) \neq 0$. Per la Proposizione 3.4 il morfismo canonico $\omega': L^* \to L^{***}$ è un isomorfismo per cui $\eta = \omega'(\alpha)$ con $\alpha \in L^*$. Poichè $\eta \neq 0$, anche $\alpha \neq 0$. D'altra parte per ogni $x \in M$ si ha:

$$\alpha(x) = \omega(x)(\alpha) = \omega'(\alpha)\big(\omega(x)\big) = \eta\big(\omega(x)\big) = 0\,.$$

Ciò implica $\alpha = 0$ il che è assurdo.

3.6. – Se il modulo E è compatto oppure è discreto, allora $C(E) \subseteq \mathrm{PEC}$ se e solo se la proprietà di estensione dei caratteri vale per i sottomoduli chiusi dei prodotti di un numero finito di copie di E.

Nella presente situazione i criteri di dualità sono dati dai due seguenti ennunciati.

Proposizione. – *Si supponga che il modulo topologico E sia compatto oppure discreto. Le affermazioni che seguono sono equivalenti:*

(*a*) *La categoria $C(E)$ ha la proprietà di estensione dei caratteri.*

(*b*) *Siano $n \in N$, B un sottomodulo chiuso del modulo E-compatto E^n. Ogni carattere di B si estende ad un carattere di E^n.*

Di conseguenza, se vale la condizione (*b*), *ogni modulo E-discreto è riflessivo.*

DIM. – (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) è evidente.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) Siano $M \in C(E)$ ed H un sottomodulo di M^* con la proprietà che la topologia di M coincida con la topologia debole di H. Dimostreremo che $H = M^*$, dal che seguirà l'affermazione (*a*) in virtù della Proporzione 3.3.

Siano $\eta \in M^*$ ed U un intorno di O in E. Poichè M ha la topologia debole di H esistono un sottoinsieme finito $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ di H ed un intorno V di O in E tali da aversi:

$$\eta\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \xi_i^{-1}(V)\Big) \subseteq U\,.$$

Supponendo, come è lecito, che U non contenga sottomoduli non nulli di E, da

$$\eta\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\xi_i)\Big) \subseteq U \qquad \text{segue} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\xi_i) \leqslant \mathrm{Ker}(\eta)\,.$$

Sia $\varphi\colon M \to E^n$ il morfismo diagonale degli ξ_i:

$$\varphi(x) = \big(\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)\big) \qquad (x \in M)\,.$$

Poichè $\mathrm{Ker}(\varphi) \leqslant \mathrm{Ker}(\eta)$ esiste un morfismo di A-moduli $\bar{\eta}\colon \mathrm{Im}(\varphi) \to E$ tale che $\eta = \bar{\eta} \circ \varphi$. φ è evidentemente una applicazione continua e chiusa e pertanto la topologia relativa di $\mathrm{Im}(\varphi)$ coincide con la topologia quoziente di φ (cfr. [4], 3.8). Da ciò segue che $\bar{\eta}$ è un morfismo continuo (cfr. [4], 3.9), e quindi $\bar{\eta}$ è un carattere di $\mathrm{Im}(\varphi)$ che si estende ad un carattere η' di E^n. Evidentemente $\eta' = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i$ dove le π_i sono le proiezioni di E^n su E e le a_i denotano degli elementi opportuni di A. Si ha per ogni $x \in M$:

$$\eta(x) = \bar{\eta}\big(\varphi(x)\big) = \eta'\big(\varphi(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \pi_i)\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i(x)\,.$$

Da ciò segue $\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$ e quindi $\eta \in H$.

TEOREMA. – *Se il modulo topologico E è compatto oppure discreto le condizioni che seguono sono equivalenti:*

(*a*) *La categoria $C(E)$ ha la proprietà di estensione dei caratteri ed il funtore $\Delta\colon D(E) \to C(E)$ è una dualità.*

(*b*) *Siano* $n \in N$, *B un sottomodulo chiuso di* E^n, *ξ un carattere di B, x_0 un elemento di* $E^n \setminus B$. *Allora ξ si estende ad un carattere $\bar{\xi}$ di E^n tale che* $\bar{\xi}(x_0) \neq 0$.

(*c*) *La condizione* (*b*) *della Proposizione* 3.5.

DIM. – Per la Proposizione 3.5 è sufficiente dimostrare $(b) \Rightarrow (a)$. Per la proposizione precedente $C(E) \subseteq PEC$ ed ogni modulo E-discreto è riflessivo. Sia M un modulo E-compatto e supponiamo per assurdo $\omega(M) \neq M^{**}$. Sia $x_0 \in M^{**} \setminus \omega(M)$.

Poichè $\omega(M)$ è chiuso in M^{**} e poichè M^{**} ha la topologia debole dei caratteri, esistono un sottoinsieme finito F di M^{***} ed un intorno U di O in E tali da aversi:

$$\Big(x_0 + \bigcap_{\alpha \in F} \alpha^{-1}(U)\Big) \cap \omega(M) = \emptyset$$

da cui:

$$x_0 \notin \Big(\bigcap_{\alpha \in F} \mathrm{Ker}(\alpha)\Big) + \omega(M)\,.$$

Poniamo $L = \bigcap_{\alpha \in F} \mathrm{Ker}(\alpha)$.

Se E è discreto, L è aperto in M^{**} in quanto è intersezione di nuclei di caratteri.

Se E è compatto $\omega(M)$ e M^{**} sono compatti. In entrambi i casi M^{**}/L è topologicamente isomorfo ad un sottomodulo chiuso di E^F, $L + \omega(M)$ è chiuso in M^{**} e la proiezione canonica $\pi\colon M^{**} \to M^{**}/L$ è un morfismo continuo e chiuso.

Poichè $\pi(x_0) \notin \pi(L + \omega(M))$ è chiaro che esiste un carattere η di M^{**} tale che $\eta(\omega(M)) = 0$, $\eta(x_0) \neq 0$.

Ragionando come in 3.5 si perviene ad un assurdo.

3.7. – Non siamo riusciti a stabilire se la condizione $C(E) \subseteq PEC$ sia in generale necessaria affinchè Δ risulti una dualità.

4. – Gruppi abeliani (R/Z)-compatti.

Siano R il corpo dei reali dotato della topologia usuale, Z l'anello degli interi, K il gruppo additivo R/Z munito della topologia quoziente. Come è noto (Cfr. ad es. [9] Cap. VI) K è compatto, l'anello degli endomorfismi continui di K è naturalmente isomorfo a Z e K non contiene sottogruppi piccoli. Pertanto K, come Z-modulo topologico con Z discreto, verifica le condizioni P_1) e P_2).

È ben noto che K verifica la condizione (*b*) del Teorema 3.6.

Vogliamo tuttavia osservare che questo fatto si può dimostrare in modo abbastanza semplice, senza usare il Teorema di PETER-WEYL (Cfr. [9], Sections 33, 34), ammettendo di conoscere la struttura dei sottogruppi chiusi di R^n, $n \in N$, come esposta ad esempio in [1].

Siano B un sottogruppo chiuso di K^n ed y_0 un elemento di $K^n \setminus B$. Dimostriamo in primo luogo la seguente affermazione

a) *Esiste un carattere ξ di K^n tale che* $\xi(B) = 0$ *e* $\xi(y_0) \neq 0$.

Identifichiamo, in modo ovvio, K^n con R^n/Z^n, denotiamo con σ la proiezione canonica di R^n su K^n e siano $G=\sigma^{-1}(B)$, x_0 un elemento di $\sigma^{-1}(y_0)$. G è un sottogruppo chiuso, contenente Z^n, di R^n. Pertanto G è somma diretta di un sottospazio vettoriale V di R^n e di un sottogruppo libero di R^n avente una base $\{x_1, \dots x_h\}$, $1 \leqslant h \leqslant n$, la quale genera in R^n un sottospazio complementare di V. (Cfr. [1], Th. 1 e Th. 2). Possiamo scrivere $x_0 = x + \sum_{j=1}^{h} r_j x_j$ dove $x \in V$ e gli r_j sono numeri reali non tutti interi poichè $x_0 \notin G$. Supponiamo $r_1 \notin Z$ e sia $\psi\colon R^n \to R$ la forma lineare definita dalle condizioni $\psi(V)=0$, $\psi(x_1)=1$, $\psi(x_j)=0$ per $j>1$.

Evidentemente $\psi(G) \leqslant Z$ e $\psi(x_0) \notin Z$. Sia τ la proiezione canonica di R su K. Poichè $\mathrm{Ker}(\sigma) = Z^n \leqslant G \leqslant \mathrm{Ker}(\tau\circ\psi)$, esiste un morfismo $\xi\colon K^n \to K$ tale che $\xi\circ\sigma = \tau\circ\psi$, ξ è un carattere di K^n soddisfacente le condizioni richieste.

Siano ora B^* il gruppo dei caratteri di B ed H il sottogruppo di B^* generato dalle restrizioni a B delle proiezioni di K^n su K. Dimostriamo che

b) $H = B^*$, *cioè ogni carattere di B si estende ad un carattere di K^n.*

(Ricordiamo che per il Corollario 2.4, il gruppo dei caratteri di K^n coincide con il gruppo libero generato dalle proiezioni $K^n \to K$). Sia $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ un sistema indipendente di generatori di H $(m \leqslant n)$. Denotiamo con $\varphi\colon B \to K^m$ il morfismo diagonale degli ξ_i e proviamo che $\varphi(B)$ coincide con il prodotto topologico $\prod_{i=1}^{m} \xi_i(B)$. Evidentemente tale prodotto contiene $\varphi(B)$. Sia $y \in K^m \setminus \varphi(B)$; poichè $\varphi(B)$ è chiuso in K^m sappiamo, per quanto visto in precedenza, che esiste un carattere f di K^m tale che $f(\varphi(B)) = 0$, $f(y) \neq 0$. Possiamo scrivere $f = \sum_{i=1}^{m} t_i \pi_i$ dove i t_i sono degli interi e le π_i denotano le proiezioni di K^m su K. Per ogni $x \in B$ si ha

$$f(\varphi(x)) = \sum_i t_i \pi_i(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{m} t_i \xi_i(x) = 0$$

dunque $\sum_i t_i \xi_i = 0$. Da ciò segue, per l'indipendenza degli ξ_i, $t_i \xi_i = 0$ e quindi $t_i \xi_i(B) = 0$ per ogni i. D'altra parte, posto $y = (y_1, \dots y_m)$ con gli $y_i \in K$, da $f(y) \neq 0$ segue $t_i y_i \neq 0$ per almeno un i. Per questo i risulta $y_i \notin \xi_i(B)$ da cui $y \notin \prod_{i=1}^{m} \xi_i(B)$. L'uguaglianza $\varphi(B) = \prod_{i=1}^{m} \xi_i(B)$ è così provata. Sia ora η un carattere di B ed osserviamo che φ è iniettivo: infatti $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(\xi_i) = 0$ poichè H separa i punti di B ed è generato dagli ξ_i.

Essendo B e K^m gruppi compatti e di Hausdorff, φ è una immersione topologica e pertanto esiste un carattere $\bar{\eta}$ di $\varphi(B)$ tale che $\eta = \bar{\eta}\circ\varphi$. Mostriamo che $\bar{\eta}$ si estende ad un carattere η' di K^m. Si ha $\varphi(B) = \prod_{i=1}^{m} \xi_i(B)$ e, per ogni i, $\xi_i(B)$ è un sottogruppo chiuso di K. Allora $\xi_i(B)$ o è ciclico finito oppure coincide con K. In entrambi i casi la restrizione a $\xi_i(B)$ di $\bar{\eta}$ coincide con la moltiplicazione per un conveniente intero s_i. Posto $\eta' = \sum_i s_i \pi_i$ si ottiene un carattere di K^m che estende $\bar{\eta}$. Per ogni $x \in B$ si ha

$$\eta(x) = \bar{\eta}\circ\varphi(x) = \eta'\circ\varphi(x) = \sum_i s_i \pi_i \varphi(x) = \sum_i s_i \xi_i(x)$$

da cui $\eta = \sum_i s_i \xi_i \in H$. Dunque $B^* = H$.

Da a) e b) segue immediatamente che K verifica la condizione (b) del Teorema 3.6 e pertanto il funtore $\Delta\colon D(K) \to C(K)$ è una dualità. $D(K)$ coincide con la categoria di tutti i gruppi abeliani poichè K è iniettivo e contiene una copia di ogni gruppo ciclico. A questo punto, se si vuole, il Teorema di PETER-WEYL garantisce che ogni gruppo abeliano compatto è K-compatto e si ritrova la dualità di PONTRYAGIN tra la categoria dei gruppi abeliani compatti e quella dei gruppi abeliani discreti.

5. – Moduli E-compatti linearmente topologizzati.

In tutto questo paragrafo si suppone che la topologia di E sia quella discreta.

5.1. – Poichè E è discreto, ogni modulo di $B(E)$ è linearmente topologizzato cioè ha una base di intorni di O formata da sottomoduli. Più precisamente dalla Proposizione 2.2 si ottiene la seguente

PROPOSIZIONE. – *Un modulo $M \in MTA$ è in $B(E)$ se e solo se M ha come base di intorni di O una famiglia $\mathcal{V}$ di sottomoduli tale che per ogni $V \in \mathcal{V}$ M/V sia isomorfo ad un sottomodulo di E^n per qualche $n \in N$.*

5.2. – Per ogni $M \in$ Mod-A la topologia di M^* coincide con la *topologia finita* che ha come base di intorni di O i sottomoduli del tipo $F^\perp$ dove F è un sottoinsieme finito di M e $F^\perp$ è l'ortogonale, o annullatore, di F in M^*:

$$F^\perp = \{\xi \in M^* \colon \xi(F) = 0\}.$$

In particolare il duale del modulo E-discreto E coincide con l'anello A dotato della topologia finita. A, con questa topologia, è un anello topologico di Hausdorff e completo.

PROPORZIONE. *Ogni modulo E-completamente regolare è un modulo topologico sull'anello A dotato della topologia finita.*

DIM. – L'asserto è vero per E poichè l'annullatore in A di ogni elemento di E è un ideale aperto. Allora ogni sottomodulo topologico di un modulo del tipo E^X, con E^X dotato della topologia prodotto di quella discreta su E, è un modulo topologico sopra l'anello A munito della topologia finita.

Indichiamo con LTA la categoria degli A-moduli linearmente topologizzati e di Hausdorff con A dotato della topologia finita. Per la proposizione precedente $B(E)$ è una sottocategoria piena di LTA. Un modulo $M \in LTA$ è in $B(E)$ se e solo se M ha la topologia debole dei caratteri.

5.3. - Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli ideali aperti di A. La proprietà $C(E) \subseteq PEC$ e la condizione (b) del Teorema 3.6 si possono interpretare mediante condizioni sul filtro $\mathcal{F}$.

Poniamo:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \{M \in \text{Mod-}A : Ann_A(x) \in \mathcal{F},\ \forall x \in M\}$$

dove $\text{Ann}_A(x) = \{a \in A : ax = 0\}$. Evidentemente $E \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. La classe $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ è chiusa per i sottomoduli, le immagini omomorfe, le somme dirette.

Per ogni ideale I di A si ha:

$$I \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A/I \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\,.$$

I moduli della classe $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ si chiameranno *moduli di $\mathcal{F}$-torsione*.

Si osservi che un A-modulo M dotato della topologia discreta è in LTA se e solo se $M \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

Diremo che E è *topologicamente $\mathcal{F}$-iniettivo* se, per ogni $I \in \mathcal{F}$, ogni carattere di I si estende ad un carattere di A (Ovviamente A si intende dotato della topologia finita ad I della topologia relativa). La definizione precedente dice che E è *topologicamente iniettivo* nel senso che ogni carattere di un qualunque ideale di A si estende ad un carattere di A. Questo fatto è conseguenza del seguente semplice

LEMMA. - *Siano L un sottomodulo topologico del modulo $M \in LTA$, ξ un carattere di L. Allora ξ si estende ad un carattere di un sottomodulo aperto, contenente L, di M.*

DIM. - Si ha $\text{Ker}(\xi) = V \cap L$ con V sottomodulo aperto di M. Sia $L' = L + V$; evidentemente L' è un sottomodulo aperto di M. ξ si estende ad un morfismo ξ' di L' in E ponendo:

$$\xi'(x + y) = \xi(x) \qquad (x \in L,\, y \in V)\,.$$

Si verifica che ξ' è ben definito; ξ' è un carattere di L' poichè $\text{Ker}(\xi') \supseteq V$.

PROPOSIZIONE. - *Le condizioni che seguono sono equivalenti:*

(a) *La categoria $C(E)$ ha la proprietà di estensione dei caratteri.*

(b) *E è topologicamente $\mathcal{F}$-iniettivo.*

(b') *E è topologicamente iniettivo.*

(c) *La categoria LTA ha la proprietà di estensione dei caratteri.*

(d) *Se L è un sottomodulo di un modulo $M \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ ogni morfismo di L in E si estende ad un morfismo di M in E.*

DIM. – $(a) \Rightarrow (b')$. A, con la topologia finita, è un modulo E-compatto.

$(b') \Rightarrow (c)$. La dimostrazione di questa implicazione è quella usuale (cf. ad es. [10]) avendo cura che i morfismi considerati risultino continui. Siano L un sottomodulo topologico di un modulo $M \in \mathrm{LTA}$ e ξ un carattere di L. Per il Lemma precedente non è restrittivo supporre L aperto in M. Sia (H, f) una coppia massimale rispetto alle proprietà seguenti: H è un sottomodulo di M contenente L, f è un morfismo di H in E che estende ξ. Si noti che f è continuo poichè $\mathrm{Ker}(f) \geqslant \mathrm{Ker}(\xi)$ che è aperto in M. Se $H = M$ l'affermazione (c) è provata. Mostriamo che se $H \neq M$ si perviene ad un assurdo. Fissiamo $x \in M \setminus H$ e sia $H' = Ax + H$. f si estende ad un morfismo $f' : H' \to E$ nel modo seguente. Consideriamo l'ideale I di A così definito:

$$I = \{a \in A : ax \in H\}$$

e sia η il morfismo di I in E dato da:

$$\eta(a) = f(ax) \qquad (a \in I)$$

η è un carattere di I poichè f è un carattere di H e la moltiplicazione per x è un morfismo continuo di I in M. Poichè E è topologicamente iniettivo, η si estende ad un carattere $\bar{\eta}$ di A. Definiamo il morfismo $f' : H' \to E$ ponendo:

$$f'(bx + y) = \bar{\eta}(b) + f(y) \qquad (b \in A,\, y \in H)\,.$$

Si verifica facilmente che f' è ben definito:
se infatti $bx + y = 0$ allora $bx = -y$ da cui $b \in I$ e quindi:

$$f'(bx + y) = \eta(b) + f(y) = f(bx) + f(y) = f(0) = 0\,.$$

L'esistenza di f' contraddice la massimalità di (H, f).

$(c) \Rightarrow (d)$. Ogni modulo di $\mathcal{F}$-torsione, dotato della topologia discreta, è in LTA.

$(d) \Rightarrow (a)$ Segue della Proposizione 3.6.

OSSERVAZIONE. – Si noti che ogni morfismo f di A in E è un carattere di A. Infatti $\mathrm{Ker}(f)$ è l'annullatore di $f(1)$.

5.4. – Indichiamo con $\Omega_{\mathcal{F}}$ l'insieme degli ideali massimali di A appartenenti ad $\mathcal{F}$ e con $S_{\mathcal{F}}$ la somma diretta degli A-moduli semplici $A/\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} \in \Omega_{\mathcal{F}}$.

Dimostreremo che, se E è topologicamente iniettivo, allora Δ è una dualità se e solo se E contiene un sottomodulo isomorfo ad $S_{\mathcal{F}}$. Quest'ultima circostanza si verifica se e solo se E contiene un sottomodulo isomorfo ad $A/\boldsymbol{m}$ per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega_{\mathcal{F}}$ dal momento che gli $A/\boldsymbol{m}$ sono semplici e a due a due non isomorfi.

LEMMA. – *Se E è topologicamente iniettivo le affermazioni che seguono sono equivalenti*

(*a*) *E ha un sottomodulo isomorfo a $S_{\mathcal{F}}$.*

(*b*) *$\mathcal{C}_{\mathcal{F}} \subseteq D(E)$, ossia, per ogni $M \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ separa i punti di E.*

DIM. – $(a) \Rightarrow (b)$. Siano $M \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, $x \in M$, $x \neq 0$, L un sottomodulo di M massimale rispetto alla proprietà $x \notin L$. Indichiamo con π la proiezione canonico di M su M/L e con L'/L il sottomodulo di M/L generato da $\pi(x)$. Evidentemente L'/L è semplice e di $\mathcal{F}$-torsione quindi è isomorfo ad $A/\boldsymbol{m}$ per un certo $\boldsymbol{m} \in \Omega_{\mathcal{F}}$. Esiste allora un monomorfismo $f\colon L'/L \to E$ che si estende, per la Proposizione 5.3, ad un morfismo $g\colon M/L \to E$. Risulta $(g \circ \pi)(x) \neq 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega_{\mathcal{F}}$ $A/\boldsymbol{m}$ è semplice e di $\mathcal{F}$-torsione, quindi esiste un monomorfismo di $A/\boldsymbol{m}$ in E.

PROPOSIZIONE. – *Le affermazioni che seguono sono equivalenti.*

(*a*) *La categoria $C(E)$ ha la proprietà di estensione dei caratteri ed il funtore Δ è una dualità.*

(*b*) *E è topologicamente iniettivo e contiene un sottomodulo isomorfo ad $S_{\mathcal{F}}$.*

(*c*) *Siano B un sottomodulo chiuso di un modulo $M \in LTA$, ξ un carattere di B, x_0 un elemento di $M \setminus B$. Allora ξ si estende ad un carattere $\bar{\xi}$ di M tale che $\bar{\xi}(x_0) \neq 0$.*

DIM. – $(a) \Rightarrow (b)$. E è topologicamente iniettivo per la Proposizione 5.3. Sia $\boldsymbol{m} \in \Omega_{\mathcal{F}}$ Poichè. A è E-compatto ed $\boldsymbol{m}$ è chiuso in A, esiste per la Proposizione 3.5 un carattere α di A nullo su $\boldsymbol{m}$ ma non su tutto A. Tale α induce un monomorfismo di $A/\boldsymbol{m}$ in E.

$(b) \Rightarrow (c)$. Il carattere ξ si estende ad un carattere η di M. Se $\eta(x_0) = 0$, basta trovare un carattere di M nullo su B e diverso da zero in x_0: Poichè B è chiuso in M esiste un sottomodulo aperto V di M tale che $(x_0 + V) \cap B = \emptyset$ da cui $x_0 \notin V + B$. Sia π la proiezione canonica di M su $M/V + B$ dotato della topologia quoziente. $V + B$ è aperto in M, quindi $M/V + B$ è discreto e pertanto è di $\mathcal{F}$-torsione. Per il Lemma precedente esiste un carattere ξ' di $M/V + B$ tale che $\xi'(\pi(x_0)) \neq 0$.
$\xi' \circ \pi$ è un carattere di M poichè π è continua. Tale carattere è nullo su B.

$(c) \Rightarrow (a)$. Segue dal Teorema 3.6.

6. – Dualità sopra un anello locale completo.

6.1. – Sia A un anello (con unita $1 \neq 0$) commutativo, noetheriano, locale con ideale massimale $\boldsymbol{m}$ e completo nella topologia $\boldsymbol{m}$-adica. Sia E l'inviluppo iniettivo dell'A-modulo semplice $A/\boldsymbol{m}$. Per un ben noto risultato di MATLIS ([6], th. 3.7), ogni A-endomorfismo di E coincide con la moltiplicazione per un unico elemento di A e pertanto l'A-modulo E, munito della topologia discreta, verifica le condizioni P_1) e P_2). Inoltre, poichè E è un cogeneratore iniettivo della categoria Mod-A, si vede che $D(E) = \text{Mod-}A$ e che la condizione (b) del teorema 3.5 è soddisfatta.

Allora il funtore $\Delta: \text{Mod-}A \to C(E)$ è una dualità. Vogliamo dimostrare che Δ è essenzialmente equivalente alla dualità di MACDONALD tra la categoria degli A-moduli linearmente discreti e quella degli A-moduli linearmente compatti, con A dotato della topologia $\boldsymbol{m}$-adica.

6.2. – Seguendo MACDONALD, diremo che un A-modulo M è *$\boldsymbol{m}$-primario* se l'annullatore in A di ogni elemento di M contiene una potenza di $\boldsymbol{m}$. E è $\boldsymbol{m}$-primario (Cfr. [6], th. 3.4).

Ricordiamo che un $\boldsymbol{m}$-modulo M è artiniano se e solo se M è isomorfo ad un sottomodulo di un modulo del tipo E^n, $n \in N$, ([6], Cor. 4.3). Ciò premesso possiamo dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE. – *La topologia finita di A, come anello degli endomorfismi di E, coincide con la topologia $\boldsymbol{m}$-adica.*

DIM. – Poichè E è $\boldsymbol{m}$-primario l'annullatore di un sottoinsieme finito di E contiene una potenza di $\boldsymbol{m}$, quindi ogni ideale aperto nella topologia finita è aperto nella $\boldsymbol{m}$-adica.

Viceversa sia $k \in N$ e mostriamo che $\boldsymbol{m}^k$ è aperto nella topologia finita. Poichè $A/\boldsymbol{m}^k$ è un A-modulo artiniano, esiste $n \in N$ tale che $A/\boldsymbol{m}^k$ sia isomorfo ad un sottomodulo di E^n. Osserviamo che $\boldsymbol{m}^k$ è l'annullatore dell'elemento $1 + \boldsymbol{m}^k \in A/\boldsymbol{m}^k$. Esiste quindi un elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ tale che $\text{Ann}(x) = \boldsymbol{m}^k$. Ma $\text{Ann}(x) = \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ann}(x_i)$.

6.3. – Indichiamo con LTA la categoria degli A-moduli linearmente topologizzati e di Hausdorff su A dotato della topologia $\boldsymbol{m}$-adica. Per le Proposizioni 6.2 e 5.3, possiamo identificare $C(E)$ con una sottocategoria piena di LTA. Con le notazioni del paragrafo 5, $\mathcal{F}$ coincide con l'insieme degli ideali di A che contengono una potenza di $\boldsymbol{m}$, quindi un ideale I di A è in $\mathcal{F}$ se e solo se A/I è artiniano. $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ è la classe dei moduli $\boldsymbol{m}$-primari e $\Omega_{\mathcal{F}} = \{\boldsymbol{m}\}$.

Ricordiamo che un modulo $M \in LTA$ si dice *linearmente compatto* se in M ogni famiglia di varietà lineari chiuse (cioè di classi laterali rispetto a sottomoduli chiusi) avente la proprietà della intersezione finita ha intersezione non vuota. MACDONALD (cf. [5], 5.5) ha provato che un modulo $M \in LTA$ è linearmente compatto se e solo se M è limite inverso di moduli artiniani. Ciò significa che M è completo nella propria topologia ed ha come base di intorni di O una famiglia di sottomoduli a quoziente artiniano. Poichè ogni modulo artiniano è un sottomodulo di un E^n, $n \in N$, dalla Proposizione 5.1 segue che $C(E)$ coincide con la categoria degli A-moduli linearmente compatti.

6.4. – Per ogni $M \in LTA$, MACDONALD definisce il modulo duale $\bar{M}$ nel modo seguente: $\bar{M}$ è il modulo dei morfismi continui di M in E (E è discreto) topologizzato assumendo come base di intorni di O in $\bar{M}$ gli ortagonali dei sottomoduli compatti ed $\boldsymbol{m}$-separati di M (Un A-modulo si dice $\boldsymbol{m}$-separato se è di Hausdorff nella topologia $\boldsymbol{m}$-adica). Un modulo di LTA è detto *linearmente discreto* se i suoi sottomoduli aperti sono tutti e soli quelli a quoziente $\boldsymbol{m}$-primario (Cfr. [5], pag. 224). Indichiamo con LD la categoria degli A-moduli linearmente discreti: l'assegnazione $M \mapsto \bar{M}$ definisce una dualità Δ': LD $\to C(E)$ ([5], 9.13). È facile provare che esiste una equivalenza di categorie Γ: Mod-$A \to$ LD tale che $\Delta = \Delta' \circ \Gamma$.

È chiaro infatti che ogni $M \in$ Mod-A ammette una unica topologia linearmente discreta: quella ottenuta prendendo come base di intorni di O in M tutti i sottomoduli a quoziente $\boldsymbol{m}$-primario. Tale topologia è la più fine topologia lineare su M tale che ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$ risulti continuo. Essa è di Hausdorff poichè è più fine della topologia debole di $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ e quest'ultima è di Hausdorff poichè $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ separa i punti di E.

È poi evidente che, se M ed L sono A-moduli, ogni $f \in \mathrm{Hom}_A(M, L)$ è continuo qualora M ed L siano dotati delle rispettive topologie linearmente discrete. Infine, per ogni $M \in LD$, $\bar{M}$ coincide con $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ dotato della topologia finita, (cfr. [5], 6.2 e 8.6).

OSSERVAZIONE 1. – È facile verificare che la dualità Δ induce una dualità tra la categoria degli A-moduli $\boldsymbol{m}$-primari e quella degli A-moduli linearmente compatti ed $\boldsymbol{m}$-separati.

OSSERVAZIONE 2. – Se A è un anello noetheriano locale non necessariamente completo e se M è un A-modulo linearmente compatto, M risulta essere, in modo naturale, un $\hat{A}$-modulo dove $\hat{A}$ denota il completamento $\boldsymbol{m}$-adico di A. In effetti anche in questo caso M è limite inverso di A-moduli artiniani e questi sono $\hat{A}$-moduli.

7. – Dualità e moduli linearmente compatti sopra un anello noetheriano.

7.1. – Siano R un anello commutativo noetheriano, con unità $1 \neq 0$, Ω l'insieme degli ideali massimali di R. Poniamo

$$E = \bigoplus_{\boldsymbol{m} \in \Omega} E_{\boldsymbol{m}}$$

dove $E_{\boldsymbol{m}}$ è l'inviluppo iniettivo dell'R-modulo semplice $R/\boldsymbol{m}$. Sia $\hat{R}_{\boldsymbol{m}}$ il completamento $\boldsymbol{m}$-adico di $R_{\boldsymbol{m}}$. Come è noto $E_{\boldsymbol{m}}$ è un $\hat{R}_{\boldsymbol{m}}$-modulo ed ogni R-endomorfismo di $E_{\boldsymbol{m}}$

coincide con la moltiplicazione per un unico elemento di $\hat{R}_m$. Con ovvie identificazioni risulta:

$$\hat{R}_m = \mathrm{Hom}_R(E_m, E_m) = \mathrm{Hom}_{\hat{R}_m}(E_m, E_m)$$

(Cfr. [6], Th. 3.6, 3.7).

E_m è un R-modulo $\boldsymbol{m}$-primario nel senso che l'annullatore in R di ogni elemento di E_m contiene una potenza di $\boldsymbol{m}$ ([6], Th. 3.4) e pertanto se $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ sono ideali massimali distinti di R risulta

$$\mathrm{Hom}_R(E_{m_1}, E_{m_2}) = 0$$

poichè un modulo unitario simultaneamente $\boldsymbol{m}_1$-primario ed $\boldsymbol{m}_2$-primario è nullo.

Da ciò segue che l'anello degli R-endomorfismi di E si identifica con l'anello $A = \prod_{m\in\Omega} \hat{R}_m$. E diventa così un A-modulo ed inoltre, come si verifica facilmente, $\mathrm{Hom}_A(E, E) = A$.

L'A-modulo E, dotato della topologia discreta, verifica ovviamente le condizioni P_1) e P_2). Vedremo tra breve che il funtore $\Delta: D(E) \to C(E)$ è una dualità che generalizza quella studiata nel § 6.

7.2. – Per la Proposizione 6.2 la topologia finita di $\hat{R}_m$, in quanto anello degli endomorfismi di E_m, coincide con la topologia $\boldsymbol{m}$-adica. È quindi evidente che la topologia finita di A, in quanto anello degli endomorfismi di E, coincide con la topologia prodotto delle topologie $\boldsymbol{m}$-adiche degli $\hat{R}_m$.

Osserviamo ora che E è un R-modulo fedele. In effetti, poichè E_m è fedele su $\hat{R}_m$ e quindi su R_m, se un elemento $a \in R$ annulla E esso si annulla in tutti i localizzati R_m, $\boldsymbol{m} \in \Omega$, quindi $a = 0$. Pertanto R si identifica in modo naturale con un sottoanello di A. La topologia indotta su R dalla topologia finita di A coincide con la topologia Ω-adica di R, cioè con la topologia che ha come base di intorni di O le intersezioni finite delle potenze degli ideali massimali di R. Infatti per ogni $x \in E$, $\mathrm{Ann}_R(x)$ è aperto nella topologia Ω-adica poichè ciascun E_m è $\boldsymbol{m}$-primario. D'altra parte, per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$ e $k \in N$, $\boldsymbol{m}^k$ è aperto nella topologia relativa di R. Infatti $A/\boldsymbol{m}^k$ è un R-modulo artiniano; quindi è isomorfo ad un sottomodulo di E_m^n con n intero positivo opportuno (Cfr. [7], Prop. 3) e ragionando come in 6.2 si vede che $\boldsymbol{m}^k$ è l'annullatore in R di un sottoinsieme finito di E_m.

Da queste considerazioni e dalla Proposizione 17 di [2] discende, in particolare, che l'anello A con la topologia finita è il completamento Ω-adico di R.

Denotiamo con $\mathcal{G}$ l'insieme degli ideali aperti nella topologia Ω-adica di R. Si ha:

$$I \in \mathcal{G} \Leftrightarrow R/I \text{ è un } R\text{-modulo artiniano.}$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli ideali aperti nella topologia finita di A e per ogni $I \in \mathcal{G}$ sia $\hat{I}$ la chiusura di I in A. Poichè A è il completamento Ω-adico di R, l'assegnazione $I \mapsto \hat{I}$ definisce una biiezione — che conserva le inclusioni — di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{F}$, la cui inversa si ottiene intersecando con R gli ideali appartenenti ad $\mathcal{F}$.

Possiamo ora dimostrare che

E è topologicamente $\mathcal{F}$-iniettivo e contiene un sottomodulo isomorfo ad $S_{\mathcal{F}}$.

Sia η un carattere di $\hat{I}$ $(I \in \mathcal{G})$. E è un R-modulo iniettivo in quanto somma diretta di iniettivi (R è noetheriano). Pertanto η si estende ad un R-morfismo η' di A in E. Poichè A ha la topologia finita ed E è discreto, η' è un morfismo continuo di moduli topologici sopra l'anello R dotato della topologia Ω-adica, dal momento che $\mathrm{Ker}(\eta') \geqslant \mathrm{Ker}(\eta)$ che è un ideale aperto di A. Visto che A è il completamento Ω-adico di R, η' si estende ad un morfismo continuo A-lineare $\bar{\eta}$ di A in E ed $\bar{\eta}$ è un morfismo di moduli topologici sopra l'anello A dotato della topologia finita. Ciò prova che E è topologicamente $\mathcal{F}$-iniettivo. Per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$ $E_{\boldsymbol{m}}$ è l'inviluppo iniettivo dell'A-modulo $A/\hat{\boldsymbol{m}}$, quindi E contiene un sottomodulo isomorfo ad $S_{\mathcal{F}}$ poichè l'insieme degli ideali massimali di A appartenenti ad $\mathcal{F}$ coincide con $\{\hat{\boldsymbol{m}} : \boldsymbol{m} \in \Omega\}$.

È ora chiaro, in base alle Proposizioni 5.3 e 5.4, che il funtore $\Delta: D(E) \to C(E)$ è una dualità.

7.3. – Si supponga Ω infinito e si consideri l'A-modulo $\bar{E} = \prod_{\boldsymbol{m}} E_{\boldsymbol{m}}$. Chiaramente $\mathrm{Hom}_A(\bar{E}, \bar{E}) = A$ così che la coppia A, $\bar{E}$ verifica le condizioni P_1) e P_2). Per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$, $E_{\boldsymbol{m}}$ è un $\hat{R}_{\boldsymbol{m}}$-modulo iniettivo. Atteggiando $E_{\boldsymbol{m}}$ ad A-modulo tramite la proiezione canonica $A \to \hat{R}_{\boldsymbol{m}}$ è facile constatare che $E_{\boldsymbol{m}}$ è iniettivo su A, quindi $\bar{E}$ è un A-modulo iniettivo. Allora, per la Proposizione 5.3, $C(\bar{E}) \subseteq PEC$ per cui ogni modulo $\bar{E}$-discreto è riflessivo. Tuttavia il funtore $\Delta: D(\bar{E}) \to C(\bar{E})$ non è una dualità poichè non è verificata la condizione (*b*) del teorema 3.6. Infatti, considerando E come sottomodulo di $\bar{E}$, ogni A-endomorfismo f di $\bar{E}$ nullo su E è nullo su tutto $\bar{E}$.

Dimostriamo questo fatto.

Sia $x = (x_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m} \in \Omega}$ un elemento di $\bar{E}$. Risulta $f(x) = ax$ dove $a = (a_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m} \in \Omega}$ è un elemento di A. Sia $e_{\boldsymbol{m}}$ quell'elemento di A avente per $\boldsymbol{m}$-componente l'unita di $R_{\boldsymbol{m}}$ e le altre componenti nulle e denotiamo con $\pi_{\boldsymbol{m}}$ la proiezione canonica di $\bar{E}$ su $E_{\boldsymbol{m}}$. Allora, per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$,

$$\pi_{\boldsymbol{m}}(f(x)) = \pi_{\boldsymbol{m}}(ax) = a_{\boldsymbol{m}} x_{\boldsymbol{m}} = e_{\boldsymbol{m}}(ax) = a e_{\boldsymbol{m}} x = f(x_{\boldsymbol{m}}) = 0 .$$

Si verifica facilmente che E è un sotto-A-modulo essenziale di $\bar{E}$, quindi E non è un A-modulo iniettivo.

7.4. – Denotiamo con LTR (risp. LTA) la categoria dei moduli linearmente topologizzati e di Hausdorff su R munito della topologia Ω-adica (risp. su A munito della topologia finita).

Determiniamo la classe dei moduli di $\mathcal{F}$-torsione.

Poniamo:

$$\mathcal{T} = \{M \in \text{Mod-}R : \mathrm{Ann}_R(x) \in \mathcal{G},\ \forall x \in M\} .$$

La classe $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto ai sottomoduli, alle immagini omomorfe, alle somme dirette ed alle estensioni (è una classe di torsione ereditaria nel senso di [10]). $\mathcal{C}$ è stata studiata da MATLIS in [7]. Deduciamo da [7] le proprietà di $\mathcal{C}$ che useremo in seguito.

a) Sia M un R-modulo $\boldsymbol{m}$-primario. Allora $M \in \mathcal{C}$, M è canonicamente un $\hat{R}_{\boldsymbol{m}}$-modulo e coincide con il proprio localizzato in $\boldsymbol{m}$.
([7], Prop. 2.1) Ogni R-morfismo di moduli $\boldsymbol{m}$-primari è un $\hat{R}_{\boldsymbol{m}}$-morfismo.

(*b*) Siano $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$ ideali massimali distinti di R, M_1 un modulo $\boldsymbol{m}_1$-primario ed M_2 un modulo $\boldsymbol{m}_2$-primario. Allora $\mathrm{Hom}_R(M_1, M_2) = 0$.

(*c*) Sia $M \in \mathcal{C}$. Per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$, M contiene un sottomodulo $\boldsymbol{m}$-primario massimo $M_{\boldsymbol{m}}$ canonicamente isomorfo al localizzato di M in $\boldsymbol{m}$ e risulta

$$M = \bigoplus_{\boldsymbol{m} \in \Omega} M_{\boldsymbol{m}}$$

(cfr. [7], Th. 1, Prop. 4) Evidentemente $E \in \mathcal{C}$.

(*d*) Un R-modulo è artiniano se e solo se è isomorfo ad un sottomodulo di un modulo del tipo

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\,, \qquad n \in N\,,$$

dove per ogni i E_i è uno degli $E_{\boldsymbol{m}}$ (cfr. [7], Prop. 3).

Un R-modulo munito della topologia discreta è in LTR se e solo se è in $\mathcal{C}$. Ogni $M \in \mathcal{C}$ è canonicamente un A-modulo ed ogni R-morfismo tra due moduli della classe $\mathcal{C}$ è un A-morfismo. Si vede ora facilmente che:

La classe $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ coincide con la classe $\mathcal{C}$ considerata come sottoclasse di Mod-A.

Infatti se $M \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ allora M, considerato come R-modulo, è un oggetto di $\mathcal{C}$. Viceversa, se $L \in \mathcal{C}$, L con la topologia discreta è in LTR e quindi l'applicazione bilineare $R \times L \to L$ se estende per continuità ad una applicazione bilineare $A \times L \to L$. Sia $x \in L$; allora $\mathrm{Ann}_R(x) = I \in \mathcal{G}$. Ciò implica $\mathrm{Ann}_A(x) \geqslant \hat{I}$ e quindi $\mathrm{Ann}_A(x) \in \mathcal{C}$.

OSSERVAZIONE. – La classe $\mathcal{C}$ è caratterizzata dalla seguente proprietà: un R-modulo M appartiene a $\mathcal{C}$ se e solo se ogni immagine omomorfa non nulla di M contiene un sottomodulo semplice.

Nel caso di un anello commutativo qualunque i moduli aventi questa proprietà — chiamati anche moduli di torsione nel senso di DICKSON — sono stati studiati da diversi autori. Risultati di notevole interesse sono stati ottenuti da NĂSTĂSESCU ed ALBU in [8]. Si rinvia a questo lavoro per la bibliografia.

7.5. – Abbiamo visto che se R è un anello locale allora $D(E) = \text{Mod-}A$ e $C(E)$ coincide con la categoria degli A-moduli linearmente compatti (Si tenga presente anche l'osservazione 2 di 6.4). Vedremo ora che, se R non è locale, in generale $D(E)$ è una sottocategoria propria di Mod-A e $C(E)$ contiene propriamente la categoria degli R-moduli linearmente compatti.

Osserviamo in primo luogo che $D(E)$ contiene Mod-$\hat{R}_m$ per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$. Infatti ogni $M \in$ Mod-$\hat{R}_m$ ha una naturale struttura di A-modulo a $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ si identifica con $\mathrm{Hom}_{\hat{R}_m}(M, E_m)$ che separa i punti di M.

In particolare $D(E)$ contiene la classe $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. È poi chiaro che la categoria degli $\hat{R}_m$-moduli linearmente compatti può identificarsi con una sottocategoria piena di $C(E)$ tramite la restrizione a Mod-R_m della dualità.

Si definiscono in LTR ed in LTA i moduli linearmente compatti come nel § 6.

PROPOSIZIONE 1. – *La categoria degli R-moduli linearmente compatti è naturalmente equivalente a quella degli A-moduli linearmente compatti.*

DIM. – Se M è un R-modulo linearmente compatto, M è completo nella propria topologia, quindi la applicazione bilineare $R \times M \to M$ si estende ad $A \times M$. In tal modo M ed i suoi sottomoduli chiusi diventano oggetti di LTA così che M risulta un A-modulo linearmente compatto. Si osservi che ogni morfismo continuo tra due moduli completi di LTR si estende ad un morfismo della categoria LTA. È poi evidente che ogni A-modulo linearmente compatto è linearmente compatto come R-modulo, riguardando R come sottoanello topologico di A.

PROPOSIZIONE 2. – *Per ogni R-modulo M le condizioni che seguono sono equivalenti*

(*a*) *M è artiniano.*

(*b*) *M con la topologia discreta è in LTR ed è linearmente compatto.*

DIM. – (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Per 7.4 *d*), $M \in \mathcal{C}$ quindi M con la topologia discreta è in LTR. È noto che ogni modulo discreto ed artiniano è linearmente compatto. (Cfr. [11], Prop. 5).

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) $M \in \mathcal{C}$ quindi $M = \bigoplus_{\boldsymbol{m} \in \Omega} M_m$.

Evidentemente, per ogni $\boldsymbol{m} \in \Omega$, M_m può riguardarsi come un modulo discreto e linearmente compatto di $LT\hat{R}_m$, quindi M_m è un $\hat{R}_m$-modulo artiniano (Cfr. [5], 5.3). Dev'essere poi $M_m = 0$ per quasi tutti gli $\boldsymbol{m}$ poichè un modulo discreto e linearmente compatto non può essere una somma diretta di infiniti addendi non nulli ([11], Prop. 6).

Dunque M, visto come A-modulo, è artiniano. Ma, poichè $M \in \mathcal{C}$, ogni sotto-R-modulo di M è sotto-A-modulo e quindi M è un R-modulo artiniano.

Utilizzando la proposizione precedente si può dimostrare che i risultati di FAKHRUDDIN [3], riguardanti la struttura dei moduli linearmente compatti sopra un dominio d'integrità noetheriano ed h-locale, si estendono senza alcun cambiamento ai moduli linearmente compatti, sopra un qualunque anello commutativo noetheriano. In particolare si ha la seguente

PROPOSIZIONE 3. – *Ogni R-modulo linearmente compatto è il prodotto topologico* *di una famiglia di moduli* $(M_m)_{m\in\Omega}$ *dove per ogni* $\boldsymbol{m}\in\Omega$, M_m *è un* $\hat{R}_m$*-modulo linearmente compatto.*

Dalle considerazioni precedenti, in particolare dalle Proposizioni 1 e 3, discende che la categoria degli R-moduli linearmente compatti si può identificare con la categoria degli A-moduli linearmente compatti e che questa costituisce una sottocategoria piena $C_0(E)$ di $C(E)$.

Denotiamo con $D_0(E)$ la sottocategoria di $D(E)$ costituita dai moduli E-discreti M che ammettono una decomposizione del tipo

$$M=\bigoplus_{m\in\Omega} M_m \qquad \text{con} \qquad M_m\in \text{Mod-}R_m\,.$$

Si osservi che se un A-modulo M ammette una tale decomposizione essa è unica poichè $M_m=e_mM$. Utilizzando le Proposizioni 2.4 e 2.5 ed il fatto che Δ è una dualità si dimostra facilmente la seguente

PROPOSIZIONE 4. – *Un modulo* $M\in LTA$ *è in* $C_0(E)$ *se e solo se* M^* *appartiene a* $D_0(E)$. *Di conseguenza la restrizione a* $D_0(E)$ *del funtore* Δ *determina una dualità tra* $D_0(E)$ *e la categoria degli* A*-moduli linearmente compatti.*

OSSERVAZIONE. – Si può dimostrare che la restrizione a $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ del funtore Δ è una dualità tra $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ e la categoria degli A-moduli linearmente compatti ed $\mathcal{F}$-separati.

7.6. PROPOSIZIONE. – *Le condizioni che seguono sono equivalenti*:

(*a*) *L'insieme* Ω *degli ideali massimali di* R *è finito.*

(*b*) $D(E)=\text{Mod-}A$.

(*c*) $C(E)$ *coincide con la categoria degli* A*-moduli linearmente compatti.*

DIM. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Se Ω è finito l'insieme degli ideali massimali di A coincide con $\{\hat{\boldsymbol{m}}:\boldsymbol{m}\in\Omega\}$. D'altra parte, per ogni $\boldsymbol{m}\in\Omega$, E_m è l'inviluppo iniettivo dell'A-modulo semplice $A/\hat{\boldsymbol{m}}$. Da ciò segue che E è un cogeneratore (iniettivo) di Mod-A.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*) Supponiamo Ω infinito. Allora A contiene un ideale massimale L distinto da ciascuno degli $\hat{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{m}\in\Omega$. Ciò implica che l'A-modulo semplice A/L non è isomorfo a nessuno degli $A/\hat{\boldsymbol{m}}$. Sia S lo zoccolo di E. Per 7.4 *b*) si ha $S=\bigoplus_{m\in\Omega} A/\hat{\boldsymbol{m}}$. Se $A/L\in D(E)$ esisterebbe una iniezione di A/L in E, per cui E dovrebbe contenere un sottomodulo semplice isomorfo ad A/L.

Ciò è assurdo poichè ogni sottomodulo semplice di E è isomorfo ad uno degli $A/\hat{\boldsymbol{m}}$.

(*a*) $\Rightarrow$ (*c*). Ω è finito se e solo se E è artiniano. (Cfr. 7.3 *d*) e la Prop. 6 di [7]). Ciò significa $C(E)=C_0(E)$, per la Proposizione 5.1 e la Proposizione 2 di 7.5.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Cap. 7, Paris (1963).
[2] N. BOURBAKI, *Algebre Commutative*, Cap. 3, Paris (1961).
[3] S. FAKHRUDDIN, *Linearly compact modules over noetherian rings*, J. of Algebra, **24** (1973), pp. 554-550.
[4] J. KELLEY, *General Topology*, New York (1955).
[5] I. MACDONALD, *Duality over complete local rings*, Topology, **1** (1962), pp. 213-235.
[6] E. MATLIS, *Injective modules over noetherian rings*, Pac. J. of Math., **8** (1958), pp. 511-528.
[7] E. MATLIS, *Modules with descending chain condition*, T.A.M.S., **97** (1960), pp. 495-508.
[8] C. NĂSTĂSESCU - T. ALBU, *Decomposition primaire des modules*, J. of Algebra, **23** (1972), pp. 263-270.
[9] L. PONTRYAGIN, *Topological Groups*, New York (1966).
[10] B. STENSTRÖM, *Rings and modules of quotientes*, Lecture Notes n. 237, Berlin (1971).
[11] D. ZELINSKY, *Linearly compact modules and rings*, Am. J. of Math., **75** (1953), pp. 79-90.