Un teorema di esistenza della soluzione del problema di Cauchy nella classe delle funzioni assolutamente continue nelle singole variabili (*) (**).

MARIA GRAZIA CAZZANI NIERI (Pavia)

Sunto. — È dimostrato un teorema di esistenza per il problema di Cauchy relativo ai sistemi semilineari di tipo iperbolico in due variabili indipendenti

$$(I) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \{p_j + \varrho_i(x, y) q_j\} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \quad (i = 1, \dots, m),$$

in una nuova, ampia classe funzionale: la soluzione è ricercata nel campo funzionale costituito dalle m -ple di funzioni $z_j(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), le quali sono assolutamente continue nelle singole variabili x, y separatamente e soddisfano il sistema (I) quasi ovunque. Sono costruiti inoltre due controesempi, che giustificano le ipotesi introdotte, ed è dimostrato un lemma, relativo alle equazioni differenziali ordinarie, utilizzato nella dimostrazione del teorema di esistenza.

Introduzione.

Il problema di Cauchy relativo ai sistemi di equazioni a derivate parziali quasi lineari di tipo iperbolico in più variabili indipendenti $x, y_1, \dots, y_r$ è stato ampiamente considerato e sono state dimostrate l'esistenza e l'unicità della soluzione (in senso generalizzato) nel campo delle funzioni continue, le quali inoltre sono assolutamente continue in x e lipschitziane nel complesso delle variabili $y_1, \dots, y_r$ ⁽¹⁾.

Nel presente lavoro consideriamo il problema di Cauchy per i sistemi semilineari di tipo iperbolico in due variabili indipendenti in forma caratteristica

$$(I) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \{p_j + \varrho_i(x, y) q_j\} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m) \quad (i = 1, \dots, m)$$

(*) Entrata in Redazione il 9 marzo 1976.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R. I risultati ottenuti nel presente lavoro sono stati comunicati a Cagliari, in occasione del X Congresso U.M.I., 22-28 settembre 1975.

⁽¹⁾ M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoremi d'esistenza per sistemi semilineari di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Annali di Mat., S. IV, **68** (1965), pp. 119-160.

M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni quasi lineari a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Annali di Mat., S. IV, **75** (1967), pp. 1-46.

M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Annali di Mat., S. IV, **48** (1959), pp. 103-134.

in una nuova e più ampia classe funzionale: la soluzione

$$z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$$

è ricercata nella classe delle funzioni assolutamente continue rispetto alle singole variabili x, y separatamente.

È stabilito un teorema di esistenza relativo al problema di Cauchy per il sistema (I).

Le funzioni $a_{ij}(\dots)$ sono supposte continue, assolutamente continue in x e lipschitziane in y , le funzioni $\varrho_i(\dots)$, $f_i(\dots)$ sono quasi continue in x e soddisfano nel complesso delle rimanenti variabili condizioni del tipo di Carathéodory; inoltre si suppone che il campo di definizione D_0 delle funzioni $\varrho_i(x, y)$ sia decomponibile in un numero finito di campi, in ciascuno dei quali, a meno di un insieme di misura nulla (precisamente per quasi tutti gli x) le funzioni $\varrho_i(x, y)$, ($i=1, \dots, m$), $\varrho_i(x, y) - \varrho_h(x, y)$, ($i, h=1, \dots, m$; $i \neq h$), non cambino segno.

Si dimostra l'esistenza di una m -pla di funzioni $z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$, assolutamente continue rispetto alle singole variabili, le quali soddisfano il sistema (I) quasi ovunque nel campo D_0 e inoltre, nei punti di D_0 di ascissa nulla, le condizioni

$$(II) \quad z_i(0, y) = \phi_i(y) \quad (i=1, \dots, m),$$

essendo $\phi_i(y)$ funzioni assolutamente continue assegnate.

Più precisamente le funzioni $z_i(x, y)$, ($i=1, \dots, m$), risultano equiassolutamente continue in x al variare di y e equiassolutamente continue in y al variare di x , nel senso precisato nell'enunciato del teorema.

Nella dimostrazione, considerate le caratteristiche del sistema (I), è introdotto un sistema di equazioni integrali (cfr. le (10)): per tale sistema è dimostrata l'esistenza della soluzione $z_i(x, y)$, ($i=1, \dots, m$), la quale risulta soluzione quasi ovunque nel campo D_0 del sistema (I) sotto le condizioni (II).

Le funzioni $z_i(x, y)$, ($i=1, \dots, m$), risultano assolutamente continue su ogni curva caratteristica fissata.

Nel § 2 si giustificano in un certo senso le ipotesi relative al segno delle funzioni $\varrho_i(\dots)$, $\varrho_i(\dots) - \varrho_h(\dots)$, mostrando con un esempio che, se una funzione $\varrho_i(\dots)$ cambia segno infinite volte al variare di x , la soluzione del sistema di equazioni integrali, nel campo funzionale precisato, può mancare. Pertanto, se non si aggiunge un'ipotesi sulle funzioni $\varrho_i(\dots)$, per esempio sul loro segno, il teorema di esistenza, almeno per il sistema di equazioni integrali, non sussiste.

Con un ulteriore esempio è messo in luce che, se $\varrho_i(\dots) - \varrho_h(\dots)$, per una coppia fissata di valori i, h , cambia segno infinite volte al variare di x , le funzioni $z_i(x, y)$, ($i=1, \dots, m$), soluzione del particolare sistema di equazioni integrali considerato, sono sì assolutamente continue rispetto alle singole variabili, ma, considerate lungo le curve caratteristiche, non sono assolutamente continue, precisamente non sono neppure a variazione limitata. In assenza di quest'ultima proprietà non sembra

possibile affrontare la costruzione di una successione di funzioni approssimanti la soluzione del sistema di equazioni integrali, nel suddetto campo funzionale.

Inoltre alla fine del § 2 (cf. n. 10) è dimostrato un lemma, riguardante le equazioni differenziali ordinarie, che è utilizzato nella dimostrazione del teorema di esistenza del § 1.

§ 1.

1. - Teorema di esistenza.

Sia $M(x)$ una funzione quasi continua, non negativa e integrabile ^(1bis) nell'intervallo $(0, a_0)$ e sia b_0 un numero positivo tale che per $0 \leq x < a_0$ sia $\int_0^x M(t) dt < b_0$, mentre per $x = a_0$ può anche valere l'uguaglianza.

Sia D_0 il campo definitivo dalle disequazioni

$$D_0: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad -b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt.$$

Siano $a_{ij}(x, y)$, ($i, j=1, \dots, m$), funzioni continue in D_0 , le quali in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_0)$ siano lipschitziane in y nell'intervallo $I_x \left(-b_0 + \int_0^x M(t) dt, b_0 - \int_0^x M(t) dt \right)$ e in corrispondenza ad ogni y di $(-b_0, b_0)$ siano assolutamente continue in x nell'intervallo I_y dei valori x , tali che i punti (x, y) appartengano al campo D_0 ; inoltre esista una funzione $\mu(x)$, ($0 \leq x \leq a_0$), non negativa, quasi continua e integrabile, tale che sia

$$(1) \quad |a_{ij}(x', y) - a_{ij}(x'', y)| \leq \left| \int_{x'}^{x''} \mu(x) dx \right|$$

per ogni coppia di punti (x', y) , (x'', y) del campo D_0 ; sia A una costante non negativa tale che per tutte le coppie di punti (x, y) , $(x, \bar{y})$ di D_0 sia

$$(1') \quad |a_{ij}(x, y) - a_{ij}(x, \bar{y})| \leq A|y - \bar{y}|.$$

Detto A il determinante delle funzioni $a_{ij}(\dots)$, ($i, j=1, \dots, m$), in tutto il campo D_0 sia

$$(1'') \quad A = 1.$$

^(1bis) In tutto il presente lavoro l'integrabilità va intesa nel senso di Lebesgue.

Siano $\varrho_i(x, y)$, ($i=1, \dots, m$), funzioni definite in D_0 , quasi continue in x su ogni intervallo I_x , e, in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_0)$, continue in y nell'intervallo I_x ; per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia

$$(2) \quad |\varrho_i(x, y)| \leq M(x) \quad (i=1, \dots, m)$$

per ogni y di I_x ; esista una funzione $L(x)$ in $(0, a_0)$, quasi continua, non negativa e integrabile, tale che per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia

$$(3) \quad |\varrho_i(x, y) - \varrho_i(x, \bar{y})| \leq L(x)|y - \bar{y}| \quad (i=1, \dots, m)$$

per ogni coppia $y, \bar{y}$ di I_x .

Siano $f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)$, ($i=1, \dots, m$), funzioni definite nel campo

$$C_\infty: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad -b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt, \quad -\infty < z_j < +\infty, \quad (j=1, \dots, m),$$

quasi continue rispetto a x in I_x per ogni $(n+1)$ -pla $(y, z_1, \dots, z_m)$ fissata, e, per ogni x fissato in $(0, a_0)$, continue nel complesso delle variabili $y, z_1, \dots, z_m$ nel campo

$$\Delta_x: \quad -b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt, \quad -\infty < z_j < +\infty \quad (j=1, \dots, m);$$

esistano due funzioni $N(x), L_1(x)$ quasi continue, non negative e integrabili in $(0, a_0)$, tali che per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia

$$(4) \quad |f_i(x, y, z_1, \dots, z_m)| \leq N(x), \quad (i=1, \dots, m)$$

per ogni $(m+1)$ -pla $(y, z_1, \dots, z_m)$ del campo Δ_x , e

$$(5) \quad |f_i(x, y, z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)| \leq L_1(x) \left\{ |y - \bar{y}| + \sum_{j=1}^m |z_j - \bar{z}_j| \right\} \quad (i=1, \dots, m)$$

per ogni coppia di $(m+1)$ -ple $(y, z_1, \dots, z_m), (\bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ di Δ_x .

Inoltre l'intervallo $(0, a_0)$ sia decomponibile in un numero finito di intervalli, in ciascuno dei quali per quasi tutti gli x vale, per ogni y di I_x , una delle relazioni

$$(6) \quad \varrho_i(x, y) \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad \varrho_i(x, y) \leq 0$$

per ogni i compreso tra 1 e m , e per ogni coppia di valori distinti i, h , ($i, h = 1, \dots, m$, $i \neq h$), una delle relazioni

$$(7) \quad \varrho_i(x, y) \leq \varrho_h(x, y) \quad \text{ovvero} \quad \varrho_i(x, y) \geq \varrho_h(x, y).$$

Siano infine $\phi_1(y), \phi_2(y), \dots, \phi_m(y)$ funzioni assolutamente continue in $(-b_0, b_0)$.
In queste ipotesi esiste una m -pla di funzioni

$$z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y),$$

definite nel campo

$$D_0: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad -b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt,$$

le quali in corrispondenza ad ogni y di $(-b_0, b_0)$ sono assolutamente continue in x nell'intervallo I_x , in modo uniforme rispetto a y , in corrispondenza ad ogni x di $(0, a_0)$ sono assolutamente continue in y nell'intervallo I_x , in modo uniforme rispetto a x ⁽²⁾, soddisfano quasi ovunque in D_0 il sistema di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico semilineare in due variabili indipendenti (in forma caratteristica)

$$(I) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \{p_j + \varrho_i(x, y) q_j\} = f_i(x, y, z_1, \dots, z_m), \quad (i = 1, \dots, m),$$

(dove $p_j = \partial z_j / \partial x$, $q_j = \partial z_j / \partial y$) e inoltre in $(-b_0, b_0)$ le condizioni

$$(II) \quad z_i(0, y) = \phi_i(y) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Premettiamo alla dimostrazione, che è sviluppata nei nn. 5, 6, alcune considerazioni preliminari (cfr. nn. 2, 3, 4).

2. - Curve caratteristiche.

Definiamo nel campo

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y < +\infty$$

⁽²⁾ Sono assolutamente continue per esempio rispetto a y in modo uniforme rispetto a x nel senso che, preso $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero $\delta > 0$, tale che, se $(y'_1, y''_1), \dots, (y'_r, y''_r)$ sono r intervalli di I_x non sovrapposti a due a due di ampiezza complessiva minore di δ , per ogni x di $(0, a_0)$ sia

$$\sum_{k=1}^r |z_i(x, y'_k) - z_i(x, y''_k)| < \varepsilon, \quad (i = 1, \dots, m).$$

le funzioni $\tilde{\varrho}_i(x, y)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\tilde{\varrho}_i(x, y) &= \varrho_i(x, y) \quad \text{nel campo } D_0; \\ \tilde{\varrho}_i(x, y) &= \varrho_i\left(x, b_0 - \int_0^x M(t) dt\right) \quad \text{per } y > b_0 - \int_0^x M(t) dt; \\ \tilde{\varrho}_i(x, y) &= \varrho_i\left(x, -b_0 + \int_0^x M(t) dt\right) \quad \text{per } y < -b_0 + \int_0^x M(t) dt, \quad (i = 1, \dots, m).\end{aligned}$$

Nel campo D_∞ , le funzioni $\tilde{\varrho}_i(x, y)$ soddisfano evidentemente le (2) per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ e per ogni y , le (3) per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ e per ogni coppia $y, \bar{y}$.

Siano

$$Y = g_i(X; x, y) \quad (i = 1, \dots, m)$$

le funzioni definite dalle equazioni integrali

$$(8) \quad g_i(X; x, y) = y + \int_x^X \tilde{\varrho}_i(t, g_i(t; x, y)) dt$$

nel campo

$$\Delta_\infty: \quad 0 \leq X \leq a_0, \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Valgono i teoremi di esistenza e unicità di Carathéodory ^(2bis) per l'equazione (8).

Le funzioni $g_i(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono assolutamente continue in X in modo uniforme rispetto alle rimanenti variabili x, y , assolutamente continue in x in modo uniforme rispetto a X, y , lipschitziane in y con costante di Lipschitz indipendente da x, X ⁽³⁾. Risulta

$$(9) \quad |g_i(X; x, y) - g_i(X; x, \bar{y})| \leq \lambda_1 |y - \bar{y}|$$

con $\lambda_1 = \exp \left[\int_0^{a_0} L(t) dt \right]$, per ogni coppia di punti $(X; x, y)$, $(X, x, \bar{y})$ di Δ_∞ .

Inoltre, in virtù del citato teorema di unicità, le funzioni $g_i(X; x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), risultano crescenti in y ; in ciascuna delle strisce di D_∞ , in cui vale una determinata delle (6), sono monotone anche rispetto a X, x , e precisamente non decrescenti in X e non crescenti in x se vale la prima delle (6), non crescenti in X e non decrescenti in x se vale la seconda delle (6).

^(2bis) Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig (1918), Kap. XI, pp. 665-688.

⁽³⁾ Cfr. M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti*, Annali di Mat., (IV), **44** (1957), pp. 357-418, § 1, n. 1.

Se (x, y) appartiene a D_0 , per ogni X di $(0, x)$ il punto $(X, g_i(X; x, y))$ appartiene a D_0 .

Pertanto in corrispondenza ad ogni (x, y) di D_0 , per ogni X di $(0, x)$ è ⁽⁴⁾

$$(8') \quad g_i(X; x, y) = y + \int_x^X \varrho_i(t, g_i(t; x, y)) dt, \quad (i = 1, \dots, m).$$

3. - Un sistema di equazioni integrali.

a) Il teorema di esistenza del n. 1 si può ricondurre ad un teorema di esistenza per un sistema di equazioni integrali.

Nelle ipotesi del n. 1 sulle funzioni $a_{ij}(\dots)$, $\varrho_i(\dots)$, $f_i(\dots)$, $\phi_i(\dots)$, esistano infatti n funzioni $z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$, assolutamente continue nelle singole variabili x, y , le quali soddisfino nel campo D_0 il sistema di equazioni integrali

$$(10) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) z_j(x, y) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, g_i(0; x, y)) \phi_j(g_i(0; x, y)) + \\ + \int_0^x \left[\sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_j(X, g_i(X; x, y)) + \right. \\ \left. + f_i(X, g_i(X; x, y), z_1(X, g_i(\dots)), \dots, z_m(\dots)) \right] dX, \quad (i = 1, \dots, m);$$

allora in quasi tutto il campo D_0 valgono le

$$(I) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \{p_j(x, y) + \varrho_i(x, y) q_j(x, y)\} = f_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)), \\ (i = 1, \dots, m)$$

e in tutto l'intervallo $(-b_0, b_0)$ le

$$(II) \quad z_j(0, y) = \phi_j(y), \quad (j = 1, \dots, m).$$

Le (II) sono evidenti: infatti dalle (10) per $x = 0$, tenuto conto che è $g_i(0; 0, y) = y$, si ha

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(0, y) z_j(0, y) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, y) \phi_j(y);$$

tenuto conto della (1''), ne seguono le (II) in tutto $(-b_0, b_0)$.

⁽⁴⁾ Relativamente alla (8') e alle proprietà di monotonia delle funzioni $g_i(\dots)$ cfr. M. G. CAZZANI NIERI, *Su un problema misto per un sistema di equazioni a derivate parziali*, Annali di Mat., (IV), 77 (1967), pp. 131-178; cfr. p. 137.

Rileviamo che nelle ipotesi fatte sulle funzioni $a_{ij}(X, Y)$, $\varrho_i(\dots)$, le funzioni $a_{ij}(X, g_i(X; x, y))$ sono assolutamente continue in X ; per quasi tutti gli X , tali che il punto $(X, g_i(X; x, y))$ appartenga a D_0 , tali funzioni sono derivabili; in corrispondenza ad ogni x fissato in $(0, a_0)$, per quasi tutti gli y di I_x , per quasi tutti gli X , è

$$(11) \quad \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} = \frac{\partial a_{ij}(\dots)}{\partial X} + \varrho_i(\dots) \frac{\partial a_{ij}(\dots)}{\partial Y}, \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Per dimostrare che in quasi tutto D_0 valgono le (I), posto

$$g_i(0; x, y) = \eta,$$

osserviamo che, in virtù del teorema di unicità citato in ^(2bis), è

$$g_i(X; x, y) = g_i(X; 0, \eta), \quad (0 \leq X \leq a_0),$$

e, per ogni i , fissato η , è

$$(10') \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, g_i(x; 0, \eta)) z_j(x, g_i(x; 0, \eta)) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, \eta) \phi_j(\eta) + \\ + \int_0^x \left[\sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; 0, \eta))}{dX} z_j(X, g_i(X; 0, \eta)) + \right. \\ \left. + f_i(X, g_i(X; 0, \eta), z_1(\dots), \dots, z_m(\dots)) \right] dX$$

per ogni x tale che il punto $(x, g_i(x; 0, \eta))$ appartenga al campo D_0 ; indichiamo l'intervallo di tali valori di x con $(0, \beta_i(\eta))$.

Posto

$$Z_i(x, y) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) z_j(x, y),$$

in virtù delle (10') la funzione $Z_i(x, g_i(x; 0, \eta))$ risulta assolutamente continua in x nell'intervallo $(0, \beta_i(\eta))$, e in quasi tutto $(0, \beta_i(\eta))$ esiste finita la sua derivata.

In quasi tutto ⁽⁵⁾ D_0 è

$$(12) \quad \frac{\partial Z_i(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{ij}(x, y)}{\partial x} z_j(x, y) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial Z_i(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{ij}(x, y)}{\partial y} z_j(x, y) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial y};$$

in virtù della corrispondenza biunivoca che la funzione

$$y = g_i(x; 0, \eta)$$

⁽⁵⁾ L'insieme dei punti di D_0 in cui esistono le derivate parziali di $Z_i(x, y)$ è misurabile e ha la stessa misura di D_0 . Cfr. l.c. in ⁽²⁾, Kap. XI, § 557, Satz 1; § 559, Satz 3.

pone tra i punti (x, y) del campo D_0 e i punti (x, η) del campo, corrispondente nel piano x, η , che chiamiamo Δ_0 , nella quale ad un insieme di misura nulla di D_0 corrisponde un insieme di misura di Δ_0 (e viceversa) ⁽⁶⁾, le derivate parziali $\partial Z_i / \partial x$, $\partial Z_i / \partial y$ della funzione $Z_i(x, y)$ esistono in quasi tutto Δ_0 ; quindi in corrispondenza a quasi tutti gli η di $(-b_0, b_0)$ esistono per quasi tutti gli x di $(0, \beta_i(\eta))$. Allora, per un teorema di derivazione di funzione composta ⁽⁷⁾, per quasi tutti gli η di $(-b_0, b_0)$ è

$$\frac{dZ_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{dx} = \frac{\partial Z_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial x} + \varrho_i(x, g_i(x; 0, \eta)) \frac{\partial Z_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial y}$$

in quasi tutto $(0, \beta_i(\eta))$, e quindi, tenuto conto delle (10'), (11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_i(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial x} + \varrho_i(x, g_i(\dots)) \frac{\partial Z_i(x, g_i(\dots))}{\partial y} = \\ = \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial a_{ij}(x, g_i(\dots))}{\partial x} + \varrho_i(\dots) \frac{\partial a_{ij}(\dots)}{\partial y} \right] z_j(\dots) + f_i(\dots): \end{aligned}$$

tenuto conto delle (12) in quasi tutto Δ_0 si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, g_i(x; 0, \eta)) \left\{ \frac{\partial z_j(x, g_i(x; 0, \eta))}{\partial x} + \varrho_i(\dots) \frac{\partial z_j(\dots)}{\partial y} \right\} = \\ = f_i(x, g_i(x; 0, \eta), z_1(x, g_i(x; 0, \eta)), \dots, z_m(\dots)), \end{aligned}$$

vale a dire in quasi tutto (cf. ⁽⁶⁾) D_0 è

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \left\{ \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} + \varrho_i(x, y) \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial y} \right\} = \\ = f_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(\dots)), \quad (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. — Osserviamo che, nel dimostrare la validità delle (I) in quasi tutto il campo D_0 , interviene soltanto l'assoluta continuità in x delle funzioni $Z_i(x, g_i(x; 0, \eta))$, ($i = 1, \dots, m$), e non delle singole funzioni $z_j(x, g_i(x; 0, \eta))$, ($i, j = 1, \dots, m$).

b) La proprietà dimostrata in a) si può in parte invertire. Si può dimostrare che, se $z_i(x, y)$, ($i = 1, \dots, m$), sono funzioni assolutamente continue rispetto alle singole variabili nel campo D_0 , soddisfacenti in quasi tutto D_0 il sistema (I) e in

⁽⁶⁾ Cfr. l.c. in ⁽³⁾, § 1, n. 2, p. 363. Cfr. anche H. RADEMACHER, *Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen ...*, Math. Ann., **79** (1919), pp. 340-359.

⁽⁷⁾ Cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulla derivata di una funzione composta*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **20** (1951), pp. 462-467.

$(-b_0, b_0)$ le condizioni (II), tali inoltre che, considerate le funzioni $z_j(X, g_i(X; x, y))$ ($0 \leq X \leq \beta_i(x, y)$), esse siano assolutamente continue rispetto a X in $(0, \beta_i)$, in tutto il campo D_0 valgono le (10) per $i = 1, \dots, m$ ^(7bis).

4. - Proprietà preliminari di alcune funzioni.

Fissato un valore intero h , con $1 \leq h \leq m$, e un punto (x_0, y_0) in D_0 , poniamo in $(0, a_0)$

$$(13) \quad g_h(x; x_0, y_0) = G(x).$$

Per comodità definiamo le funzioni $\phi_j(y)$, ($j=1, \dots, m$), per qualunque y ponendo

$$\phi_j(y) = \phi_j(-b_0) \quad \text{per } y < -b_0, \quad \phi_j(y) = \phi_j(b_0) \quad \text{per } y > b_0.$$

Vogliamo dimostrare alcune proprietà delle funzioni

$$(14) \quad \phi_j(g_i(X; x, y)) \quad (j, i = 1, \dots, m)$$

e

$$(15) \quad \phi_j(g_i(X; x, G(x))) \quad (j, i = 1, \dots, m).$$

Le funzioni $g_i(X; x, y)$, come abbiamo rilevato nel n. 2, sono monotone in X , e anche in x e in y ; inoltre sono equiassolutamente continue rispetto a X in $(0, a_0)$ al variare di (x, y) in D_∞ , rispetto a x in $(0, a_0)$ al variare di (X, y) in D_∞ , lipschitziane rispetto a y con costante di Lipschitz indipendente da X, x .

Pertanto le funzioni (14), come funzioni assolutamente continue di una funzione equiassolutamente continua in X e monotona in X , sono funzioni equiassolutamente continue in X in $(0, a_0)$ al variare di (x, y) in D_∞ ; analogamente risultano equiassolutamente continue rispetto a x in $(0, a_0)$ al variare di (X, y) in D_∞ , e rispetto a y , al variare di X e x in $(0, a_0)$.

Rileviamo inoltre che la variazione totale della funzione $\phi_j(g_i(X; x, y))$ coincide con la variazione totale della funzione $\phi_j(Y)$, per Y variabile nell'intervallo $(g_i(0; x, y), g_i(a_0; x, y))$.

Indicata con V_{0j} la variazione totale della funzione $\phi_j(Y)$ nell'intervallo $(-b_0, b_0)$ e con V_0 la massima delle V_{0j} ($i = 1, 2, \dots, m$), per qualunque (x, y) del campo D_0 , indicata con $\Omega(\phi_j(\dots))$ la variazione totale rispetto a X della funzione $\phi_j(\dots)$, è

$$(16) \quad \Omega(\phi_j(g_i(X; x, y))) \leq V_0 \quad (0 \leq X \leq a_0), \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Consideriamo ora le funzioni (15) per $i \neq h$, ($j = 1, \dots, m$). La funzione $g_i(X; x, G(x))$

^(7bis) Cfr. la prima memoria citata in ⁽¹⁾, § 1, n. 2b).

è monotona rispetto a x in virtù dell'ipotesi (7) e di un lemma che verrà dimostrato nel § 2 (cfr. n. 10) ⁽⁸⁾; inoltre tale funzione è assolutamente continua in x : si ha infatti, per ogni coppia di valori x', x'' di $(0, a_0)$,

$$|g_i(X; x'', G(x'')) - g_i(X; x', G(x'))| \leq \lambda_1 |g_i(x'; x'', G(x'')) - G(x')|$$

e

$$|g_i(x'; x'', G(x'')) - G(x')| = \left| G(x'') + \int_{x''}^{x'} \varrho_i(t; g_i(t; x'', G(x''))) dt - \left[G(x'') + \int_{x''}^{x'} \varrho_h(t, G(t)) dt \right] \right|,$$

da cui, tenuto conto della (2),

$$(17) \quad |g_i(x'; x'', G(x'')) - G(x')| \leq 2 \left| \int_{x'}^{x''} M(t) dt \right|$$

e

$$(18) \quad |g_i(X; x'', G(x'')) - g_i(X; x', G(x'))| \leq 2 \lambda_1 \left| \int_{x'}^{x''} M(t) dt \right|.$$

Osserviamo inoltre che le funzioni

$$g_i(X; x, G(x)) = g_i(X; x, g_h(x; x_0, y_0))$$

sono equiassolutamente continue rispetto a x in $(0, a_0)$, qualunque sia X in $(0, a_0)$ e (x_0, y_0) in D_∞ .

Tenuto conto di tali proprietà delle funzioni $g_i(X; x, G(x))$, ($i = 1, \dots, m$), le funzioni (15) risultano equiassolutamente continue rispetto a x in $(0, a_0)$, al variare di X in $(0, a_0)$ e di (x_0, y_0) in D_∞ .

5. - Esistenza della soluzione in un campo parziale.

a) Nel presente numero *restringiamo* (momentaneamente) *le ipotesi* (6), (7): supponiamo che per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$, per ogni y di I_x , valga una (fissata) delle (6) in corrispondenza ad ogni valore i , con $i = 1, \dots, m$, e che, considerata una

⁽⁸⁾ Se vale la disuguaglianza $\varrho_i(x, y) \leq \varrho_h(x, y)$, il lemma che verrà dimostrato nel § 2, n. 10, assicura che, per $x' < x''$, si ha

$$g_i(x'; x'', G(x'')) \geq G(x')$$

e, in virtù del teorema di unicità citato in ⁽²⁾, è per ogni X di $(0, a_0)$

$$g_i(X; x'', G(x'')) \geq g_i(X; x', G(x')) ,$$

vale a dire la funzione $g_i(X; x, G(x))$ è non decrescente rispetto a x , fissato X .

Analogamente si prova che, se è $\varrho_i(x, y) \geq \varrho_h(x, y)$, la funzione $g_i(X; x, G(x))$ è non crescente rispetto a x , fissato X .

qualunque coppia di valori distinti i, h ($i, h = 1, \dots, m, i \neq h$), per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ valga, per ogni y di I_x , una (fissata) delle relazioni (7).

Dimostriamo l'esistenza della soluzione, di cui al n. 1, in un campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq a, \quad -b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt,$$

dove a è un opportuno numero positivo, non superiore ad a_0 , precisato dalle (39), (44).

b) Consideriamo il sistema di equazioni integrali

$$(10) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) z_j(x, y) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, g_i(0; x, y)) \phi_j(g_i(0; x, y)) + \\ + \int_0^x \sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_j(X, g_i(\dots)) + \\ + f_i(X, g_i(\dots), z_1(X, g_i(\dots)), \dots, z_m(\dots)) dx, \quad (i = 1, \dots, m),$$

nelle funzioni incognite $z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$.

Vogliamo costruire nel campo D una soluzione del sistema (10), costituita da funzioni assolutamente continue rispetto alle singole variabili, mediante un procedimento di approssimazioni successive.

Posto in D_0

$$(19) \quad z_j^{(0)}(x, y) = \phi_j(y) \quad (j = 1, \dots, m),$$

consideriamo, per $n = 1, 2, \dots$, le funzioni

$$(20) \quad z_j^{(n)}(x, y) \quad (j = 1, \dots, m)$$

definite in D_0 mediante le relazioni

$$(21) \quad \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) z_j^{(n)}(x, y) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, g_i(0; x, y)) \phi_j(g_i(0; x, y)) + \\ + \int_0^x \left[\sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_j^{(n-1)}(X, g_i(\dots)) + \right. \\ \left. + f_i(X, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(X, g_i(\dots)), \dots, z_m^{(n-1)}(X, g_i(\dots))) \right] dx, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Vogliamo provare che le funzioni (20), definite dalle (21), costituiscono nel campo D , per $n = 1, 2, \dots$, una successione di funzioni equilimitate, assolutamente continue rispetto a x per ogni y fissato e rispetto a y per ogni x fissato; che sono inoltre equiassolutamente continue in x per ogni y fissato e in y per ogni x fissato, al variare di n .

Per dimostrarlo procediamo per induzione.

Nel successivo capoverso *c)* dimostriamo l'equilimitatezza e nel capoverso *d)* l'equiassoluta continuità.

c) Sia C una costante positiva tale che in $(-b_0, b_0)$ sia

$$(22) \quad \sum_{j=1}^m |\phi_j(y)| \leq C.$$

Indicati con $\alpha_{ij}(x, y)$ i complementi algebrici di $a_{ij}(x, y)$ nel determinante A , siano B_1, B_2 due costanti non negative tali che sia in tutto D_0

$$(23) \quad |a_{ij}(x, y)| \leq B_1, \quad |\alpha_{ij}(x, y)| \leq B_2, \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Sia $\mathcal{U}(x)$ la funzione definita in $(0, a_0)$ dall'equazione integrale

$$(24) \quad \mathcal{U}(x) = m^2 B_1 B_2 C + m^2 B_2 \int_0^x \{[\mu(X) + \Lambda M(X)] \mathcal{U}(X) + N(X)\} dX,$$

vale a dire

$$(24') \quad \mathcal{U}(x) = \left\{ \exp \left[m^2 B_2 \int_0^x (\mu(X) + \Lambda M(X)) dX \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ m^2 B_1 B_2 C + m^2 B_2 \int_0^x N(X) \exp \left[-m^2 B_2 \int_0^X (\mu(t) + \Lambda M(t)) dt \right] dX \right\} \right\}.$$

Supponiamo che le funzioni $z_j^{(n-1)}(x, y)$, $(j = 1, \dots, m)$, siano continue in D_0 e soddisfino in D_0 la disuguaglianza

$$(25) \quad \sup_{-b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt} \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(x, y)| \leq \mathcal{U}(x).$$

Dimostriamo che anche le funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, $(j = 1, \dots, m)$, soddisfano in D_0 la disuguaglianza

$$(25') \quad \sum_{j=1}^m |z_j^{(n)}(x, y)| \leq \mathcal{U}(x).$$

Infatti dalle (21) seguono le

$$(21') \quad z_j^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(x, y) \left\{ \sum_{s=1}^m a_{is}(0, g_i(0; x, y)) \phi_s(g_i(0; x, y)) + \right. \\ \left. + \int_0^x \left[\sum_{s=1}^m \frac{da_{is}(X, g_i(X; x, y))}{dX} z_s^{(n-1)}(X, g_i(\dots)) + \right. \right. \\ \left. \left. + f_i(X, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \right] dX \right\}, \quad (j = 1, \dots, m).$$

Dalla (25) segue

$$|z_j^{(n)}(x, y)| \leq mB_1B_2C + mB_2 \int_0^x \{(\mu(X) + \Lambda M(X)) \mathfrak{U}(X) + N(X)\} dX, \quad (j=1, \dots, m),$$

e anche

$$\sum_{j=1}^m |z_j^{(n)}(x, y)| \leq m^2 B_1 B_2 C + m^2 B_2 \int_0^x \{(\mu(X) + \Lambda M(X)) \mathfrak{U}(X) + N(X)\} dX;$$

dall'ultima disuguaglianza e dalla (24) segue la (25').

Rileviamo che la (25) vale per le funzioni $z_j^{(0)}(x, y)$, ($j=1, \dots, m$).

Infatti dalle (1''), (23) risulta ⁽⁹⁾ $mB_1B_2 \geq 1$, e quindi dalla (24) segue $\mathfrak{U}(0) \geq mC > C$; tenuto conto della (22) e delle (19), risulta in D_0

$$\sum_{j=1}^m |z_j^{(0)}(x, y)| \leq \mathfrak{U}(x).$$

d) Indicata con Λ_0 la costante di Lipschitz rispetto a y delle funzioni $\alpha_{ij}(x, y)$, ($i, j=1, \dots, m$), poniamo per brevità

$$(26) \quad H = m\Lambda_0 \left\{ B_1 C + \int_0^{a_0} [(\mu(X) + \Lambda M(X)) \mathfrak{U}(X) + N(X)] dX + mB_2 \Lambda \mathfrak{U}(a_0) + \right. \\ \left. + mB_2 \lambda_1 \int_0^{a_0} L_1(X) dX \right\},$$

$$(27) \quad S(t) = \left[2\Lambda \mathfrak{U}(a_0) + 2\lambda_1 \int_0^{a_0} L_1(\tau) d\tau \right] \cdot M(t) + [\mu(t) + \Lambda M(t)] \mathfrak{U}(t) + N(t), \\ (0 \leq t \leq a_0),$$

$$(28) \quad F_1 = mB_1 V_0 + \int_0^{a_0} S(t) dt.$$

Sia F_2 una costante positiva maggiorante la variazione totale delle funzioni $a_{ij}(X, g_h(X; x, y))$, ($i, j=1, \dots, m$), rispetto a X nell'intervallo dei valori X , tali che il punto $(X, g_h(X; x, y))$ appartenga a D_0 ⁽¹⁰⁾: indichiamo con $(0, \beta_h(x, y))$ tali intervalli.

⁽⁹⁾ Si ha $\sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(x, y) a_{ij}(x, y) = 1$, e d'altra parte per le (23) è $\left| \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(x, y) a_{ij}(x, y) \right| \leq mB_1B_2$. Quindi risulta $mB_1B_2 \geq 1$.

⁽¹⁰⁾ È immediato che la variazione totale delle funzioni $\alpha_{ij}(X, g_h(X; x, y))$ è limitata superiormente da una costante indipendente da (x, y) , perchè tale indipendenza sussiste per le funzioni $a_{rs}(X, g_h(X; x, y))$: esse infatti sono equiassolutamente continue rispetto a X al variare di (x, y) in D_0 .

Posto

$$(29) \quad F = V_0 + mB_2F_1 + mB_1F_2\mathfrak{U}(a_0),$$

sia W una costante positiva, che assumiamo maggiore di F ,

$$(30) \quad W > F.$$

Considerate le funzioni $\phi_j(g_i(X; x, y))$, equiassolutamente continue in y (cfr. n. 4), preso $\varepsilon > 0$, sia δ un numero positivo che soddisfi la

$$(31) \quad \delta < \frac{\varepsilon}{3(H + m^2B_2\lambda_1 W)},$$

e sia inoltre tale che, se $(y'_1, y''_1), \dots, (y'_k, y''_k), \dots, (y'_r, y''_r)$ sono r intervalli non sovrapposti a due a due, con $y'_1 < y''_1 < y'_2 < y''_2 < \dots < y'_r < y''_r$, e

$$(32) \quad \sum_{k=1}^r |y'_k - y''_k| < \delta,$$

sia

$$(33) \quad B_1B_2 \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} |\phi_j(g_i(X; x, y'_k)) - \phi_j(g_i(X; x, y''_k))| < \varepsilon/3$$

comunque siano X, x in $(0, a_0)$.

Sia ε_0 un numero positivo fissato, e sia δ_0 il corrispondente valore di δ , determinato nel modo ora indicato.

Sia N_0 il minimo numero intero positivo, tale che sia

$$N_0\delta_0 \geq 2b_0;$$

poniamo

$$(34) \quad V = N_0\varepsilon_0.$$

Oltre alle ipotesi fatte in *c*) sulle funzioni $z_j^{n-1}(x, y)$, ($j=1, \dots, m$), supponiamo che tali funzioni in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ siano assolutamente continue rispetto a y in I_x ; supponiamo inoltre che le funzioni

$$(35) \quad z_j^{(n-1)}(X, g_h(X; x, y)) \quad (i, h = 1, \dots, m)$$

siano assolutamente continue in X ⁽¹¹⁾ nei rispettivi intervalli.

⁽¹¹⁾ Basterebbe che fossero a variazione limitata, agli effetti della dimostrazione.

Supponiamo che la variazione totale delle funzioni $z_j^{(n-1)}(x, y)$, ($j=1, \dots, m$), rispetto a y nell'intervallo I_x non superi V , e quella rispetto a X delle funzioni (35) in $(0, \beta_n)$ non superi W : supponiamo inoltre che, preso $\varepsilon > 0$, se δ è il numero subordinato a ε nel modo precedentemente indicato e se vale la (32), sia

$$(36) \quad \sum_{k=1}^r |z_j^{(n-1)}(x, y'_k) - z_j^{(n-1)}(x, y''_k)| < \varepsilon, \quad (j=1, \dots, m);$$

si intende che gli intervalli $(y'_1, y''_1), \dots, (y'_r, y''_r)$ appartengono all'intervallo I_x , in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$.

Dimostriamo

i) che è anche

$$\sum_{k=1}^r |z_j^{(n)}(x, y'_k) - z_j^{(n)}(x, y''_k)| < \varepsilon;$$

in particolare la variazione totale in y delle funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, ($j=1, \dots, m$), su ogni intervallo I_x non supera V ;

ii) che le funzioni $z_j^{(n)}(X, g_h(X; x, y))$, ($j, h=1, \dots, m$), sono assolutamente continue in X nei rispettivi intervalli $(0, \beta_n)$, e che la variazione totale in X non supera W ;

iii) che le funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, ($j=1, \dots, m$), sono assolutamente continue in x , per ogni y di $(-b_0, b_0)$;

iiii) che per le funzioni $z_j^{(0)}(x, y) = \phi_j(y)$, ($j=1, \dots, m$), valgono le ipotesi ora formulate sulle funzioni $z_j^{(n-1)}(x, y)$, ($j=1, \dots, m$).

i) Per ogni coppia (x, y') , (x, y'') del campo D dalle (21') si ha

$$\begin{aligned} z_j^{(n)}(x, y') - z_j^{(n)}(x, y'') &= \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(x, y') \left\{ \sum_{s=1}^m a_{is}(0, g_i(0; x, y')) \phi_s(g_i(0; x, y')) + \right. \\ &+ \int_0^x \left[\sum_{s=1}^m \frac{da_{is}(X, g_i(X; x, y'))}{dX} z_s^{(n-1)}(X, g_i(\dots)) + \right. \\ &+ \left. f_i(X, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(X, g_i(\dots)), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \right] dX \Big\} - \\ &- \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(x, y'') \left\{ \sum_{s=1}^m a_{is}(0, g_i(0; x, y'')) \phi_s(g_i(0; x, y'')) + \right. \\ &+ \int_0^x \left[\sum_{s=1}^m \frac{da_{is}(X, g_i(X; x, y''))}{dX} z_s^{(n-1)}(X, g_i(\dots)) + f_i(X, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(\dots), z_m^{(n-1)}(\dots)) \right] dX \Big\} = \\ &= \sum_{i=1}^m [\alpha_{ij}(x, y') - \alpha_{ij}(x, y'')] \left\{ \sum_{s=1}^m a_{is}(0, g_i(0; x, y')) \phi_s(g_i(0; x, y')) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^x \left[\sum_{s=1}^m \frac{da_{is}(X, g_i(X; x, y'))}{dX} z_s^{(n-1)}(X, g_i(\dots)) + \right. \\
& + f_i(X, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \left. \right] dX \Big\} + \\
& + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(x, y'') \left\{ \sum_{s=1}^m a_{is}(0, g_i(0; x, y')) \phi_s(g_i(0; x, y')) - \right. \\
& - \sum_{s=1}^m a_{is}(0, g_i(0; x, y'')) \phi_s(g_i(0; x, y'')) + \\
& + \int_0^x \left[\sum_{s=1}^m \frac{da_{is}(X, g_i(X; x, y'))}{dX} z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y')) + \right. \\
& + f_i(X, g_i(X; x, y'), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) - \\
& - \sum_{s=1}^m \frac{da_{is}(X, g_i(X; x, y''))}{dX} z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y'')) - \\
& \left. \left. - f_i(X, g_i(X; x, y''), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \right] dX \right\}.
\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo termini opportuni, operando un'integrazione per parti, parti, tenendo conto delle (22), (23), (1), (2), (4), (5) ed essendo per ipotesi (^{11bis})

$$\int_0^x \left| \frac{dz_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y))}{dX} \right| dX \leq W,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
& |z_j^{(n)}(x, y') - z_j^{(n)}(x, y'')| \leq mA_0 |y' - y''| \left\{ B_1 C + \int_0^{a_0} [(\mu(X) + \Lambda M(X)) \mathfrak{U}(X) + N(X)] dX \right\} + \\
& + \left| \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(x, y'') \left\{ \sum_{s=1}^m [a_{is}(0, g_i(0; x, y')) \phi_s(g_i(0; x, y')) - a_{is}(0, g_i(0; x, y'')) \phi_s(g_i(0; x, y''))] + \right. \right. \\
& + \sum_{s=1}^m [(a_{is}(X, g_i(X; x, y')) - a_{is}(X, g_i(X; x, y'')) z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''))]_{X=0}^{X=x} - \\
& \left. \left. - \int_0^x \sum_{s=1}^m (a_{is}(X, g_i(X; x, y')) - a_{is}(X, g_i(X; x, y'')) \frac{dz_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''))}{dX} dX \right\} \right| +
\end{aligned}$$

(^{11bis}) La variazione della funzione $z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y))$ rispetto a X in $(0, x)$ è uguale a

$$\int_0^x \left| \frac{dz_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y))}{dX} \right| dX.$$

$$\begin{aligned}
& + B_2 \sum_{i=1}^m \int_0^x L_1(X) |g_i(X; x, y') - g_i(X; x, y'')| dX + \\
& + B_2 \sum_{i=1}^m \int_0^x (\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)) \sum_{s=1}^m |z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y')) - \\
& \quad - z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''))| dx \leq \\
& \leq m \Lambda_0 \left\{ B_1 C + \int_0^{a_0} [(\mu(X) + \Lambda M(X)) \mathfrak{U}(X) + N(X)] dX \right\} \cdot |y' - y''| + \\
& + B_1 B_2 \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m |\phi_s(g_i(0; x, y')) - \phi_s(g_i(0; x, y''))| + \\
& + m B_2 \Lambda \mathfrak{U}(a_0) |y' - y''| + m^2 B_2 \Lambda \lambda_1 W |y' - y''| + m B_2 \lambda_1 \int_0^{a_0} L_1(X) dX \cdot |y' - y''| + \\
& + B_2 \sum_{i=1}^m \int_0^x (\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)) \sum_{s=1}^m |z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y')) - z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''))| dX.
\end{aligned}$$

Avendo posto (cfr. la (26))

$$H = m \Lambda_0 \left\{ B_1 C + \int_0^{a_0} [(\mu(X) + \Lambda M(X)) \mathfrak{U}(X) + N(X)] dX \right\} + m B_2 \Lambda \mathfrak{U}(a_0) + m B_2 \lambda_1 \int_0^{a_0} L_1(X) dX,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
& |z_j^{(n)}(x, y') - z_j^{(n)}(x, y'')| \leq H |y' - y''| + m^2 B_2 \Lambda \lambda_1 W |y' - y''| + \\
& + B_1 B_2 \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m |\phi_s(g_i(0; x, y')) - \phi_s(g_i(0; x, y''))| + \\
& + B_2 \sum_{i=1}^m \int_0^x (\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)) \sum_{s=1}^m |z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y')) - z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''))| dX, \\
& \quad (j = 1, \dots, m).
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
(37) \quad & \sum_{k=1}^r |z_j^{(n)}(x, y'_k) - z_j^{(n)}(x, y''_k)| \leq (H + m^2 B_2 \Lambda \lambda_1 W) \sum_{k=1}^r |y'_k - y''_k| + \\
& + B_1 B_2 \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m |\phi_s(g_i(0; x, y'_k)) - \phi_s(g_i(0; x, y''_k))| + \\
& + B_2 \sum_{k=1}^r \int_0^x (\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)) \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m |z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y'_k)) - \\
& \quad - z_s^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''_k))| dX, \quad (j = 1, \dots, m).
\end{aligned}$$

Osserviamo che, tenuto conto delle (9), (32), è

$$\sum_{k=1}^r |g_i(X; x, y'_k) - g_i(X; x, y''_k)| \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^r |y'_k - y''_k| < \lambda_1 \delta, \quad (0 \leq X \leq x),$$

e osserviamo anche che in virtù del citato teorema di unicità relativo all'equazione integrale (8) è

$$g_i(X; x, y'_k) < g_i(X; x, y''_k) \leq g_i(X; x, y'_{k+1}) < g_i(X; x, y''_{k+1}), \quad (0 \leq X \leq x) \\ (k = 1, 2, \dots, r-1, i = 1, \dots, m),$$

cioè gli intervalli $(g_i(X; x, y'_k), g_i(X; x, y''_k))$, $(k = 1, \dots, r)$, non si sovrappongono e hanno ampiezza complessiva minore di $\lambda_1 \delta$.

Indicato con N_{λ_1} il minimo intero positivo non inferiore a λ_1 , tenuto conto delle (36) è

$$(38) \quad \sum_{k=1}^r |z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y'_k)) - z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''_k))| < N_{\lambda_1} \varepsilon, \quad (0 \leq X \leq x),$$

come si vede intercalando eventualmente ai punti $(g_i(X; x, y'_k), g_i(X; x, y''_k))$, sulla retta dei punti di ascissa X , altri punti in modo opportuno, in modo cioè da decomporre l'insieme di intervalli $(g_i(X; x, y'_k), g_i(X; x, y''_k))$, $(k = 1, \dots, r)$, in N_{λ_1} insiemi di intervalli non sovrappoventisi

$$(\eta'_{t1}, \eta''_{t1}), \quad (\eta'_{t2}, \eta''_{t2}), \dots, (\eta'_{t\nu_t}, \eta''_{t\nu_t}), \quad (t = 1, \dots, N_{\lambda_1}),$$

ciascun insieme dei quali abbia ampiezza minore di δ , per cui risulta

$$\sum_{h=1}^{\nu_t} |z_j^{(n-1)}(X, \eta'_{th}) - z_j^{(n-1)}(X, \eta''_{th})| < \varepsilon, \quad (t = 1, \dots, N_{\lambda_1}),$$

e anche

$$\sum_{k=1}^r |z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y'_k)) - z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x, y''_k))| < \\ \leq \sum_{t=1}^{N_{\lambda_1}} \sum_{h=1}^{\nu_t} |z_j^{(n-1)}(X, \eta'_{th}) - z_j^{(n-1)}(X, \eta''_{th})| < N_{\lambda_1} \cdot \varepsilon.$$

Tenuto conto delle (31), (32), (33), (37) si ha allora

$$\sum_{k=1}^r |z_j^{(n)}(x, y'_k) - z_j^{(n)}(x, y''_k)| < \frac{2}{3} \varepsilon + m^2 B_2 N_{\lambda_1} \varepsilon \int_0^x (\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)) dX, \\ (j = 1, \dots, m),$$

e, se a è il massimo numero positivo, non superiore ad a_0 , tale che sia

$$(39) \quad m^2 B_2 N_{\lambda_1} \int_0^a (\mu(x) + \Lambda M(x) + L_1(x)) dX < \frac{1}{3},$$

risulta

$$\sum_{k=1}^r |z_j^{(n)}(x, y'_k) - z_j^{(n)}(x, y''_k)| < \varepsilon, \quad (j=1, \dots, m),$$

come si voleva dimostrare.

Nel caso particolare in cui per ε si prenda il valore ε_0 , dove ε_0 è il numero positivo fissato una volta per tutte all'inizio del presente capoverso d), e sia

$$\sum_{k=1}^r |y'_k - y''_k| < \delta_0,$$

risulta

$$\sum_{k=1}^r |z_j^{(n)}(x, y'_k) - z_j^{(n)}(x, y''_k)| < \varepsilon_0, \quad (j=1, \dots, m);$$

pertanto la variazione totale delle funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$ rispetto a y , nell'intervallo I_x , non supera $N_0 \varepsilon_0$, cioè V .

ii) Dimostriamo ora che le funzioni $z_j^{(n)}(X, g_i(X; x, y))$, $(i, j=1, \dots, m)$, sono assolutamente continue in X nei rispettivi intervalli $(0, \beta_i)$ e che la loro variazione totale rispetto a X non supera W .

Considerata la curva caratteristica

$$Y = g_h(X; x, y) \quad (0 \leq X \leq \beta_h),$$

siano X' , X'' , con $X' < X''$, due valori di $(0, \beta_h)$.

Posto, in modo analogo al n. 4,

$$g_h(X; x, y) = G(X) \quad (0 \leq X \leq \beta_h),$$

$$G(X') = Y', \quad G(X'') = Y'',$$

dalla i -ma delle (21), nella quale si pongano $X, G(X)$ al posto di x, y e si indichi con t la variabile di integrazione, si ha ⁽¹²⁾, per $i \neq h$,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m a_{ij}(X', G(X')) z_j^{(n)}(X', G(X')) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(X'', G(X'')) z_j^{(n)}(X'', G(X'')) = \\ & = \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, g_i(0; X', Y')) \phi_j(g_i(0; X', Y')) + \end{aligned}$$

⁽¹²⁾ Come abbiamo già osservato (cfr. n. 2) il campo D è tale che per ogni (x, y) di D , per ogni X con $0 \leq X \leq x$, i punti delle curve

$$Y = g_i(X; x, y) \quad (i=1, \dots, m)$$

appartengono al campo stesso.

In particolare allora, essendo $X' < X''$, il punto

$$(X', g_i(X'; X'', Y''))$$

appartiene al campo D .

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{X'} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(t, g_i(t; X', Y'))}{dt} z_j^{(n-1)}(t, g_i(\dots)) + f_i(t, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \right\} dt - \\
& - \sum_{j=1}^m [a_{ij}(0, g_i(0; X'', Y'')) \phi_j(g_i(0; X'', Y'')) - \int_0^{X'} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(t, g_i(t; X'', Y''))}{dt} \right. \\
& \cdot z_j^{(n-1)}(t, g_i(\dots)) + f_i(t, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \left. \right\} dt = \\
& = \sum_{j=1}^m [a_{ij}(0, g_i(0; X', Y')) \phi_j(g_i(0; X', Y')) - a_{ij}(0, g_i(0; X'', Y'')) \phi_j(g_i(0; X'', Y''))] + \\
& + \sum_{j=1}^m \left[(a_{ij}(t, g_i(t; X', Y')) - a_{ij}(t, g_i(t; X'', Y''))) z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X', Y')) \right]_{t=0}^{t=X'} - \\
& - \int_0^{X'} \sum_{j=1}^m [a_{ij}(t, g_i(t; X', Y')) - a_{ij}(t, g_i(t; X'', Y''))] \cdot \frac{dz_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X', Y'))}{dt} dt + \\
& + \int_0^{X'} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(t, g_i(t; X'', Y''))}{dt} [z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X', Y')) - z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X'', Y''))] + \right. \\
& + f_i(t, g_i(t; X', Y'), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) - \\
& - f_i(t, g_i(t; X'', Y''), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \left. \right\} dt + \\
& + \int_{X'}^{X''} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(t, g_i(t; X'', Y''))}{dt} z_j^{(n-1)}(t, g_i(\dots)) + f_i(t, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Tenendo conto delle (22), (23), (1), (2), (4), (5), (17), (18) semplificando si ottiene

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(X', G(X')) z_j^{(n)}(X', G(X')) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(X'', G(X'')) z_j^{(n)}(X'', G(X'')) \right| < \\
& \leq B_1 \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; X', Y')) - \phi_j(g_i(0; X'', Y''))| + \mathcal{A} \mathcal{U}(X') |g_i(X'; X'', Y'') - Y'| + \\
& + \int_0^{X'} \left\{ \mathcal{A} |g_i(t; X', Y') - g_i(t; X'', Y'')| \sum_{j=1}^m \frac{dz_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X', Y'))}{dt} + \right. \\
& + [\mu(t) + \mathcal{A} M(t) + L_1(t)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X', Y')) - z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X'', Y''))| + \\
& + L_1(t) |g_i(t; X', Y') - g_i(t; X'', Y'')| \left. \right\} dt + \int_{X'}^{X''} [(\mu(t) + \mathcal{A} M(t)) \mathcal{U}(t) + N(t)] dt < \\
& \leq B_1 \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; X', Y')) - \phi_j(g_i(0; X'', Y''))| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{X'}^{X''} \left\{ \left[2A\mathcal{U}(a_0) + 2\lambda_1 \int_0^{a_0} L_1(\tau) d\tau \right] M(t) + [\mu(t) + \Lambda M(t)] \mathcal{U}(t) + N(t) \right\} dt + \\
& \qquad \qquad \qquad + 2m\Lambda\lambda_1 W \int_{X'}^{X''} M(t) dt + \\
& + \int_0^{X'} [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X', Y')) - z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X'', Y''))| dt.
\end{aligned}$$

Avendo posto

$$(27) \quad S(t) = \left[2A\mathcal{U}(a_0) + 2\lambda_1 \int_0^{a_0} L_1(\tau) d\tau \right] M(t) + [\mu(t) + \Lambda M(t)] \mathcal{U}(t) + N(t),$$

risulta

$$\begin{aligned}
(40) \quad & \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(X', G(X')) z_j^{(n)}(X', G(X')) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(X'', G(X'')) z_j^{(n)}(X'', G(X'')) \right| \leq \\
& \leq \int_{X'}^{X''} S(t) dt + 2m\Lambda\lambda_1 W \int_{X'}^{X''} M(t) dt + B_1 \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; X', Y')) - \phi_j(g_i(0; X'', Y''))| + \\
& + \int_0^{X'} [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X', Y')) - z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X'', Y''))| dt.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora un insieme di intervalli di $(0, \beta_h)$

$$(X'_1, X''_1), \quad (X'_2, X''_2), \dots, (X'_r, X''_r),$$

non sovrapposti a due a due, con $X'_1 < X''_1 \leq X'_2 < X''_2 \leq \dots \leq X'_r < X''_r$.

Posto

$$g_h(X'_k; x, y) = Y''_k, \quad g_h(X''_k; x, y) = Y''_k, \quad (k = 1, \dots, r),$$

dalla (40) si ha

$$\begin{aligned}
(41) \quad & \sum_{k=1}^r \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(X'_k, Y'_k) z_j^{(n)}(X'_k, Y'_k) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(X''_k, Y''_k) z_j^{(n)}(X''_k, Y''_k) \right| \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^r \int_{X'_k}^{X''_k} S(t) dt + 2m\Lambda\lambda_1 W \sum_{k=1}^r \int_{X'_k}^{X''_k} M(t) dt + \\
& + B_1 \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; X'_k, Y'_k)) - \phi_j(g_i(0; X''_k, Y''_k))| + \\
& + \sum_{k=1}^r \int_0^{X'_k} [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X'_k, Y'_k)) - z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X''_k, Y''_k))| dt.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, in virtù dell'ipotesi (7), tenuto conto del lemma del § 2, n. 3 (cfr. anche nota ⁽⁸⁾), per qualunque coppia di valori X', X'' di $(0, a_0)$, con $X' < X''$, è

$$g_i(X'; X'', Y'') \geq Y'$$

ovvero

$$g_i(X'; X'', Y'') \leq Y'$$

(a seconda che valga la $\varrho_i(x, y) \leq \varrho_h(x, y)$ o la $\varrho_i(x, y) \geq \varrho_h(x, y)$).

Allora, essendo $g_i(X'; X', Y') = Y'$ in virtù del teorema di unicità citato in ^(2bis), è

$$g_i(t; X'', Y'') \geq g_i(t; X', Y')$$

ovvero

$$g_i(t; X'', Y'') \leq g_i(t; X', Y')$$

per ogni t di $(0, a_0)$.

Pertanto si ha in $(0, a_0)$

$$g_i(t; X'_1, Y'_1) \leq g_i(t; X''_1, Y''_1) \leq g_i(t; X'_2, Y'_2) \leq \dots \leq g_i(t; X''_r, Y''_r)$$

ovvero

$$g_i(t; X'_1, Y'_1) \geq g_i(t; X''_1, Y''_1) \geq g_i(t; X'_2, Y'_2) \geq \dots \geq g_i(t; X''_r, Y''_r),$$

vale a dire le caratteristiche $Y = g_i(t; X'_k, Y'_k)$, $Y = g_i(t; X''_k, Y''_k)$, ($k = 1, \dots, r$), intercettano sulle rette $x = t$, per ogni t di $(0, a_0)$, r segmenti (eventualmente alcuni di ampiezza nulla) non sovrapposti a due a due.

Ciascuna delle funzioni

$$z_j^{(n-1)}(t, g_i(t; X, G(X))), \quad (j = 1, \dots, m),$$

fissato t , è assolutamente continua rispetto a X in $(0, \beta_h)$, come funzione assolutamente continua (per l'ipotesi fatta sulle funzioni $z_j^{(n-1)}(t, Y)$) di una funzione

$$g_i(t; X, G(X))$$

monotona in X e assolutamente continua in X (cfr. n. 4); inoltre è equiassolutamente continua in X , per qualunque t di $(0, \beta_h)$, perchè sia la funzione $g_i(t; X, G(X))$ che la funzione $z_j^{n-1}(t, Y)$ sono equiassolutamente continue, rispettivamente in X e Y al variare di t (cfr. n. 4 e l'ipotesi (36)).

Tenuto conto dell'assoluta continuità delle funzioni $\phi_j(g_i(0; X, G(X)))$, ($j = 1, \dots, m$), è evidente allora che le funzioni

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(X, G(X)) z_j^{(n)}(X, G(X))$$

risultano assolutamente continue in X in $(0, \beta_h)$, in virtù della (41), per $i=1, \dots, m$, con $i \neq h$.

Per $i=h$ più semplicemente dalla i -ma delle (21) segue subito, ove si tenga conto che (X', Y') e (X'', Y'') appartengono alla curva caratteristica $Y = g_h(X; x, y)$,

$$(42) \quad \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(X', Y') z_j^{(n)}(X', Y') - \sum_{j=1}^m a_{ij}(X'', Y'') z_j^{(n)}(X'', Y'') \right| \leq \int_{X'}^{X''} [(\mu(t) + \Lambda M(t)) \mathcal{U}(t) + N(t)] dt < \int_{X'}^{X''} S(t) dt$$

per ogni coppia di valori X', X'' di $(0, \beta_h)$, con $X' < X''$, da cui risulta immediatamente l'assoluta continuità in X della funzione $\sum_{j=1}^m a_{ij}(X, G(X)) z_j^{(n)}(X, G(X))$ in $(0, \beta_h)$.

Precisiamo che, preso $\varepsilon > 0$, al numero δ (subordinato a ε) considerato all'inizio del capoverso si può subordinare un numero $\xi > 0$, tale che, se $(X'_1, X''_1), \dots, (X'_r, X''_r)$ sono r intervalli di $(0, \beta_h)$, con $X'_1 < X''_1 \leq \dots \leq X'_r < X''_r$ e $\sum |X''_k - X'_k| < \xi$, risulti (cfr. n. 4)

$$\sum_{k=1}^r |g_i(t; X'_k, Y'_k) - g_i(t; X''_k, Y''_k)| < \delta, \quad (0 \leq t \leq a_0);$$

in virtù delle (26), (33), (36), (41), si ha allora ^(12b is)

$$(42') \quad \sum_{k=1}^r \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(X'_k, Y'_k) z_j^{(n)}(X'_k, Y'_k) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(X''_k, Y''_k) z_j^{(n)}(X''_k, Y''_k) \right| < \\ < \sum_{k=1}^r \int_{X'_k}^{X''_k} [S(t) + 2m\Lambda\lambda_1 W M(t)] dt + \left[\frac{mB_1}{3} + m \int_0^a [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt \right] \cdot \varepsilon.$$

Allora, tenuto conto dell'assoluta continuità delle funzioni $a_{ij}(X, G(X))$, ($i, j=1, \dots, m$), risultano assolutamente continue anche le funzioni $z_j^{(n)}(X, G(X))$, cioè le funzioni $z_j^{(n)}(X, g_h(X; x, y))$, ($j, h=1, \dots, m$), ($0 \leq X \leq \beta_h(x, y)$); in particolare esse sono a variazione limitata.

Indicata con

$$\Omega(\psi(X))$$

la variazione totale di una funzione $\psi = \psi(X)$, a variazione limitata nel proprio in-

^(12b is) Dalla (33), tenendo conto che è $mB_1B_2 \geq 1$ (cfr. (9)), segue

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; X'_k, Y'_k)) - \phi_j(g_i(0; X''_k, Y''_k))| \leq \\ \leq mB_1B_2 \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; X'_k, Y'_k)) - \phi_j(g_i(0; X''_k, Y''_k))| \leq m \frac{\varepsilon}{3}.$$

tervallo di definizione, segue dalle (41), (42)

$$\begin{aligned} \Omega \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(X, G(X)) z_j^{(n)}(X, G(X)) \right) &\leq \int_0^{a_0} S(t) dt + mB_1 V_0 + \\ &+ mV \int_0^{\beta_h} [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt + 2m\Lambda\lambda_1 W \int_0^{\beta_h} M(t) dt, \end{aligned}$$

avendo tenuto conto dell'ipotesi sulla variazione totale delle funzioni $z_j^{(n-1)}(x, y)$ rispetto a y , la quale non supera V , e del significato di V_0 (cfr. n. 4).

Tenendo presente la posizione (28), ne segue, nell'intervallo dei valori X per cui $(X, G(X))$ appartiene a D ,

$$\Omega \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}(\dots) z_j^{(n)}(\dots) \right) \leq F_1 + mV \int_0^a [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt + 2m\Lambda\lambda_1 W \int_0^a M(t) dt.$$

Posto

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(X, G(X)) z_j^{(n)}(X, G(X)) = Z_i^{(n)}(X) \quad (i = 1, \dots, m),$$

si ha

$$z_j^{(n)}(X, G(X)) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(X, G(X)) Z_i^{(n)}(X), \quad (j = 1, \dots, m).$$

Ricordando il significato di F_2 (cf., nota (1^a)), si ha

$$\begin{aligned} \Omega(z_j^{(n)}(X, G(X))) &\leq mB_1 \mathcal{U}(a_0) F_2 + \\ &+ mB_2 \left\{ F_1 + mV \int_0^a [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt + 2m\Lambda\lambda_1 W \int_0^a M(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

e infine, tenuto conto della posizione (29), si ottiene

$$(43) \quad \Omega(z_j^{(n)}(X, G(X))) \leq F + m^2 B_2 V \int_0^a [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt + \\ + 2m^2 B_2 \Lambda \lambda_1 W \int_0^a M(t) dt.$$

Essendo $W > F$ (cfr. la (30)), si può prendere a , con $0 < a \leq a_0$, sufficientemente piccolo affinché sia verificata, oltre la (39), anche la

$$(44) \quad F + m^2 B_2 V \int_0^a [\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)] dt + 2m^2 B_2 \Lambda \lambda_1 W \int_0^a M(t) dt \leq W,$$

da cui

$$\Omega(z_j^{(n)}(X, G(X))) \leq W, \quad (j = 1, \dots, m),$$

come si voleva dimostrare.

OSSERVAZIONE. — Rileviamo che non è stata utilizzata l'assoluta continuità delle funzioni $z_i^{(n-1)}(X, G(X))$, ($j = 1, \dots, m$), bensì la proprietà, meno restrittiva, che esse sono a variazione limitata; così come, nel successivo sottocapoverso iii), viene utilizzata la proprietà che le funzioni $z_j^{(n)}(X, G(X))$ sono a variazione equilimitata per $n = 1, 2, \dots$.

iii) Si dimostra facilmente che le funzioni

$$z_j^{(n)}(x, y) \quad (j = 1, \dots, m)$$

sono anche assolutamente continue in x .

Infatti, considerati due punti (x', y) , (x'', y) , con $x' < x''$, del campo D , tenuto conto delle (1), (1'), (4), (9), (22), (23), (25), con calcolo prevedibilmente del tutto analogo a quello sviluppato nel sottocapoverso ii), si ottiene

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(x', y) z_j^{(n)}(x', y) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(x'', y) z_j^{(n)}(x'', y) \right| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, g_i(0; x', y)) \phi_j(g_i(0; x', y)) + \right. \\ & + \int_0^{x'} \left[\sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x', y))}{dX} z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y)) + \right. \\ & + f_i(X, g_i(X; x', y), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \Big] dX - \sum_{j=1}^m a_{ij}(0, g_i(0; x'', y)) \phi_j(g_i(0; x'', y)) - \\ & - \int_0^{x''} \left[\sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x'', y))}{dX} z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x'', y)) + \right. \\ & + f_i(X, g_i(X; x'', y), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \Big] dX \Big| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^m [a_{ij}(0, g_i(0; x', y)) \phi_j(g_i(0; x', y)) - a_{ij}(0, g_i(0; x'', y)) \phi_j(g_i(0; x'', y))] + \right. \\ & + \sum_{j=1}^m [(a_{ij}(X, g_i(X; x', y)) - a_{ij}(X, g_i(X; x'', y))) z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y))]_{x=0}^{x=x'} - \\ & - \int_0^{x'} \sum_{j=1}^m [a_{ij}(X, g_i(X; x', y)) - a_{ij}(X, g_i(X; x'', y))] \frac{dz_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y))}{dX} dX + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{x'} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x', y))}{dX} [z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y)) - z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x'', y))] + \right. \\
& + f_i(X, g_i(X; x', y)), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots) - \\
& \left. - f_i(X, g_i(X; x'', y), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \right\} dX + \\
& + \int_{x'}^{x''} \left[\sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x'', y))}{dX} z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x'', y)) + \right. \\
& + f_i(X, g_i(X; x'', y), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) \left. \right] dX \Big| \leq \\
& \leq B_1 \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; x', y)) - \phi_j(g_i(0; x'', y))| + \Lambda \mathcal{U}(x') |g_i(x'; x'', y) - y| + \\
& + \int_0^{x'} \left\{ \Lambda |g_i(X; x', y) - g_i(X; x'', y)| \sum_{j=1}^m \frac{dz_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y))}{dX} + \right. \\
& + [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y)) - z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x'', y))| + \\
& + L_1(X) |g_i(X; x', y) - g_i(X; x'', y)| \left. \right\} dX + \int_{x'}^{x''} [(\mu(X) + \Lambda M(X)) \mathcal{U}(X) + N(X)] dX \leq \\
& \leq B_1 \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; x', y)) - \phi_j(g_i(0; x'', y))| + \\
& + \int_{x'}^{x''} \left\{ [\Lambda \mathcal{U}(a_0) + \lambda_1 \int_0^{a_0} L_1(\tau) d\tau] M(X) + [\mu(X) + \Lambda M(X)] \mathcal{U}(X) + N(X) \right\} dX + \\
& + m \Lambda \lambda_1 W \int_{x'}^{x''} M(X) dX + \\
& + \int_0^{x'} [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y)) - z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x'', y))| dX,
\end{aligned}$$

e infine, usufruendo della posizione (27), si ottiene

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(x', y) z_j^{(n)}(x', y) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(x'', y) z_j^{(n)}(x'', y) \right| \leq \\
& \leq \int_{x'}^{x''} S(X) dX + m \Lambda \lambda_1 W \int_{x'}^{x''} M(X) dX + B_1 \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; x', y)) - \phi_j(g_i(0; x'', y))| + \\
& + \int_0^{x'} [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x', y)) - z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x'', y))| dX.
\end{aligned}$$

Siano

$$(x'_1, x''_1), \quad (x'_2, x''_2), \dots, (x'_r, x''_r)$$

r intervalli a due a due non sovrapposti, con $x'_1 < x''_1 \leq x'_2 < \dots \leq x'_r < x''_r$, tali che i punti (x'_k, y) , (x''_k, y) , $(k=1, \dots, r)$, appartengano al campo D .

In virtù dell'ipotesi (6), a seconda che sia verificata la prima o la seconda delle (6) stesse, è

$$g_i(X; x'_k, y) \geq g_i(X; x''_k, y) \geq g_i(X; x'_{k+1}, y) \quad (k=1, \dots, r-1)$$

ovvero

$$g_i(X; x'_k, y) \leq g_i(X; x''_k, y) \leq g_i(X; x'_{k+1}, y)$$

per ogni X di $(0, a_0)$, vale a dire gli intervalli $(g_i(X; x'_k, y), g_i(X; x''_k, y))$, $(k=1, \dots, r)$, sono a due a due non sovrapposti.

Si ha allora

$$\begin{aligned} (44') \quad & \sum_{k=1}^r \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(x'_k, y) z_j^{(n)}(x'_k, y) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(x''_k, y) z_j^{(n)}(x''_k, y) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^r \int_{x'_k}^{x''_k} [S(X) + m\Lambda\lambda_1 WM(X)] dX + \\ & + B_1 \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^m |\phi_j(g_i(0; x'_k, y)) - \phi_j(g_i(0; x''_k, y))| + \\ & + \sum_{k=1}^r \int_0^{x'_k} [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)] \sum_{j=1}^m |z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x'_k, y)) - z_j^{(n-1)}(X, g_i(X; x''_k, y))| dX. \end{aligned}$$

Sia ε un numero positivo arbitrario e sia δ il numero positivo subordinato ad ε all'inizio del presente capoverso (cfr. anche la (31)).

In virtù dell'assoluta continuità in x delle funzioni $g_i(X; x, y)$, $(i=1, \dots, m)$, (cfr. n. 2), al numero δ subordiniamo un numero positivo η_1 , tale che, se è

$$\sum_{k=1}^r |x'_k - x''_k| < \eta_1,$$

sia

$$(45) \quad \sum_{k=1}^r |g_i(X; x'_k, y) - g_i(X; x''_k, y)| < \delta, \quad (i=1, \dots, m),$$

per ogni X di $(0, a_0)$.

Inoltre, per l'assoluta continuità in $(0, a_0)$ della funzione

$$\int_0^x [S(X) + m\Lambda\lambda_1 WM(X)] dX$$

al numero ε si può subordinare un numero positivo η_2 , tale che, se è

$$\sum_{k=1}^r |x'_k - x''_k| < \eta_2$$

sia

$$\sum_{k=1}^r \int_{x'_k}^{x''_k} \{S(X) + m\Lambda\lambda_1 WM(X)\} dX < \varepsilon.$$

Sia η il minore dei due numeri η_1, η_2 . Allora, se è

$$\sum_{k=1}^r |x'_k - x''_k| < \eta,$$

in virtù delle (33), (36) si ottiene dalla (44')

$$(46) \quad \sum_{k=1}^r \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(x'_k, y) z_j^{(n)}(x'_k, y) - \sum_{j=1}^m a_{ij}(x''_k, y) z_j^{(n)}(x''_k, y) \right| \leq \\ \leq \left[1 + \frac{mB_1}{3} + m \int_0^{a_0} (\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)) dX \right] \cdot \varepsilon.$$

Dunque le funzioni

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) z_j^{(n)}(x, y) \quad (i=1, \dots, m)$$

sono assolutamente continue in x ; inoltre, essendo le (45), (46) indipendenti da y , esse risultano equiassolutamente continue in x al variare di y in $(-b_0, b_0)$.

In virtù dell'equiassoluta continuità in x , al variare di y , delle funzioni $a_{ij}(x, y)$, $(i, j=1, \dots, m)$, ne segue (cfr. (1'')) l'*equiassoluta continuità in x , al variare di y , delle funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, $(j=1, \dots, m)$, nel campo D .*

iiii) verifichiamo che per le funzioni $z_j^{(0)}(x, y)$, $(j=1, \dots, m)$, vale la (36) ed è quindi

$$V_0 < V$$

e inoltre

$$V_0 < W.$$

Infatti per $X = x$ la (33) diviene

$$\sum_{k=1}^r B_1 B_2 m \sum_{j=1}^m |\phi_j(y'_k) - \phi_j(y''_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

se è $\sum_{k=1}^r |y'_k - y''_k| < \delta$; essendo (cfr. ⁽⁹⁾) $mB_1B_2 \geq 1$, per ogni j_0 , con $j_0 = 1, \dots, m$, è anche

$$\sum_{k=1}^r |\phi_{j_0}(y'_k) - \phi_{j_0}(y''_k)| < \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^m |\phi_j(y'_k) - \phi_j(y''_k)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

e infine, fissato $\varepsilon = \varepsilon_0$,

$$V_0 < N_0 \varepsilon_0 = V.$$

Proviamo ora che è $V_0 < W$.

Infatti dalla (29) risulta $F > V_0$, e infine dalla (30), $W > F > V_0$.

Osserviamo che quest'ultima disuguaglianza implica che la variazione totale della funzione $\phi_j(g_i(X; x, y))$ rispetto a X in $(0, \beta_i)$, la quale non supera la variazione totale della funzione $\phi_j(y)$ in $(-b_0, b_0)$ e quindi non supera V_0 , è inferiore a W : ciò vale per $i, j = 1, \dots, m$.

È provato pertanto che per le funzioni $z_j^{(0)}(x, y) = \phi_j(y)$ valgono le ipotesi formulate all'inizio del capoverso sulle funzioni $z_j^{(n-1)}(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$).

Tenuto conto dell'osservazione del capoverso c), è dimostrato che le funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), costituiscono, per $n = 1, 2, \dots$, una successione di funzioni equilimitate (cfr. la (25)) e equicontinue, le quali in corrispondenza ad ogni x di $(0, a)$ sono equiassolutamente continue in y in I_x e in corrispondenza ad ogni y di $(-b_0, b_0)$ sono equiassolutamente continue in x nell'intervallo corrispondente (contenuto in I_y): valgono infatti le (25'), (36), (46), per $n = 1, 2, \dots$.

e) *Convergenza delle approssimazioni successive.* Le funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), ($n = 1, 2, \dots$), convergono uniformemente nel campo D a funzioni continue $z_j(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), le quali risultano assolutamente continue in y , fissato x , e in x , fissato y . Più precisamente esse risultano equiassolutamente continue in y , al variare di x , e equiassolutamente continue in x , al variare di y .

Si osserva inoltre che le funzioni $z_j(X, g_i(X; x, y))$, ($i, j = 1, \dots, m$), risultano assolutamente continue in X in $(0, \beta_i)$.

Le funzioni $z_j(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), soddisfano il sistema (10) nel campo D .

Poniamo nel campo D , per $n = 1, 2, 3, \dots$

$$(47) \quad \omega_n(x) = \sup_{0 \leq X \leq x} \sup_{-b_0 + \int_0^x M(t)dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t)dt} \sum_{i=1}^m |z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n-1)}(X, y)|.$$

Dalle (21), a partire da $n = 2$, scrivendo X al posto di x e t al posto di X , si ottiene

$$\begin{aligned} z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n-1)}(X, y) &= \sum_{s=1}^m \alpha_{is}(x, y) \int_0^X \left\{ \sum_{s=1}^m \frac{da_{is}(t, g_i(t; x, y))}{dt} \right. \\ &\quad \cdot [z_s^{(n-1)}(t, g_i(\dots)) - z_s^{(n-2)}(t, g_i(\dots))] + f_i(t, g_i(\dots), z_1^{(n-1)}(\dots), \dots, z_m^{(n-1)}(\dots)) - \\ &\quad \left. - f_i(t, g_i(\dots), z_1^{(n-2)}(\dots), \dots, z_m^{(n-2)}(\dots)) \right\} dt, \quad (j = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} |z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n-1)}(X, y)| &\leq \\ &\leq B_2 \sum_{i=1}^m \int_0^X (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) \sum_{s=1}^m |z_s^{(n-1)}(t, g_i(\dots)) - z_s^{(n-2)}(t, g_i(\dots))| dt \leq \\ &\leq m B_2 \int_0^X (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) \omega_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Posto

$$m^2 B_2 (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) = \gamma(t),$$

si ottiene

$$\sum_{j=1}^m |z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n-1)}(X, y)| \leq \int_0^X \gamma(t) \omega_{n-1}(t) dt,$$

la quale vale per ogni y di I_X .

Consideriamo l'intervallo $0 \leq X \leq x$, per $0 < x \leq a$.

È evidentemente

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |z_j^{(n)}(X, y) - z_j^{(n-1)}(X, y)| &\leq \int_0^x \gamma(t) \omega_{n-1}(t) dt, \\ &\left(-b_0 + \int_0^X M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^X M(t) dt, \quad 0 \leq X \leq x \right), \end{aligned}$$

e quindi anche

$$(48) \quad \omega_n(x) \leq \int_0^x \gamma(t) \omega_{n-1}(t) dt, \quad (0 \leq x \leq a), \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Essendo, per le (47), (25') (considerate per $n = 1$), (22)

$$\omega_1(x) \leq \mathfrak{U}(x) + C \leq \mathfrak{U}(a) + C \quad (0 \leq x \leq a),$$

posto

$$\mathfrak{U}(a) + C = C_0,$$

si ha

$$\omega_2(x) \leq C_0 \int_0^x \gamma(t) dt \quad (0 \leq x \leq a),$$

e successivamente

$$\omega_3(x) \leq C_0 \int_0^x \gamma(t) \left(\int_0^t \gamma(\tau) d\tau \right) dt = C_0 \frac{\left(\int_0^x \gamma(\tau) d\tau \right)^2}{2}, \quad (0 \leq x \leq a).$$

Supposto ora che valga la

$$\omega_{n-1}(x) \leq C_0 \frac{\left(\int_0^x \gamma(\tau) d\tau\right)^{n-2}}{(n-2)!} \quad (0 \leq x \leq a),$$

dimostriamo che, in virtù della (48), è anche

$$\omega_n(x) \leq C_0 \frac{\left(\int_0^x \gamma(\tau) d\tau\right)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (0 \leq x \leq a).$$

Infatti è

$$\omega_n(x) \leq \int_0^x \gamma(t) \omega_{n-1}(t) dt \leq C_0 \int_0^x \gamma(t) \frac{\left(\int_0^t \gamma(\tau) d\tau\right)^{n-2}}{(n-2)!} dt = C_0 \frac{\left(\int_0^x \gamma(\tau) d\tau\right)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (0 \leq x \leq a).$$

Allora, in virtù del principio di induzione, per $n = 2, 3, \dots$ è in $(0, a)$

$$(49) \quad \omega_n(x) \leq C_0 \frac{\left(\int_0^x \gamma(t) dt\right)^{n-1}}{(n-1)!} \leq C_0 \frac{\left(\int_0^a \gamma(t) dt\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Dalla convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^a \gamma(t) dt\right)^n}{n!},$$

segue in modo noto la convergenza uniforme delle funzioni $z_j^{(n)}(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), a funzioni continue $z_j(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), in tutto il campo D .

Le funzioni

$$(50) \quad z_j(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_j^{(n)}(x, y)$$

soddisfano nel campo D il sistema (10) e appartengono alla classe funzionale precisata all'inizio del capoverso: valgono infatti per esse le (36), (46), (42'), le quali sono indipendenti rispettivamente da x , y , (x, y) .

f) Le funzioni $z_j(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), soddisfano in quasi tutto il campo D il sistema (I) e inoltre le condizioni (II) (cfr. n. 3).

6. — Estensione dell'esistenza della soluzione a tutto il campo D_0 .

a) Valgano ancora le ipotesi formulate nel n. 5, a).

Nella dimostrazione del teorema di esistenza sviluppata nel n. 5, abbiamo seguito questo ordine (cfr. capoverso d)): abbiamo preso una costante positiva W , soddisfacente la $W > F$ (dove F è funzione di V_0), e abbiamo poi determinato a in modo

da soddisfare, oltre alla

$$(39) \quad m^2 B_2 N_{\lambda_1} \int_0^a (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) dt \leq \frac{1}{3},$$

la

$$(44) \quad F + m^2 B_2 V \int_0^a (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) dt + 2m^2 B_2 \Lambda \lambda_1 W \int_0^a M(t) dt \leq W,$$

dove si può avere anche l'uguaglianza.

Posto per brevità

$$\begin{aligned} m^2 B_2 (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) &= \gamma_1(t) \\ 2m^2 B_2 \Lambda \lambda_1 M(t) &= \gamma_2(t), \end{aligned}$$

la (44) si scrive nella forma

$$F + V \int_0^a \gamma_1(t) dt + W \int_0^a \gamma_2(t) dt \leq W.$$

Ragioniamo ora in modo diverso, rispetto al capoverso d) del n. 5.

Sia a_1 un numero, non superiore ad a_0 , tale che per qualunque coppia x', x'' di $(0, a_0)$, con $|x' - x''| \leq a_1$, sia

$$\left| \int_{x'}^{x''} \gamma_2(t) dt \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Sia poi a_2 un numero, non superiore ad a_0 , tale che per qualunque coppia x', x'' di $(0, a_0)$, con $|x' - x''| \leq a_2$, sia

$$m^2 B_2 N_{\lambda_1} \left| \int_{x'}^{x''} (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) dt \right| \leq \frac{1}{3};$$

sia a^* il più piccolo dei due numeri a_1, a_2 ⁽¹³⁾.

Sia W il numero che soddisfa la relazione

$$F + V \int_0^{a^*} \gamma_1(t) dt + W \int_0^{a^*} \gamma_2(t) dt = W,$$

⁽¹³⁾ In particolare si ha

$$\begin{aligned} m^2 B_2 N_{\lambda_1} \int_0^{a^*} (\mu(t) + \Lambda M(t) + L_1(t)) dt &\leq \frac{1}{3}, \\ \int_0^{a^*} \gamma_2(t) dt &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

dopodichè la dimostrazione dell'esistenza della soluzione del sistema (10) rimane inalterata, nel campo (cfr. (39), (44))

$$D^*: \quad 0 \leq x \leq a^*, \quad -b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt.$$

Osserviamo ora che a_1 , a_2 , e quindi a^* , dipendono soltanto dalle funzioni $a_{ij}(\dots)$, $q_i(\dots)$, $f_i(\dots)$, ($i, j = 1, \dots, m$), che figurano nel sistema (I); sono indipendenti invece dai dati $\phi_j(y)$, ($j = 1, \dots, m$) ⁽¹⁴⁾.

Allora, se a partire dai valori assunti dalla soluzione per $x = a^*$

$$(50') \quad z_1(a^*, y), \quad z_2(a^*, y), \dots, z_m(a^*, y), \quad \left(-b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt \right),$$

si ripete la dimostrazione del teorema di esistenza, si trova che nel campo

$$a^* \leq x \leq 2a^*, \quad -b_0 + \int_0^a M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^a M(t) dt,$$

esiste una soluzione del sistema (I), appartenente al campo funzionale richiesto, la quale assume per $x = a^*$ i valori (50').

È chiaro che ripetendo un numero finito di volte tale estensione del campo, si ottiene l'esistenza della soluzione del sistema (I) sotto le condizioni (II) nell'intero campo D_0 .

b) Quanto abbiamo dimostrato nel capoverso a) è valido se in tutto il campo D_0 per ogni i , ($i = 1, \dots, m$), vale una (fissata) delle (6), e per ogni coppia di valori diversi i, h ($i, h = 1, \dots, m; i \neq h$) vale una (fissata) delle (7).

Supponiamo ora invece, come nell'enunciato del Teorema del n. 1, che l'intervallo $(0, a_0)$ si possa decomporre in un numero finito r di intervalli

$$(0, a^{(1)}), \quad (a^{(1)}, a^{(2)}), \dots, (a^{(r-1)}, a^{(r)})$$

tali che, in ciascuno dei campi $D^{(k)}$

$$D^{(k)}: \quad a^{(k-1)} \leq x \leq a^{(k)}, \quad -b_0 + \int_0^x M(t) dt \leq y \leq b_0 - \int_0^x M(t) dt,$$

per ogni i , ($i = 1, \dots, m$), valga una delle (6) e per ogni coppia di valori i, h , ($i, h = 1, \dots, m; i \neq h$), valga una delle (7).

Allora la soluzione $z_1(x, y), \dots, z_m(x, y)$, costruita nei nn. 5, 6, esiste senz'altro nel campo $D^{(1)}$, e, successivamente, nei campi $D^{(2)}, \dots, D^{(r)}$, vale a dire in tutto il campo D_0 .

⁽¹⁴⁾ Il numero a_1 dipende soltanto da $m, B_2, A, \lambda_1, M(t)$; a_2 da $m, B_2, \lambda_1, \mu(t), A, M(t), L_1(t)$.

OSSERVAZIONE. — Rileviamo esplicitamente (cfr. e)) che la soluzione costruita nel campo D_0 appartiene al campo funzionale precisato nell'enunciato del teorema, e inoltre (cfr. le (42')) le funzioni $z_j(x, y)$, ($j=1, \dots, m$), risultano assolutamente continue lungo le caratteristiche del sistema (I).

7. — Unicità della soluzione.

È immediata l'unicità della soluzione nel campo delle funzioni $z_j(x, y)$, ($j=1, \dots, m$), le quali, oltre ad essere assolutamente continue rispetto a ciascuna variabile x, y , separatamente, sono anche assolutamente continue lungo una qualunque curva caratteristica $Y = g_i(X; x, y)$, vale a dire sono tali che risultano assolutamente continue rispetto a X in $(0, \beta_i)$ le funzioni $z_j(X, g_i(X; x, y))$, ($i, j=1, \dots, m$).

Infatti una soluzione del sistema (I) sotto le condizioni (II) nel campo D_0 , appartenente al suddetto campo funzionale, soddisfa in tutto D_0 il sistema (10) (cfr. n. 3, b)): e l'unicità della soluzione del sistema (10) è subito provata. Infatti se $z_j(x, y)$, $z_j^*(x, y)$, ($j=1, \dots, m$), sono due soluzioni del sistema (10), soddisfacenti le ipotesi suddette, si ha

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y)[z_j(x, y) - z_j^*(x, y)] = \int_0^x \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{da_{ij}(X, g_i(X; x, y))}{dX} [z_j(X, g_i(\dots)) - z_j^*(X, g_i(\dots))] + \right. \\ \left. + f_i(X, g_i(\dots), z_1(X, g_i(\dots)), \dots, z_m(\dots)) - f_i(X, g_i(\dots), z_1^*(\dots), \dots, z_m^*(\dots)) \right\} dX, \\ (i=1, \dots, m),$$

da cui

$$|z_j(x, y) - z_j^*(x, y)| \leq B_2 \int_0^x [\mu(X) + \Lambda M(X) + L_1(X)] \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^m |z_s(X, g_i(\dots)) - z_s^*(X, g_i(\dots))| dX, \\ (j=1, \dots, m).$$

Ne segue ⁽¹⁵⁾ in tutto D_0

$$z_j(x, y) = z_j^*(x, y), \quad (j=1, \dots, m).$$

⁽¹⁵⁾ Cfr. M. CINQUINI CIBRARIO - S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Monografie Matematiche del C.N.R., no. 12, Edizioni Cremonesi, Roma (1964); cap. IV, § 2, n. 9 δ), pp. 352-353; cfr. in particolare la (80).

Viene utilizzato il lemma di Gronwall generalizzato, cfr. G. SANSONE - R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Monografie Matematiche del C.N.R., Edizioni Cremonesi, Roma (1956), cap. I, § 2, n. 1, pp. 15-16.

§ 2.

8. — Un esempio.

Mettiamo in luce con un esempio che, se non vale la (6), un'eventuale *soluzione del sistema* (10) (cfr. n. 3) può *non* appartenere alla classe delle funzioni *assolutamente continue rispetto alle singole variabili* x, y .

Consideriamo nell'intervallo $(0, 2/\pi)$ la funzione $\sigma(t)$ così definita:

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(t) = t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t} \quad \left(0 < t \leq \frac{2}{\pi}\right).$$

Nel campo

$$0 < X \leq \frac{2}{\pi}, \quad 0 < x \leq \frac{2}{\pi}, \quad -\infty < y < +\infty$$

consideriamo la funzione

$$g(X; x, y) = y + \int_x^X \sigma'(t) dt,$$

cioè

$$g(X; x, y) = y - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + X^2 \operatorname{sen} \frac{1}{X},$$

dove si intende che per x (oppure X) nullo in luogo di $x^2 \operatorname{sen} 1/x$ ($X^2 \operatorname{sen} 1/X$) compaia zero.

Sia $f(x)$ una funzione quasi continua e integrabile in $(0, 2/\pi)$.

Considerata la funzione

$$\phi(y) = \sqrt{|y|} \quad (-\infty < y < +\infty),$$

la quale è assolutamente continua⁽¹⁶⁾ in ogni intervallo, prendiamo in esame l'equazione⁽¹⁷⁾

$$(51) \quad z(x, y) = \phi(g(0; x, y)) + \int_0^x f(X) dX.$$

⁽¹⁶⁾ La funzione $\sqrt{|y|}$ è la funzione integrale della funzione $\varphi(y)$ così definita:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{per } y > 0, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{2\sqrt{-y}} \quad \text{per } y < 0,$$

la quale è quasi continua e integrabile secondo Lebesgue, con $\int_0^y \varphi(Y) dY = \sqrt{|y|}$.

⁽¹⁷⁾ Rileviamo che per l'equazione (51), la quale è un particolare sistema (10), con $m = 1$, $a_1(\dots) = 1$, $q_1(\dots) = \sigma'(x)$, $f_1(\dots) = f(x)$, valgono tutte le ipotesi del n. 3 (cfr. n. 1) tranne la (6). Infatti la funzione $\sigma'(x)$ cambia segno infinite volte in $(0, 2\pi)$.

Si ha

$$z(x, y) = \sqrt{\left| y - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|} + \int_0^x f(X) dX,$$

e, per esempio per $y = 0$,

$$z(x, 0) = x \sqrt{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|} + \int_0^x f(X) dX;$$

la funzione $z(x, 0)$ non è a variazione limitata in $(0, 2/\pi)$.

Infatti, considerata una suddivisione di $(0, 2/\pi)$ in $2k+1$ parti mediante i punti

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \quad x_1 = \frac{1}{(2k+1)\pi/2}, \quad x_2 = \frac{1}{2k\pi/2}, \quad x_3 = \frac{1}{(2k-1)\pi/2}, \dots, \\ x_{2s} &= \frac{1}{(2k-2s+2)\pi/2}, \quad x_{2s+1} = \frac{1}{(2k-2s+1)\pi/2}, \dots, \\ x_{2k-1} &= \frac{1}{3\pi/2}, \quad x_{2k} = \frac{1}{2\pi/2}, \quad x_{2k+1} = \frac{1}{\pi/2}, \end{aligned}$$

si ha, se $f(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k |z(x_{2s+1}, 0) - z(x_{2s}, 0)| &= \sum_{s=0}^k \left| x_{2s+1} \sqrt{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x_{2s+1}} \right|} - x_{2s} \sqrt{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x_{2s}} \right|} + \int_{x_{2s}}^{x_{2s+1}} f(X) dX \right| \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1} + \dots + \frac{1}{3} + 1 \right). \end{aligned}$$

Essendo $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{3} + \dots + 1/(2k-1) + 1/(2k+1)) = +\infty$, la funzione $z(x, 0)$ non è a variazione limitata in $(0, 2/\pi)$.

OSSERVAZIONE. — Più in generale, se le funzioni $\phi_j(g_i(0; x, y))$ non sono assolutamente continue rispetto alle variabili x, y separatamente, un'eventuale soluzione $z_j(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), del sistema (10) può non essere costituita da funzioni assolutamente continue rispetto a x e y separatamente.

Non lo è certamente se le funzioni $a_{ij}(0, y)$ sono per esempio nulle per $i \neq j$ e se le funzioni $f_i(\dots)$ sono indipendenti da $z_1, \dots, z_m$, come nell'esempio dato.

Si può provare che, se una soluzione del sistema (10), per il quale valgano le ipotesi del n. 1, appartiene alla classe delle funzioni equiassolutamente continue in y al variare di x , assolutamente continue in x e assolutamente continue lungo le caratteristiche (come avviene per la soluzione costruita nel § 1) e se vale suddetta ipotesi sulle funzioni $a_{ij}(0, y)$, ($i \neq j$), necessariamente le funzioni $\phi_i(g_i(0; x, y))$ sono assolutamente continue nelle singole variabili.

9. - Un ulteriore esempio.

Rileviamo con un esempio che, *se non valgono* le (7), considerata un'eventuale soluzione $z_j(x, y)$, ($j = 1, \dots, m$), del sistema (10), costituita da funzioni assolutamente continue rispetto alle singole variabili x, y , può mancare l'assoluta continuità in X delle funzioni $z_i(X, g_i(X; x, y))$.

Considerato un angolo α , fissato tra 0 e $\pi/4$, $0 < \alpha < \pi/4$, definiamo nell'intervallo $(0, 1)$ la funzione $\varphi(\xi)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha, & \left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1\right), \\ \varphi(\xi) &= -\left(\xi - \frac{1}{2}\right) \operatorname{cotg} \beta_1, & \left(\frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right), \\ \varphi(\xi) &= \left(\xi - \frac{1}{4}\right) \operatorname{tg} \alpha, & \left(\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{1}{3}\right), \\ \varphi(\xi) &= -\left(\xi - \frac{1}{4}\right) \operatorname{cotg} \beta_2, & \left(\frac{1}{5} \leq \xi \leq \frac{1}{4}\right), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi(\xi) &= \left(\xi - \frac{1}{2n}\right) \operatorname{tg} \alpha, & \left(\frac{1}{2n} \leq \xi \leq \frac{1}{2n-1}\right), \\ \varphi(\xi) &= -\left(\xi - \frac{1}{2n}\right) \operatorname{cotg} \beta_n, & \left(\frac{1}{2n+1} \leq \xi \leq \frac{1}{2n}\right), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi(0) &= 0, \end{aligned}$$

dove $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ sono gli angoli definiti nel modo che segue.

Siano ξ, ζ due assi cartesiani ortogonali.

Consideriamo sull'asse ξ i punti di ascissa $1/2n + 2, 1/2n + 1, 1/2n$; per il punto $P_{2n+2}(1/2n + 2, 0)$ (cfr. figura) tracciamo la retta r_n che, orientata nel senso delle ascisse crescenti, forma con il semiasse delle ξ positive l'angolo α ; consideriamo poi per il punto $H_{2n+1}(1/2n + 1, 0)$ la perpendicolare p_n all'asse ξ , la quale interseca la retta r_n in un punto, che indichiamo con P_{2n+1} ; congiungiamo tale punto con il punto $P_{2n}(1/2n, 0)$; chiamiamo ⁽¹⁸⁾ β_n l'angolo $\widehat{H_{2n+1}P_{2n+1}P_{2n}}$.

Risulta ⁽¹⁹⁾ $\pi/4 < \beta_n < \pi/2$.

⁽¹⁸⁾ Gli angoli β_n sono presi positivi.

⁽¹⁹⁾ È evidente infatti che è $\beta_n < \pi/2$.

Inoltre, indicato con β (costante rispetto a n) l'angolo $\widehat{P_{2n+2}P_{2n+1}H_{2n+1}}$, e indicata con d_n la misura del segmento $P_{2n+1}H_{2n+1}$, si ha

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) : d_n, \quad \operatorname{tg} \beta_n = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) : d_n$$

Osserviamo che la funzione $\zeta = \varphi(\xi)$ che abbiamo definito in $(0, 1)$ in ogni intervallo $(1/(n+1), 1/n)$, ($n=1, 2, \dots$), ha come grafica un segmento, che ha direzione costante per n dispari, direzione variabile con n per n pari.

Consideriamo ora la stessa curva C , di equazione

$$\zeta = \varphi(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

referita ad un nuovo sistema di assi cartesiani ortogonali x, y , aventi l'origine coincidente con quella del sistema ξ, ζ , ruotati di $\pi/4$ rispetto al sistema ξ, ζ , precisamente tali che il semiasse delle x positive debba ruotare di $\pi/4$ nel senso delle rotazioni positive per sovrapporsi al semiasse delle ξ positive.

cioè

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)d_n}, \quad \operatorname{tg} \beta_n = \frac{1}{2n(2n+1)d_n},$$

da cui risulta

$$\operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \beta_n$$

e anche

$$\beta < \beta_n$$

Essendo $\beta + \alpha = \pi/2$, da cui $\beta > \pi/4$ (perchè è $\alpha < \pi/4$), ne segue $\beta_n > \pi/4$.

Poichè l'angolo α è minore di $\pi/4$ e gli angoli $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ sono minori di $\pi/2$, ogni retta $x = k$, con k costante, interseca ciascun segmento della curva C in uno ed un sol punto, quando k appartiene all'intervallo che ha per estremi le proiezioni degli estremi del segmento stesso; inoltre, per il modo in cui è stato scelto α , compreso tra 0 e $\pi/4$, risultando inoltre $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$, compresi tra $\pi/4$ e $\pi/2$, ogni retta $x = k$ interseca la curva C in uno ed un sol punto, per $0 \leq k \leq 1/\sqrt{2}$.

Indichiamo con

$$y = \psi(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

l'equazione della curva C rispetto al nuovo sistema di riferimento.

La funzione $\psi(x)$ risulta crescente.

Osserviamo che, indicata con x_n l'ascissa del punto P_n , ($n = 1, 2, \dots$), in ciascun intervallo (x_{n+1}, x_n) la curva coincide con un segmento, avente direzione costante se n è dispari, variabile con n se n è pari.

Per n dispari la direzione è quella comune alle rette r_n , le quali formano con l'asse x l'angolo α_0 , con $\alpha_0 = \alpha + \pi/4$. Risulta $\pi/4 < \alpha_0 < \pi/2$.

Per n pari la direzione è quella della retta s_n congiungente i punti P_{2n+1}, P_{2n} , la quale, formando con le rette $\xi = \text{cost}$ l'angolo β_n , con $\pi/4 < \beta_n < \pi/2$, con l'asse x forma, se orientata nel senso delle ascisse x crescenti, l'angolo γ_n , con $0 < \gamma_n < \pi/4$.

La derivata $\psi'(x)$ è costante a tratti e limitata, quindi integrabile.

Assumiamo

$$\varrho_1(x) = \psi'(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Sia poi

$$\varrho_2(x) = 1, \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Si ha $\varrho_1(x) = \text{tg } \alpha_0$ (con $\pi/4 < \alpha_0 < \pi/2$) oppure $\varrho_1(x) = \text{tg } \gamma_n$ (con $0 < \gamma_n < \pi/4$), quindi è $\varrho_1(x) \leq \text{tg } \alpha_0$; essendo $\varrho_2(x) = 1$, è anche $\varrho_2(x) < \text{tg } \alpha_0$.

Siano

$$Y = g_i(X; x, y) \quad (i = 1, 2)$$

le funzioni definite dalle

$$g_i(X; x, y) = y + \int_x^X \varrho_i(t) dt$$

nel campo

$$\Delta_\infty: 0 \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

È

$$g_1(X; x, y) = y - \psi(x) + \psi(X), \quad g_2(X; x, y) = y - x + X,$$

in particolare

$$g_2(0; x, y) = y - x.$$

Siano inoltre $f_1(x)$, $f_2(x)$ due funzioni quasi continue e integrabili in $(0, 1/\sqrt{2})$.

Siano infine $\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$ due funzioni assolutamente continue in ogni intervallo $(-b, b)$ con

$$\phi_2(y) = \sqrt{|y|}.$$

Consideriamo il sistema

$$(52) \quad \begin{cases} z_1(x, y) + z_2(x, y) = \phi_1(g_1(0; x, y)) + \phi_2(g_1(0; x, y)) + \int_0^x f_1(t) dt, \\ z_2(x, y) = \phi_2(g_2(0; x, y)) + \int_0^x f_2(t) dt. \end{cases}$$

Il sistema (52) è un particolare sistema (10), per il quale valgono tutte le ipotesi dei nn. 1, 3 tranne la (7).

Dalla seconda equazione segue necessariamente

$$(52') \quad z_2(x, y) = \sqrt{|y - x|} + \int_0^x f_2(t) dt$$

nel campo

$$D: \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -b + x \operatorname{tg} \alpha_0 \leq y \leq b - x \operatorname{tg} \alpha_0 \quad \left(b > \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{2}} \right),$$

dopodichè la prima delle (52) determina $z_1(x, y)$.

È evidente che le funzioni $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ sono assolutamente continue rispetto a y , per ogni x fissato, nell'intervallo $-b + x \operatorname{tg} \alpha_0 \leq y \leq b - x \operatorname{tg} \alpha_0$, e, per ogni y_0 fissato in $(-b, b)$, assolutamente continue in x sul segmento della retta $y = y_0$ appartenente a D : infatti tali sono le funzioni $\phi_i(g_i(0; x, y))$, $\phi_i(g_2(0; x, y))$, ($i = 1, 2$), come funzioni assolutamente continue di funzioni $g_1(0; x, y)$, $g_2(0; x, y)$ monotone⁽²⁰⁾ sia rispetto a x che rispetto a y .

Assunte, nella (52'), X , Y come coordinate correnti, e considerata la funzione $z_2(X, Y)$ per $Y = g_1(X; 0, 0)$

$$z_2(X, g_1(X; 0, 0)),$$

⁽²⁰⁾ Essendo $\varrho_1(x) > 0$, $\varrho_2(x) > 0$, ($0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$), le funzioni $g_i(X; x, y)$, ($i = 1, 2$), sono crescenti, oltre che rispetto a y (come sempre si verifica in virtù del teorema di unicità citato in ^(2bis)), anche rispetto a X , e decrescenti rispetto a x (cfr. § 1, n. 2).

tale funzione non è assolutamente continua in X : si dimostra infatti addirittura che non è a variazione limitata.

Considerato un punto $P(X, Y)$, utilizziamo la notazione $z_2(P) = z_2(X, Y)$.

Si ha (cfr. la figura, nella quale si intende sostituire le coordinate X, Y alle coordinate x, y ; cfr. anche nota ⁽¹⁹⁾), per il significato di d_n

$$z_2(P_{2n+1}) - z_2(P_{2n+2}) = \sqrt{d_n} \sqrt{2} + \int_{X_{2n+2}}^{X_{2n+1}} f_2(t) dt, \quad (n = 0, 1, \dots),$$

dove si è osservato che in P_{2n+2} è $Y - X = 0$ e in P_{2n+1} è $Y - X = d_n \sqrt{2}$.

Essendo

$$d_n = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

si ha anche

$$d_n > \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(2n+2)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ne segue

$$\sum_{n=0}^r |z_2(P_{2n+1}) - z_2(P_{2n+2})| = \sum_{n=0}^r \left| \sqrt{\frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{(2n+1)(2n+2)}} + \int_{X_{2n+2}}^{X_{2n+1}} f_2(t) dt \right|,$$

e se, per semplificare, supponiamo $f_2(t) \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^r |z_2(P_{2n+1}) - z_2(P_{2n+2})| > \sum_{n=0}^r \frac{\sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}}{2n+2} = \sqrt{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2r+2} \right),$$

da cui subito segue che la funzione $z_2(X, g_1(X; 0, 0))$ non è a variazione limitata.

OSSERVAZIONE. — Le caratteristiche del secondo sistema hanno in comune infiniti punti con le caratteristiche del primo sistema, senza avere archi in comune.

Ciò si verifica per esempio per le due caratteristiche

$$Y = X, \quad Y = g_1(X; 0, 0).$$

10. — a) LEMMA. — Siano $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ due funzioni definite nel campo

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y < +\infty,$$

le quali in corrispondenza ad ogni y siano quasi continue rispetto a x in $(0, a_0)$; esistano due funzioni non negative, quasi continue e integrabili in $(0, a_0)$, $\eta(x)$, $\lambda(x)$, tali che in quasi tutto $(0, a_0)$ sia

$$(53) \quad |f_i(x, y)| \leq \eta(x) \quad (i = 1, 2)$$

per ogni y reale, e

$$(54) \quad |f_i(x, y) - f_i(x, \bar{y})| \leq \lambda(x)|y - \bar{y}| \quad (i = 1, 2)$$

per ogni coppia di valori reali $y, \bar{y}$.

Inoltre per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia

$$(55) \quad f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$$

per ogni y .

Considerate le equazioni differenziali

$$(56_1) \quad y' = f_1(x, y)$$

$$(56_2) \quad y' = f_2(x, y)$$

e indicati con $y_1(x), y_2(x)$ due integrali rispettivamente della prima e seconda equazione, soddisfacenti le

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0,$$

dove x_0 è un punto dell'intervallo $(0, a_0)$, valgono le

$$(57) \quad \begin{cases} y_1(x) \leq y_2(x) & \text{per } x_0 < x \leq a_0 \\ y_1(x) \geq y_2(x) & \text{per } 0 \leq x < x_0; \end{cases}$$

se in particolare per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ vale la

$$(55') \quad f_1(x, y) < f_2(x, y)$$

per ogni y , si ha

$$(57') \quad \begin{cases} y_1(x) < y_2(x) & \text{per } x_0 < x \leq a_0 \\ y_1(x) > y_2(x) & \text{per } 0 \leq x < x_0. \end{cases}$$

Ne segue che, nell'ipotesi (55'), due curve integrali delle equazioni (56₁), (56₂) rispettivamente, le quali abbiano in comune un punto, non hanno altri punti in comune.

OSSERVAZIONE I. — Se le funzioni $f_1(x, y), f_2(x, y)$ sono continue, la proprietà è immediata.

OSSERVAZIONE II. — La proprietà è evidente se è $f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) \geq 0$.

b) In virtù dei teoremi di esistenza e unicità di Carathéodory (cfr. l.c. in ⁽²⁾) esiste, ed è unica, la funzione $y_i(x)$, assolutamente continua in $(0, a_0)$, che soddisfa quasi ovunque in $(0, a_0)$ l'equazione (56_i) e la condizione

$$y_i(x_0) = y_0, \quad (i = 1, 2);$$

in quasi tutto $(0, a_0)$ è dunque

$$(58) \quad \begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x)) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_2(x)) . \end{aligned}$$

Dalle (58) segue in quasi tutto $(0, a_0)$

$$\frac{d(y_2(x) - y_1(x))}{dx} = f_2(x, y_2(x)) - f_1(x, y_1(x))$$

e anche

$$(59) \quad \frac{d(y_2(x) - y_1(x))}{dx} = f_2(x, y_2(x)) - f_2(x, y_1(x)) + f_2(x, y_1(x)) - f_1(x, y_1(x)) .$$

Definiamo in $(0, a_0)$ la funzione $H(x)$ nel modo che segue: in quei punti di $(0, a_0)$ nei quali è $y_1(x) \neq y_2(x)$ poniamo

$$H(x) = \frac{f_2(x, y_2(x)) - f_2(x, y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)} ,$$

nei rimanenti punti

$$H(x) = 0 .$$

Osserviamo che $H(x)$ risulta quasi continua in $(0, a_0)$, inoltre, in virtù delle (54), in quasi tutto $(0, a_0)$ è

$$(60) \quad |H(x)| \leq \lambda(x) .$$

La (59) si scrive allora

$$(59') \quad \frac{d(y_2(x) - y_1(x))}{dx} = H(x)(y_2(x) - y_1(x)) + f_2(x, y_1(x)) - f_1(x, y_1(x)) ;$$

la (59') vale per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$.

Consideriamo ora l'equazione differenziale lineare

$$(61) \quad y' = H(x)y + f_2(x, y_1(x)) - f_1(x, y_1(x)) .$$

Essa ammette come integrale la funzione

$$y_2(x) - y_1(x) ,$$

la quale, per $x = x_0$, assume valore nullo.

Esiste un solo ⁽²¹⁾ integrale $Y(x)$ della (61) soddisfacente la condizione

$$Y(x_0) = 0;$$

esso ha la forma ⁽²²⁾

$$Y(x) = \int_{x_0}^x [f_2(X, y_1(X)) - f_1(X, y_1(X))] \exp \left[\int_X^x H(t) dt \right] dX.$$

Pertanto si ha $y_2(x) - y_1(x) = Y(x)$ in tutto $(0, a_0)$, vale a dire

$$(62) \quad y_2(x) - y_1(x) = \int_{x_0}^x [f_2(X, y_1(X)) - f_1(X, y_1(X))] \exp \left[\int_X^x H(t) dt \right] dX,$$

da cui, tenuto conto delle (55), seguono le (57); se valgono le (55'), ne seguono le (57').

⁽²¹⁾ Consideriamo l'equazione lineare $y' = H(x)y + K(x)$, con $H(x)$, $K(x)$ quasi continue e integrabili in $(0, a_0)$. Se $Y(x)$, $Y^*(x)$ sono due integrali di tale equazione, soddisfacenti la condizione $Y(x_0) = Y^*(x_0) = Y_0$, in $(0, a_0)$ valgono le

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x [H(X) \cdot Y(X) + K(X)] dX, \quad Y^*(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x [H(X) Y^*(X) + K(X)] dX,$$

da cui

$$Y(X) - Y^*(X) = \int_{x_0}^x H(X) [Y(X) - Y^*(X)] dX.$$

Un'immediata applicazione del lemma di Gronwall generalizzato (cfr. l.c. in ⁽¹⁵⁾) prova che è $Y(x) = Y^*(x)$ in tutto $(0, a_0)$.

⁽²²⁾ Più in generale, l'integrale dell'equazione lineare $y' = H(x)y + K(x)$, soddisfacente la condizione $y(x_0) = y_0$ è

$$y = y_0 \exp \left[\int_{x_0}^x H(X) dX \right] + \int_{x_0}^x K(X) \exp \left[\int_X^x H(t) dt \right] dX.$$