Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici.

Nota di Paolo Salmon (a Pisa) (*)

Sunto. - *Si dimostrano alcune proprietà dell'anello delle serie convergenti nel polidisco unità di K^n (K non archimedeo): lemma di preparazione, noetherianità, unica decomposizione. Si dimostra quindi la validità di un enunciato forte del tipo «teorema A» per un certo fascio analitico sul polidisco.*

Introduzione - In questo lavoro dimostro alcune proprietà dell'anello delle serie convergenti nel polidisco unità di K^n (K valutato, completo, non archimedeo), che in parte sono già state annunciate nella nota [3] pubblicata nel luglio 1962 sui Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Il risultato più significativo è un lemma di preparazione «globale» per le serie convergenti nel polidisco unità; esso discende a sua volta da un lemma di preparazione per le serie formali ristrette, che avevo egualmente annunciato nelle nota [3] e di cui ho poi dato una dimostrazione completa, assieme ad alcune estensioni, nella nota [4] in corso di pubblicazione sul Bulletin de la Société Mathematique de France del 1964.

La noetherianità e la fattorialità dell'anello delle serie convergenti nel polidisco unità seguono facilmente dal lemma di preparazione, come nel caso classico. La noetherianità era già stata dimostrata da J. Tate (cf. [7], Theorem 4.5.) con altro metodo. Tate aveva inoltre stabilito la fattorialità dell'anello in questione nel caso di una valutazione discreta del corpo K. Il problema di studiare l'unica decomposizione dell'anello suddetto nel caso generale, era stato posto da J. P. Serre durante il suo corso al College de France nell'anno 1962.

Al termine di questo lavoro (n. 6) considero un'applicazione del lemma di preparazione globale ai fasci analitici su un polidisco chiuso. In sostanza, dimostro il seguente fatto: il fascio delle relazioni tra un numero finito di sezioni *strettamente olomorfe* sul polidisco unità (cf. n. 2) è generato da un numero finito di relazioni strettamente olomorfe sul polidisco. Tale fascio è dunque non soltanto di tipo finito, come risulta dal teorema di coerenza di Oka, ma soddisfa altresì ad una forma particolarmente forte del teorema A di Cartan e Serre.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

1. Richiamo di risultati sulle serie ristrette. – Riteniamo opportuno richiamare, oltre la terminologia, alcuni risultati sulle serie formali ristrette stabiliti in [4].

Sia A un anello commutativo dotato di elemento unità. Supponiamo che A sia munito di una topologia lineare, cioè di una topologia per cui un sistema fondamentale di intorni dello 0 è costituito da ideali di A. Diremo che un elemento $a \in A$ è topologicamente nilpotente se $a^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Indichiamo con $A\{X_1, \dots, X_n\}$ l'anello delle serie formali ristrette, cioè il sottoanello di $A[[X_1, \dots, X_n]]$ formato dalle serie $f = \Sigma\, a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ tali che $a_{i_1 \dots i_n} \to 0$ se $i_1 + \dots + i_n \to \infty$.

Supporremo sempre, nel corso di questa nota, che A sia separato e completo per la data topologia lineare. Per le serie ristrette su un anello siffatto vale un lemma di preparazione (cf. [4], théorème 10' et corollaire 1 au théorème 11) che qui riproduciamo nelle due forme perfettamente identiche a a quelle del lemma di preparazione classico di Weierstrass.

LEMMA DI PREPARAZIONE PER LE SERIE RISTRETTE. – Siano A un anello linearmente topologizzato separato e completo, m un ideale chiuso di A i cui elementi sono tutti topologicamente nilpotenti, φ l'omomorfismo naturale di $A\{X_1, \dots, X_n\}$ in $(A/m)\{X_1, \dots, X_n\}$. Sia $g \in A\{X_1, \dots, X_n\}$ una serie ristretta tale che $\bar{g} = \varphi(g)$ sia un polinomio unitario in X_n di grado s dell'anello $(A/m)\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$. Si ha allora:

(*i*) g è associata in $A\{X_1, \dots, X_n\}$ ad uno ed un sol polinomio p di $A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ unitario in X_n e p ha grado s in X_n;

(*ii*) ogni serie $f \in A\{X_1, \dots, X_n\}$ si può scrivere in uno ed un sol modo nella forma

$$f = hg + r$$

ove $h \in A\{X_1, \dots, X_n\}$ ed r è un polinomio di $A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ di grado $\leq s - 1$.

I principali risultati che trarremo nei numeri seguenti si fondano tutti sul lemma di preparazione suddetto. Sarà inoltre utile una caratterizzazione degli elementi invertibili dell'anello $A\{X_1, \dots, X_n\}$ nel caso di un anello A soddisfacente a queste proprietà:

1) A è un anello locale (non necessariamente noetheriano) di cui indichiamo con m l'ideale massimale;

2) m è aperto ed i suoi elementi sono topologicamente nilpotenti.

Vale allora la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1. - *Sia A un anello linearmente topologizzato soddisfacente alle condizioni* 1) *e* 2). *Allora gli elementi invertibili di* $A\{X_1, \dots, X_n\}$ *sono tutte e sole le serie ristrette* $f = \Sigma\, a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ *tali che* $a_{00 \dots 0} \notin m$, $a_{i_1 \dots i_n} \in m$ *se* $(i_1, \dots, i_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Questa proposizione è un immediato corollario di [4], prop. 2.

OSSERVAZIONE. - Sia A l'anello di valutazione di un corpo K valutato completo non archimedeo (cf. il seguente n. 2), e sia m l'ideale massimale di A. Risulterà subito dalle considerazioni all'inizio del n. 2 che la coppia (A, m) soddisfa contemporaneamente alle ipotesi del lemma di preparazione anzidetto e alla proposizione 1. Nel seguito noi applicheremo esclusivamente a siffatte copie (A, m) i risultati per le serie ristrette richiamati nel presente numero.

2. **Serie convergenti nel polidisco unità di K^n.** Sia K un corpo valutato completo non archimedeo. Intendiamo con ciò che:

1) su K è definita un'applicazione $x \to |x|$ a valori reali positivi, detta valore assoluto, e soddisfacente alle seguenti proprietà

$$|xy| = |x|\ |y|$$

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$$

$$|x| = \Longleftrightarrow x = 0;$$

2) K è completo per la topologia meno fine che rende continuo il valore assoluto quando R^+ è munito della topologia ordinaria. Un sistema fondamentale di intorni dello 0 in K è dato perciò dagli insiemi

$$U_\varepsilon = \{x \in K, |x| < \varepsilon, \varepsilon \in R^+ - 0\}.$$

La topologia di K definisce una struttura di spazio ultrametrico. Valgono quindi per K, ed alresì per K^n $(n \in N^+)$ le seguenti proprietà ben note (cf. ad esempio, [2]) e di immediata verifica:

a) ogni punto di un disco (aperto o chiuso) è centro di quel disco;

b) se due dischi non sono disgiunti, uno è interno all'altro;

c) ogni disco chiuso è un insieme aperto;

d) K è totalmente discontinuo;

e) una serie $c_0 + c_1 + \dots + c_n + \dots$ $(c_i \in K, i = 1, 2, \dots)$ converge se e solo se $|c_n| \to 0$ per $n \to \infty$.

Ricordiamo che una funzione f definita su un aperto U di K^n e a valori in K si dice olomorfa in U se f è localmente sviluppabile in serie di TAYLOR nei punti di U. Dalle proprietà suesposte risulta però chiara una differenza essenziale dal caso complesso al caso di un corpo non archimedeo. In quest'ultimo caso, infatti, una funzione che vale 0 su un polidisco ed 1 altrove è olomorfa su tutto K^n. Ha quindi senso porre la seguente

DEFINIZIONE. - *Una funzione f olomorfa su un polidisco chiuso $C = \{(x_1, \dots, x_n), \mid x_i - a_i \mid \leq R_i, x_i, a_i \in K, i = 1, \dots, n\}$ si dice strettamente olomorfa se si puó scrivere*

$$f = \Sigma c_{i_1 \dots i_n} (x_1 - a_1)^{i_1} \dots (x_n - a_n)^{i_n}, \; c_{i_1 \dots i_n} \in K$$

in ogni punto di C, cioè se in ogni punto $x = (x_1, \dots, x_n) \in C$ la serie al secondo membro converge a $f(x)$ (1). Ciò implica $\mid c_{i_1 \dots i_n} \mid R^{i_1} \dots R^{i_n} \rightarrow 0$ se $i_1 + \dots + i_n \rightarrow \infty$.

Sia $A \subset K$ l'anello di valutazione di K, cioè il sottoanello di K costituito dagli elementi $x \in K$ per cui $\mid x \mid \leq 1$; sia m l'ideale massimale di A. Conderiamo su A la topologia indotta da quella di K. In tal modo A risulta un anello linearmente topologizzato, separato e completo, ed m è un ideale aperto i cui elementi sono tutti topologicamente nilpotenti (cf. l'osservazione al termine del n. 1)-

Consideriamo l'anello $K\{X_1, \dots, X_n\}$ delle serie convergenti (ovvero strettamente olomorfe) nel polidisco unità U di K^n: $U = \{x_1, \dots, x_n), \mid x_i \mid \leq 1, x_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}$ (2). Si ha allora un isomorfismo naturale:

$$K\{X_1, \dots, X_n\} = A\{X_1, \dots, X_n\} \underset{A}{\otimes} K.$$

Sia infatti $f = \Sigma c_{i_1 \dots i_n} X^{i_1} \dots X^{i_n}$ una serie di $K\{(X_1, \dots, X_n\}$. Poichè $\mid c_{i_1 \dots i_n} \mid \rightarrow 0$ se $i_1 + \dots + i_n \rightarrow \infty$, tutti i coefficienti di f, ad accezione di un numero finito di essi, appartengono ad A. Si può dunque scrivere

$$f = cg \text{ dove } g = \Sigma a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in A\{X_1, \dots, X_n\}, \; c \in K,$$

donde l'asserto.

(1) Questa definizione è stata introdotta da J. P. SERRE nel suo corso « Analyse p-adique » tenuto al College de France nell'anno 1962.

(2) Il simbolismo da noi adottato è stato introdotto J. TATE (es. [7]) e non dovrebbe dar luogo a confusioni. Va tuttavia notato che $K\{X_1, \dots, X_n\}$ non è un anello locale ed è strettamente contenuto nell'anello $\mathcal{O}_0$ delle funzioni convergenti nell'origine O di K^n. Il simbolo $K\{X_1, \dots, X_n\}$ viene sovente usato nella tetteratura per indicare l'anello $\mathcal{O}_0$.

Possiamo inoltre alterare la costante c nella precedente decomposizione di f in modo che almeno un coefficiente della serie ristretta g sia unitario. Posto infatti $M = \max |c_{i_1 \dots i_n}|$, sia $(j_1 \dots j_n)$ una n-upla tale che $|c_{j_1 \dots j_n}| = M$. Si ha allora, posto $c = c_{j_1} \dots c_{j_n}$:

$$f = cg \text{ ove } g = \Sigma a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in A \{X_1, \dots, X_n\} \text{ e } a_{j_1 \dots j_n} = 1.$$

Infine, se è dato un ordinamento totale per le n-uple $(i_1, \dots, i_n)$ e quindi per i monomi non nulli di $A[X_1, \dots, X_n]$, possiamo fare in modo che sia unitario il massimo monomio di g, tra quelli a coefficiente invertibile in A. Basta infatti, nel ragionamento precedente, scegliere per $(j_1, \dots, j_n)$ la massima n-upla $(i_1, \dots, i_n)$ per cui $|a_{i_1 \dots i_n}| = M$. Allora, se $(i_1, \dots, i_n) > (j_1, \dots, j_n)$, si ha $|c_{i_1 \dots i_n}| < M$, quindi $|a_{i_1 \dots i_n}| < 1$, vale a dire $a_{i_1 \dots i_n} \in m$. Come conseguenza delle considerazioni svolte otteniamo la

PROPOSIZIONE 2. - *Ogni serie $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ si può scrivere come un prodotto $f = cg$ ove $c \in K$ e g é una serie ristretta di $A\{X_1, \dots, X_n\}$ contenente un monomio unitario. Prefissato inoltre un ordinamento totale per i monomi non nulli di $A\{X_1, \dots, X_n\}$, si ha un'unica decomposizione del tipo suddetto in cui sia unitario il massimo tra i monomi di g a coefficiente invertibile in A.*

Resta solo da dimostrare l'unicità della decomposizione di f colla condizione imposta nel secondo periodo della proposizione.

Si abbiano invero due tali decomposizioni $f = cg = c'g'$; ne deduciamo le relazioni $(c')^{-1} cg = g'$ e $g = c^{-1} c'g'$. È chiaro allora che le costanti $(c')^{-1}c$ e $c^{-1}c'$ non appartengono ad m perchè g e g' hanno un monomio unitario. Ne segue che $c^{-1} c'$ è un elemento invertibile di A, poichè A è un anello di valutazione; ciò implica necessariamente $c^{-1} c' = 1$ e $g = g'$, g e g' avendo entrambe unitario il massimo monomio tra quelli a coefficiente invertibile in A.

DEFINIZIONE. - *Sia φ l'omomorfismo canonico $A\{X_1, \dots, X_n\} \to (A/m)[X_1, \dots, X_n]$. L'immagine mediante φ di una serie ristretta g si dice polinomio ridotto di g e si indicherà brevemente con $\bar{g}$.*

Osserviamo che se g e g' sono due serie ristrette il cui polinomio ridotto è non nullo, anche il prodotto gg' ha polinomio ridotto non nullo, in quanto $(A/m)[X_1, \dots, X_n]$ è un dominio d'integrità.

PROPOSIZIONE 3. - *Sia f una serie invertibile di $K\{X_1, \dots, X_n\}$. Allora si può scrivere $f = cg$ ove $c \in K$ e g é una serie invertibile di $A\{X_1, \dots, X_n\}$. Inoltre, se vale una decomposizione $f = c'g'$ con c' K, $g' \in A\{X_1, \dots, X_n\}$, $\bar{g} \neq 0$, g' è una seriè ristretta invertibile.*

Basta dimostrare la seconda asserzione perchè da essa e dalla proposizione 2 segue subito la prima. Sia dunque $f = c'g'$ con $c' \in K$, $g' \in A\{X_1, \dots, X_n\}$, $\bar{g}' \neq 0$. Sia $h \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ una serie tale che $fh = 1$. Si può decomporre h in un prodotto cg con $\bar{g} \neq 0$, e si ottiene la relazione $cc'gg' = 1$. Si vede allora, con ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione della proposizione 2, che cc' é un elemento invertibile in A, perchè gg' ed 1 hanno polinomio ridotto non nullo. Dunque g' è una serie ristretta invertibile.

3. Il lemma di preparazione per le serie convergenti nel polidisco unità di K^n. - Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE. - *Una serie $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ si dice regolare in X_n se si può scrivere $f = cg$ ove $c \in K$ e $g \in A\{X_1, \dots, X_n\}$ è una serie ristretta il cui polinomio ridotto $\bar{g}$ è unitario in X_n.*

Sia f una serie regolare in X_n e sia $f = cg$ la decomposizione di f che, per definizione, ne asserisce la regoiarità. Allora esiste un intero s tale che, posto $g = \Sigma a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots {}^{i_n}$, si ha:

$$a_{00 \dots 0s} \in 1 + m, \; a_{i_1 \dots i_{n-1}s} \in m \text{ se } (i_1 \dots i_{n-1}) \neq (0 \dots 0), \; a_{i_1 \dots i_n} \in m \text{ se } i_n > s.$$

Se allora poniamo $c' = c a_{00 \dots 0s}$ si ha la decomposizione $f = c'g'$ dove $g' = \Sigma a'_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ è una serie ristretta tale che

$$a'_{00 \dots 0s} = 1, \; a'_{i_1 \dots i_{n-1}s} \in m \text{ se } (i_1, \dots, i_{n-1}) \neq (0, \dots, 0),$$

$$a'_{i_1 \dots i_n} \in m \text{ se } i_n > s.$$

Ordiniamo lexicograficamente le n-uple $(i_1, \dots, i_n)$ nel modo seguente:

$$(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n) \text{ se } i_n = j_n, \dots, i_t = j_t, \; i_{t-1} < j_{t-1}.$$

Allora le condizioni precedenti possono scriversi brevemente

$$a'_{00 \dots 0s} = 1, \; a'_{i_1 \dots i_n} \in m \text{ se } (i_1, \dots, i_n) > (0, \dots, 0, s):$$

inoltre $a'_{00 \dots 0s} X_n^s$ risulta il massimo tra i monomi di g a coefficiente invertibile in A.

Dalle considerazioni ora svolte e dalla proposizione 2, si ottiene allora la

PROPOSIZIONE 4. - *Sia $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ una serie regolare in X_n. Allora f si decompone in modo unico in un prodotto cg dove $c \in K$, e*

$$g = \Sigma a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in A\{X_1, \dots, X_n\}$$

è una serie ristretta per cui esiste un intero s tale che:

$$a_{00 \dots 0s} = 1, \; a_{i_1 \dots i_{n-1}s} \in m \text{ se } (i_1, \dots, i_{n-1}) \neq (0, \dots, 0), \tag{1}$$

$$a_{i_1 \dots i_n} \in m \text{ se } i_n > s.$$

DEFINIZIONE. - *L'intero s legato ad una serie regolare f mediante la proposizione 4 dicesi ordine della serie regolare f.*

Siamo adesso in grado di dare il lemma di preparazione per le serie convergenti nel polidisco unità di K^n che è espresso dal teorema seguente.

TEOREMA 1 (*di preparazione*). - *Sia $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ una serie regolare in X_n di ordine s. Si ha allora:*

(*i*) *f è associata in $K\{X_1, \dots, X_n\}$ ad uno ed un sol polinomio p di $A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ unitario in X_n e p ha grado s in X_n;*

(*ii*) *ogni serie $f' \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ si può scrivere in uno ed un sol modo nella forma $f' = hf + r$ dove $h \in K\{X_1, \dots, X_n\}$ ed r è un polinomio di $K\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ di grado $\leq s - 1$.*

Dimostriamo (*i*). Sia $f = cg$ l'unica decomposizione di f nel prodotto di una costante c e di una serie ristretta g per cui valgono le condizioni (1). Dal lemma di preparazione per le serie ristrette (cf. n. 1) segue che g si decompone in modo unico nel prodotto di un polinomio p di $A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ unitario in X_n e di una serie u invertibile in $A\{X_1, \dots, X_n\}$; inoltre p ha grado s in X_n. Dunque p è associato ad f ed ha i requisiti voluti.

Sia ora $f = v'p'$ una decomposizione di f in una serie invertibile di $K\{X_1, \dots, X_n\}$ ed in un polinomio $p' \in A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ unitario in X_n. Si può scrivere, in virtù delle proposizioni 1, 2, 3, $v' = c'u'$ con $c' \in K$ ed u' invertibile in $A\{X_1, \dots, X_n\}$ e dotata di termine costante unitario. Si ha $f = c'u'p'$ ed i coefficienti di $u'p'$ soddisfano come g alle condizioni (1). Segue dunque, per la proposizione 4, che $c = c'$, $g = u'p'$; da ciò si trae infine $u = u'$, $p = p'$, donde l'unicità del polinomio p.

Dimostriamo (*ii*). Decomponiamo f ed f' nei prodotti $f = cg$ e $f' = c'g'$ dove c, $c' \in K$, g, $g' \in A\{X_1, \dots, X_n\}$ e $\bar{g}$ è unitario in X_n. Dal lemma di preparazione per le serie ristrette segue una decomposizione $g' = hg + r$ in $A\{X_1, \dots, X_n\}$ dove r è un polinomio in X_n di grado $\leq s - 1$. Di qui segue subito una decomposizione di f di cui dobbiamo mostrare l'unicità.

Basta ora dimostrare che dalla relazione $0 = hf + r$ in $K\{X_1, \dots, X_n\}$, con r polinomio in X_n di grado $s - 1$ segue $h = r = 0$. Nella relazione precedente, moltiplicando per una opportuna costante di K, si possono sostituire f con g ed h, r con una serie ed un polinomio ristretti. Il nostro asserto è allora una conseguenza dell'unicità asserita nel lemma di preparazione per le serie ristrette, (*ii*).

4. **Automorfismi** - Premettiamo un lemma che, salvo modificazioni inessenziali, ricorre frequentemente nella letteratura.

LEMMA 1. - *Siano A un anello, p un polinomio di $A[X_1, \dots, X_n]$ unitario nel monomio massimo rispetto all'ordinamento lexicografico introdotto nel n. 3. Esiste allora un automorfismo τ di $A[X_1, \dots, X_n]$ tale che $\tau(p)$ è un polinomio unitario in X_n.*

Si possono infatti determinare dei numeri interi $t_2, \dots, t_n$ tali che il trasformato $\rho(p)$ di p mediante l'automorfismo

$$\rho: \begin{array}{l} X_1 \to X_1 \\ X_2 \to X_2 + X_1^{t_2} \\ \cdots\cdots \\ X_n \to X_n + X_1^{t_n} \end{array}$$

è un polinomio unitario in X_1 (cf, ad esempio [5], Chap. III, n. 3, Lemme 3). Se allora σ è l'automorfismo di $A[X_1, \dots, X_n]$ che permuta X_1 con X_n, l'automorfismo $\tau = \sigma \cdot \rho$ soddisfa alla condizione voluta dal lemma.

PROPOSIZIONE 5. - *Sia $h \in A\{X_1, \dots, X_n\}$ una serie il cui polinonio ridotto $\bar{h}$ è unitario nel monomio massimo rispetto al solito ordinamento lexicografico. Allora esiste un automorfismo τ di $A\{X_1, \dots, X_n\}$, estendibile ad un automorfismo di $K\{X_1, \dots, X_n\}$ tale che $\tau(h)$ è una serie ristretta il cui polinomio ridotto è unitario in X_n.*

L'applicazione data da

$$(2) \qquad X_1 \to X_n,\ X_2 \to X_2 + X_n^{t_2}, \dots, X_{n-1} \to X_{n-1} + X_n^{t_{n-1}},\ X_n \to X_1 + X_n^{t_n}$$

pone infatti, in virtù del lemma, un automorfismo τ di $(A/m)[X_1, \dots, X_n]$ che trasforma il polinomio $\bar{h}$ in un polinomio unitario in X_n; d'altra parte le relazioni (2) stabiliscono anche un automorfismo τ di $A\{X_1, \dots, X_n\}$ estendibile ad un automorfismo di $K\{X_1, \dots, X_n\}$. Inoltre, se φ è l'omomorfismo canonico di $A\{X_1, \dots, X_n\}$ su $(A/m)[X_1, \dots, X_n]$, si ha $\varphi \cdot \tau = \bar{\tau} \cdot \varphi$. Si ha dunque $\overline{\tau(h)} = \bar{\tau}(\bar{h})$, cioè $\overline{\tau(h)}$ è un polinomio unitario in X_n.

Dalla proposizione precedente e dalla proposizione 2 risulta subito il

COROLLARIO. - *Sia $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$. Esiste sempre un automorfismo τ di $K\{X_1, \dots, X_n\}$ tale che $\tau(f)$ è una serie regolare in X_n.*

5. **Noetherianità e fattorialità di $K\{X_1, \dots, X_n\}$.** - Nei numeri precedenti abbiamo posto tutte le premesse per stabilire nuovamente la noetherianità e dimostrare quindi l'unica decomposizione dell'anello $K\{X_1, \dots, X_n\}$ nello stesso modo con cui si stabiliscono i corrispondenti risultati, a partire dal classico lemma di WEIERSTRASS, per gli anelli delle serie formali o convergenti nell'origine di K^n. Ritroviamo subito il seguente risultato di TATE.

TEOREMA 2. - *L'anello $K\{X_1, \dots, X_n\}$ é noetheriano.*

Possiamo procedere per induzione su n, il teorema essendo banalmente vero per $n = 0$. poniamo $B = K\{X_1, \dots, X_n\}$, $C = K\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$. Sia ϑ un ideale non nullo di B; dobbiamo dimostrare chè ϑ è di tipo finito. Sia f una serie non nulla di ϑ. Poichè la nozione «di tipo finito» è invariante per automorfismi, possiamo supporre, in virtù del corollario alla proposizione 5, che la serie f sia regolare in X_n di ordine s. Inndichiamo con M il C-modulo generato su C dai monomi $1, X_n, \dots, X_n^{s-1}$. Allora, per il teorema 1, ogni serie $f' \in \vartheta$ si può scrivere $f' = hf + r$ ove $r \in \vartheta \cap M$. Poichè C è noetheriano per l'ipotesi induttiva ed M è un C-modulo di tipo finito, il sottomodulo $\vartheta \cap M$ di M risulta di tipo finito su C. Posto $\vartheta \cap M = (a_1, \dots, a_t)\, C$, si ha manifestamente $\vartheta = (f, a_1, \dots, a_t)\, B$, c. v. d.

TEOREMA 3. - *L'anello $K\{X_1, \dots, X_n\}$ è fattoriale.*

Il teorema è vero per $n = 0$ e si procederà per induzione su n.

Poniamo ancora $B = K\{X_1, \dots, X_n\}$, $C = K\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$. Ogni elemento di B ammette una decomposizione in elementi irriducibili (o estremali) in quanto, per il teorema precedente, B è noetheriano. Affinche una tale decomposizione sia unica, a meno di elementi invertibili, basta dimostrare che un elemento irriducibile di B è primo (cioè genera un ideale primo). Sia f un elemento irriducibile di B. In virtù della proposizione 5 esiste un automorfismo τ di B tale che $\tau(f)$ è regolare in X_n; indicato allora con s l'ordine di $\tau(f)$, $\tau(f)$ risulta associata, per il teorema 1, ad un polinomio $p \in A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ unitario e di grado s in X_n. Possiamo limitarci a dimostrare che p è primo in B: cioè, se p divide in B un prodotto ff', p divide uno dei due fattori.

Sappiamo che p è irriducibile in B; mostriamo adesso che p è estremale anche in $C[X_n]$. Sia $p = qq'$ una decomposizione di p in $C[X_n]$. Posto $q = \sum_0^t q_i X_n^i$, $q' = \sum_0^{t'} q'_i X_n^i$ dove q_i, $q'_i \in C$, risulta $t + t' = s$, $q_t q'_{t'} = 1$, onde q_t e $q'_{t'}$ sono serie invertibili di C. I polinomi $\dfrac{q}{q_t}$ e $\dfrac{q'}{q'_{t'}}$ sono unitari ed il loro prodotto divide p che è estremale in B; dunque uno dei due polinomi, ad esempio $\dfrac{q}{q_t}$ è invertibile in B. Si ha allora necessariamente $\dfrac{q}{q_t} = 1$ poichè, per il teorema 1,(i) una serie regolare è associata ad un sol polinomio unitario. Ciò mostra che q è invertibile in C e, di conseguenza, che p è estremale in $C[X_n]$.

Ora, se p divide il prodotto ff' in B, ed r, r' sono i resti di grado $\leq s-1$ in $C[X_n]$ della divisione di f, f' per p (cf. il teorema 1, (ii)), p divide anche rr' in B. Allora p divide uno dei due fattori, ad esempio r, poichè, sempre per il teorema 1, (ii), il quoziente di rr' per p appartiene a $C[X_n]$ che è un anello fattoriale in virtù dell'ipotesi induttiva. Si ha allora necessariamente $r = 0$, poichè il grado di r non supera $s - 1$; dunque p divide f ed il teorema è così dimostrato.

La proposizione seguente ed il suo corollario precisano ulteriormente l'unicità della decomposizione, a meno di fattori invertibili, di un polinomio unitario $p \in A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$.

PROPOSIZIONE 6. - *Se $p \in A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ è un polinomio unitario in X_n e se vale in $K\{X_1, \dots, X_n\}$ una decomposizione $p = ff'$, f ed f' sono rispettivamente associate a due polinomi q, $q' \in A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ unitari in X_n, e si ha $p = qq'$.*

Indichiamo con C l'anello $A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$. Possiamo scrivere, in virtù della proposizione 2:

$$f = cg = c(a_0 + a_1 X_n + \dots + a_m X_n^m + \dots),\ c \in K,\ a_i \in C,\ \bar{g} \neq 0$$

$$f' = c'g' = c'(a'_0 + a'_1 X_n + \dots + a'_{m'} X_n^{m'} + \dots),\ c' \in K,\ a'_i \in C,\ \bar{g} \neq 0.$$

Si ottiene allora la relazione $p = cc'gg'$, da cui, con ragionamento analogo a quello fatto nel corso della dimostrazione della proposizione 2, si deduce che cc' è invertibile in A. Inoltre, se m ed m' sono i gradi di $\bar{g}$ e $\bar{g}'$ rispetto ad X_n, $\bar{a}_m$ ed $\bar{a}'_{m'}$ risultano invertibili in A/m; quindi, per la proposizione 1, a_m ed $a'_{m'}$ sono invertibili in C. Si può dunque scrivere $p = d g_0 g'_0$, dove $d = cc' a_m a'_{m'}$ è invertibile in C e g_0, g'_0 sono due serie ristrette associate a g, g' e aventi polinomio ridotto unitario. Le serie g_0 e g'_0 sono a loro volta associate, per il teorema 1, a due polinoni unitari q e q' di $C[X_n]$ e si ha infine una decomposizione $p = u q q'$, dove u è una serie invertibile in $A\{X_1, \dots, X_n\}$. D'altronde p è associata ad un solo polinomio unitario (Teorema 1, (i)) e si ha quindi $p = qq'$, ciò che dimostra la proposizione.

COROLLARIO. – *Affinchè un polinomio $p \in A\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ unitario in X_n sia irriducibile in $K\{X_1, \dots, X_n\}$ occorre e basta che sia irriducibile in $K\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$.*

La necessità della condizione è stata stabilita nel corso della dimostrazione del teorema 3; dimostriamone la sufficienza.

Sia invero p estremale in $K\{X_1, \dots, X_{n-1}\}, [X_n]$, e sia $p = ff'$ una decomposizione di p in $K\{X_1, \dots, X_n\}$. Allora uno dei due polinomi q, q' associati a p (per la proposizione 6) è uguale a 1; quindi una delle due serie f, f' è invertibile in $K\{X_1, \dots, X_n\}$.

6. **Un'applicazione ai fasci analitici.** – In questo numero mostreremo un'applicazione ai fasci analitici del lemma di preparazione per le serie convergenti nel polidisco unità di K^n espresso dal teorema 1.

Richiamiamo un risultato fondamentale della teoria dei fasci analitici su un corpo valutato completo. Indichiamo con $\mathcal{O}(K^n)$, o più brevemente con $\mathcal{O}$, quando non vi è luogo a confusione, il fascio dei germi di funzioni olomorfe (od analitiche) in K^n: *il fascio $\mathcal{O}$ è coerente in virtù di un ben noto teorema di Oka* (per la definizione e le principali proprietà dei fasci coerenti, cf., ad esempio [6], § 2; per il teorema di OKA, cf., ad es. [1], n. 5). Poichè il fascio $\mathcal{O}$ è banalmente di tipo finito, in quanto la sezione «globale» 1 genera tutto $\mathcal{O}$, l'enunciato del teorema di OKA equivale al seguente: «il fascio R delle relazioni tra un numero finito di sezioni $s_1, \dots, s_p$ di $\mathcal{O}$ definite su un aperto U di K^n è di tipo finito (ovvero coerente in quanto R è sottofascio di $\mathcal{O}^p$)».

Supponiamo ora, come nei numeri precedenti, che K sia un corpo valutato completo non archimedeo. Consideriamo un numero finito di funzioni (o sezioni di $\mathcal{O}$) $s_1, \dots, s_p$ strettamente olomorfe (cf. n. 2) sul polidisco unità U di K^n, in altre parole un numero finito di elementi dell'anello $K\{X, \dots, X_n\}$. Diremo che una relazione $r = (r_1, \dots, r_p)$ tra le sezioni $s_1, \dots, s_p$ è *strettamente olomorfa* se le funzioni $r_1, \dots, r_p$ (che sono olomorfe in U e tali che $\sum_{1 \leq i \leq p} r_{i,x} s_{i,x} = 0$ per ogni $x \in U$) sono strettamente olomorfe su U.

Allora R soddisfa ad una proprietà che è più forte di quella espressa dal teorema di OKA per R. Sussiste infatti il

TEOREMA 4. - *Siamo $s_1, \ldots, s_p$ delle sezioni strettamente olomorfe del fascio $\mathcal{O}$ definite nel polidisco unità U di K^n, e sia R il fascio delle relazioni tra $s_1, \ldots, s_p$. Esiste allora un numero finito $r^{(1)}, \ldots, r^{(q)}$ di relazioni tra $s_1, \ldots, s_p$ che sono strettamente olomorfe su U e generano R su $\mathcal{O}$.*

In altre parole, il teorema 4 si esprime così: esistono delle relazioni strettamente olomorfe $r^{(1)}, \ldots, r^{(q)}$ tali che in ogni punto $x \in U$ il modulo R_x è generato su $\mathcal{O}_x$ da $r_x^{(1)}, \ldots, r_x^{(q)}$; cioè il fascio R soddisfa al teorema A e alla ulteriore condizione che le sezioni globali generanti il fascio sono in numero finito e, di più, strettamente olomorfe.

La dimostrazione del teorema 4 è del tutto analogo a quella che viene comunemente data per il teorema di OKA e ne differisce soltanto nel passo iniziale, quando ci si riduce da relazioni tra funzioni olomorfe a relazioni tra funzioni polinominali (in una variabile). Tale riduzione che nella dimostrazione del teorema di OKA si effettua mediante il lemma di preparazione classico, che è di natura locale, può ora avvenire sostituendo al lemma locale il lemma «globale» espresso dal teorema 1. Il resto della dimostrazione procede come per il teorema di OKA; trattandosi di un ragionamento ben noto daremo la dimostrazione speditamente, riferendoci alla redazione [1] già citata.

Osserviamo anzitutto che le nozioni di sezioni e relazioni strettamente olomorfe su U si estendono subito, per la proiezione sugli addendi diretti, da $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}^h$ ($h \in N^+$). Si riconosce allora senza difficoltà, con ragionamento analogo a quello che stabilisce la coerenza della somma diretta di due o più fasci coerenti (cf., ad es. [6], n. 13), che una volta dimostrato il teorema 4, risulta vero anche l'enunciato che si ottiene sostituendo nel teorema 4 « sezioni strettamente olomorfe del fascio $\mathcal{O}$ » con « sezioni strettamente olomorfe del fascio $\mathcal{O}^h$ ».

Il teorema 4 è banalmente vero per $n = 0$. Possiamo dunque procedere per ricorrenza sul numero delle variabili supponendo di aver dimostrato il teorema 4 per un fascio di relazioni tra un numero finito di sezioni strettamente olomorfe di $\mathcal{O}^h$ (K^{n-1}) definite sul polidisco unità U' di K^{n-1}.

Possiamo supporre, applicando eventualmente un automorfismo al prodotto $s_1 \ldots s_p$, che le sezioni $s_1, \ldots, s_p$ siano rappresentate da serie di $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ regolari in X_n (cf. il n. 4). Possiamo allora scrivere $s_i = u_i f_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ ove le u_i sono serie invertibili in $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ e le f_i sono polinomi unitari in X_n. Il fascio R è isomorfo al fascio $\tilde{R}$ delle relazioni su U tra i polinomi f_i; basterà quindi dimostrare il teorema 4 per $\tilde{R}$.

Sia k il massimo grado dei polinomi f_i; e supponiamo che f_p abbia grado k. Sussiste allora la seguente proprietà (cf. [1], n. 5): in ogni punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ di U il modulo delle relazioni tra i polinomi f_i è generato su $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ dalle relazioni globali:

$$r^{(1)} = (f_p, 0, \dots, -f_1), \quad r^{(2)} = (0, f_p, \dots, 0, -f_2), \dots, \quad r^{(p-1)} = (0, \dots, 0, f_p, -f_{p-1})$$

e da una relazione $(r_1, \dots, r_p)$ in cui $r_1, \dots, r_p$ sono polinomi in X_n di grado $\leq k - 1$ a coefficienti olomorfi nelle variabili $X_1, \dots, X_{n-1}$.

Ora, una tale relazione polinomiale $(r_1, \dots, r_p)$ tra i polinomi $f_1, \dots, f_p$ equivale ad una relazione tra un numero finito di sezioni strettamente olomorfe su U' di un fascio $\mathcal{O}^h(K^{n-1})$, ove h è un intero opportuno dipendente da k. Esiste dunque, in virtù dell'ipotesi induttiva, un numero finito di relazioni $r^{(p)}, \dots, r^{(q)}$ strettamente olomorfe su U generanti tutte le relazioni polinomiali $(r_1, \dots, r_p)$ del tipo anzidetto. Allora $\tilde{R}$ è generato dalle relazioni strettamente olomorfe $r^{(1)}, \dots, r^{(q)}$ ed il teorema è così dimostrato.

OSSERVAZIONE. - Sia $V = \{x_1, \dots, x_n\}, \mid x_i - a_i \mid \leq R_i\}$ un polidisco di K^n per cui esistano degli elementi $b_i \in K$, $i = 1, 2, \dots, n$ tali che $\mid b_i \mid = R_i$. Il teorema 4 (e così pure i risultati precedenti) sono allara validi anche per V, in quanto si ha un isomorfismo dell'anello delle funzioni strettamente olomorfe su V nell'anello $K\{X_1, \dots, X_n\}$ dato dalle relazioni $X_i \to a_i + b_i X_i$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. CARTAN, Seminaire E. N. S., 1951-52, exposé XV de MALATIAN.

[2] DELANGE-PISOT, Séminaire Institut Poincaré 1959-60, n. 4, *Analyse p-adique*, rédigé par Mme Y AMICE.

[3] P. SALMON, *Sur les series restreintes et convergentes*. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. t. 255 pp. 439-441.

[4] P. SALMON, *Sur les series formelles restreintes*. In corso di stampa sul Bulletin de la Soc. Math. de France 1964.

[5] P. SAMUEL, *Progrès récents d'algèbre locale*, Notas de Matematica n. 19, Rio de Janeiro, 1956.

[6] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Annals of Math., t. 61, 1955, pp. 197-278.

[7] J. TATE, *Rigide analytic spaces*, Privates notes reprinted by I. H. E. S, 1962.