Alcuni sviluppi sulla teoria relativa dei singrammi finiti (*)

Memoria di ANTONIO ANDREATTA (a Pavia)

Sunto. - *Si esaminano questioni concernenti la tracciabilità di un sigramma (o grafo) finito connesso sopra un'assegnata superficie serrata. Si mostra come ci si possa opportunamente ricondurre al caso di un singramma cubico dotato di circuito di Hamilton. Si studia la struttura di un singramma siffatto e si stabiliscono condizioni necessarie e sufficienti affinché il singramma sia tracciabile sulla sfera ed affinché il singramma sia tracciabile sul piano proiettivo.*

INTRODUZIONE

Da tempo è nota una classica proposizione di C. KURATOWSKI [9], la quale fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché un singramma (o grafo) Γ sia tracciabile sulla sfera, vale a dire affinché Γ possa realizzarsi in modo che i suoi vertici siano punti di una superficie Σ , omeomorfa a quella di una sfera, ed i suoi spigoli siano archi di curva di JORDAN, appartenenti alla superficie, aventi estremi nei vertici di Γ e tali che due spigoli non abbiano (al di fuori dei vertici) alcun punto comune.

Di poco posteriore è un altro importante teorema, dovuto ad H. WHITNEY [18], che pure reca una condizione necessaria e sufficiente per la tracciabilità di un singramma sulla sfera.

In seguito molti altri Autori hanno ripreso in esame il teorema di KURATOWSKI, per illustrarlo sotto molteplici aspetti o variamente generalizzarlo, od anche per fornire criteri che sembrassero di più facile applicazione in casi concreti. Fu invero osservato, anche recentemente [5], che il criterio di KURATOWSKI può offrire difficoltà quando lo si voglia applicare a singrammi con un numero molto elevato di spigoli e di vertici (*).

Il richiamato risultato di KURATOWSKI ha dato poi luogo ad un autonomo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geometria dell'Università di Pavia, nell'ambito del Gruppo di ricerca N. 20 del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Comitato per la Matematica), nell'esercizio 1962-63.

(*) Sempre con riferimento alla bibliografia, posta al termine del lavoro, sono ancora qui da ricordare ai fini della presente esposizione, [6], [10], [11], [13], [15], [16], [17]. Per altre notizie si rinvia ai trattati [1] e [3].

capitolo della teoria dei singrammi che si suole indicare come «teoria relativa». In questa un singramma Γ si pensa realizzato topologicamente sopra una superficie Σ serrata, ed interessano quelle circostanze che sono invarianti di fronte agli omeomorfismi di Γ e di Σ .

Per quanto notoriamente la topologia delle superficie serrate abbia ormai raggiunto, e da molto tempo, un assetto definitivo ed estremamente maneggevole ⁽²⁾, molte sono le difficoltà che si offrono nella teoria relativa dei singrammi specialmente ove si vogliano raggiungere teoremi di enunciato semplice e facilmente trasferibili ai casi concreti che interessano le multiformi ed interessanti applicazioni della teoria dei singrammi ⁽³⁾.

Nella teoria relativa dei singrammi non mancano risultati di rilievo. Ed in particolare giova richiamare, accanto a quelli già citati, un lavoro di E. VÁZSONYI [14], di specifico interesse per la presente trattazione ⁽⁴⁾.

Nella quale, accanto a taluni richiami rivolti all'introduzione del genere (n. 1) e del rango (n. 2) di un singramma, si indaga sulla relazione che intercede tra i due caratteri (n. 3), e si mostra (n. 4) come il problema della tracciabilità di un singramma connesso finito sopra una superficie serrata possa opportunamente ricondursi allo stesso problema per un singramma cubico (cioè con tutti i vertici d'ordine tre) dotato di circuito di HAMILTON (cioè che ammette come singramma subordinato un circuito il quale contenga tutti i punti che sono vertici per il singramma assegnato).

In relazione ad un singramma (finito, connesso) cubico hamiltoniano (cioè appunto dotato di circuito di HAMILTON) si svolgono le ulteriori indagini.

Si studia dapprima sotto l'aspetto della teoria assoluta la struttura di un singramma cubico hamiltoniano (n. 5), ravvisando tra l'altro che gli spigoli di un singramma siffatto possono utilmente ripartirsi in una o più classi disgiunte di «spigoli concatenati». Si stabiliscono quindi criteri per la traccia-

⁽²⁾ Per la topologia delle superficie serrate si fa riferimento al cap. VII del trattato [1], ovvero al § 6 del trattato [3]. Tuttavia sono qui sufficienti le nozioni al n. 1 della Memoria [4], con l'ulteriore avvertenza che l'ordine di connessione di una superficie (serrata connessa) non orientabile e chiusa si suole spesso chiamare genere della superficie. Per una superficie chiusa orientabile il genere è invece la metà dell'ordine di connessione (che allora è un numero pari).

⁽³⁾ Per la teoria generale dei singrammi si fa riferimento al trattato [2], anche perchè in esso compare un esplicito cenno alla teoria relativa (cfr. § 5 di cap. XII), ed è quindi più rispondente all'attuale impostazione. Tra i trattati più recenti, e per analoghe ragioni, ci si limita a citare il trattato [3]. Già in [2] sono ricordate molteplici applicazioni della teoria dei singrammi in altri rami della matematica ed in altre Scienze; e non sembra qui il caso di richiamare posteriori e più ampie applicazioni.

⁽⁴⁾ Altri lavori che, più o meno direttamente, interferiscono con quanto si dirà sono [7], [8], [12].

bilità del singramma sulla sfera (n. 6) e per la tracciabilità del singramma sul piano proiettivo (n. 7), rinviando ad altra occasione ulteriori sviluppi ⁽⁵⁾.

1. - Il genere di un singramma connesso.

Giova preliminarmente osservare che, siccome un singramma Γ deve qui intendersi a meno di omeorfismi, è lecito sopprimere in esso eventuali vertici d'ordine due ed anche (ove fosse utile) introdurne nuovi. Se dunque in Γ vi sono due spigoli (che diremo in serie) di estremi A, B e B, C e B non è estremo di altri spigoli di Γ , si potrà sostituire ai due spigoli AB, BC (sopprimendo il vertice B d'ordine due) un unico spigolo di estremi A, C .

Inoltre è evidente che se un singramma Γ è tracciabile (senza attraversamenti) su una superficie Σ serrata, lo è pure il singramma che se ne ottiene con la soppressione di eventuali vertici isolati (vertici non estremi di spigoli), oppure con la soppressione di eventuali vertici terminali (cioè estremi di un solo spigolo) e dei relativi spigoli terminali, degli eventuali lacci (spigoli con estremi coincidenti in uno stesso vertice), ed infine con la soppressione di eventuali spigoli in parallelo (spigoli cioè che hanno gli stessi estremi di altri, che invece si conservano).

Reciprocamente, tracciato su Σ un singramma Γ , si possono sempre introdurre su Σ nuovi vertici isolati, nuovi vertici e spigoli terminali e nuovi lacci, nuovi spigoli in parallelo con altro preesistente. Ed invero ciascuna di tali introduzioni si può già attuare in una porzione semplicemente connessa di Σ , senza introdurre attraversamenti di sorta.

Sotto l'aspetto della teoria relativa, dato un singramma finito Γ , giova preliminarmente attuare, successivamente fin che è possibile, le singole semplificazioni indicate ottenendo quindi un *singramma finito privo di spigoli in serie, di vertici isolati, di vertici e spigoli terminali, di lacci, di spigoli in parallelo*; brevemente un singramma semplificato. Esso potrà risultare il singramma nullo (cioè senza spigoli e senza vertici); ed allora il singramma Γ primitivo risulta senz'altro tracciabile su ogni superficie serrata.

Ma in un singramma semplificato non nullo, *ciascun vertice sarà d'ordine almeno tre, e ciascun circuito subordinato conterrà almeno tre vertici*.

È anche chiaro che *ogni singramma finito Γ si può tracciare sopra una superficie Σ serrata connessa chiusa orientabile di genere convenientemente elevato* ⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾ Così in una Nota di prossima pubblicazione si stabiliranno criteri per la tracciabilità di un singramma cubico hamiltoniano sul toro.

⁽⁶⁾ La proprietà è rigorosamente stabilita da un teorema di KÖNIG Cfr. [2], pag. 198.

Orbene il *genere minimo* $p \geq 0$ delle superficie serrate connesse chiuse orientabili su cui si può tracciare un singramma Γ connesso è un carattere di questo che dicesi *genere* del singramma.

Così i singrammi tracciabili sulla sfera (singrammi sferici, secondo la denominazione di A. SAINTE-LAGÜE) sono i *singrammi di genere nullo*. Essi possono tra l'altro caratterizzarsi con la proposizione di KURATOWSKI:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un singramma Γ sia di genere nullo è che non ammetta come subordinati singrammi omeomorfi ad uno dei seguenti:

K_1 : *singramma costituito da due terne di vertici e dai nove spigoli che hanno estremi in vertici di terne diverse;*

K_2 : *singramma completo di cinque vertici (avente dunque dieci spigoli, con estremi in coppie di vertici distinti).*

Sarà bene sottolineare che l'enunciato parla di singrammi omeomorfi a K_1 od a K_2 . Pertanto i singrammi subordinati a Γ potrebbero essere assai più complessi, e ridursi a K_1 od a K_2 solo dopo aver effettuato la soppressione dei vertici d'ordine due (con la conseguente fusione di spigoli in serie). Per tale circostanza l'applicazione diretta del criterio di KURATOWSKI ad un caso concreto può offrire difficoltà.

È anche noto che un singramma Γ (connesso) di genere p tracciato su una superficie Σ di genere p , vi introduce una reticolazione (ripartisce cioè Σ in regioni tutte semplicemente connesse) ⁽⁷⁾.

Infine è da notare che le questioni concernenti la tracciabilità di un singramma Γ sopra una superficie serrata connessa orientabile aperta Σ_ω (dotata di $\omega > 0$ orli), non offrono circostanze nuove. Ed invero Γ è tracciabile su Σ_ω se e solo se è tracciabile sulla superficie chiusa Σ_0 associata (ottenuta cioè connettendo lungo ciascun orlo di Σ_ω una cella bidimensionale).

Così i singrammi sferici sono tutti e soli i singrammi tracciabili nel piano della geometria elementare, onde talora diconsi (con K. MENGER o con H. WHITNEY) *singrammi piani*.

⁽⁷⁾ Basterebbe del resto osservare che se vi fosse una regione R non semplicemente connessa, si potrebbe tosto costruire una superficie Σ' di genere minore, sulla quale Γ risulti ancora tracciabile. Se (cfr. [4], n. 1) la regione R avesse un solo orlo ed ordine di connessione $Z > 1$, Σ' si può ottenere da Σ sostituendo R con una cella bidimensionale R' (cioè con una superficie dotata di un orlo e di ordine di connessione $Z' = 1$); se invece la regione R avesse più orli, sopprimendo tale regione, si ottiene da Σ una superficie Σ^* a più orli e come Σ' si potrebbe assumere la superficie chiusa « associata » a Σ^* .

La proposizione ovviamente non si inverte. Anzi ogni superficie Σ di genere p si può sempre reticolare notoriamente mediante il singramma costituito da un solo vertice e da $2p$ spigoli ad estremi coincidenti nel vertice, singramma manifestamente di genere nullo (qualunque sia p).

2. - Il rango di un singramma connesso.

Senza alcuna difficoltà si accerta anche la proposizione: *ogni singramma finito Γ si può tracciare sopra una superficie Σ serrata connessa chiusa non orientabile di genere convenientemente elevato* ⁽⁸⁾.

Il genere minimo $q \geq 1$ delle superficie serrate connesse chiuse non orientabili su cui si può tracciare un singramma Γ connesso è ancora un carattere di questo, e si dirà il secondo genere o rango del singramma.

Ovviamente i singrammi di genere $p = 0$ hanno rango $q = 1$; ma esistono singrammi di rango $q = 1$ di genere non nullo (ad es. i due singrammi K_1, K_2 di KURATOWSKI).

È anche noto [14] che un singramma Γ (connesso) di rango q tracciato su una superficie Σ non orientabile di genere q vi introduce una ripartizione in regioni, tutte semplicemente connesse salvo al più una omeomorfa al foglio di Möbius ⁽⁹⁾.

È però sempre possibile tracciare Γ su Σ in modo che vi introduca una reticolazione ⁽¹⁰⁾.

Infine si potrà ancora affermare, per quanto concerne la tracciabilità di un singramma su una superficie Σ_ω (serrata, connessa) non orientabile aperta, che Γ è tracciabile su Σ_ω se e soltanto se Γ è tracciabile sulla associata superficie Σ_o (non orientabile) chiusa.

⁽⁸⁾ Questa proposizione costituisce un teorema di VÁZSONYI [14]. Essa peraltro si deduce con immediatezza dall'analoga proposizione riguardante le superficie orientabili. Se invero Γ è tracciabile, anzi è tracciato, su una superficie Σ orientabile, fissata su Σ una cella che non abbia punti comuni con Γ , sostituendo la cella (che ha un solo orlo) con un foglio di MÖBIUS (ancora dotato di un solo orlo) si deduce da Σ una superficie Σ' non orientabile sulla quale risulta senz'altro tracciato il singramma Γ .

⁽⁹⁾ Basterebbe peraltro osservare che, in ogni altra circostanza si potrebbe costruire una superficie Σ' (ancora non orientabile) di genere minore, ad es. riprendendo le considerazioni occorse in ⁽⁷⁾. Non è peraltro possibile con analoghi argomenti escludere la presenza di una regione del tipo foglio di MÖBIUS (superficie serrata connessa con un orlo e ordine di connessione due), perchè sostituendo a tale regione una cella si ottiene bensì una superficie con ordine di connessione minore, ma la Σ' ottenuta potrebbe essere orientabile.

Si può invece escludere la presenza di una regione non orientabile con un orlo e ordine di connessione > 2 , in quanto sostituendola con un foglio di MÖBIUS, si otterrebbe una Σ' certamente ancora non orientabile e di genere minore di quello che compete a Σ .

⁽¹⁰⁾ Anche questa affermazione trovasi in [14]; comunque essa si deduce facilmente dalla precedente. Suppongasì invero che una, Ω , delle regioni introdotte da Γ su Σ sia un foglio di MÖBIUS; il contorno di Ω sarà un circuito subordinato a Γ , e reticolato con vertici del singramma. Se non vi sono altre regioni Γ coincide col contorno di Ω onde è omeomorfo ad un circuito quindi di genere $p = 0$ e di rango $q = 1$; ed allora è ben noto che un circuito può tracciarsi nel piano proiettivo reale (che è appunto una superficie chiusa non orientabile di genere $q = 1$) in modo che lo reticoli (in modo cioè che sia un circuito dispari). Se

Così ad es. i singrammi tracciabili sul piano proiettivo sono tutti e soli i singrammi tracciabili sul foglio di MÖBIUS.

Per quanto si riferisce alle questioni di tracciabilità di un singramma sopra superficie serrate connesse si può pertanto far costante riferimento alle sole superficie chiuse.

3. - Relazione tra genere e rango.

Il valore del genere p di un singramma limita superiormente quello del rango q . Sussiste precisamente la limitazione:

$$(1) \quad q \leq 2p + 1.$$

Invero un singramma Γ di genere p si può tracciare su una superficie orientabile Σ di genere p e vi introduce una reticolazione (n. 1); ma allora Γ si può anche pensar tracciato sulla superficie Σ' che si ottiene da Σ sostituendo una faccia della reticolazione con un foglio di MÖBIUS (con lo stesso contorno). L'ordine di connessione di Σ è $Z = 2p$, quello di Σ' risulta $Z' = Z + 1$. La Σ' è non orientabile di genere $Z' = 2p + 1$; e se ne trae la (1).

Si può aggiungere che, almeno in generale, non sussistono altri vincoli.

Intanto, da risultati di VAZSONYI [14], si riscontra l'esistenza di singrammi di rango $q = 1$ (cioè minimo) e di genere comunque elevato. Onde il valore del rango non limita superiormente quello del genere.

Alla (1) non può poi sostituirsi una relazione più significativa. Già per $p = 0$ si ha $q = 1$, onde talora la (1) deve intendersi come eguaglianza; ma in altri casi non sussiste invece la eguaglianza. Ad es. per ciascuno dei due singrammi di KURATOWSKI (n. 1) e per il singramma completo con sei vertici si ha $p = 1$, $q = 1$. Per il singramma completo con sette vertici si ha $p = 1$, $q = 3$ onde la (1) sussiste come eguaglianza, mentre per il singramma completo di otto vertici risulta $p = 2$, $q = 4$, come sempre si riscontra con elementari indagini dirette.

Oss. - Sotto l'aspetto della tracciabilità sopra superficie serrate è possibile e spesso utile sostituire preventivamente al singramma Γ assegnato il singramma Γ^* che se ne ottiene praticando le riduzioni indicate al n. 1.

invece Ω ammette una regione Π (semplicemente connessa) adiacente, detto s uno spigolo di adiacenza tra le due regioni ed A, B i vertici estremi di s , è ben nota la possibilità di introdurre in Ω un nuovo spigolo s' d'estremi A, B in modo da ridurre Ω ad una regione semplicemente connessa. Con l'aggiunta di s' si ha dunque una reticolazione di Σ ; ma sopprimendo ora lo spigolo s (e fondendo le due facce adiacenti lungo s in una sola faccia) si ottiene ancora una reticolazione di Σ la quale può pensarsi operata da un singramma (ottenuto sostituendo ad s lo spigolo s' in parallelo) ovviamente identico a Γ .

Tali riduzioni possono peraltro attuarsi con criteri più generali.

Tenendo presente (n. 1) che un singramma di genere nullo è pure tracciabile in una cella bidimensionale, si potrà sostituire Γ col singramma Γ^* che se ne ottiene con le operazioni:

- a) Soppressione in Γ di eventuali parti connesse di genere nullo.
- b) Soppressione in Γ di eventuali singrammi subordinati di genere nullo ciascuno dei quali abbia a comune col complementare un solo vertice.
- c) Soppressione in Γ di eventuali singrammi subordinati, ciascuno dei quali abbia a comune col complementare i due soli vertici estremi di uno stesso spigolo di questo, allorquando il singramma con l'aggiunta di tale spigolo risulti ancora un singramma sferico.

Ed inverso se Γ^* è tracciabile su una superficie Σ , lo è pure Γ ; ed ovviamente vale la reciproca.

Così ad es. se il singramma completo di quattro vertici si presenta come parte connessa di Γ ovvero come singramma subordinato nelle condizioni precisate in b) od in c), è lecita la preventiva soppressione degli spigoli di detto singramma (e dei vertici di esso che non siano anche vertici del complementare).

Naturalmente attuando successivamente fin che è possibile tutte le riduzioni indicate si potrà giungere ad un singramma nullo. In tal caso l'indagine appare peraltro conclusa in quanto il singramma assegnato risulta di genere $p = 0$ (è rango $q = 1$).

Si noterà poi che nelle riduzioni precisate in a), b), c) rientrano evidentemente le semplificazioni indicate al n. 1.

4. - Riduzione al caso dei singrammi cubici hamiltoniani.

D'ora innanzi si farà esclusivo riferimento a singrammi finiti connessi e semplificati, escludendo (n. 1) il singramma nullo. Pertanto ogni vertice di un singramma avrà ordine almeno tre; in particolare si considereranno i singrammi cubici, nei quali ogni vertice è d'ordine precisamente tre.

S'introduca ora l'operazione di *contrazione* (di uno spigolo) in un singramma. Con tale operazione si passa da un singramma Γ al singramma Γ' che se ne ottiene *sopprimendo uno spigolo ed identificando i due vertici suoi estremi*.

Nel passaggio da Γ a Γ' diminuisce di una unità così il numero dei vertici come quello degli spigoli; e se v_1, v_2 sono gli ordini dei vertici di Γ estremi dello spigolo che si sopprime, l'ordine del vertice di Γ' che si ottiene dall'identificazione dei due vertici di Γ risulta $v_1 + v_2 - 2$. Ma più in

generale si noterà che, fissato Γ e il suo spigolo che si vuole contrarre, è senz'altro individuata la struttura di Γ' .

Si dimostra facilmente che, se Γ è tracciabile su un'assegnata superficie Σ (serrata, connessa, chiusa, orientabile o meno), anche Γ' è tracciabile su Σ (comunque si fissi in Γ lo spigolo s da contrarre).

Tracciato invero Γ su Σ la contrazione di s può attuarsi su Σ rimanendo entro una cella bidimensionale che contenga s , onde la circostanza si accerta elementarmente. Convien anzi osservare che nel caso, di preminente interesse, in cui Σ , orientabile o meno, abbia genere uguale al genere o risp. al rango di Γ , si dovrà (n. 1) oppure si potrà (n. 2) supporre che Γ reticoli Σ ; allora su Σ il passaggio da Γ a Γ' per contrazione dello spigolo s coincide con quella notissima operazione che deduce da una reticolazione di Σ un'altra reticolazione con uno spigolo ed un vertice in meno.

D'altra parte si ha altresì che, se un singramma Γ' con almeno un vertice A d'ordine $v \geq 4$ è tracciabile su un'assegnata superficie Σ , esiste un singramma Γ pure tracciabile su Σ dal quale possa dedursi Γ' per contrazione di uno spigolo opportunamente scelto di Γ .

Invero, tracciato Γ' su Σ , siano $a_1, a_2, \dots, a_v$ gli spigoli di Γ' con un estremo in A (e l'altro estremo ordinatamente nei vertici $A_1, A_2, \dots, A_v$), ordinati ciclicamente in modo che due spigoli consecutivi appartengano ad una stessa delle regioni introdotte da Γ' su Σ e di più (ove occorra precisarlo) siano spigoli consecutivi sul contorno di tale regione. È allora lecito introdurre su Σ una cella bidimensionale Π (omeomorfa ad una regione piana circolare) contenente gli spigoli a_i e nessun altro spigolo di Γ' , e Π avrà pertanto sul contorno i vertici $A_1, A_2, \dots, A_v$ ordinati ciclicamente. Introdotti in Π due punti interni distinti P, Q , considerazioni elementari assicurano la possibilità di tracciare in Π senza attraversamenti archi di curva di JORDAN con le seguenti coppie di estremi:

$$P, Q; A_1, P; A_2, P; A_3 Q; \dots; A_v Q.$$

Sostituendo al vertice A e agli spigoli a_i i due vertici P, Q e gli spigoli dianzi indicati, da Γ si ottiene un singramma Γ' (ancora tracciato su Σ) dal quale appunto può dedursi Γ per contrazione dello spigolo PQ .

Osservato ora che ogni singramma (non cubico) si può sempre pensare (ed in più modi) come ottenuto con successive contrazioni da un singramma cubico, in virtù dei rilievi dianzi occorsi si potrà di più affermare che il singramma cubico può sempre scegliersi in modo che esso sia tracciabile su un'assegnata superficie Σ se e soltanto se lo è il singramma assegnato. Sussiste dunque il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un singramma (finito, connesso, semplificato) sia tracciabile su un'assegnata superficie (serrata, connessa,

chiusa, orientabile o meno) è che esso possa ottenersi con successive contrazioni da un singramma cubico pure tracciabile sulla superficie assegnata.

Da un singramma se ne ottiene per contrazione un altro di genere e di rango certamente non maggiore; ma ovviamente uno od entrambi i caratteri potranno diminuire. Ad es. da ciascuno dei due singrammi K_1, K_2 di KURATOWSKI si ottiene per contrazione un singramma di genere nullo; invece comunque si attui una contrazione sul singramma completo con sei vertici (che è di genere $p = 1$) si ottiene ancora un singramma dello stesso genere (perchè tosto si esclude che si ottenga un singramma sferico in quanto esiste come subordinato un singramma K_2) e, se si vuole, anche dello stesso rango $q = 1$.

Ma il teorema assicura che, assegnato comunque un singramma (non cubico) ne esiste sempre uno cubico con lo stesso genere (oppure con lo stesso rango), dal quale con successive contrazioni possa dedursi il singramma assegnato.

In altre parole si può affermare che il genere (o risp. il rango) di un singramma è fornito dal minimo genere (o risp. dal minimo rango) dei singrammi cubici da ciascuno dei quali, per successive contrazioni, possa dedursi il singramma assegnato.

Tutto ciò induce a recare la maggiore attenzione sui singrammi cubici.

Ci si può anzi sempre ricondurre al caso dei singrammi cubici *hamiltoniani*, ossia ai singrammi che ammettono come singramma subordinato un circuito contenente tutti i vertici del singramma assegnato, ammettono cioè un circuito di HAMILTON⁽¹⁾.

A tale scopo, assegnato un singramma cubico Γ e fissato un suo spigolo s , conviene introdurre la seguente operazione, che diremo *sdoppiamento* dello spigolo s .

Detti A, B i vertici che sono estremi di s , si considerino gli ulteriori due spigoli a_1, a_2 (risp. b_1, b_2) che hanno estremo in A (risp. in B), ed i vertici A_1, A_2 (risp. B_1, B_2) ulteriori estremi di questi spigoli (senza peraltro escludere che di fatto tra i vertici A_i e B_i possano aversi coincidenze).

Introdotti quattro nuovi vertici P_1, P_2, Q_1, Q_2 , ed i nuovi spigoli:

$$A_1P_1, A_2P_2, B_1Q_1, B_2Q_2, P_1P_2, Q_1Q_2, P_1Q_1, P_2Q_2,$$

soppressi i vertici A, B e gli spigoli s, a_1, a_2, b_1, b_2 si passa dal singramma Γ ad un singramma Γ^* ancora cubico.

(¹) Cfr. ad es. [2], cap. II, § 3.

Peraltro da Γ^* , per contrazione degli spigoli P_1P_2 e Q_1Q_2 si ottiene un singramma identico a quello che può ottenersi da Γ aggiungendo un nuovo spigolo s' in parallelo con s , un singramma cioè che, per semplificazione (n. 1), riducesi allo stesso singramma Γ .

Ne viene che se Γ^* è tracciabile su una superficie Σ , lo è pure Γ ; e, reciprocamente, che se Γ è tracciabile su Σ si può attuare lo sdoppiamento di un suo spigolo in modo che il singramma Γ^* che si ottiene sia ancora tracciabile su Σ .

Ciò premesso è intanto ben chiaro che se un singramma cubico connesso ammette un istmo, (cioè uno spigolo s tale che la soppressione di esso rompa la connessione del singramma), per sdoppiamento di questo spigolo si può passare ad un singramma (sempre connesso e cubico) con un istmo in meno. E si potrà pertanto far riferimento ad un singramma cubico Γ privo di istmi.

Allora, per un classico teorema di PETERSEN ⁽¹²⁾, il singramma Γ ammette un fattore d'ordine due, cioè esiste un singramma Λ subordinato che contiene tutti i vertici di Γ , e ciascuno con ordine due. Il singramma Λ è perciò costituito da $m \geq 1$ circuiti i quali complessivamente contengono tutti i vertici di Γ .

Se $m = 1$, dunque, è Λ un circuito di HAMILTON per il singramma Γ .

Ma, se $m \geq 2$, in Γ (che è singramma connesso) esisterà certamente uno spigolo s con estremi in vertici A, B risp. appartenenti a due circuiti distinti Λ_1, Λ_2 di Λ . Con sdoppiamento dello spigolo s si passa ad un singramma Γ^* che ammette un fattore d'ordine due composto da $m - 1$ circuiti, e precisamente dal circuito che si ottiene dai circuiti Λ_1, Λ_2 ove (conservando notazioni dianzi occorse si sostituiscono gli spigoli a_1, a_2, b_1, b_2 con gli spigoli $A_1P_1, P_1Q_1, Q_1B_1, A_2P_2, P_2Q_2, Q_2B_2$, e dagli $m - 2$ circuiti di Λ distinti da Λ_1 e Λ_2 .

Con $m - 1$ successivi passaggi si perviene così ad un singramma cubico hamiltoniano.

E si può dunque concludere col seguente:

TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un singramma (finito connesso semplificato) possa tracciarsi su una superficie (serrata, connessa, chiusa, orientabile o meno), è che esso possa dedursi con successive contrazioni (e soppressione di eventuali spigoli in parallelo con altri) da un singramma cubico hamiltoniano, pure tracciabile sulla superficie.*

Converrà pertanto riservare le ulteriori indagini ai singrammi cubici hamiltoniani.

⁽¹²⁾ Cfr. ad es. [2], cap. XI; oppure [3], § 5.

5. - La struttura di un singramma cubico hamiltoniano.

Sia Γ un singramma (finito, connesso) cubico hamiltoniano, e sia Λ il circuito di HAMILTON ⁽¹³⁾.

Tra il numero α_0 dei vertici e il numero α_1 degli spigoli intercede la relazione: $3\alpha_0 = 2\alpha_1$, onde conviene porre $\alpha_0 = 2n$, $\alpha_1 = 3n$, con n intero.

Gli spigoli di Γ si distribuiscono in $2n$ spigoli appartenenti a Λ , ed in n spigoli rimanenti, che costituiscono una famiglia $\mathcal{F}$. I vertici di Γ appartengono tutti a Λ , e si distribuiscono in n coppie di vertici, estremi di uno stesso spigolo di $\mathcal{F}$.

Indicati con una stessa lettera (priva od affetta da apice) i due vertici di una stessa coppia (e con lettere diverse vertici di coppie distinte), scrivendo successivamente le lettere che indicano i singoli vertici nell'ordine in cui questi si succedono sul circuito Λ (orientato) si ottiene lo *schema* di Γ , il quale sarà peraltro da intendere *a meno di permutazioni circolari* sulle lettere.

Manifestamente lo schema individua la struttura di Γ ; ed è egualmente chiaro che una qualunque successione di $2n$ lettere, formata da n lettere distinte e dalle n stesse lettere munite di apice, può interpretarsi come schema di un singramma cubico hamiltoniano con $2n$ vertici.

Se due spigoli $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ hanno le coppie di estremi che, su Λ , si separano, si dirà che σ e τ sono *direttamente concatenati*.

Uno spigolo di $\mathcal{F}$, che non sia direttamente concatenato con qualche altro risulta, come spigolo di Γ , in parallelo con uno spigolo di Λ . Si può quindi supporre l'assenza in $\mathcal{F}$ di spigoli siffatti, perchè sarà lecito sopprimerli passando ad un singramma semplificato (n. 1); ed escludendo al solito i singrammi riducibili per semplificazione al singramma nullo, si potrà supporre senz'altro $n \geq 2$.

In generale si dirà che in $\mathcal{F}$ due spigoli σ, τ sono *concatenati* quando si può costruire una catena di spigoli di $\mathcal{F}$ aventi σ, τ come elementi estremi, quando cioè esiste una sottofamiglia ordinata $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ di $\mathcal{F}$ in cui due qualunque spigoli consecutivi sono direttamente concatenati, mentre $\delta_1 = \sigma$ e $\delta_n = \tau$ ovvero $\delta_1 = \tau$ e $\delta_n = \sigma$.

In $\mathcal{F}$ la concatenazione è dunque una relazione simmetrica; ed è altresì *transitiva* perchè dalle due catene $\{\sigma, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \tau\}$, $\{\tau, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}, \rho\}$ tosto deducesi la catena $\{\sigma, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \tau, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}, \rho\}$, onde se σ è concatenato a τ , e τ è concatenato a ρ , consegue che σ è concatenato a ρ .

Basta dunque convenire di riguardare ogni spigolo di $\mathcal{F}$ come *concatenato a se stesso*, perchè la concatenazione appaia come una relazione di equiva-

⁽¹³⁾ È sottointeso che, poichè Γ ammette più circuiti di HAMILTON, si fa costante riferimento ad uno qualunque di essi.

lenza e pertanto distribuisca gli elementi di $\mathcal{F}$ in un numero (certamente finito perchè $\mathcal{F}$ è una famiglia finita) $m \geq 1$ di classi:

$$(2) \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_m$$

che si diranno le *classi di concatenazione* di $\mathcal{F}$.

Si ottiene di conseguenza una ripartizione dell'insieme $\mathcal{V}$ di vertici di Γ in altrettante classi

$$(3) \quad \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_m$$

ponendo nella classe $\mathcal{V}_i$ i vertici che sono estremi di spigoli di $\mathcal{F}_i$.

Le classi (3) sono costituite da punti del circuito Λ , e conviene precisare, ove sia $m \geq 2$, la distribuzione sul circuito dei punti delle singole classi.

Si dirà brevemente che sul circuito Λ due classi $\mathcal{V}'$, $\mathcal{V}''$ di punti sono *classi separate* se è possibile introdurre un arco γ' di Λ che contenga tutti i punti di $\mathcal{V}'$ e nessun punto di $\mathcal{V}''$. Allora si può anche introdurre un arco γ'' di Λ il quale contenga tutti i punti di $\mathcal{V}''$ e nessun punto di $\mathcal{V}'$. E si potrà anzi supporre (se si tratta di classi finite) che gli archi γ' e γ'' abbiano per estremi due punti di $\mathcal{V}'$ e risp. di $\mathcal{V}''$; ed allora i due archi γ' e γ'' sono univocamente determinati dalla coppia $\mathcal{V}'$, $\mathcal{V}''$ di classi separate.

La nozione di classi $\mathcal{V}'$, $\mathcal{V}''$ separate su Λ si può anche esprimere dicendo che, reticolato Λ assumendo come vertici i punti di una classe, i punti dell'altra appartengono ad un stesso spigolo della reticolazione.

Orbene si dimostra facilmente che, se $m \geq 2$, *due distinte classi (3) sono classi separate* (su Λ).

Siano invero $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{V}_j$ ($i \neq j$) le due classi di vertici, associate risp. alle due classi $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_j$ di spigoli, e si pensi di costruire le singole classi di spigoli (e di conseguenza le singole classi dei vertici, estremi degli spigoli) partendo da uno spigolo $\sigma_i \in \mathcal{F}_i$ e da uno spigolo $\sigma_j \in \mathcal{F}_j$ introducendo successivamente (fin che è possibile) uno spigolo di una delle due classi il quale sia direttamente concatenato con almeno uno spigolo della stessa classe già introdotto in precedenza.

Gli spigoli σ_i , σ_j non appartengono ad una stessa classe e quindi non sono certo direttamente concatenati, onde i loro estremi costituiscono sicuramente due classi separate su Λ . Basterà dunque dimostrare, procedendo per induzione, che nella graduale introduzione degli spigoli delle classi $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_j$ (e dei vertici delle classi $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{V}_j$) attuata nel modo dianzi precisato, l'intro-

duzione di un nuovo spigolo conserva il carattere di classi separate che compete ai due insiemi dei vertici risp. estremi degli spigoli già introdotti delle due classi $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j$.

Si pensi dunque che, ad un certo stadio, si siano già introdotti gli spigoli degli insiemi $\mathcal{F}'_i, \mathcal{F}'_j$, con $\mathcal{F}'_i \subseteq \mathcal{F}_i, \mathcal{F}'_j \subseteq \mathcal{F}_j$, e di conserva i vertici, estremi degli spigoli, costituenti due insiemi $\mathcal{V}'_i, \mathcal{V}'_j$, con $\mathcal{V}'_i \subseteq \mathcal{V}_i, \mathcal{V}'_j \subseteq \mathcal{V}_j$; e si supponga che $\mathcal{V}'_i, \mathcal{V}'_j$ siano classi separate su Λ , onde esista un arco γ'_i (risp. γ'_j) di Λ contenente tutti i vertici di $\mathcal{V}'_i$ (risp. di $\mathcal{V}'_j$), due dei quali come estremi, e nessun vertice di $\mathcal{V}'_j$ (risp. di $\mathcal{V}'_i$).

Passando allo stadio successivo si dovrà introdurre un nuovo spigolo di una delle due classi $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j$, ad es. lo spigolo $\tau_i \in \mathcal{F}_i$, non appartenente a $\mathcal{F}'_i$ ma direttamente concatenato ad almeno uno spigolo di $\mathcal{F}'_i$. Per questa circostanza almeno un estremo di τ_i risulta punto interno all'arco γ'_i ; ma è d'altra parte escluso che l'altro estremo di τ_i sia punto interno all'arco γ'_j perchè in tale caso τ_i risulterebbe direttamente concatenato ad almeno uno spigolo di $\mathcal{F}'_j$ e quindi sarebbe $\tau_i \in \mathcal{F}_j$, mentre le classi $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j$ sono disgiunte.

È pertanto assodato, come volevasi, che $\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j$ sono classi separate sul circuito Λ .

Si pensino ora gli elementi di tutte le classi (3), cioè tutti gli elementi di $\mathcal{V}$, come punti del circuito Λ , e perciò *ciclicamente ordinati*.

Se in tale ordinamento gli elementi di una classe $\mathcal{V}_i$ risultano consecutivi, si dirà che $\mathcal{V}_i$ è una classe terminale di $\mathcal{V}$; ed allora, reticolato Λ con i vertici di $\mathcal{V}_i$, ad uno stesso spigolo della reticolazione appartengono gli elementi di tutte le altre classi (ed anche, reticolato Λ con i vertici di tutte le classi diverse da $\mathcal{V}_i$, ad uno stesso spigolo della reticolazione appartengono tutti gli elementi di $\mathcal{V}_i$).

Se $\mathcal{V}$ consta di due sole classi, queste in quanto classi separate risultano entrambe terminali.

Ma giova osservare che, anche se $m \geq 3$, sempre $\mathcal{V}$ presenta classi terminali (almeno due).

Si pensi invero di descrivere, in un certo verso, il circuito Λ .

Partendo da un punto di una classe $\mathcal{V}_{i_1}$, s'incontreranno (dopo eventuali altri punti di $\mathcal{V}_{i_1}$) punti di una classe $\mathcal{V}_{i_2}$, anzi prima di ritrovare altri punti di $\mathcal{V}_{i_1}$ dovranno incontrarsi tutti i punti di $\mathcal{V}_{i_2}$, perchè $\mathcal{V}_{i_1}, \mathcal{V}_{i_2}$ sono classi separate. Così, se $\mathcal{V}_{i_2}$ non è classe terminale, dopo alcuni punti di $\mathcal{V}_{i_2}$ si incontreranno punti di una terza classe $\mathcal{V}_{i_3}$ e si dovranno incontrare tutti i punti di $\mathcal{V}_{i_3}$ prima di trovare altri punti di classi precedentemente considerate. Se $\mathcal{V}_{i_3}$ non risulta terminale si può procedere analogamente individuando una quarta classe $\mathcal{V}_{i_4}$, ed ancora dovranno esaurirsi tutti i punti di $\mathcal{V}_{i_4}$ prima di ritrovare punti di classi precedenti. E così si proceda fin che è possibile.

Siccome le classi (3) sono in numero finito il procedimento certamente si arresta, onde necessariamente si giunge ad individuare una classe terminale di $\mathcal{V}$. Una seconda classe terminale si raggiunge cambiando il verso nel quale si descrive Λ .

L'asserto è pertanto dimostrato, ed esso potrà anzi riferirsi all'insieme di $m' \leq m$ classi comunque scelte tra le classi (3).

Ne consegue che è sempre lecito ordinare le classi (3) in modo tale che nell'insieme unione delle classi $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_i$ ($i = m, \dots, 2, 1$) l'ultima sia sicuramente una classe terminale.

È dunque lecito, a partire dal circuito Λ , pensare ad una introduzione graduale delle classi $\mathcal{F}_i$ di spigoli e delle classi $\mathcal{V}_i$ di vertici, in modo tale che la introduzione di una nuova classe $\mathcal{V}_i$ possa attuarsi operando in uno stesso spigolo della reticolazione di Λ ottenuta mediante i vertici delle precedenti classi.

Tale circostanza verrà debitamente utilizzata nell'ambito della teoria relativa dei singrammi, ove pure talora gioverà la considerazione dei singoli singrammi Γ_i che si ottengono introducendo su Λ i soli vertici di $\mathcal{V}_i$ e quindi come nuovi spigoli soltanto quelli della classe $\mathcal{F}_i$. Il singramma Γ_i è evidentemente omeomorfo al singramma subordinato di Γ che se ne ottiene sopprimendo gli spigoli di tutte le classi $\mathcal{F}_j$ con $j \neq i$.

I singrammi Γ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) si diranno i singrammi semplici di Γ ; e lo schema di un singolo Γ_i si ottiene ovviamente da quello di Γ conservando esclusivamente le lettere che indicano i vertici della classe $\mathcal{V}_i$.

Convieni peraltro, sempre in sede di teoria assoluta, aggiungere altre considerazioni riguardanti le catene di spigoli della famiglia $\mathcal{F}$, e le stesse classi di concatenazione di $\mathcal{F}$.

Non è escluso che una catena ammetta concatenazioni superflue (cioè diverse da quelle, esplicitamente imposte, tra spigoli consecutivi). In tal caso però se ne può sempre estrarre un'altra con gli stessi estremi e senza concatenazioni superflue, cioè, come si dirà, una catena pura. Se invero nella catena $\{\delta_1, \dots, \delta_i, \dots, \delta_j, \dots, \delta_h\}$ lo spigolo δ_i è concatenato allo spigolo δ_j con $j > i + 1$, si può estrarre la catena $\{\delta_1, \dots, \delta_i, \delta_j, \dots, \delta_h\}$ con un numero minore di elementi; e tale processo di riduzione si potrà attuare fintanto che non si pervenga ad una catena pura.

Due spigoli σ, τ di una stessa classe $\mathcal{F}_i$ possono essere estremi di più catene (anche tutte pure), e si dirà minimale una catena di estremi σ, τ quando contenga il minimo numero possibile di elementi. Si dirà poi distanza $\Delta(\sigma, \tau)$ degli spigoli σ, τ il numero degli elementi di una catena minimale che li abbia come estremi, diminuito però di una unità.

La nomenclatura è legittima. Ed invero $\Delta(\sigma, \tau)$ è sempre un intero non negativo, e porre $\Delta(\sigma, \tau) = 0$ equivale a porre $\sigma = \tau$. Risulta poi $\Delta(\sigma, \tau) = \Delta(\tau, \sigma)$:

ed inoltre vale la disuguaglianza triangolare

$$\Delta(\sigma, \tau) + \Delta(\tau, \rho) \geq \Delta(\sigma, \rho),$$

in virtù di circostanze già riscontrate.

Ne viene che a ciascuna classe $\mathcal{F}_i$, accanto al numero $n_i \geq 2$ dei suoi elementi, si può associare un altro intero, e cioè il **d i a m e t r o** d_i (distanza massima tra elementi della classe). Risulta:

$$1 \leq d_i \leq n_i - 1,$$

essendo $d_i = n_i - 1$ se e solo se la classe riducesi ad una catena pura.

Sotto l'aspetto pratico conviene osservare che in $\mathcal{F}$ una singola classe di concatenazione si può introdurre, a partire da un suo spigolo τ , come unione delle sotto famiglie $T_0, T_1, \dots, T_t$ di $\mathcal{F}$ costituite dagli spigoli aventi risp. da τ distanze: $0, 1, \dots, t$. Assunto τ , l'insieme T_1 si introduce come insieme degli spigoli di $\mathcal{F}$ direttamente concatenati a τ , T_2 come insieme degli spigoli rimanenti direttamente concatenati ad almeno uno spigolo di T_1 , e così via fino ad esaurire l'insieme degli spigoli concatenati con τ , cioè ad esaurire una classe di concatenazione.

Per la costruzione di una singola classe è indifferente la scelta dello spigolo da cui si parte. Cambia naturalmente la distribuzione in sottofamiglie; se si sceglie nella classe che contiene τ un altro spigolo σ e quindi si costruiscono analogamente le sottofamiglie $S_0, S_1, \dots, S_s$, se ad es. $\sigma \in T_j$ sarà $\tau \in S_j$, in quanto $j = \Delta(\sigma, \tau) = \Delta(\tau, \sigma)$.

Non è nemmeno escluso che in una catena $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ di spigoli di $\mathcal{F}$ gli spigoli estremi siano direttamente concatenati. In tal caso si dirà che la catena è un **c i c l o**, ed in essa gli spigoli δ_i si intenderanno allora, com'è lecito, a meno di permutazioni circolari, cioè con *ordinamento ciclico*.

Si dirà poi che si ha un **c i c l o** **p u r o** quando non vi siano concatenazioni superflue, vale a dire quando ciascun spigolo del ciclo sia direttamente concatenato soltanto con i due spigoli contigui. Ed ancora si noterà che da ogni ciclo è sempre possibile estrarre un ciclo puro; e che due distinti spigoli di un ciclo possono pensarsi come estremi di due catene formate con spigoli del ciclo, catene pure se il ciclo è puro⁽¹⁴⁾.

(14) Taluni sviluppi qui occorsi possono anche ottenersi come applicazione di altri capitoli della teoria dei singrammi, con riferimento al singramma astratto $\mathcal{S}$ che ha come "vertici", gli elementi di $\mathcal{F}$ e come "spigoli", le concatenazioni dirette. Così le classi $\mathcal{F}_i$ di $\mathcal{F}$ possono associarsi alle parti connesse $\mathcal{S}_i$ di $\mathcal{S}$, la distanza tra due elementi di una $\mathcal{F}_i$ può interpretarsi come distanza tra due vertici di $\mathcal{S}_i$ nella consueta accezione della teoria dei singrammi, un ciclo di $\mathcal{F}$ può associarsi ad un circuito subordinato ad $\mathcal{S}$, e un ciclo puro ad un circuito non intrecciato.

6 - I singrammi cubici hamiltoniani tracciabili sulla sfera.

Tenendo presente che (per un classico teorema JORDAN) un circuito Λ (senza punti multipli) tracciato su una superficie Σ omeomorfa a quella di una sfera vi introduce due regioni Σ' , Σ'' semplicemente connesse, entrambe cioè omeomorfe ad una regione piana circolare, ed altresì che (com'è elementarmente noto) in una regione siffatta due archi aventi estremi sul contorno possono tracciarsi (senza attraversamenti) se e solo se le coppie dei loro estremi non si separano sul contorno, si trae ovviamente:

I. - *Un singramma cubico Γ dotato di circuito Λ di Hamilton è tracciabile sulla sfera se e soltanto se la famiglia $\mathcal{F}$ degli spigoli di Γ non appartenenti a Λ si può ripartire in due sottofamiglie $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ disgiunte, ciascuna priva di spigoli direttamente concatenati.*

Ed inverso, se Γ è tracciato su Σ , le sottofamiglie $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ degli spigoli di $\mathcal{F}$ tracciati in Σ' , Σ'' risp., sono nelle condizioni indicate, reciprocamente se $\mathcal{F}$ si decompone in due sottofamiglie con tali requisiti, esse possono essere introdotte in Σ' , Σ'' risp., onde Γ è tracciabile su Σ .

Ma dalla trattazione di n. 5 anche si trae un procedimento (assai maneggevole in casi concreti) idoneo a stabilire se un assegnato singramma cubico Γ , dotato di circuito Λ di HAMILTON, sia tracciabile o meno sulla "sfera", Σ ; ed, in caso affermativo, idoneo al tracciamento effettivo di Γ sopra Σ . E sarà bene avvertire esplicitamente che le classi $\mathcal{F}_i$ di concatenazione della famiglia $\mathcal{F}$ di spigoli si penseranno sempre ordinate così come comporta una loro introduzione graduale nell'accezione precisata in n. 5.

Introdotta su Σ il circuito Λ , s'introduca uno spigolo τ comunque scelto in $\mathcal{F}_1$, tracciandolo in una qualunque delle due regioni Σ' , Σ'' in cui Λ ripartisce Σ . La scelta tra le due regioni è ad ogni effetto arbitraria in quanto sono esse permutabili con omeomorfismi di Σ .

Detta Σ' la regione che contiene τ , gli spigoli delle singole sottofamiglie $T_1, T_2, \dots, T_i$ (n. 5) dovranno alternatamente introdursi nelle due regioni, perchè spigoli di sottofamiglie consecutive sono direttamente concatenati. La sottofamiglia T_i dunque deve introdursi in Σ' se l'indice i è pari, in Σ'' se l'indice i è invece dispari.

Ma l'introduzione è di fatto possibile se e soltanto se le singole T_i sono prive di spigoli direttamente concatenati, onde o si giunge ad escludere la tracciabilità di Γ su Σ , ovvero si tracciano su Σ tutti gli spigoli della classe $\mathcal{F}_1$.

In questo caso, se $\mathcal{F}$ consta di una sola classe ($m=1$), la questione è esaurita.

Diversamente si è tracciato su Σ il singrama Γ_1 (n. 5), ed esiste uno spigolo γ_1 di Γ_1 , situato su Λ , che contiene tutti i vertici della classi $\mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$.

Allora si può ripetere il procedimento movendo da uno spigolo $\sigma \in \mathcal{F}_2$, ed operando su Σ nelle due facce, della reticolazione introdotta da Γ_1 , adiacenti lungo lo spigolo γ_1 . Ed ancora o si conclude con la non tracciabilità di Γ su Σ per la presenza di spigoli direttamente concatenati in una sottofamiglia S_j , ovvero si perviene all'ulteriore tracciamento su Σ degli spigoli di $\mathcal{F}_2$. In questa seconda evenienza sarà però da notare che ormai le due regioni Σ' , Σ'' non sono più permutabili (per la presenza in esse degli spigoli di $\mathcal{F}_1$), onde la scelta della regione in cui si traccia σ risponde a due modi topologicamente distinti per introdurre contemporaneamente su Σ gli spigoli delle due classi $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$.

Basterà ormai procedere passando alle eventuali successive classi di $\mathcal{F}$. E, se non si perviene alla conclusione di non tracciabilità di Γ su Σ (sempre per la presenza di una sottofamiglia R_ν , associata ad uno spigolo $\rho \in \mathcal{F}$, dotata di spigoli direttamente concatenati), si conclude appunto con l'effettivo tracciamento di Γ su Σ .

E contemplando quest'ultima evenienza si consegue la proposizione:

II - *Se un singramma cubico hamiltoniano è sferico e, in relazione ad un suo circuito di Hamilton, gli spigoli non appartenenti al circuito si distribuiscono in m classi di concatenazione, il singramma è tracciabile sulla sfera in 2^{m-1} modi, di regola topologicamente distinti.*

Si noterà anzi che il procedimento dianzi descritto permette una effettiva diretta distribuzione degli spigoli di $\mathcal{F}$ nelle due sottofamiglie $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ di cui al teor. I.

Con riferimento poi ai singrammi semplici di Γ , si ha tosto:

III - *Condizione necessaria e sufficiente affinché un singramma cubico hamiltoniano sia sferico è che lo sia ciascuno dei suoi singrammi semplici.*

Contemplando invece l'eventualità che Γ non sia tracciabile su Σ , si ravvisa che tale circostanza si presenta se e soltanto se, movendo da un certo spigolo $\tau \in \mathcal{F}$ ed introducendo successivamente le associate sottofamiglie $T_1, T_2, \dots, T_h$ (n. 5) se ne incontra una con due spigoli direttamente concatenati.

Se T_k ($1 \leq k \leq h$) contiene gli spigoli τ_k, τ_k^* direttamente concatenati, mentre non ne contengono le T_i con $i < k$, tenendo presente che vale k la distanza (n. 5) di τ tanto da τ_k quanto da τ_k^* , si riscontra che in $\mathcal{F}$ esistono due catene pure:

$$\{\tau, \tau_1, \dots, \tau_k\}, \quad \{\tau, \tau_1^*, \dots, \tau_k^*\}$$

con $\tau_i, \tau_i^* \in T_i$.

Due spigoli τ_i, τ_i^* se $i < k$ non sono direttamente concatenati; potrebbero però esserlo due spigoli τ_i, τ_j^* con $i \neq j$. Ma allora, se ad es. si pensa $j > i$, non potrà che essere $j = i + 1$, e cioè risulteranno direttamente concatenati τ_i, τ_{i+1}^* (come appunto avviene se $\tau_i^* = \tau_i$), ed alle due catene precedenti si potranno sostituire le catene pure:

$$\{\tau_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_k\}, \quad \{\tau_i, \tau_{i+1}^*, \dots, \tau_k^*\}$$

con un numero minore di elementi.

Ripetendo la riduzione fin che è possibile si giungerà infine a due catene pure:

$$\{\tau_l, \tau_{l+1}, \dots, \tau_k\}, \quad \{\tau_l, \tau_{l+1}^*, \dots, \tau_k^*\},$$

ove spigoli intermedi di catene diverse non siano mai direttamente concatenati; e se ne trae il ciclo

$$\{\tau_k^*, \dots, \tau_{l+1}^*, \tau_l, \tau_{l+1}, \dots, \tau_k\}$$

il quale risulta *un ciclo puro dotato di un numero dispari di elementi* (almeno tre).

Si perviene così al teorema:

IV - *Un singramma cubico Γ , dotato di circuito Λ di Hamilton, è tracciabile sulla sfera se e soltanto se, nella famiglia $\mathcal{F}$ degli spigoli di Γ non appartenenti a Λ , non esistono cicli puri con un numero dispari di spigoli⁽¹⁵⁾.*

Con ulteriore passo si ottiene direttamente un'altra proposizione, che è pure un corollario del teorema di KURATOWSKI (n. 1). Precisamente:

V - *Condizione necessaria e sufficiente affinché un singramma Γ cubico hamiltoniano sia sferico è che esso non contenga un singramma subordinato omeomorfo al singramma K_1 di Kuratowski.*

La condizione è intanto necessaria perchè K_1 non è sferico. Se si vuole, del resto, K_1 può riguardarsi come singramma cubico hamiltoniano; ed allora

⁽¹⁵⁾ Con riferimento al singrammo $\mathcal{S}$ di cui in ⁽¹⁴⁾, ciò equivale ad imporre che $\mathcal{S}$ non ammetta circuiti subordinati con un numero dispari di vertici. Ciò a sua volta equivale ad imporre che $\mathcal{S}$ sia bipartito. Cfr. KÖNIG [2], cap. IX, § 4. E così si ritrova per altra via l'equivalenza tra le proposizioni I e IV di questo n. 6.

la famiglia $\mathcal{F}$ degli spigoli non appartenenti al circuito di HAMILTON è un ciclo puro di tre spigoli (fig. 1).

Fig. 1

Sia ora Γ non sferico, onde in $\mathcal{F}$ esista un ciclo puro

$$\{\sigma_t^*, \dots, \sigma_1^*, \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_t\}$$

di $2t + 1$ spigoli.

Sopprimendo in Γ tutti gli eventuali spigoli di $\mathcal{F}$ diversi da quelli del ciclo, si ottiene un singramma subordinato, omeomorfo al singramma cubico Γ_t che se ne ottiene fondendo gli eventuali spigoli in «serie» (n. 1). Cfr. fig. 2, ove $t = 4$.

Fig. 2

Supprimendo in Γ_t alcuni spigoli di Λ , e precisamente quelli aventi come estremi vertici che sono anche estremi di spigoli del ciclo delle seguenti coppie:

$$\begin{aligned} \sigma_1, \sigma_2; \sigma_2, \sigma_3; \dots; \sigma_{t-1}, \sigma_t, \\ \sigma_1^*, \sigma_2^*; \sigma_2^*, \sigma_3^*; \dots; \sigma_{t-1}^*, \sigma_t^*, \end{aligned}$$

si ravvisa con immediatezza che si ottiene un singramma omeomorfo a K_1 . Cfr. ancora fig. 2.

7. - I singrammi cubici hamiltoniani tracciabili sul piano proiettivo.

Si passi ora alle questioni concernenti la tracciabilità di un singramma Γ (finito, connesso) sopra una superficie Σ_1 (serrata, connessa, chiusa) non orientabile di genere $q = 1$ (ossia d'ordine di connessione $Z = 1$), sopra una superficie cioè omeomorfa al consueto piano proiettivo reale.

Siccome un singramma sferico è tracciabile in una cella bidimensionale (n. 1), e quindi su ogni superficie serrata, qui di regola si escluderà che Γ sia sferico.

Allora, se Γ è tracciabile su Σ_1 , esso, tracciato sulla superficie, necessariamente la *reticola*. È invero escluso (n. 2) che vi introduca (accanto a celle bidimensionali) una regione del tipo foglio di MÖBIUS, perchè in tale evenienza, sostituendo detta regione con una cella bidimensionale, da Σ_1 si passerebbe ad una superficie Σ_0 del tipo sfera su cui Γ sarebbe ancora tracciato⁽¹⁶⁾.

Ma si venga ormai (n. 4) al caso di un singramma cubico Γ , dotato di circuito Λ di HAMILTON, riprendendo la trattazione di n. 5, e la nomenclatura ivi introdotta.

Si ha subito:

I. - Un singramma cubico hamiltoniano Γ non è sferico ma è tracciabile sul piano proiettivo Σ_1 se e soltanto se è tale uno dei suoi singrammi semplici, mentre sono tutti sferici gli eventuali rimanenti suoi singrammi semplici.

Se la famiglia $\mathcal{F}$ degli spigoli di Γ non appartenenti a Λ consta di una sola classe di concatenazione, il teorema è ovvio. Suppongasì dunque che $\mathcal{F}$ si ripartisca in $m \geq 2$ classi di concatenazione $\mathcal{F}_i$, ossia che, in corrispondenza, Γ ammetta $m \geq 2$ singrammi semplici Γ_i .

⁽¹⁶⁾ Del resto se Γ non è sferico contiene almeno un singramma subordinato omeomorfo ad uno dei singrammi K_1, K_2 di KURATOWSKI, ed è ben noto che già ciascuno di questi, tracciato su Σ_1 , vi introduce necessariamente una reticolazione.

Se Γ non è sferico è escluso che siano sferici tutti i singrammi Γ_i (n. 6, III), onde ve ne sarà almeno uno non sferico, e tale sia Γ_j . Se peraltro Γ è tracciabile su Σ_1 , lo sarà pure il singramma Γ_j (omeomorfo ad un singramma subordinato di Γ).

Ma di più, tracciato Γ su Σ , si pensi dapprima alla reticolazione che vi introduce il singramma Γ_j , ed alla subordinata reticolazione del circuito Λ . Gli spigoli di una classe $\mathcal{F}_i$ con $i \neq j$ hanno gli estremi appartenenti ad uno stesso spigolo γ_j di tale reticolazione di Λ , onde gli spigoli di $\mathcal{F}_i$ si ripartiscono in due sottofamiglie disgiunte $\mathcal{F}_i'$, $\mathcal{F}_i''$ di spigoli risp. tracciati in due celle bidimensionali adiacenti lungo γ_j ; ne viene che in ciascuna sottofamiglia $\mathcal{F}_i'$, $\mathcal{F}_i''$ mancano spigoli concatenati, onde che il singramma Γ_i è necessariamente sferico (n. 6, I).

Reciprocamente, se i singoli singrammi Γ_i con $i \neq j$ sono sferici, tracciato dapprima su Σ , il singramma Γ_j , è senz'altro possibile introdurre successivamente gli spigoli delle singole classi $\mathcal{F}_i$ (eventualmente con scelta debita dell'ordine in cui s'introducono) senza incontrare attraversamenti di sorta con spigoli di Γ già precedentemente introdotti; è possibile cioè completare il tracciamento del singramma Γ sulla superficie Σ_1 .

Il teorema è pertanto dimostrato; ed in virtù di esso si potrà limitare l'ulteriore indagine al caso in cui la famiglia $\mathcal{F}$ consta di una sola classe di concatenazione, nella quale anzi esista (n. 6, IV) almeno un ciclo puro con un numero dispari di spigoli.

Procedendo si devono distinguere i due casi in cui Γ è tracciabile su Σ_1 , introducendovi Λ come circuito pari e risp. introducendovi Λ come circuito dispari.

Nel primo caso Λ ripartisce notoriamente il piano proiettivo Σ_1 in due regioni aventi entrambe Λ come contorno: una regione (interna) Σ_1' semplicemente connessa, ed una regione (esterna) Σ_1'' omeomorfa al foglio di MÖBIUS. Nel secondo caso Λ , pensato al solito come "taglio,, riduce Σ_1 ad una regione Σ_1^* semplicemente connessa avente come contorno il circuito Λ , contato due volte. Precisamente Σ_1^* è omeomorfa ad una regione circolare dalla quale si trae la superficie omeomorfa al piano proiettivo Σ_1 per identificazione di punti al contorno diametralmente opposti.

E veramente giova tener distinti i due casi in quanto può ben darsi che un singramma Γ sia tracciabile su Σ_1 assumendo Λ come circuito pari, (risp. dispari), ma non lo sia assumendo Λ come circuito dispari (risp. pari).

Così il singramma (cubico hamiltoniano) con lo schema:

$$1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'$$

è tracciabile su Σ_1 assumendo Λ come circuito pari, mentre non lo è se Λ si assume in un circuito dispari.

D'altra parte, come sempre si riscontra con trattazione elementare diretta, il singramma con lo schema:

$$1, 2, 3, 4, 5, 2', 1', 4', 3', 5'$$

non è tracciabile su Σ_1 assumendo Λ come circuito pari, mentre lo è assumendo Λ come circuito dispari.

Tenendo presenti notissime proprietà di topologia del piano proiettivo, si consideri dapprima il caso in cui un singramma (cubico, hamiltoniano) Γ sia tracciabile, anzi sia effettivamente tracciato, sul piano proiettivo Σ_1 , con Λ circuito pari.

Un singolo spigolo σ della famiglia $\mathcal{F}$ sarà tracciato nella regione interna Σ_1' (e σ si dirà interno), ovvero nella regione esterna Σ_1'' (e σ si dirà esterno); in questa seconda evenienza σ potrà risultare di prima specie ovvero di seconda specie a seconda che σ non determini ovvero risp. determini una reticolazione di Σ_1'' , ossia a seconda che σ con ciascuno dei due archi di Λ aventi gli stessi estremi di σ dia luogo ad un circuito pari ovvero ad un circuito dispari di Σ_1 .

Se dunque Γ è tracciato su Σ_1 con Λ circuito pari, la famiglia $\mathcal{F}$ degli spigoli di Γ che non appartengono a Λ risulta ripartita in tre sottofamiglie disgiunte $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_1''$, $\mathcal{F}_2''$, la prima costituita dagli spigoli interni, le altre due dagli spigoli esterni di prima e risp. di seconda specie. E subito si riscontra che $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_1''$ sono ciascuna prive di spigoli direttamente concatenati, mentre gli spigoli di $\mathcal{F}_2''$ sono a due a due direttamente concatenati; inoltre due spigoli uno di $\mathcal{F}_1''$ e l'altro di $\mathcal{F}_2''$ comunque scelti non risultano mai direttamente concatenati. Tutto ciò è invero conseguenza immediata del fatto che due qualunque spigoli di $\mathcal{F}$ sono privi di punti comuni, e non hanno, fuori dagli estremi, punti comuni con Λ .

D'altra parte la possibilità di ripartire gli spigoli di $\mathcal{F}$ in tre sottofamiglie $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_1''$, $\mathcal{F}_2''$ coi requisiti dianzi precisati assicura la tracciabilità del singramma Γ sul piano proiettivo Σ_1 con Λ circuito pari. Ed invero gli spigoli di $\mathcal{F}'$ potranno introdursi nella regione interna a Λ , gli spigoli di $\mathcal{F}_1''$ e di $\mathcal{F}_2''$ nella regione esterna e risp. come spigoli di prima e di seconda specie; e per elementari proprietà topologiche del piano proiettivo siffatta introduzione dei singoli spigoli di $\mathcal{F}$ può attuarsi senza che si presentino attraversamenti tra spigoli di Γ .

Sussiste pertanto il seguente teorema:

II - *Un singramma cubico Γ dotato di circuito Λ di Hamilton è tracciabile sul piano proiettivo, con Λ circuito pari, se e soltanto se la famiglia $\mathcal{F}$ degli spigoli di Γ non appartenenti a Λ si può ripartire in tre sottofamiglie*

glie $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1''$, $\mathcal{F}_2''$ disgiunte coi seguenti requisiti:

- a) $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1''$ siano ciascuna priva di spigoli direttamente concatenati;
- b) $\mathcal{F}_2''$ sia di spigoli a due a due direttamente concatenati;
- c) Nessun spigolo di $\mathcal{F}_1''$ sia direttamente concatenato con qualche spigolo di $\mathcal{F}_2''$.

Si venga ora al caso di un singramma Γ tracciabile sul piano proiettivo Σ_1 , ove già si sia tracciato il circuito Λ come circuito dispari.

Allora Λ (pensato come taglio) riduce Σ_1 ad una superficie (aperta) semplicemente connessa, concretabile dunque in una regione piana circolare Σ_1^* , avente per contorno una circonferenza Λ^* . Ed identificando punti di Λ^* diametralmente opposti si ottiene un utile modello di Σ_1 .

In tale modello punti di Λ si possono dapprima segnare come punti di una semicirconferenza Λ_1 , di Λ^* ; ma si dovranno poi segnare anche i punti diametralmente opposti ai precedenti in quanto immagini, su Σ_1 , degli stessi punti di Λ .

I punti A, A' estremi di uno spigolo $\alpha \in \mathcal{F}$ daranno perciò luogo in Σ_1^* ad una *quaterna* ordinata di punti $A, A', \bar{A}, \bar{A}'$ con A, A' segnati in Λ_1 , ed $\bar{A}, \bar{A}'$ diametralmente opposti ad A, A' rispettivamente. Un arco α^* di Σ_1^* avente gli estremi su Λ^* indifferentemente in una qualunque delle coppie di punti:

$$A, A'; A, \bar{A}'; \bar{A}, \bar{A}'; \bar{A}, A'$$

potrà interpretarsi come spigolo α tracciato su Σ_1 .

Se è dunque possibile introdurre su Σ_1 (senza attraversamenti) i singoli spigoli della famiglia $\mathcal{F}$, in Σ_1^* si viene a tracciare un singramma cubico Γ^* avente Λ^* come circuito di HAMILTON e come ulteriori spigoli le immagini degli spigoli di $\mathcal{F}$, costituenti la famiglia $\mathcal{F}^*$ degli spigoli di Γ^* non appartenenti a Λ^* . E la famiglia $\mathcal{F}^*$ risulta priva di spigoli direttamente concatenati.

Inoltre lo schema di Γ^* è deducibile da quello di Γ per iterazione e successiva contrazione. Precisamente, scritto lo schema di Γ , si effettua l'iterazione scrivendo successivamente e nello stesso ordine le lettere (prive od affette di apice, cfr. n. 5) che compaiono nello schema di Γ , munendole ad es. di soprassegno. Nello schema che si ottiene una singola lettera è ripetuta quattro volte e dà luogo ad una quaterna (ciclicamente ordinata) del tipo $A, A', \bar{A}, \bar{A}'$. Si effettua quindi una contrazione cancellando due simboli consecutivi in ciascuna quaterna (il che, per ciascuna quaterna, può attuarsi in quattro modi).

Reciprocamente se per iterazione e successiva contrazione dal singramma Γ assegnato si passa ad un singramma Γ^* nel quale la famiglia $\mathcal{F}^*$ è priva di spigoli direttamente concatenati, Γ^* può tracciarsi (senza attraversa-

menti) in una regione circolare Σ_1^* assumendone il contorno Λ^* come circuito di HAMILTON di Γ ; ed allora, identificando punti di Λ^* diametralmente opposti, Γ^* è immagine del singramma Γ tracciato sul piano proiettivo Σ_1 con circuito Λ in un circuito dispari.

Così ad es. il singramma Γ dianzi considerato con lo schema:

$$1, 2, 3, 4, 5, 2', 1', 4', 3', 5'$$

per iterazione e contrazione dà luogo al singramma Γ^* con lo schema:

$$1, 2, 2', 1', 4', 3', \bar{3}, \bar{4}, 5, \bar{5}'.$$

Nella famiglia $\mathcal{F}^*$ di Γ^* mancano spigoli direttamente concatenati (perchè due vertici di Γ^* su Λ^* non si separano), onde Γ è tracciabile sul piano proiettivo con circuito Λ dispari.

Ma in generale la trattazione svolta conduce al teorema:

III - *Un singramma cubico Γ dotato di circuito Λ di Hamilton è tracciabile sul piano proiettivo, con Λ circuito dispari, se e soltanto se dallo schema di Γ per iterazione e successiva contrazione si può dedurre lo schema di un singramma cubico Γ^* dotato di circuito Λ^* di Hamilton e tale che nella famiglia $\mathcal{F}^*$ degli spigoli di Γ^* non appartenenti a Λ^* manchino spigoli direttamente concatenati.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. SEIFERT-W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner (Leipzig-Berlin, 1934).
- [2] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akad. Verlagsgesellschaft. (Leipzig, 1936).
- [3] G. RINGEL, *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*, Veb deutscher Verlag der Wiss. (Berlin, 1959).
- [4] A. ANDREATTA, *Sistemi di circuiti tracciati su una superficie omeomorfa al toro e loro modelli algebrici*, Ann. Mat. Pura App., (4) 56 (1961), 99-130.
- [5] L. AUSLANDER-S. V. PARTER, *On imbedding graphs in the sphere*, J. Math. Mech., 10 (1961), 517-523.
- [6] G. A. DIRAC-S. SCHUSTER *A theorem of Kuratowski*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 57 (1954), 343-348.
- [7] I. N. KAGNO *The mapping of graphs on surfaces*, J. Math. Phys., Massachusetts Inst. Technol., 16 (1937), 46-75.
- [8] A. KOTZIG, *Aus der Theorie der endlichen regulären Graphen dritten und vierten Grades*, Časopis Pěst. Mat., 82 (1957), 76-92 (slovacco, con sunto in russo e in tedesco).

- [9] C. KURATOWSKI, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math., 15 (1930), 271-283.
- [10] S. MAC LANE, *A structural characterization of planar combinatorial graphs*, Duke Math. J., 3 (1937), 340-372.
- [11] P. MEDGYESSY, *Sur la structure des réseaux finis, cubiques et colories*, Mathesis, 59 (1950), 173-176.
- [12] W. T. TUTTE *On the imbedding of linear graphs in surfaces*, Proc. London Math. Soc., (2) 51 (1949), 474-483.
- [13] W. T. TUTTE *A theorem on planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956), 99-116.
- [14] E. VÁZSONYI, *Graphen auf Flächen*, Mat. Fiz. Lapok, 44 (1937), 133-163 (ungherese, con sunto in tedesco).
- [15] P. VERESS, *Über nicht-ebene Graphen*, Mat. Fiz. Lapok, 44 (1940), 34-47 (ungherese, con sunto in tedesco).
- [16] K. WAGNER, *Zwei Bemerkungen über Komplexe*, Math. Ann., 112 (1936) 316-321.
- [17] K. WAGNER, *Über eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski*, Deutsche Math., 2 (1937), 280-285.
- [18] H. WHITNEY, *Non-separable and planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc., 34 (1932), 339-362.